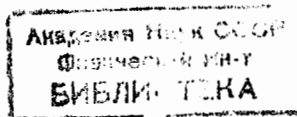


# ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 28

Вып. 5



МАЙ 1955 г.

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                                                                                                                            |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| П. И. Кузнецов, Р. Л. Стратонович и В. И. Тихонов. Воздействие электрических флуктуаций на ламповый генератор . . . . .                                                                                    | 509 |
| Г. А. Зайцев. Описание электромагнитного поля при помощи магниц . . . . .                                                                                                                                  | 524 |
| Г. А. Зайцев. Релятивистски инвариантные уравнения для электрона, заменяющие систему уравнений Дирака . . . . .                                                                                            | 530 |
| И. В. Эстули и Е. М. Моисеева. Измерение коэффициентов внутренней конверсии $\gamma$ -лучей $\text{Sr}^{87*}$ , $\text{In}^{115*}$ , $\text{In}^{115m*}$ и $\text{V}^{51*}$ на электронах атомов . . . . . | 541 |
| Р. Л. Стратонович. Энтропия в квантовой статистике . . . . .                                                                                                                                               | 547 |
| Б. И. Степанов. Поглощение и испускание света серым веществом . . . . .                                                                                                                                    | 559 |
| Ю. И. Неймарк и Г. В. Аронович. Об условиях самовозбуждения поющего пламени . . . . .                                                                                                                      | 567 |
| В. С. Барашенков. Некоторые замечания к возможным формулировкам теории протяженных частиц . . . . .                                                                                                        | 579 |
| С. Д. Гвоздовер, Н. М. Померанцев и А. Л. Полякова. Определение времени поперечной релаксации ядерных магнитных моментов . . . . .                                                                         | 584 |
| А. Я. Могель, Л. И. Крулиник и Б. Г. Сафронов. Захват электронов и ионизация протонами в водороде . . . . .                                                                                                | 589 |
| В. Г. Кириллов-Угрюмов, В. М. Федоров и Б. Н. Дерягин. Прямоугольная камера Вильсона с двухсторонним расширением . . . . .                                                                                 | 603 |

### Письма в редакцию

|                                                                                                                                                                                        |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| А. И. Кузьмин и Г. В. Скрипин. О влиянии лунно-приливных колебаний атмосферы на интенсивность жесткой компоненты космических лучей . . . . .                                           | 608 |
| Д. Д. Красильников. Вариации глобальной интенсивности жесткой компоненты космических лучей при прохождении фронтов воздушных масс . . . . .                                            | 610 |
| А. И. Кузьмин. О вкладе метеорологических изменений земной атмосферы в суточный эффект вариаций интенсивности космических лучей . . . . .                                              | 614 |
| И. М. Граменицкий, Е. А. Замчалова, М. И. Подгорецкий, М. И. Третьякова и М. Н. Щербакова. Ядерные расщепления, связанные с тяжелыми нестабильными частицами . . . . .                 | 616 |
| К. П. Рыжкова и Л. И. Сарычева. Измерения коэффициента поглощения ядерно-активных частиц высокой энергии . . . . .                                                                     | 618 |
| В. И. Гольданский и М. И. Подгорецкий. К вопросу о распаде медленных отрицательных $\pi$ -мезонов . . . . .                                                                            | 620 |
| П. С. Баранов и В. И. Гольданский. Сцинтилляционный высокопороговый детектор нейтронов . . . . .                                                                                       | 621 |
| В. И. Гольданский и В. А. Шкода-Ульянов. Максимальный выход фотонейтронов и новый метод определения интегральных сечений $\gamma$ - $n$ -реакций для фотонов высокой энергии . . . . . | 623 |
| Г. А. Аскарьян. Перспективы использования импульсных многосеточных электронно-оптических трубок для регистрации следов ионизирующих частиц в люминесцирующих средах . . . . .          | 626 |
| В. С. Мельченко. Определение абсолютных концентраций атомов многокомпонентного дугового газа . . . . .                                                                                 | 628 |
| Н. С. Гарибянов и М. М. Заринов. Сверхтонкая структура парамагнитного резонанса тутовой соли меди в промежуточных полях . . . . .                                                      | 629 |
| Н. С. Калицин. Релятивистская механика материальной точки переменной массы . . . . .                                                                                                   | 631 |
| И. М. Халатников. Представление функций Грина в квантовой электродинамике в форме континуальных интегралов . . . . .                                                                   | 633 |
| Г. А. Аскарьян. Газовая пузырьковая камера — возможный регистратор элементарного акта взаимодействия ионизирующего излучения с веществом . . . . .                                     | 636 |

Главный редактор **И. Н. АНДРЕЕВ**

Зам. главного редактора **М. М. СУЩИНСКИЙ**

### Редколлегия

Н. А. КАПЦОВ, В. П. ПЕШКОВ, Д. В. СКОБЕЛЬЦЫН,  
Н. Н. СОБОЛЕВ, М. М. СУЩИНСКИЙ, И. Е. ТАММ,  
Я. П. ТЕРЛЕЦКИЙ, Е. Л. ФЕЙНБЕРГ

Т-04434. Подписано к печати 20. V. 1955 г.

Печ. л. 10,96+1 вклейка. Уч.-изд. л. 12,6

2-я типография Издательства Академии наук С

## ВОЗДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ФЛУКТУАЦИЙ НА ЛАМПОВЫЙ ГЕНЕРАТОР

*П. И. Кузнецов, Р. Л. Стратонович и В. И. Тихонов*

Рассмотрено воздействие «медленных» нормальных флуктуаций на ламповый генератор. Получены выражения одномерных функций плотности вероятности для амплитуды и фазы. Указан приближенный метод вычисления функций корреляции для амплитуды и фазы.

В настоящее время в радиотехнике приобрел практический интерес вопрос о поведении лампового генератора с учетом воздействия на него электрических флуктуаций, имеющих место в самом генераторе («внутренние флуктуации») или же флуктуаций, представляющих собой внешние воздействия случайного характера («внешние флуктуации»). В последнем случае электрические флуктуации иногда являются результатом вредного действия на генератор нерегулярных колебаний питающих напряжений и других факторов, а иногда они применяются в качестве модулирующего напряжения генератора. Для внешних флуктуаций в ряде случаев характерным является то, что их время корреляции много больше соответствующих постоянных времени генератора, т. е. можно считать флуктуации медленно изменяющимися функциями относительно собственных колебаний лампового генератора, которые бы имели место в отсутствие флуктуаций.

В данной работе приводится общий метод решения задачи о поведении лампового генератора при воздействии на него медленно изменяющихся флуктуаций. Этот метод основан на применении обобщенного уравнения Эйнштейна — Фоккера [1] и является несколько отличным от применявшегося ранее [2-4] для рассмотрения внутренних флуктуаций, когда они считаются достаточно малыми по интенсивности и быстро изменяющимися во времени.

1. Как известно [5], ламповый генератор гармонических колебаний можно рассматривать как автоколебательную систему с одной степенью свободы, близкую к линейной консервативной системе. Поведение такой системы при наличии внешнего воздействия  $\xi(t)$  случайного характера в общем случае может быть описано уравнениями следующего вида:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, y_1, \xi), \\ \frac{dy_1}{dt} &= g_1(x_1, y_1, \xi),\end{aligned}\tag{1}$$

где  $x_1$  и  $y_1$  — координаты, характеризующие состояние системы, например, ток и напряжение.

Выделим в этих уравнениях постоянную и линейные части, причем постоянная часть и коэффициенты при  $x_1$  и  $y_1$  могут зависеть от  $\xi(t)$ . Таким образом получим

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_0 + a_1 x_1 + a_2 y_1 + f(x_1, y_1, \xi), \\ \dot{y}_1 &= b_0 + b_1 x_1 + b_2 y_1 + g(x_1, y_1, \xi),\end{aligned}\tag{1a}$$

где производная по времени обозначена точкой сверху, а члены  $f$  и  $g$ , нелинейно зависящие от  $x_1$  и  $y_1$ , могут иметь вид:

$$\begin{aligned} f &= a_3 x_1^2 + a_4 x_1 y_1 + a_5 y_1^2 + a_6 x_1^3 + \dots, \\ g &= b_3 x_1^2 + b_4 x_1 y_1 + b_5 y_1^2 + b_6 x_1^3 + \dots \end{aligned}$$

Переходя в уравнениях (1а) к новым переменным

$$x = x_1 - \alpha, \quad y = y_1 - \beta,$$

где

$$\alpha = \frac{b_0 a_2 - a_0 b_2}{a_1 b_2 - b_1 a_2}, \quad \beta = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{a_1 b_2 - b_1 a_2},$$

получим

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a_1 x + a_2 y + f(x + \alpha, y + \beta, \xi) - \dot{\alpha}, \\ \dot{y} &= b_1 x + b_2 y + g(x + \alpha, y + \beta, \xi) - \dot{\beta}. \end{aligned} \quad (2)$$

Рассмотрим сначала линейную систему, описываемую уравнениями:

$$\dot{x} = a_1 x + a_2 y, \quad \dot{y} = b_1 x + b_2 y.$$

Как известно, эта система имеет решение

$$\begin{aligned} x &= A_0 e^{-pt} [n \sin(\omega t + \varphi_0) + m \cos(\omega t + \varphi_0)], \\ y &= A_0 e^{-pt} \sin(\omega t + \varphi_0), \end{aligned}$$

где произвольные постоянные  $A_0$  и  $\varphi_0$  определяются из начальных условий, а

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{-a_2 b_1 - \left(\frac{a_1 - b_2}{2}\right)^2}, \quad p = -\frac{a_1 + b_2}{2}, \\ n &= \frac{a_1 - b_2}{2b_1}, \quad m = \frac{\omega}{b_1}. \end{aligned} \quad (3)$$

Переходя теперь к исходным уравнениям (2), заметим, что если бы в них отсутствовала случайная функция  $\xi(t)$ , то при известных условиях имел бы место обычный автоколебательный режим работы генератора. При этом учет нелинейных членов дает обычно небольшую поправку на частоту колебаний по сравнению с  $\omega$  и позволяет определить их установившуюся амплитуду. Наличие случайной функции  $\xi(t)$  при стационарном режиме генератора будет вызывать случайные колебания амплитуды и фазы (частоты) около некоторых средних значений.

Перейдем в уравнениях (2) к полярным координатам

$$y = A \sin \vartheta, \quad x = A (n \sin \vartheta + m \cos \vartheta).$$

В результате вычислений с учетом формул (3) вместо системы уравнений (2) получим

$$\begin{aligned} \dot{A} &= F(A, \vartheta, \xi) - \dot{\gamma} \cos \vartheta - \dot{\beta} \sin \vartheta, \\ \dot{\vartheta} &= -\omega + G(A, \vartheta, \xi) - (1/A) (\dot{\beta} \cos \vartheta + \dot{\gamma} \sin \vartheta), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} F(A, \vartheta, \xi) &= -nA + \frac{f - ng}{m} \cos \vartheta + g \sin \vartheta, \\ G(A, \vartheta, \xi) &= \frac{1}{A} \left( g \cos \vartheta + \frac{f - ng}{m} \sin \vartheta \right), \\ \gamma &= (\alpha - n\beta) / m. \end{aligned}$$

Согласно методу Боголюбова (частным случаем которого является известный метод ван-дер-Поля) [5,6] к этим уравнениям можно применить усреднение по  $\vartheta$ . Законность этой операции при наличии случайного воздействия, даже если оно не является малым, оправдывается предположением, что случайная функция  $\xi(t)$  имеет время корреляции

$$\tau_{\text{корр}} \gg 2\pi / \omega = T, \quad (5)$$

где  $T$  — период колебаний генератора, который бы имел место в отсутствие функции  $\xi(t)$ . При выполнении этого условия случайная функция  $\xi(t)$  за время одного «периода» колебаний, соответствующего однократному прохождению изображающей точкой своего «цикла» (т. е. изменению  $\vartheta$  на  $2\pi$ ), не успеет заметно измениться, так что ее можно приближенно считать постоянной. Таким образом, в результате усреднения получим

$$\dot{A} = \Phi(A, \xi) + M, \quad \dot{\vartheta} = -\omega + \Psi(A, \xi) + N, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(A, \xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(A, \vartheta, \xi) d\vartheta, \\ \Psi(A, \xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(A, \vartheta, \xi) d\vartheta, \\ M &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\dot{\gamma} \cos \vartheta + \dot{\beta} \sin \vartheta) d\vartheta, \\ N &= -\frac{1}{2\pi A} \int_0^{2\pi} (\dot{\beta} \cos \vartheta + \dot{\gamma} \sin \vartheta) d\vartheta. \end{aligned} \quad (7)$$

Поскольку  $\beta$  и  $\gamma$  являются медленно изменяющимися функциями времени, то производные от них, входящие в выражения для  $M$  и  $N$ , являются малыми и также медленно изменяющимися величинами. Поэтому членами  $M$  и  $N$  в уравнениях (6) можно пренебречь (об уточнении см. ниже). При этом будем иметь

$$\dot{A} = \Phi(A, \xi), \quad \dot{\vartheta} = -\omega + \Psi(A, \xi). \quad (6a)$$

2. По формулам (7) для каждого конкретного случая вычисляются функции  $\Phi$  и  $\Psi$ , входящие в систему уравнений (6a), первое из которых определяет флуктуации амплитуды, а второе — флуктуации фазы. Первое из уравнений не зависит от  $\vartheta$ , поэтому его можно решать самостоятельно. Для его решения можно применить обобщенное уравнение Эйнштейна — Фоккера, которое при условии

$$\tau_{\text{корр}} \ll \tau_1, \quad (8)$$

где  $\tau_1$  — время релаксации амплитуды, определяемое приближенной формулой

$$\tau_1 \approx \left| \left( \frac{\partial \Phi}{\partial A} \right)^{-1} \right|, \quad (9)$$

имеет вид:

$$\frac{\partial w(A, t)}{\partial t} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \frac{\partial}{\partial A^s} [K_s(A) w(A, t)]. \quad (10)$$

Здесь  $w(A, t)$  — одномерная плотность вероятности;  $K_s(A)$  — структурное число, связанное для стационарных процессов с функцией корреляции  $s$ -го порядка соотношением:

$$K_s(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} k_{(s)} \Phi(\tau_1, \dots, \tau_{s-1}) d\tau_1 \dots d\tau_{s-1}, \quad (11)$$

$$K_1 = k_{\Phi}.$$

Зная вид функции  $\Phi(A, \xi)$  и предполагая известными корреляционные функции  $k_{(s)} \xi$  для  $\xi(t)$ , можно найти структурные числа, и задача таким образом сведется к решению уравнения (10). Если в этом уравнении можно пренебречь членами при  $s = 3, 4, \dots$ , то получим обычное уравнение Эйнштейна — Фоккера:

$$\frac{\partial w(A, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial A} [K_1(A) w(A, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial A^2} [K_2(A) w(A, t)]. \quad (12)$$

При этом

$$K_1(A) = \overline{\Phi(A, \xi)}, \quad (11a)$$

$$K_2(A) = \int_{-\infty}^{\infty} \{\overline{\Phi(A, \xi) \Phi(A, \xi_{\tau})} - [\overline{\Phi(A, \xi)}]^2\} d\tau.$$

Здесь при усреднении, обозначенном чертой сверху,  $A$  рассматривается не как случайная величина, а как параметр.

Из уравнения (12) нетрудно получить выражение для одномерной стационарной функции плотности вероятности непосредственно в квадратурах. В самом деле, стационарная функция плотности вероятности  $w$  не должна зависеть от времени, т. е. при  $t \rightarrow \infty$

$$\partial w / \partial t = 0.$$

При этом условии уравнение (12) принимает вид:

$$K_1(A) w(A) - \frac{1}{2} (d/dA) [K_2(A) w(A)] = \text{const}. \quad (12a)$$

Выражение

$$j(A) = K_1(A) w(A) - \frac{1}{2} (d/dA) [K_2(A) w(A)]$$

представляет собой «поток вероятности» или, при статистическом толковании вероятности, интенсивность потока изображающих точек. В задачах рассматриваемого типа, когда изображающая точка не уходит из поля зрения (т. е. не может входить с одной стороны и уходить с другой), следует полагать поток вероятности (12a) равным нулю. Соответственно этому решение уравнения (12a) можно записать

$$w(A) = \frac{C_0}{K_2(A)} \exp \left[ 2 \int \frac{K_1(A)}{K_2(A)} dA \right], \quad (13)$$

причем постоянная интегрирования  $C_0$  определяется из условия нормировки:

$$\int_0^{\infty} w(A) dA = 1. \quad (14)$$

3. Для решения многих задач бывает недостаточно знать одномерное распределение случайной функции, а требуется уметь опре-

делять функцию корреляции. Для вычисления последней укажем метод, основывающийся на следующей формуле:

$$\frac{d}{d\tau} \overline{F(x_0, x_\tau)} = K_1(x_\tau) \frac{\partial}{\partial x_\tau} F(x_0, x_\tau) + \frac{1}{2} K_2(x_\tau) \frac{\partial^2}{\partial x_\tau^2} F(x_0, x_\tau), \quad (15)$$

где  $F$  — произвольная функция,  $x_0 = A(t)$ ,  $x_\tau = A(t + \tau)$ . Выведем эту формулу. Пусть  $w_0(x_0)$  — функция распределения плотности вероятности случайной величины  $x_0$ , и пусть  $w_1(x_0, x_\tau, \tau)$  определяет вероятность  $w_1(x_0, x_\tau, \tau) dx_\tau$  перехода точки, находящейся первоначально в  $x_0$ , в интервал  $[x_\tau, x_\tau + dx_\tau]$  за время  $\tau$ . Функция плотности распределения  $w_1(x_0, x_\tau, \tau)$  удовлетворяет тому же уравнению (12):

$$\frac{\partial w_1}{\partial \tau} = - \frac{\partial}{\partial x_\tau} [K_1(x_\tau) w_1(x_0, x_\tau, \tau)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_\tau^2} [K_2(x_\tau) w_1(x_0, x_\tau, \tau)].$$

Если подставить это выражение в формулу

$$\frac{d}{d\tau} \overline{F(x_0, x_\tau)} = \int \int_{-\infty}^{\infty} F(x_0, x_\tau) w_0(x_0) \frac{\partial w_1(x_0, x_\tau, \tau)}{\partial \tau} dx_0 dx_\tau$$

и проинтегрировать результат по частям, то с учетом того, что, в силу условия нормировки, разность потоков вероятности  $j(\infty) - j(-\infty)$  равна нулю, и сама плотность вероятности равна нулю при  $x_\tau \rightarrow \pm\infty$ , получим формулу (15). В нашем частном случае, когда возможные значения  $A$  являются положительными и, следовательно, интегрирование выполняется в пределах от 0 до  $\infty$ , формула (15) остается справедливой ввиду того, что

$$w_1(x_0, x_\tau, \tau) = 0 \quad \text{при } x_\tau \rightarrow \infty, \\ K_2(0) = 0.$$

Поскольку нам известно одномерное распределение плотности вероятности  $w(x)$ , даваемое формулой (13), то мы можем вычислить

$$\overline{F(x_0, x_\tau)}|_{\tau=0} = \overline{F(x_0, x_0)}. \quad (16)$$

Придавая затем в формуле (15) функции  $F$  значения

$$F_1 = K_1(x_\tau) \frac{\partial}{\partial x_\tau} F(x_0, x_\tau), \quad F_2 = K_2(x_\tau) \frac{\partial^2}{\partial x_\tau^2} F(x_0, x_\tau), \quad (17)$$

представляется возможным получить формулы, определяющие изменение во времени средних значений  $\overline{F_1}$  и  $\overline{F_2}$ , причем их начальные значения, соответствующие  $\tau = 0$ , также являются известными.

Продолжая этот процесс, мы получим цепочку линейных уравнений (вообще говоря, бесконечную), которую можно решать тем или иным приближенным способом. Пример применения изложенного метода будет рассмотрен ниже.

4. Для иллюстрации методики вычислений и выяснения конкретных условий применимости приведенного метода Эйнштейна — Фоккера рассмотрим следующий типичный пример. Пусть стационарные гауссовские флуктуации  $\xi(t)$  действуют в цепи сетки лампового генератора с колебательным контуром, включенным в цепь анода (рис. 1). Для такой схемы при обычных предположениях (отсутствие сеточ-

ного тока, пренебрежение реакцией анодной нагрузки и т. п.) и аппроксимации анодно-сеточной характеристики лампы полиномом третьей степени:

$$i_a = \varphi(u_c) = i_0 + \alpha u_c + \beta u_c^2 - \gamma u_c^3 \quad (\alpha > 0, \gamma > 0),$$

уравнения (1) принимают вид:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{r}{L} x_1 + \omega_0 y_1, \\ \dot{y}_1 &= -\omega_0 x_1 + \frac{1}{C} \varphi \left[ \frac{M}{L} (y_1 - \delta x_1) + \xi(t) \right]. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь

$$x_1 = i\rho, \quad y_1 = u, \quad \omega_0 = 1/\sqrt{LC}, \quad \delta = r/\rho, \quad \rho = \sqrt{L/C}, \quad (19)$$

$i$  и  $u$  — ток в контуре и напряжение на нем; остальные величины ясны из рис. 1.

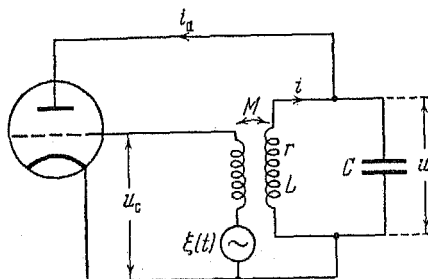


Рис. 1. Принципиальная схема лампового генератора]

Выделяя в уравнениях (18) в явном виде члены, не зависящие от  $x_1$  и  $y_1$  и зависящие от них линейно, можем записать

$$\dot{x}_1 = -(r/L) x_1 + \omega_0 y_1, \quad (18a)$$

$$\dot{y}_1 = (1/C) \varphi(\xi) - \omega_0 (1 + \omega_0 \alpha M \delta) x_1 + \omega_0^2 \alpha M y_1 + \Theta(x_1, y_1, \xi),$$

где

$$\begin{aligned} \Theta(x_1, y_1, \xi) &= (\beta/C) [k^2 (y_1 - \delta x_1)^2 + 2 k \xi (y_1 - \delta x_1)] - \\ &- (\gamma/C) [k^3 (y_1 - \delta x_1)^3 + 3 k^2 \xi (y_1 - \delta x_1)^2 + 3 k \xi^2 (y_1 - \delta x_1)], \\ k &= M/L. \end{aligned}$$

Переходя в этих уравнениях к новым переменным

$$x = x_1 - \rho \varphi(\xi), \quad y = y_1 - r \varphi(\xi), \quad (20)$$

получим

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(r/L) x + \omega_0 y, \\ \dot{y} &= -\omega_0 (1 + \omega_0 \alpha M \delta) x + \omega_0^2 \alpha M y + \Theta(x, y, \xi). \end{aligned} \quad (18б)$$

Подставив значения отдельных величин в формулы (3) и воспользовавшись при этом условием самовозбуждения генератора, которое при  $\xi(t) \equiv 0$  приближенно дается выражением

$$M > rC/\alpha, \quad (21)$$

найдем, что

$$n \approx \delta \approx 0, \quad m \approx 1 / (1 + \delta^2) \approx 1,$$

так как обычно  $\delta \ll 1$ . Поэтому переход к полярным координатам можно осуществить по формулам:

$$x = A \cos \vartheta, \quad y = A \sin \vartheta. \quad (22)$$

Прежде чем осуществить этот переход, заметим, что вблизи порога самовозбуждения

$$\omega_0 \alpha M \delta \approx \delta^2 \ll 1.$$

Поэтому во втором из уравнений (186) можно пренебречь вторым слагаемым при  $x$  [как это обычно делается при рассмотрении работы лампового генератора в отсутствие случайного воздействия  $\xi(t)$ ].

Переходя теперь к полярным координатам (22) и вводя усредненные по  $\vartheta$  значения, получим, что в рассматриваемом случае уравнения (6а) принимают следующий конкретный вид:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= \frac{1}{2} \omega_0^2 [(\alpha M - rC + 2\beta M\xi - 3\gamma M\xi^2) A - \frac{3}{4} \gamma M (M/L)^2 A^3], \\ \dot{\vartheta} &= -\omega_0 + \frac{\delta \omega_0^2 M}{2} \left[ \frac{3\gamma}{4} \left( \frac{M}{L} \right)^2 A^2 + (3\gamma\xi^2 - 2\beta\xi) \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Из первого уравнения при  $\xi(t) \equiv 0$  получаем условие самовозбуждения генератора (21), а также выражение для радиуса устойчивого предельного цикла:

$$A_0 = 2 \frac{L}{M} \sqrt{\frac{\alpha M - rC}{3\gamma M}}. \quad (24)$$

Он достигает максимального значения

$$A_{0 \text{ макс}} \approx 0,14 L / rC \sqrt{\gamma}$$

при

$$M = 1,5 rC / \alpha.$$

5. Как указывалось ранее, основное уравнение (12) справедливо при выполнении условия

$$T_0 \ll \tau_{\text{корр}} \ll \tau_1. \quad (25)$$

Для оценки порядка величины  $\tau_{\text{корр}}$  примем в схеме рис. 1 следующие числовые значения отдельных параметров:

$f_0 = 2\pi / \omega_0 = 10^7$  гц,  $r = 10 \Omega$ ,  $\rho = 6 \cdot 10^3 \Omega$ ,  $M = 1,1 rC / \alpha$ ,  $A_0 = 10$  V. Из (23) находим

$$\partial \Phi / \partial A = \frac{1}{2} \omega_0^2 [(M\alpha - rC + 2\beta M\xi - 3\gamma M\xi^2) - \frac{3}{4} \gamma M (M/L)^2 A^2].$$

Вычислим эту величину при  $A = A_0$ . Используя формулу (24), найдем

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial A} \right|_{A=A_0} = -\frac{1}{2} \omega_0^2 \left[ 0,2rC + \frac{0,33\alpha^2 \rho^3}{\omega_0^3 r A_0^2} \left( 1 - \frac{2\beta}{3\gamma\xi} \right) \xi^2 \right].$$

Неравенство (25) должно выполняться для всех значений  $\xi$ , имеющих заметную вероятность, и, в частности, оно должно выполняться в случае, когда  $\xi = 0$ . При этом

$$\tau_1 = \left| \left( \frac{\partial \Phi}{\partial A} \right)^{-1} \right| \approx \frac{2}{0,2 \omega_0^2 rC} = \frac{10\rho}{\omega_0 r} = 10^{-4} \text{ сек.}$$

Таким образом основное уравнение можно считать практически справедливым, если случайная функция  $\xi(t)$  имеет время корреляции

$$\tau_{\text{корр}} \approx (10^{-6} \div 10^{-5}) \text{ сек.} \quad (25a)$$

Эти условия часто выполняются практически. Для выражения их через спектральные величины предположим, что функция корреляции для «низкочастотных» флуктуаций  $\xi(t)$  имеет вид

$$k_2(\tau) = c_0 e^{-\alpha|\tau|}$$

и, соответственно, спектральная интенсивность флуктуаций определяется формулой

$$S(f) = c_0 \frac{\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}.$$

В этом случае время корреляции

$$\tau_{\text{корр}} = 2 \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} d\tau = \frac{2}{\alpha}.$$

Чтобы в рассмотренном выше конкретном примере выполнялось условие (25а),  $\alpha$  должно быть равно:

$$\alpha \approx 2(10^6 \div 10^5) \text{ сек}^{-1}.$$

Пусть

$$\tau_{\text{корр}} = 0,2 \cdot 10^{-5} \text{ сек.}$$

Если, исходя из практических соображений, можно не учитывать спектральной интенсивности флуктуаций при частотах, для которых

$$\frac{S(f)}{S(0)} = \frac{1}{1 + (2\pi f/\alpha)^2} \leq 5\%,$$

то в этом смысле допустимая ширина спектра флуктуаций, при которой применим приведенный в работе метод, будет равна

$$f_{\text{макс}} \approx 0,7 \text{ мггц.}$$

Отметим, что пределы изменения  $\tau_{\text{корр}}$ , при которых применим метод уравнения Эйнштейна — Фоккера, на сверхвысоких частотах будут значительно шире, вследствие обычно большой добротности  $\rho/r$  объемных резонаторов.

6. Вычислим одномерную стационарную функцию плотности вероятности  $w(A)$  для флуктуаций амплитуды. На основании формул (11а) из первого уравнения (23) можно найти структурные числа. Они находятся весьма просто, если  $\xi(t)$  представляет нормальные флуктуации с нулевым средним значением, т. е.

$$w_2(\xi, \xi_\tau) = \frac{1}{2\pi\sigma^2 \sqrt{1 - R^2(\tau)}} \exp \left[ -\frac{\xi^2 + \xi_\tau^2 - 2R(\tau) \xi \xi_\tau}{2\sigma^2 (1 - R^2(\tau))} \right], \quad (26)$$

где  $\sigma^2$  — дисперсия,  $R(\tau)$  — коэффициент корреляции. В самом деле, пусть, например,

$$\eta(\tau) = a + b\xi(t) + c\xi^2(t).$$

Тогда, в силу равенства нулю нечетных моментов от  $\xi(t)$ , по формуле (11а) получим

$$K_{(2)\eta} = K_{(2)b\xi + c\xi^2} = b^2 K_{(2)\xi} + c^2 K_{(2)\xi^2},$$

где

$$K_{(2)\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} k_{(2)\xi}(\tau) d\tau = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) d\tau, \quad K_{(2)\xi^2} = \int_{-\infty}^{\infty} k_{(2)\xi^2}(\tau) d\tau. \quad (27)$$

Но в случае стационарных процессов корреляционная функция  $k_{(2)\xi}$  для  $\xi^2(t)$  просто выражается через моментные или корреляционные функции для  $\xi(t)$ :

$$k_{(2)\xi}(\tau) = m_{(2)\xi}(\tau) - (m_{\xi})^2 = m_{(4)\xi}(t, t, t + \tau, t + \tau) - \sigma^4.$$

В свою очередь, согласно общим формулам, по которым моментные функции выражаются через корреляционные, имеем в случае  $m = 0$   $m_4(t_1, t_2, t_3, t_4) = k_2(t_1, t_2)k_2(t_3, t_4) + k_2(t_1, t_3)k_2(t_2, t_4) + k_2(t_1, t_4)k_2(t_2, t_3)$ , следовательно,

$$m_{(4)\xi}(t, t, t + \tau, t + \tau) = k_{(2)\xi}^2(0) + 2k_{(2)\xi}^2(\tau) = \sigma^4 [1 + 2R^2(\tau)].$$

Отсюда получаем

$$K_{(2)\xi} = 2\sigma^4 \int_{-\infty}^{\infty} R^2(\tau) d\tau. \quad (28)$$

Применив эти формулы, в результате выполнения всех вычислений найдем

$$K_1(A) = \mu A - \nu A^3, \quad K_2(A) = \lambda A^2, \quad (29)$$

где

$$\mu = \frac{1}{2}\omega_0^2(\alpha M - rC - 3\gamma M\sigma^2), \quad \nu = \frac{3}{8}\omega_0^2\gamma M(M/L)^2, \quad (30)$$

$$\lambda = (\omega_0^2 M \sigma)^2 (\beta^2 \tau_{\text{корр}} + \frac{9}{2} \gamma^2 \sigma^2 \tau_{h2}), \quad \tau_{\text{корр}} = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) d\tau, \quad \tau_{h2} = \int_{-\infty}^{\infty} R^2(\tau) d\tau.$$

Подставив значения структурных чисел в формулу (13), получим

$$w(A) = \frac{C_0}{\lambda} A^{2(\mu/\lambda - 1)} \exp\left(-\frac{\nu}{\lambda} A^2\right), \quad (31)$$

Из этой формулы видно, что при  $\mu/\lambda < 1$  плотность вероятности  $w(A)$  обращается в бесконечность при  $A = 0$ . Рассмотрим, в каком смысле следует понимать такой результат. Возможность получения его обусловлена тем, что  $K_2(0) = 0$ . Однако следует иметь в виду, что последнее равенство не является точным, вследствие приближенности метода, при помощи которого были получены выражения (29).

Чтобы выяснить точнее, чему равно  $K_2(0)$ , откажемся от пренебрежения в первом уравнении (6) членом  $M$ . Вследствие того, что изображающая точка в действительности движется на фазовой плоскости не по кругу (эллипсу), а по спирали с переменным радиусом

$$A(t) = A(t_0) + \dot{A}(t_0)(t - t_0) \approx A(t_0) \left[ 1 + \frac{\Phi(A, 0)}{A(t_0)}(t - t_0) \right],$$

усредненное выражение для  $M$  правильнее записать в виде:

$$M = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ 1 + \frac{\Phi(A, 0)}{A(t_0)}(t - t_0) \right] \left[ \frac{d\gamma}{d\vartheta} \cos \vartheta + \frac{d\beta}{d\vartheta} \sin \vartheta \right] \frac{d\vartheta}{dt} d\vartheta,$$

где функции времени преобразуются в функции от  $\vartheta$  путем подстановки

$$t - t_0 = \vartheta / \omega.$$

Подставляя сюда приближенное выражение для  $\vartheta$  из (6а), будем иметь

$$M = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ 1 + \frac{\Phi(A, 0)}{A(t_0)} (t - t_0) \right] \left[ \frac{d\gamma}{d\vartheta} \cos \vartheta + \frac{d\beta}{d\vartheta} \sin \vartheta \right] \times \\ \times [-\omega + \Psi(A, \xi)] d\vartheta. \quad (32)$$

Можно убедиться, что  $K_2(0)$  равно структурному числу этого выражения, в котором следует принять  $A=0$ . В общем случае оно не равно нулю.

Если положить

$$K_2(A) = \rho + \lambda A^2,$$

где  $\rho$  — малая величина, то получим функцию  $w(A)$ , конечную и интегрируемую при любых  $A$ . Более того, мы будем иметь

$$\left. \frac{dw}{dA} \right|_{A=0} = 0,$$

что соответствует условию сохранения изображающей точки. Формула (30) даже при  $\mu/\lambda < 1$  правильно передает ход кривой  $w(A)$

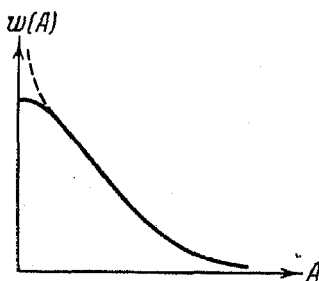


Рис. 2. Режим неразвитой генерации

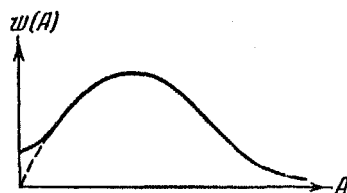


Рис. 3. Режим не полностью развитой генерации

при не слишком малых  $A$ , но для вычисления постоянной  $C_0$  следовало бы обратиться к более точному выражению (32).

С качественной точки зрения, режимы работы рассматриваемого генератора можно классифицировать следующим образом:

1. Когда  $\mu < \lambda$ , имеет место режим неразвитой генерации. Изображающая точка находится преимущественно вблизи положения равновесия (рис. 2).

2. Когда  $\lambda < \mu < \frac{3}{2}\lambda$  имеет место режим не полностью развитой генерации. Амплитуда колебаний рассеивается в большой полосе и может быть близка к нулю (рис. 3).

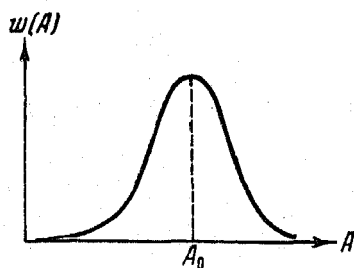


Рис. 4. Режим развитой генерации

3. При  $\mu > \frac{3}{2}\lambda$  имеем наиболее интересный случай — режим развитой генерации, когда изображающая точка находится преимущественно вблизи предельного цикла (рис. 4). На рис. 2 и 3 пунктир

вблизи  $A = 0$  показывает ход кривой согласно формуле (31), а сплошная линия — исправленное значение.

Определим теперь постоянную  $C_0$  в (31), а также моменты случайной величины  $A$ :

$$\begin{aligned}\overline{A^m} &= \frac{C_0}{\lambda} \int_0^\infty A^{2s+m} \exp\left(-\frac{\nu}{\lambda} A^2\right) dA = \\ &= \frac{C_0}{2\lambda} \left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^{(2s+m+1)/2} \int_0^\infty x^{(2s+m-1)/2} e^{-x} dx = \frac{C_0}{2\lambda} \left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^{(2s+m+1)/2} \Gamma\left(\frac{2s+m+1}{2}\right),\end{aligned}$$

где

$$s = (\mu/\lambda) - 1.$$

Полагая здесь в соответствии с формулой (14)  $\overline{A^0} = 1$ , получим

$$C_0 = \frac{2\lambda (\lambda/\nu)^{-s-1/2}}{\Gamma(s+1/2)}. \quad (33)$$

Следовательно,

$$\overline{A^m} = \left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^{m/2} \Gamma\left(s + \frac{m+1}{2}\right) / \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right). \quad (34)$$

Отсюда для четных моментов имеем

$$\overline{A^{2k}} = (\lambda/\nu)^k (s+1/2)(s+3/2) \cdots (s+k-1/2). \quad (34a)$$

7. Перейдем к вычислению функции корреляции для  $A(t)$ . Полагая в формуле (15)

$$F(x_0, x_\tau) = x_0 x_\tau,$$

будем иметь

$$(d/d\tau) u_1 = \mu u_1 - \nu u_3, \quad (35)$$

где

$$u_1 = \overline{x_0 x_\tau}, \quad u_3 = \overline{x_0 x_\tau^3}.$$

В то же время для  $u_3$  мы имеем

$$(d/d\tau) u_3 = 3\mu u_3 - 3\nu u_5 + 3\lambda u_3. \quad (36)$$

Вообще

$$\frac{d}{d\tau} u_n = n \left[ \mu u_n - \nu u_{n+2} + \frac{n-1}{2} \lambda u_n \right], \quad (37)$$

где

$$u_n = \overline{A(t) A^n(t+\tau)}, \quad \tau > 0, \quad n = 1, 3, 5, \dots,$$

причем

$$u_n(0) = \overline{A^{n+1}} = \left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^{(n+1)/2} \Gamma\left(s + \frac{n}{2} + 1\right) / \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right). \quad (38)$$

Приближенное решение этой цепочки уравнений можно получить следующим способом. Будем, пользуясь (35), отыскивать коэффициенты разложения  $u_1(\tau)$  в ряд Тэйлора:

$$u_1(\tau) = u_1(0) + u_1'(0)\tau + \frac{u_1''(0)}{2!}\tau^2 + \dots \quad (39)$$

Положив

$$u_n^{(\alpha)}(0) = u_n(0) k_{n,\alpha}, \quad (40)$$

путем дифференцирования (37) найдем рекуррентные формулы для определения  $k_{n,\alpha}$ :

$$k_{n,\alpha+1} = n \left[ \left( \mu + \frac{n}{2} \lambda \right) (k_{n,\alpha} - k_{n+2,\alpha}) - \frac{1}{2} \lambda k_{n,\alpha} \right], \quad (41)$$

причем

$$k_{n,0} = 1.$$

Отсюда

$$k_{n,1} = - (n/2) \lambda,$$

и, так как

$$k_{n,1} - k_{n+2,1} = \lambda,$$

то

$$k_{n,2} = n \left[ \left( \mu + \frac{n}{2} \lambda \right) \lambda + \frac{1}{4} n \lambda^2 \right] = n \mu \lambda + \frac{3}{4} n^2 \lambda^2.$$

Затем, поскольку

$$k_{n,2} - k_{n+2,2} = -2\mu\lambda - 3\lambda^2(n+1),$$

имеем

$$k_{n,3} = -2n\mu^2\lambda - n\lambda^2 \left( \frac{9}{2}n + 3 \right) - \frac{n^2}{2} \lambda^3 \left( \frac{15}{4}n + 3 \right)$$

и т. д.

Следовательно,

$$\begin{aligned} k_{1,1} &= -\lambda/2, \\ k_{1,2} &= \mu\lambda + 3/4\lambda^2, \\ k_{1,3} &= -2\mu^2\lambda - 15/2\mu\lambda^2 - 27/8\lambda^3, \\ &\dots \end{aligned} \quad (42)$$

Итак, взяв четыре первых члена разложения (39), получим

$$\begin{aligned} \overline{A(t)A(t+\tau)} &= \frac{1}{v} \left( \mu - \frac{\lambda}{2} \right) \left[ 1 - \frac{\lambda}{2} \tau + \left( \mu\lambda + \frac{3}{4} \lambda^2 \right) \frac{\tau^2}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \left( 2\mu^2\lambda + \frac{15}{2} \mu\lambda^2 + \frac{27}{8} \lambda^3 \right) \frac{\tau^3}{6} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Отсюда находим коэффициент корреляции

$$\begin{aligned} R_A(\tau) &= \frac{\overline{AA_\tau} - \bar{A}^2}{\bar{A}^2 - \bar{A}^2} = 1 - \frac{\lambda}{2} \frac{\tau}{1-B} + \left( \mu\lambda + \frac{3}{4} \lambda^2 \right) \frac{\tau^2}{2(1-B)} - \\ &\quad - \left( 2\mu^2\lambda + \frac{15}{2} \mu\lambda^2 + \frac{27}{8} \lambda^3 \right) \frac{\tau^3}{6(1-B)}, \end{aligned} \quad (43)$$

где

$$B = \Gamma\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 / \Gamma\left(\frac{\mu}{\lambda} - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu}{\lambda} + \frac{1}{2}\right). \quad (44)$$

Взяв достаточно большое число членов разложения (39), можно достичь любой требуемой точности.

8. Перейдем к рассмотрению второго уравнения системы (23), определяющего изменение фазы колебаний. В рассматриваемом нами приближении ( $\tau_{\text{корр}} \ll \tau_1$ ) можно считать случайные процессы  $\xi(t)$  и  $A(t)$  взаимно некоррелированными. Следовательно, рассчитав путем использования первого из уравнений (23) вероятностные характери-

стики процесса  $A(t)$ , мы принципиально можем определить статистические характеристики для фазы  $\vartheta(t)$ . Наиболее важной из них для практики является  $D$  — структурное число для  $\vartheta$ . Если рассматривать приращение  $\vartheta(t_0 + T) - \vartheta(t_0) = \vartheta_T - \vartheta_0$  за время  $T$ , много большее времени корреляции  $\tau_{\text{корр}}$  процесса  $\vartheta(t)$ , то плотность распределения вероятности для него приближенно будет равна

$$w(\vartheta_T - \vartheta_0) = C_0 \exp \left\{ - \frac{(\vartheta_T - \vartheta_0 - \omega T)^2}{2DT} \right\}, \quad (45)$$

где

$$\omega = \bar{\dot{\vartheta}} = -\omega_0 + \frac{\delta\omega_0^2 M}{2} \left[ \frac{3\gamma}{4} \left( \frac{M}{L} \right)^2 \overline{A^2} + 3\gamma\sigma^2 \right].$$

Отсюда видно, что  $D$  определяет (для достаточно больших  $T$ ) скорость роста дисперсии разности  $\vartheta_T - \vartheta_0$ .

Запишем уравнение (23) в виде:

$$\dot{\vartheta} = -\omega_0 + c_1 A^2 + c_2 \xi^2 - c_3 \xi = N. \quad (46)$$

Вследствие некоррелированности величин  $A$  и  $\xi$  для второго структурного числа будем иметь выражение:

$$K_{(2)N} = c_1^2 K_{(2)A^2} + K_{(2)c_2 \xi^2 - c_3 \xi},$$

причем, ввиду равенства нулю нечетных моментов от  $\xi$ ,

$$K_{(2)c_2 \xi^2 - c_3 \xi} = c_2^2 K_{(2)\xi^2} + c_3^2 K_{(2)\xi}.$$

Но

$$K_{(2)\xi} = \sigma^2 \tau_{\text{корр}} = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) d\tau, \quad K_{(2)\xi^2} = 2\sigma^4 \tau_{h2},$$

следовательно, для вычисления

$$D = c_1^2 K_{(2)A^2} + 2c_2^2 \sigma^4 \tau_{h2} + c_3^2 \sigma^2 \tau_{\text{корр}} \quad (47)$$

остается найти  $K_{(2)A^2}$ . Для этого используем метод, примененный нами выше. Положив

$$v_n(\tau) = \overline{A^2(t) A^{2n}(t + \tau)},$$

будем иметь цепочку уравнений, аналогичную (37):

$$\frac{d}{d\tau} v_n(\tau) = n \left[ \mu v_n - \nu v_{n+2} + \frac{n-1}{2} \lambda v_n \right], \quad (48)$$

однако с другими начальными условиями:

$$v_n(0) = \overline{A^{n+2}}. \quad (49)$$

Полагая, как и ранее,

$$v_n^{(\alpha)}(\tau) = v_n(0) l_{n,\alpha}, \quad (50)$$

получим

$$l_{n,\alpha+1} = n \left[ \left( \mu + \frac{n-1}{2} \lambda \right) l_{n,\alpha} - \nu l_{n+2,\alpha} \frac{\overline{A^{n+4}}}{\overline{A^{n+2}}} \right],$$

где

$$\frac{\overline{A^{n+4}}}{\overline{A^{n+2}}} = \frac{\lambda}{\nu} \frac{\Gamma\left(s + \frac{n+1}{2} + 2\right)}{\Gamma\left(s + \frac{n+1}{2} + 1\right)} = \frac{\lambda}{\nu} \left( s + 1 + \frac{n+1}{2} \right) = \frac{1}{\nu} \left( \mu + \frac{n+1}{2} \lambda \right).$$

Следовательно,

$$l_{n, \alpha+1} = n \left[ \left( \mu + \frac{n+1}{2} \lambda \right) (l_{n, \alpha} - l_{n+2, \alpha}) - \lambda l_{n, \alpha} \right], \quad (51)$$

причем  $l_{n, 0} = 1$ .

Воспользовавшись этой формулой, найдем

$$\begin{aligned} l_{2, 1} &= -2\lambda, \\ l_{2, 2} &= 4\mu\lambda + 5\lambda^2, \\ l_{2, 3} &= -2(8\mu^2\lambda + 42\mu\lambda^2 + 44\lambda^3), \\ &\dots \end{aligned} \quad (52)$$

Поэтому

$$\overline{A^2 A_\tau^2} = \overline{A^4} \left[ 1 - 2\lambda\tau + (4\mu + 5\lambda)\lambda \frac{\tau^2}{2} - (8\mu^2 + 42\mu\lambda + 44\lambda^2)\lambda \frac{\tau^3}{3} + \dots \right]. \quad (53)$$

Соответственно, для коэффициента корреляции получим

$$\begin{aligned} R_{A^2}(\tau) &= \frac{\overline{A^2 A_\tau^2} - (\overline{A^2})^2}{\overline{A^4} - (\overline{A^2})^2} = 1 - \frac{2\lambda}{1-c} \tau + \frac{4\mu\lambda + 5\lambda^2}{1-c} \frac{\tau^2}{2} - \\ &\quad - \frac{8\mu^2 + 42\mu\lambda + 44\lambda^2}{1-c} \lambda \frac{\tau^3}{3} + \dots, \end{aligned} \quad (54)$$

где

$$c = \frac{(\overline{A^2})^2}{\overline{A^4}} = \frac{\Gamma\left(s + \frac{3}{2}\right)^2}{\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(s + \frac{5}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{\lambda} + \frac{1}{2}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{\mu}{\lambda} - \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu}{\lambda} + \frac{3}{2}\right)}. \quad (55)$$

Вычислим приближенно

$$\begin{aligned} K_{(2)A^2} &= \overline{A^4} \int_{-\infty}^{\infty} R_{A^2}(\tau) d\tau = \left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^2 \left(s + \frac{1}{2}\right) \left(s + \frac{3}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} R_{A^2}(\tau) d\tau = \\ &= 2 \frac{\mu^2 - (\lambda^2/4)}{\nu^2} \int_0^{\infty} R_{A^2}(|\tau|) d\tau. \end{aligned} \quad (56)$$

Ограничившись тремя членами разложения (54), положим

$$R_{A^2}(\tau) = e^{-\alpha\tau} \cos \beta\tau. \quad (57)$$

Для определения  $\alpha$  и  $\beta$  имеем

$$\alpha = \frac{2\lambda}{1-c}, \quad \alpha^2 - \beta^2 = \frac{4\mu\lambda + 5\lambda^2}{1-c}. \quad (58)$$

Откуда

$$\beta = \left[ \left( \frac{2\lambda}{1-c} \right)^2 - \frac{4\mu\lambda + 5\lambda^2}{1-c} \right]^{1/2}.$$

Но так как

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} \cos \beta\tau d\tau = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2},$$

то, учитывая (56), (57) и (58), получим

$$K_{(2)A^2} = \frac{4\mu - \lambda^2}{\nu^2} \frac{1 - c}{(3 + 5c)\lambda - 4\mu(1 - c)}. \quad (59)$$

Подставив это значение в (47), находим  $D$ .

Аппроксимация функции  $R_{A^2}(\tau)$  выражением (57) возможна лишь при условии

$$4\mu + 5\lambda \leq \frac{4\lambda}{1 - c}, \quad (59a)$$

в противном случае следует использовать другое выражение, например,

$$R_{A^2}(\tau) = e^{-\alpha\tau} \left(1 + \frac{\beta\tau^2}{2}\right), \quad (60)$$

где

$$\alpha = \frac{2\lambda}{1 - c}, \quad \alpha^2 + \beta^2 = \frac{4\mu\lambda + 5\lambda^2}{1 - c}, \quad (61)$$

Поскольку

$$\int_0^\infty R_{A^2}(\tau) d\tau = \frac{1}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha^3},$$

то найдем, что

$$K_{(2)A^2} = \frac{4\mu^2 - \lambda^2}{(4\lambda\nu)^2} (1 - c)^2 (4\mu + 5\lambda). \quad (62)$$

Выражением (60) можно также пользоваться и при выполнении условия (59a).

Желая определить  $K_{(2)A^2}$  более точно, можно, например, искать  $R_{A^2}(\tau)$  в виде:

$$R_{A^2}(\tau) = e^{-\alpha\tau} \left(1 + \frac{\beta_2\tau^2}{2} + \frac{\beta_3\tau^3}{6} + \dots\right). \quad (63)$$

Тогда

$$\int_0^\infty R_{A^2}(\tau) d\tau = \frac{1}{\alpha} \left(1 + \frac{\beta_2}{\alpha^2} + \frac{\beta_3}{\alpha^3} + \dots\right), \quad (64)$$

где  $\beta_2, \beta_3, \dots$  находятся из условия для производных в точке  $\tau = 0$ .

Авторы выражают благодарность Ю. Б. Кобзареву за проявленный интерес к работе.

Московский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
15 июня 1954 г.

#### Литература

- [1] П. И. Кузнецов, Р. Л. Стратонович, В. И. Тихонов. ЖЭТФ, 26, 189, 1954.— [2] Л. Понтрягин, А. Андронов и А. Витт. ЖЭТФ, 3, 165, 1933.— [3] И. Л. Берштейн. Журн. техн. физ., 11, 305, 1941.— [4] И. Л. Берштейн. Изв. АН СССР, сер. физич., 14, 1, 1950.— [5] А. А. Андронов. С. Э. Хайкин. Теория колебаний, Гостехиздат, 1937.— [6] Н. Н. Боголюбов. О некоторых статистических методах в математической физике, 1945

ОПИСАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ПРИ ПОМОЩИ  
МАТРИЦ

Г. А. Зайцев

Рассмотрены свойства матриц-тензоров. Уравнения для величин, характеризующих электромагнитное поле, записываются в матричной форме.

В трехмерном пространстве векторы удобно обозначать одной буквой, например,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{d}$  и т. д. В четырехмерном же пространстве специальной теории относительности тензоры обычно характеризуют лишь заданием их компонент, которые в разных системах координат будут иметь различные значения. В физике компоненты тензоров используются как величины, служащие для описания материальных объектов и для установления связей между ними. Физические свойства материи не могут зависеть от того, какие системы координат используются для ее описания, поэтому целесообразно называть совокупность всех компонент тензора, вычисляемых в любых системах координат, просто тензором, характеризующим данную физическую величину, независимо от того, каков специальный выбор системы координат.

Представление тензоров четырехмерного пространства в виде матриц (см., например, [1])<sup>1</sup> соответствует такому взгляду, так как матрица-тензор остается той же самой, независимо от того, как выбрана система координат и, следовательно, каковы отдельные компоненты тензора. Матрицы-тензоры очень удобно применять в тех задачах, где приходится иметь дело с релятивистской инвариантностью. При их помощи можно просто определять по одним четырехмерным величинам другие, находить их инварианты, проверять характер величин по отношению к преобразованиям группы Лоренца и т. д. Аппарат матриц-тензоров специально приспособлен также для исследования поведения элементарных частиц с учетом релятивистской инвариантности.

Мы рассмотрим применение матриц-тензоров для описания классического электромагнитного поля. Полученные при этом свойства матриц-тензоров будут постоянно использоваться также в следующих статьях (см., например, [2]).

1. При изучении свойств четырехмерных матриц-тензоров удобно исходить из свойств матриц, соответствующих векторам трехмерного пространства.

Мы будем пользоваться такими обозначениями: Если  $\mathbf{d} = \sum_k d^k \mathbf{e}_k$ ,

то соответствующую матрицу-трехмерный вектор мы будем снизу для отличия подчеркивать, так что  $\underline{\mathbf{d}} = d_k R^k = d^k R_k$ . Вообще, если буква подчеркнута, то она будет обозначать матрицу (не обязательно вектор), являющуюся линейной комбинацией  $R^1, R^2, R^3$ . В частности,

<sup>1</sup> В дальнейшем изложении мы будем пользоваться обозначениями и результатами первого раздела работы [1].

если  $\underline{E}$  и  $\underline{H}$  — напряженности электрического и магнитного поля, то

$$\underline{E} = \sum_{h=1}^3 E_h R^h = E_h R^h, \quad \underline{H} = H_h R^h = \underline{H} \quad (1)$$

( $H_h$  — компоненты трехмерного псевдовектора) и т. д.

Для матриц-трехмерных векторов имеет место следующее соотношение:

$$\underline{cd} = (1/2)(\underline{cd} + \underline{dc}) + (1/2)(\underline{cd} - \underline{dc}) = (\underline{cd}) + R[\underline{cd}], \quad R = R^1 R^2 R^3. \quad (2)$$

В частности, взяв за  $\underline{c}$  матрицу-оператор  $\underline{\nabla} = R^h (\partial/\partial x^h)$ , соответствующую оператору  $\nabla$ , получим

$$\underline{\nabla} \underline{d} = \text{div } \underline{d} + R \text{rot } \underline{d} = \frac{\partial d^h}{\partial x^h} + R R_h \epsilon^{hjs} \frac{\partial d_s}{\partial x^j}. \quad (3)$$

Пользуясь (2), легко найдем далее, что

$$\begin{aligned} \underline{cbd} &= (\underline{cb}) \underline{d} + R([\underline{cb}] \underline{d}) + [\underline{d} [\underline{cb}]] = \\ &= (\underline{cb}) \underline{d} + (\underline{bd}) \underline{c} - (\underline{cd}) \underline{b} + R(\underline{b} [\underline{dc}]) \end{aligned} \quad (4)$$

и т. д.

Компоненты тензора электромагнитного поля обозначим

$$(F^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & H_3 & -H_2 & -E_1 \\ -H_3 & 0 & H_1 & -E_2 \\ H_2 & -H_1 & 0 & -E_3 \\ E_1 & E_2 & E_3 & 0 \end{pmatrix}; \quad (\tilde{F}^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & E_3 & -E_2 & H_1 \\ -E_3 & 0 & E_1 & H_2 \\ E_2 & -E_1 & 0 & H_3 \\ -H_1 & -H_2 & -H_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где  $\tilde{F}^{\alpha\beta}$  — компоненты «дуального» к  $F^{\alpha\beta}$  тензора, определяемые согласно формуле  $\tilde{F}^{\alpha\beta} = 1/2 \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta}$ . Для матрицы  $F$ , определяющей этот тензор, мы имеем следующее выражение [1]:

$$F = 1/2 F^{\alpha\beta} R_\alpha R_\beta, \quad (6)$$

или, воспользовавшись формулами (1) и (5),

$$F = R \underline{H} + R_4 \underline{E}. \quad (7)$$

Аналогично

$$\tilde{F} = JF = R \underline{E} - R_4 \underline{H}. \quad (8)$$

В качестве примера применения формулы (7) покажем, каким образом из нее можно получить закон преобразования  $\underline{E}$  и  $\underline{H}$  при изменении системы координат.

Если от системы координат, характеризуемой базисными матрицами-векторами  $R^\alpha$ , перейти к новой системе координат, для которой

$$\tilde{R}^\alpha = A^{-1} R^\alpha A \quad (A = \dots A_2 A_1, \quad A_i^2 = \pm 1), \quad (9)$$

то новые значения  $\tilde{H}_h$  и  $\tilde{E}_h$  определяются из

$$F = RR^h H_h + R_4 R^h E_h = \tilde{R} \tilde{R}^h \tilde{H}_h + \tilde{R}_4 \tilde{R}^h \tilde{E}_h \quad (\tilde{R} = \tilde{R}^1 \tilde{R}^2 \tilde{R}^3) \quad (10)$$

или <sup>2</sup>

$$AFA^{-1} = RR^h \tilde{H}_h + R_4 R^h \tilde{E}_h = R\tilde{H} + R_4 \tilde{E}. \quad (11)$$

В частности, если мы имеем дело только с одной симметрией, т. е.

$$A = A_1 = a_\alpha R^\alpha = \underline{a} + a_4 R^4 \quad (A_1^2 = \pm 1, \quad A_1^{-1} = \pm A_1), \quad (12)$$

то

$$A_1 F A_1^{-1} = \pm R (\underline{a} - a_4 R^4) \underline{H} (\underline{a} + a_4 R^4) \mp R_4 (\underline{a} - a_4 R^4) \underline{E} (\underline{a} + a_4 R^4),$$

или, поскольку  $(\underline{a} - a_4 R^4) \underline{d} (\underline{a} + a_4 R^4) = \underline{a} \underline{d} \underline{a} + a_4 R^4 (\underline{a} \underline{d} - \underline{d} \underline{a}) - a_4^2 \underline{d}$ ,

$$\pm \underline{H}^+ = \underline{a} \underline{H} \underline{a} - a_4^2 \underline{H} - 2a_4 [\underline{a} \underline{E}], \quad (13)$$

$$\pm \underline{E}^+ = -\underline{a} \underline{E} \underline{a} + a_4^2 \underline{E} - 2a_4 [\underline{a} \underline{H}].$$

В результате последовательного проведения двух операций симметрии:

$$A_1 = R^1, \quad A_2 = \lambda [R^1 \cos(\alpha/2) + R^4 \sin(\alpha/2)], \quad (14)$$

$$\cos \alpha = 1/\lambda^2 = + \sqrt{1 - (v/c)^2},$$

что соответствует преобразованиям Лоренца (см. [1]), они перейдут в

$$\underline{H}^{++} = [(1 + \cos \alpha) / 2 \cos \alpha] \underline{H} - [(1 - \cos \alpha) / 2 \cos \alpha] R^1 \underline{H} R^1 - \operatorname{tg} \alpha [\underline{e}_1, \underline{E}], \quad (15)$$

$$\underline{E}^{++} = [(1 + \cos \alpha) / 2 \cos \alpha] \underline{E} - [(1 - \cos \alpha) / 2 \cos \alpha] R^1 \underline{E} R^1 + \operatorname{tg} \alpha [\underline{e}_1, \underline{H}].$$

Поэтому выражения новых компонент через старые имеют вид:

$$H_1^{++} = H_1, \quad H_2^{++} = [H_2 + (v/c) E_3] / \sqrt{1 - (v/c)^2},$$

$$H_3^{++} = [H_3 - (v/c) E_2] / \sqrt{1 - (v/c)^2}, \quad (16)$$

$$E_1^{++} = E_1, \quad E_2^{++} = [E_2 - (v/c) H_3] / \sqrt{1 - (v/c)^2},$$

$$E_3^{++} = [E_3 + (v/c) H_2] / \sqrt{1 - (v/c)^2}.$$

Это — известные формулы преобразования компонент  $\underline{E}$  и  $\underline{H}$  при переходе к движущейся системе координат (см., например, [3], стр. 72, [4,5] и т. д.).

<sup>2</sup> Взятые сами по себе  $\tilde{H}_h$  и  $\tilde{E}_h$  можно трактовать или как компоненты нового тензора  $\tilde{F} = AFA^{-1}$ , полученного из  $F$  в результате вращения или отражения, характеризуемого матрицей  $A$ , или же как компоненты того же самого тензора  $F$ , но в новой системе координат. При последней точке зрения базисные матрицы-векторы, определяющие новые координатные оси, получаются из старых в результате четырехмерного вращения или отражения, характеризуемого матрицей  $A^{-1}$ .

2. Рассмотрим теперь некоторые соотношения между матрицами-четырёхмерными тензорами.

Для произведения двух матриц-четырёхмерных векторов  $C = c_\beta R^\beta$  и  $D = d^\alpha R_\alpha$  получим

$$\begin{aligned} CD &= (\underline{c} + c_4 R^4) (\underline{d} + d^4 R_4) = \\ &= (\underline{cd}) + c_4 d^4 + R [\underline{cd}] + R_4 (-c_4 \underline{d} - \underline{cd}^4) \end{aligned} \quad (17)$$

или

$$CD = c_\alpha d^\alpha + \frac{1}{2} R^\alpha R^\beta (c_\alpha d_\beta - c_\beta d_\alpha) = c_\alpha d^\alpha - \frac{1}{2} J R_\gamma R_\delta \varepsilon^{\gamma\delta\alpha\beta} c_\alpha d_\beta. \quad (18)$$

Формулы (17), (18) имеют место и в том случае, когда компоненты четырёхмерных векторов являются операторами.

Из матриц-операторов особенно важной является

$$\nabla = R^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \underline{\nabla} + \frac{1}{c} R^4 \frac{\partial}{\partial t}, \quad (19)$$

причем из (18) следует, что

$$\nabla^2 = \square = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (20)$$

Пользуясь (2), далее получим

$$DF = -[\underline{dH}] + d_4 \underline{E} + R^4 (\underline{dE}) - J([\underline{dE}] + d_4 \underline{H} + R^4 (\underline{dH})), \quad (21)$$

т. е.

$$DF = -R_\alpha d_\beta F^{\alpha\beta} - J R_\alpha d_\beta \tilde{F}^{\alpha\beta}. \quad (22)$$

Аналогично

$$FD = -[\underline{Hd}] + \underline{E} d^4 - R^4 (\underline{Ed}) + J([\underline{Ed}] + \underline{H} d^4 - R^4 (\underline{Hd})) \quad (23)$$

или

$$FD = R_\alpha F^{\alpha\beta} d_\beta - J R_\alpha \tilde{F}^{\alpha\beta} d_\beta. \quad (24)$$

Наконец, в результате перемножения двух матриц-тензоров второго ранга будем иметь

$$\begin{aligned} F_{(1)} F_{(2)} &= (R \underline{H}_{(1)} + R_4 \underline{E}_{(1)}) (R \underline{H}_{(2)} + R_4 \underline{E}_{(2)}) = (\underline{E}_{(1)} \underline{E}_{(2)}) - (\underline{H}_{(1)} \underline{H}_{(2)}) + \\ &+ J((\underline{H}_{(1)} \underline{E}_{(2)}) + (\underline{E}_{(1)} \underline{H}_{(2)})) + R([\underline{E}_{(1)} \underline{E}_{(2)}] - [\underline{H}_{(1)} \underline{H}_{(2)}]) + \\ &+ R^4([\underline{H}_{(1)} \underline{E}_{(2)}] + [\underline{E}_{(1)} \underline{H}_{(2)}]) \end{aligned} \quad (25)$$

или

$$\begin{aligned} F_{(1)} F_{(2)} &= -\frac{1}{2} F_{(1)}^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}^{(2)} + \frac{1}{2} J(F_{(1)}^{\alpha\beta} \tilde{F}_{\alpha\beta}^{(2)}) + \\ &+ \frac{1}{2} R_\beta R_\gamma (F_{(1)}^{\beta\alpha} F_{\alpha(1)}^\gamma - F_{(2)}^{\beta\alpha} F_{\alpha(1)}^\gamma). \end{aligned} \quad (26)$$

В частности,

$$F^2 = C_1 + C_2 J, \quad (27)$$

где  $C_1 = -\frac{1}{2} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$  — инвариант,  $C_2 = \frac{1}{2} F^{\alpha\beta} \tilde{F}_{\alpha\beta}$  — псевдоинвариант, меняющий знак при отражении (в результате нечетного числа преобразований симметрии) и остающийся неизменным при вращениях четырёхмерного пространства. Если  $F^2 = 0$ , то  $C_1 = C_2 = 0$ .

3. Используя полученные формулы, мы можем записать уравнения электродинамики в матричной форме.

Пусть  $J_{эл} = j_{эл} + c\rho_{эл}R_4$  — матрица-четырёхмерный вектор электрического тока. Учитывая, что

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho_{эл}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (28)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{E}}{dt} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{эл}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{H}}{dt} = 0,$$

и полагая в формуле (22)  $D = \nabla$ , получим

$$\nabla F = -\frac{4\pi}{c} J_{эл} \left( \text{или, что то же, } \frac{\partial}{\partial x^\alpha} FR^\alpha = \frac{4\pi}{c} J_{эл} \right). \quad (29)$$

Система уравнений Максвелла (28) при пользовании матричными обозначениями записывается в виде одного уравнения (29), причем релятивистская инвариантность непосредственно видна уже из формы его записи.

Если  $J_{эл} = 0$ , то уравнения Максвелла для пустого пространства, записанные в виде  $F = 0$ , внешне похожи на уравнения Максвелла для частного случая электромагнитного поля:  $\nabla \psi = 0$  (см. [6])<sup>3</sup>. Однако сходство в записи только внешнее, так как  $F$  — матрица-тензор, а  $\psi$  — столбец из компонент действительного спинора.

Введем матрицу четырехмерного векторного потенциала:

$$A = A_\alpha R^\alpha = \underline{A} + A_4 R^4, \quad A^4 = -A_4 = \varphi. \quad (30)$$

Из (18) имеем

$$\nabla A\chi = (\partial A^\alpha / \partial x^\alpha)\chi + F\chi + R^\alpha A(\partial / \partial x^\alpha)\chi, \quad (31)$$

где  $\chi$  — произвольная матрица или столбец. Полагая, как обычно,  $(\partial A^\alpha / \partial x^\alpha) = 0$ , отсюда будем иметь

$$F = \nabla A. \quad (32)$$

Легко получить в матричном виде и выражение для силы, действующей на электрические заряды. Именно, согласно (21) и (23)

$$(1/2)(FJ_{эл} - J_{эл}F) = c(\rho_{эл}\underline{E} + (1/c)[j_{эл}\mathbf{H}]) + R_4(j_{эл}\mathbf{E}) = cf_{эл}, \quad (33)$$

где  $f_{эл}$  — матрица-четырёхмерный вектор силы. Компоненты тензора энергии-импульса электромагнитного поля  $T^{\alpha\beta}$  должны определяться таким образом, что  $-\partial T^{\alpha\beta} / \partial x^\beta = f_{эл}^\alpha$ . Из (29), (33) имеем

$$-\frac{\partial}{\partial x^\beta}(R_\alpha T^{\alpha\beta}) = f_{эл} = \frac{1}{8\pi} \left( -\frac{\partial (FR^\alpha)}{\partial x^\alpha} - F \nabla F \right) = -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial (FR^\alpha F)}{\partial x^\alpha}, \quad (34)$$

и мы можем положить

$$8\pi R_\alpha T^{\alpha\beta} = FR^\beta F. \quad (35)$$

Можно проверить непосредственно, что  $T^{\alpha\beta}$  действительно являются компонентами тензора энергии-импульса электромагнитного поля. В самом деле, воспользовавшись (4) и (7), причем в (4), взяв  $\underline{b} = R^h$ , для

<sup>3</sup> Пользуемся случаем отметить, что в литературных ссылках нашей работы [9] следует исправить номера страниц в [1] и [2]: в [1] следует читать «стр. 667», а в [2] — «стр. 653».

$T^{\alpha\beta}$  в (35) получим выражения:

$$8\pi T^{ih} = -2H_i H_h - 2E_i E_h + \delta_{ih}(E^2 + H^2), \quad 8\pi T^{44} = E^2 + H^2, \quad (36)$$

$$8\pi T^{4h} = 8\pi T^{h4} = 2\epsilon^{hjs} E_j H_s,$$

как и должно быть.

До сих пор мы ограничивались уравнениями электродинамики для пространства без среды. Метод матриц-четырёхмерных тензоров с успехом можно использовать и при рассмотрении отдельных вопросов, связанных с электромагнитным полем в среде, когда приходится иметь дело с релятивистской инвариантностью. В этом случае необходимо ввести уже две матрицы-антисимметричные тензоры второго ранга:

$$F = R \underline{B} + R_4 \underline{E}, \quad \Phi = R \underline{H} + R_4 \underline{D}, \quad (37)$$

где  $\underline{B}$  — вектор магнитной индукции и т. д. Вместо (35) теперь будем иметь

$$\frac{1}{8\pi} FR^{\alpha} \Phi = T_{(c)}^{\alpha\beta} R_{\beta} + J(P^{\alpha\beta} R_{\beta}),$$

где

$$8\pi T_{(c)}^{ih} = -B_i H_h - H_i B_h - E_i D_h - D_i E_h + \delta_{ih}((\underline{B}\underline{H}) + (\underline{E}\underline{D})),$$

$$8\pi T_{(c)}^{44} = (\underline{E}\underline{D}) + (\underline{B}\underline{H}), \quad 8\pi T_{(c)}^{4h} = 8\pi T_{(c)}^{h4} = \epsilon^{hjs}(E_j H_s + D_j B_s).$$

$T_{(c)}^{\alpha\beta}$  являются симметризованными компонентами тензора энергии-импульса электромагнитного поля в произвольной среде, вычисленного по методу Минковского. Для того чтобы получить компоненты тензора энергии-импульса  $T^{\alpha\beta}$  для общего случая, когда  $T^{\alpha\beta} \neq T^{\beta\alpha}$  (см. [5]), надо воспользоваться еще антисимметричным тензором второго ранга  $\frac{1}{2}(F\Phi - \Phi F)$ .

В заключение введем тензор момента количества движения поля. Именно, если  $X = x^{\alpha} R_{\alpha}$ , то согласно (18) получим

$$\frac{1}{2}(XR_{\alpha} T^{\alpha\gamma} - R_{\alpha} T^{\alpha\gamma} X) = \frac{c}{2} R_{\alpha} R_{\beta} M^{\alpha\beta\gamma}, \quad (38)$$

где

$$M^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{c}(x^{\alpha} T^{\beta\gamma} - x^{\beta} T^{\alpha\gamma}) \quad (39)$$

— компоненты тензора плотности момента количества движения поля.

Иваново

Поступила в редакцию  
3 апреля 1954 г.

#### Литература

- [1] Г. А. Зайцев. ЖЭТФ, 25, 667, 1953.—[2] Г. А. Зайцев. ЖЭТФ, этот выпуск, стр. 530.—[3] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. Теория поля, ГТТИ, 1948.—[4] Я. И. Френкель. Электродинамика, ОНТИ, 1934, т. 1.—[5] И. Е. Тамм. Основы теории электричества, ГТТИ, 1949.—[6] Г. А. Зайцев. ЖЭТФ, 25, 675, 1953.

## РЕЛЯТИВИСТСКИ ИНВАРИАНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРОНА, ЗАМЕНЯЮЩИЕ СИСТЕМУ УРАВНЕНИЙ ДИРАКА

Г. А. Зайцев

Пользуясь свойствами действительных спиноров, находятся добавочные члены, делающие уравнения для электрона, применяемые в нерелятивистской квантовой механике, релятивистски инвариантными. Найденные таким путем дифференциальные уравнения второго порядка, связывающие компоненты одного действительного спинора, являются более простыми, чем те, которые получаются из теории Дирака. Введенные релятивистски инвариантные уравнения решаются для атома водорода при отсутствии внешних полей. Оказывается, что при этом получается обычная формула тонкой структуры, как и в теории Дирака. Показано, что рассмотренные дифференциальные уравнения второго порядка могут быть получены из системы релятивистски инвариантных уравнений первого порядка, содержащих, однако, уже не один, а два действительных спинора.

### 1. Введение

В [1] было дано наглядное истолкование понятий и представлений, применяемых в нерелятивистской квантовой механике при исследовании поведения частиц со спином  $\frac{1}{2}$ . С этой точки зрения, необходимо пересмотреть и проблему нахождения релятивистски инвариантных уравнений для электрона.

Как известно, в настоящее время за систему релятивистски инвариантных уравнений, характеризующих поведение электрона в различных внешних полях, принимают систему уравнений Дирака [2] (см. также [3-6] и т. д.). Этот выбор основан на возможности получения из них в частном случае обычных нерелятивистских уравнений, а также на их способности более точно объяснить имеющиеся опытные факты. Важнейшим из таких фактов является наличие тонкой структуры в спектре атома водорода, и объяснение ее при помощи системы уравнений Дирака стало основным аргументом в пользу правильности дираковской теории. Ясно, что любые релятивистски инвариантные уравнения для электрона, претендующие на замену системы уравнений Дирака, тоже должны в частном случае переходить в уравнения нерелятивистской квантовой механики и в то же время истолковывать опытные факты, не объясняемые последней, и, прежде всего, они должны приводить к формуле для тонкой структуры, подтверждаемой на опыте.

В настоящей статье будут получены релятивистски инвариантные уравнения для электрона, удовлетворяющие сформулированным требованиям и в то же время более простые, чем уравнения Дирака. При получении этих уравнений мы не будем делать каких-либо гипотез, а будем основываться лишь на том, что уравнения нерелятивистской квантовой механики для электрона, истолкованные при помощи наглядных представлений, развитых в [1], должны быть обобщены таким образом, чтобы имела место их релятивистская инвариантность, т. е. чтобы они не менялись при произвольных преобразованиях общей группы Лоренца. Необходимый для нас математический аппарат изложен в [7] и [8].

## 2. Получение релятивистски инвариантных уравнений, заменяющих систему уравнений Дирака

Как известно, компоненты оператора импульса и оператор энергии, используемые в нерелятивистской квантовой механике, с точки зрения наглядных представлений о состояниях частиц со спином  $1/2$ , должны быть записаны в виде:

$$\hat{p}_k = -\hbar I \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad \hat{E} = \hbar I \frac{\partial}{\partial t} \quad (1)$$

(см. [1]). Поэтому при переходе к четырехмерному псевдоевклидову пространству мы будем для действительного спинора, являющегося «собственным» спинором этих операторов, иметь следующие соотношения:

$$-\hbar I \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} = p_\alpha \psi \quad (x^4 = ct, \quad p_\alpha = -E/c, \quad \alpha = 1, 2, 3, 4). \quad (2)$$

$p_\alpha$  должны преобразовываться как компоненты четырехмерного вектора, так как они являются составляющими четырехмерного импульса. Кроме того, нам известен закон преобразования для действительного спинора  $\psi$  при преобразованиях группы Лоренца.

Учитывая, что при произвольных вращениях и отражениях четырехмерного пространства обе стороны (2) должны преобразовываться одинаково, мы можем установить, какой из четырехрядных действительных матриц, рассмотренных в [7], соответствует матрица  $I$ . Легко видеть, что здесь имеются только две возможности: матрица  $I$  должна равняться  $J$  или  $-J$ . При этом  $\hbar$  к тому же приходится рассматривать не как скаляр (как это обычно считалось), а как псевдоскаляр, меняющий знак при четырехмерных отражениях и остающийся неизменным при четырехмерных вращениях. Точнее, это — единственная компонента матрицы-псевдоскаляра  $T_4 = \hbar J$ , на численное же значение постоянной Планка нужно смотреть как на абсолютную величину соответствующего псевдоскаляра.

То, что матрица  $J$  должна с точностью до знака совпадать с  $I$ , ведет к наложению ограничения на выбор остальных основных матриц, рассмотренных в [7]. Именно, они должны соответствовать тем, которые приведены в первой или второй строке табл. 1 из [7]. Для определенности мы будем считать, что  $J=I$  (выбор знака не имеет никакого значения), так что

$$R^k = BS_k, \quad R^4 = B, \quad R = BI, \quad J = I. \quad (3)$$

Таким образом из требования релятивистской инвариантности следует, что формулы (1) или (2) можно записать в виде:

$$-\hbar J (\partial \psi / \partial x^\alpha) = p_\alpha \psi, \quad (4)$$

где  $\hbar$  — компонента псевдоскаляра. Отметим, что замена  $\hbar$  на  $-\hbar$  соответствует перемене знака у  $I=J$ . Но известно, что все результаты нерелятивистской квантовой механики не изменятся, если изменить везде  $i$  на  $-i$ . Поэтому они не изменятся, если в основных формулах заменить  $\hbar$  на  $-\hbar$ .

В качестве исходного нерелятивистского уравнения для электрона, к которому мы должны будем добавить члены, делающие его релятивистски инвариантным, мы можем взять уравнение Паули, записав его в виде (см., например, [9] и т. д.)

$$\left[ -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m_0} \sum_{h=1}^3 \left( -\hbar i \frac{\partial}{\partial x^h} + \frac{e}{c} A_h \right)^2 - e\varphi \right] \xi_0 + \frac{e\hbar}{2m_0 c} \sum_{h=1}^3 H_h \sigma_h \xi_0 = 0, \quad (5)$$

где  $-e$  — заряд электрона,  $A_h$  — компоненты векторного потенциала.

От этого уравнения (точнее двух уравнений) надо перейти к действительному соответствию [1], так как при рассмотрении произвольных преобразований группы Лоренца исходной величиной, для которой определен закон преобразования, является действительный спинор, а не соответствующий ему спинор первого ранга. Заменяя в (5) все комплексные величины на соответствующие им действительные, получим

$$\left[ -\hbar J \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m_0} \sum_{h=1}^3 \left( -\hbar J \frac{\partial}{\partial x^h} + \frac{e}{c} A_h \right)^2 - e\varphi \right] \psi_0 + \frac{e\hbar}{2m_0 c} \sum_{h=1}^3 R_h H_h \psi_0 = 0. \quad (6)$$

Для того чтобы сделать уравнение (6) релятивистски инвариантным, нужно заменить оператор

$$-\hbar J \frac{\partial}{\partial t} + eA_4 + \frac{1}{2m_0} \sum_k \left( -\hbar J \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{e}{c} A_k \right)^2, \quad A_4 = -\varphi$$

на

$$\frac{1}{2m_0} \left[ - \left( -\hbar J \frac{\partial}{\partial x^4} + \frac{e}{c} A_4 \right)^2 + \sum_k \left( -\hbar J \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{e}{c} A_k \right)^2 + m_0^2 c^2 \right],$$

а  $R_h R^h H_h$  на  $-J(RR^h H_h + R_h R^h E_h) = -JF$ . При этом уравнение (6) перейдет в

$$\left[ - \left( -\hbar J \frac{\partial}{\partial x^4} + \frac{e}{c} A_4 \right)^2 + \sum_k \left( -\hbar J \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{e}{c} A_k \right)^2 + m_0^2 c^2 - \frac{e\hbar}{c} JF \right] \psi = 0, \quad (7)$$

где  $\psi$  — действительный спинор. Уравнение Паули (5) или (6) получится из (7), если положить  $\psi = \left[ \exp \left( -J \frac{m_0 c^2 t}{\hbar} \right) \right] \psi_0$  и пренебречь величинами  $\frac{m_0 \hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial t^2}$ ,  $\frac{m_0 e^2 \varphi^2}{c^2} \psi_0$ ,  $\frac{m_0 e \hbar}{c^2} \left( J \frac{\partial}{\partial t} \varphi + J \varphi \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi_0$ , а также отбросить член  $-\frac{e\hbar}{c} J R_4 E$ .

Релятивистская инвариантность уравнения (7) вытекает из того, что если обозначить выражение в квадратных скобках символом  $\hat{G}$ , то при преобразовании симметрии, характеризуемом матрицей  $A_1$ ,  $\hat{G}$  перейдет в  $A_1 \hat{G} A_1^{-1}$ . Поэтому уравнение  $\hat{G} \psi = 0$  перейдет в  $A_1 \hat{G} A_1^{-1} (A_1 \psi) = A_1 \hat{G} \psi = 0$ , откуда и вытекает, что оно действительно релятивистски инвариантно.

Уравнение (7) мы перепишем в виде

$$\left( \hat{E}^2 - c^2 \sum_k \hat{P}_k^2 - m_0^2 c^4 + e\hbar c JF \right) \psi = 0, \quad \hat{E} = \hbar J \frac{\partial}{\partial t} + e\varphi,$$

$$\hat{P}_k = -\hbar J \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{e}{c} A_k. \quad (8)$$

Оно и является искомым релятивистски инвариантным уравнением, замещающим систему уравнений Дирака. [Строго говоря, (8) — система четырех линейных дифференциальных уравнений с действительными элементами.]

Уже с первого взгляда видно, что система уравнений (8) проще, чем та, которая получается из уравнений Дирака в результате квадрирования. В самом деле, там имеются четыре комплексных функции или восемь действительных, тогда как у нас задача сводится к нахождению четырех действительных функций — компонент действительного спинора. Уравнение Паули получается из (8) тоже значительно проще, чем из уравнений Дирака. Смысл уравнений Дирака в обычном понимании и уравнений (8) тоже различен. Поскольку компоненты действительного спинора являются параметрами, характеризующими четырехмерные вектор и антисимметричный тензор, то и (8) является, строго говоря, системой уравнений для определения четырехмерных тензоров. Однако в настоящей статье мы не будем рассматривать более детально сходство и отличия уравнений (8) от уравнений Дирака. Общее исследование мы также отложим до следующих статей. В настоящей же работе мы ограничимся рассмотрением электрона в атоме водорода и вычислением тонкой структуры.

Прежде чем переходить к решению этой задачи, запишем уравнение (8) в несколько ином виде. Пользуясь (3) и переходя от действительных величин обратно к комплексным (полагая  $JR_4 R^h \leftrightarrow i\sigma_h$ ,  $\psi \leftrightarrow \xi$  и т. д.), получим, что основное релятивистски инвариантное уравнение для электрона (8) можно записать в виде

$$\left[ \left( \hbar i \frac{\partial}{\partial t} + e\varphi \right)^2 - c^2 \sum_h \left( -\hbar i \frac{\partial}{\partial x^h} + \frac{e}{c} A_h \right)^2 - m_0^2 c^4 + e\hbar c (i\sigma_h E_h - \sigma_h H_h) \right] \xi = 0. \quad (9)$$

В такой форме оно имеет особенно простой вид, и им удобно пользоваться при решении конкретных физических задач. Однако при рассмотрении вопросов, связанных с релятивистской инвариантностью, целесообразно пользоваться записью типа (7) или (8). Дело в том, что при произвольных преобразованиях группы Лоренца  $\xi$  уже не умножается слева на некоторую матрицу, как это имело место для трехмерных вращений, а преобразуется более сложным образом. Кроме того, если применять комплексные величины, то мы уже не можем использовать очень просто преобразующиеся матрицы-четырёхмерные тензоры, вследствие чего доказательство релятивистской инвариантности значительно усложняется, и т. д.

### 3. Уравнение для электрона в атоме водорода при отсутствии внешних полей

Для электрона в атоме водорода мы можем положить

$$A_h = 0, \quad \varphi = e/r. \quad (10)$$

Будем считать, что электрон находится в стационарном состоянии, так что

$$\hbar i \frac{\partial}{\partial t} \xi = E\xi, \quad \xi = [\exp(-iEt/\hbar)] \xi_0, \quad (11)$$

где  $\xi_0$  не зависит от времени. Поэтому уравнение (9) примет вид

$$\left[ \nabla^2 + \frac{1}{\hbar^2 c^2} \left[ \left( E + \frac{e^2}{r} \right)^2 - m_0^2 c^4 \right] + \frac{e^2}{\hbar c} i \left( \frac{x^k}{r^3} \right) \sigma_k \right] \xi = 0, \quad (12)$$

причем в дальнейшем будем пользоваться сокращенными обозначениями:

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}, \quad \sigma_{(r)} = \frac{x^k \sigma_k}{r}, \quad \nabla_{\vartheta\varphi}^2 = \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Наша задача заключается в нахождении уровней энергии  $\mathcal{E} = E - m_0 c^2$  и соответствующих собственных функций уравнения (12). Для ее решения необходимо найти систему операторов, коммутирующих с оператором

$$\begin{aligned} \nabla^2 + \frac{1}{\hbar^2 c^2} \left[ \left( E + \frac{e^2}{r} \right)^2 - m_0^2 c^4 \right] + \frac{i \alpha \sigma_{(r)}}{r^2} = \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \\ + \frac{1}{\hbar^2 c^2} \left[ \left( E + \frac{e^2}{r} \right)^2 - m_0^2 c^4 \right] + \frac{\nabla_{\vartheta\varphi}^2 + i \alpha \sigma_{(r)}}{r^2} \end{aligned} \quad (13)$$

и друг с другом. Тогда «собственные» функции  $\xi$  уравнения (12) можно будет выбрать таким образом, что они одновременно будут и собственными функциями всех этих операторов.

Мы можем добиться разделения переменных, если положим  $\xi_0 = f(r) \begin{pmatrix} y_1(\vartheta, \varphi) \\ y_2(\vartheta, \varphi) \end{pmatrix}$ , причем

$$-(\nabla_{\vartheta\varphi}^2 + i \alpha \sigma_{(r)}) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \hat{L} y = \lambda y. \quad (14)$$

Тогда уровни энергии электрона в атоме водорода будут определяться из уравнения

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\hbar^2 c^2} \left[ \left( E + \frac{e^2}{r} \right)^2 - m_0^2 c^4 \right] - \frac{\lambda}{r^2} \right] f(r) = 0. \quad (15)$$

Нетрудно проверить, что с (13) и  $\hat{L}$  коммутируют операторы:

$$\hat{M}_k = \hbar \left( -i \varepsilon^{kjs} x_j \frac{\partial}{\partial x^s} + \frac{1}{2} \sigma_k \right). \quad (16)$$

Это можно видеть из следующего: если положить  $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ , то

$$\left[ \varepsilon^{kjs} x_j \frac{\partial}{\partial x^s}, \frac{x^t \sigma_t}{r} \right] = \frac{1}{r} \varepsilon^{kjs} x_j \sigma_s, \quad \left[ \sigma_k, \frac{x^t \sigma_t}{r} \right] = \frac{2i}{r} \varepsilon^{kjs} x_j \sigma_s.$$

Кроме того, операторы  $\hat{L}$ ,  $\hat{M}_k$  и  $\hat{M}^2 = \hat{M}_1^2 + \hat{M}_2^2 + \hat{M}_3^2$  коммутируют и друг с другом. Поэтому мы можем выбрать  $y_1$  и  $y_2$  так, что  $y$ , а следовательно и  $\xi_0$ , будет одновременно собственной функцией операторов  $\hat{L}$ ,  $\hat{M}_3$  и  $\hat{M}^2$ , т. е.

$$\hat{M}_3 y = \hbar m y, \quad (17)$$

$$\hat{M}^2 y = \hbar^2 j(j+1) y, \quad (18)$$

и состояние электрона в атоме водорода будет характеризоваться квантовыми числами  $m$ ,  $j$ ,  $\lambda$  и радиальным квантовым числом, которое мы введем ниже.

Из соотношений коммутации между  $\hat{M}_h$ , как известно, следует, что при заданном  $j$ ,  $m$  может иметь значения:  $m = -j, -j+1, \dots, j-1, j$  (см. [6,10,11] и т. д.). Можно доказать, что из условий (17) и (18) вытекает, что  $y$  имеет вид:

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \left( (C_{j'} P_{j', m'} + C_{j'+1} P_{j'+1, m'}) e^{i m' \varphi} \right. \\ \left. - \left( -\sqrt{\frac{j'-m'}{j'+m'+1}} C_{j'} P_{j', m'+1} + \sqrt{\frac{j'+m'+2}{j'-m'+1}} C_{j'+1} P_{j'+1, m'+1} \right) e^{i (m'+1) \varphi} \right), \quad (19)$$

где  $C_{j'}$ ,  $C_{j'+1}$  — произвольные постоянные,  $j' = j - 1/2$  и  $m' = m - 1/2$  — целые числа,

$$P_{j', m'} = \sqrt{\frac{(2j'+1)(j'-m')!}{2(j'+m')!}} (1-x^2)^{m'/2} \frac{1}{2^{j'} j'!} \frac{d^{j'+m'}}{dx^{j'+m'}} (x^2-1)^{j'}, \quad x = \cos \vartheta. \quad (20)$$

Проведем доказательство высказанных утверждений.

Функции  $y_1$  и  $y_2$  можно разложить в ряды Лапласа, т. е. представить в виде:

$$y_1 = \sum_{h, n} C_{hn} P_{n, h} e^{i h \varphi} = \sum_{h=-\infty}^{\infty} A_h e^{i h \varphi}, \quad y_2 = \sum_{h, n} D_{hn} P_{n, h} e^{i h \varphi} = \sum_{h=-\infty}^{\infty} B_h e^{i h \varphi}.$$

Подставив эти разложения в формулу (17), получим

$$y_1 = A_{m'} e^{i m' \varphi}, \quad y_2 = B_{m'+1} e^{i (m'+1) \varphi}, \quad m' = m - 1/2 \quad (21)$$

( $m'$  — целое число). Здесь мы можем положить

$$A_{m'} = \sum_l C_l P_{l, m'}, \quad B_{m'+1} = \sum_l D_l P_{l, m'+1} \quad (22)$$

( $C_l$ ,  $D_l$  — постоянные). Далее, пользуясь тем, что

$$\sigma_1 \mp i \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \mp 1 \\ 1 \pm 1 & 0 \end{pmatrix},$$

получим

$$\frac{1}{\hbar^2} \hat{M}^2 y = \left( -\nabla_{\vartheta, \varphi}^2 + \frac{3}{4} + \begin{pmatrix} -i \frac{\partial}{\partial \varphi} & -i(\hat{l}_1 - i\hat{l}_2) \\ -i(\hat{l}_1 + i\hat{l}_2) & i \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \\ = j(j+1)y, \quad \hat{l}_k = \varepsilon^{kjs} x_j \frac{\partial}{\partial x^s}. \quad (23)$$

Воспользуемся теперь тем, что

$$(\hat{l}_1 \pm i\hat{l}_2) P_{l, m \mp 1/2} e^{i (m \pm 1/2) \varphi} = \\ = -i \sqrt{(l+m'+1)(l-m')} P_{l, m \pm 1/2} e^{i (m \pm 1/2) \varphi}, \quad m' = m - 1/2 \quad (24)$$

(см. [6, 10-12] и т. д. В ряде работ используются функции, отличающиеся от применяемых нами  $P_{l, m'}$  на множитель  $(-1)^{m'}$ . При их использовании перед правой частью (24) знак должен быть изменен.)

Подставляя разложения (21), (22) в (23) и учитывая (24), получим

$$[l(l+1) + 3/4 + m' - j(j+1)] C_l - \sqrt{(l+m'+1)(l-m')} D_l = 0 \quad (25)$$

$$(l \geq m'),$$

$$-\sqrt{(l+m'+1)(l-m')} C_l + [l(l+1) - 1/4 - m' - j(j+1)] D_l = 0 \quad (26)$$

$$(l \geq m' + 1).$$

Для того чтобы уравнения (25), (26) имели ненулевое решение, нужно, чтобы при  $l \geq m' + 1$ ,

$$\begin{vmatrix} l(l+1) + 3/4 + m' - j(j+1) & -\sqrt{(l+m'+1)(l-m')} \\ -\sqrt{(l+m'+1)(l-m')} & l(l+1) - 1/4 - m' - j(j+1) \end{vmatrix} = 0 \quad (27)$$

или

$$[l(l+1) - j(j+1) + 1/4]^2 = (l + 1/2)^2, \quad l = j \pm 1/2. \quad (28)$$

Таким образом, возможны два решения уравнений (25), (26), соответственно двум возможным выборам знака в (28), и общее решение будет их линейной комбинацией. Найдем его. Если  $l = j - 1/2 = j'$ , то

$$D_{j'} = -\sqrt{\frac{j-m'}{j+m'+1}} C_{j'}, \quad (29)$$

если же  $l = j + 1/2 = j' + 1$ , то

$$D_{j'+1} = \sqrt{\frac{j'+m'+2}{j'-m'+1}} C_{j'+1}, \quad (30)$$

так что в качестве общего решения действительно получаем формулу (19).

Теперь мы можем перейти к рассмотрению уравнения (14), из которого должны быть найдены третье квантовое число  $\lambda$  и отношение  $C_{j'+1}$  к  $C_{j'}$ .

Пользуясь тем, что  $x_3 = r \cos \vartheta$ ,  $x_1 \pm ix_2 = r \sin \vartheta e^{\pm i\varphi}$ , для матрицы  $\sigma(r) = \sum_k x^k \sigma_k / r$  мы можем написать выражение

$$\begin{aligned} \sigma(r) &= \cos \vartheta \sigma_3 + \frac{1}{2} \sin \vartheta e^{i\varphi} (\sigma_1 - i\sigma_2) + \\ &+ \frac{1}{2} \sin \vartheta e^{-i\varphi} (\sigma_1 + i\sigma_2) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta e^{-i\varphi} \\ \sin \vartheta e^{i\varphi} & -\cos \vartheta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (31)$$

Поэтому, учитывая (19), мы можем переписать (14) в виде системы двух уравнений:

$$\begin{aligned} &[j'(j'+1) - \lambda] C_{j'} P_{j', m'} + [(j'+1)(j'+2) - \lambda] C_{j'+1} P_{j'+1, m'} - \\ &- i\alpha \cos \vartheta C_{j'} P_{j', m'} - i\alpha \cos \vartheta C_{j'+1} P_{j'+1, m'} + i\alpha \sqrt{\frac{j'-m'}{j'+m'+1}} \sin \vartheta C_{j'+1} P_{j', m'+1} - \\ &- i\alpha \sqrt{\frac{j'+m'+2}{j'-m'+1}} \sin \vartheta C_{j'+1} P_{j'+1, m'+1} = 0; \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned}
& -\sqrt{\frac{j'-m'}{j'+m'+1}}[j'(j'+1)-\lambda]C_{j'}P_{j',m'+1}+ \\
& +\sqrt{\frac{j'+m'+2}{j'-m'+1}}[(j'+1)(j'+2)-\lambda]C_{j'+1}P_{j'+1,m'+1}- \\
& -i\alpha\left[\sin\vartheta P_{j',m'}+\sqrt{\frac{j'-m'}{j'+m'+1}}\cos\vartheta P_{j',m'+1}\right]C_{j'}- \\
& -i\alpha\left[\sin\vartheta P_{j'+1,m'}-\sqrt{\frac{j'+m'+2}{j'-m'+1}}\cos\vartheta P_{j'+1,m'+1}\right]C_{j'+1}=0. \quad (33)
\end{aligned}$$

Далее воспользуемся тем, что из свойств  $P_{j'm'}$  ([12], стр. 383—384) можно получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
& -\cos\vartheta P_{j',m'}+(\sqrt{j'-m'}/\sqrt{j'+m'+1})\sin\vartheta P_{j',m'+1}= \\
& =-(\sqrt{(j'-m'+1)(2j'+1)}/\sqrt{(j'+m'+1)(2j'+3)})P_{j'+1,m'}; \quad (34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\cos\vartheta P_{j'+1,m'}-(\sqrt{j'+m'+2}/\sqrt{j'-m'+1})\sin\vartheta P_{j'+1,m'+1}= \\
& =-(\sqrt{(j'+m'+1)(2j'+3)}/\sqrt{(j'-m'+1)(2j'+1)})P_{j',m'}; \quad (35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\sin\vartheta P_{j',m'}-(\sqrt{j'-m'}/\sqrt{j'+m'+1})\cos\vartheta P_{j',m'+1}= \\
& =-(\sqrt{(j'+m'+2)(2j'+1)}/\sqrt{(j'+m'+1)(2j'+3)})P_{j'+1,m'+1}; \quad (36)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\sin\vartheta P_{j'+1,m'}+(\sqrt{j'+m'+2}/\sqrt{j'-m'+1})\cos\vartheta P_{j'+1,m'+1}= \\
& =(\sqrt{(j'-m')(2j'+3)}/\sqrt{(j'-m'+1)(2j'+1)})P_{j',m'+1}. \quad (37)
\end{aligned}$$

Учитывая эти формулы и приравнявая в (32) коэффициенты при  $P_{j',m'}$ ,  $P_{j'+1,m'}$ , из (14) получим

$$\begin{aligned}
& [j'(j'+1)-\lambda]C_{j'}= \\
& =i\alpha(\sqrt{(j'+m'+1)(2j'+3)}/\sqrt{(j'-m'+1)(2j'+1)})C_{j'+1}, \quad (38)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [(j'+1)(j'+2)-\lambda]C_{j'+1}= \\
& =i\alpha(\sqrt{(j'-m'+1)(2j'+1)}/\sqrt{(j'+m'+1)(2j'+3)})C_{j'}. \quad (39)
\end{aligned}$$

Формула (33) приводит к тем же соотношениям.

Из (38) и (39) получаем

$$\begin{aligned}
C_{j'+1}/C_{j'} & = [j'(j'+1)-\lambda]/i\alpha\sqrt{\frac{(j'+m'+1)(2j'+3)}{(j'-m'+1)(2j'+1)}}= \\
& = i\alpha\sqrt{\frac{(j'-m'+1)(2j'+1)}{(j'+m'+1)(2j'+3)}}/[(j'+1)(j'+2)-\lambda], \quad (40)
\end{aligned}$$

откуда

$$\lambda = (j'+1)^2 \mp \sqrt{(j'+1)^2 - \alpha^2}. \quad (41)$$

Мы видим, что квантовое число  $\lambda$  при заданных  $j$  и  $m$  может принимать лишь два значения, соответственно двум возможным выборам знака в (41). Если пренебречь величиной  $\alpha^2$  и в (41) положить  $\alpha^2=0$ , то для этого предельного случая вместо квантового числа  $\lambda$  мы можем ввести другое квантовое число  $l$ , определяемое согласно

$$\lambda = l(l+1), \quad l \geq 0. \quad (42)$$

Это квантовое число при заданных  $j$  и  $m$  может принимать следующие два значения:

$$l_1 = j' = j - 1/2, \quad l_2 = j' + 1 = j + 1/2. \quad (43)$$

Условно мы можем считать, что и в том случае, когда мы не пренебрегаем величиной  $\alpha^2$ , состояние электрона в атоме водорода характеризуется (помимо  $j$  и  $m$ ) еще квантовым числом  $l$  (вместо  $\lambda$ ), могущим принимать два значения  $l_1 = j - 1/2$  и  $l_2 = j + 1/2$  (соответственно двум возможным значениям  $\lambda$ :  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ ).

При заданном  $\lambda$  (или, соответственно,  $l$ ) формула (40) позволяет найти отношение  $C_{j+1}$  к  $C_j$ .

Теперь мы можем перейти к решению уравнения для радиальной функции (15), которое мы запишем в виде:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - A + \frac{2B}{r} - \frac{C}{r^2} \right) f(r) = 0, \quad (44)$$

где

$$A = (m_0^2 c^2 / \hbar^2) [1 - (1 + \mathcal{E} / m_0 c^2)^2] \quad (\mathcal{E} = E - m_0 c^2), \quad (45)$$

$$B = (m_0 e^2 / \hbar^2) (1 + \mathcal{E} / m_0 c^2), \quad (46)$$

$$C = \lambda - \alpha^2 = (j' + 1)^2 \mp \sqrt{(j' + 1)^2 - \alpha^2} - \alpha^2 = l'(l' + 1), \quad l' > 0. \quad (47)$$

Решение такого уравнения хорошо известно (см. например, [13], стр. 438). В частности, для того чтобы получить уровни энергии  $\mathcal{E}$ , нужно ввести радиальное квантовое число  $k$  по формуле<sup>1</sup>

$$B / \sqrt{A} = l' + k + 1 \quad (48)$$

(мы интересуемся лишь дискретным спектром). Радиальное квантовое число может принимать значения  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Уровни энергии определяются из формулы

$$\begin{aligned} 1 + \mathcal{E} / m_0 c^2 &= [1 + \alpha^2 / (l' + k + 1)^2]^{-1/2} = \\ &= [1 + \alpha^2 / (k + 1/2 + \sqrt{1/4 + \lambda - \alpha^2})^2]^{-1/2}. \end{aligned} \quad (49)$$

Разлагая правую часть (49) в ряд по степеням  $\alpha^2$  и ограничиваясь членами порядка  $\alpha^4$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{E} / \hbar &= -\frac{R}{n^2} \left( 1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left( \frac{n}{j + 1/2} - \frac{3}{4} \right) \right), \\ n &= j + 1 \mp \frac{1}{2} + k, \quad R = \frac{m_0 e^4}{4\pi\hbar^3} = \frac{\alpha^2 m_0 c^2}{2\hbar}. \end{aligned} \quad (50)$$

Мы получили в точности формулу тонкой структуры, совпадающую с той, которая получается при решении системы уравнений Дирака.

Таким образом как релятивистски инвариантное уравнение Дирака, так и введенное в настоящей работе релятивистски инвариантное уравнение (8), одинаково приводят к формуле тонкой структуры (50). Сдвиг энергетических уровней, подтверждаемый полученными в последнее время опытными данными [14], в обоих случаях не предсказывается. Но подход к этому вопросу с точки зрения справедливости (приближенной) уравнения (8) должен, разумеется, отличаться от обычного. Вопрос о том, какое из релятивистски инвариантных уравнений: (8) или уравнение Дирака лучше вскрывает особенности явлений в микромире, остается открытым.

<sup>1</sup> Если взять значение  $l'$ , меньшее нуля, то ряд для радиальной функции расходится.

## 4. Переход к системе дифференциальных уравнений первого порядка

Использованное нами релятивистски инвариантное уравнение (8) является дифференциальным уравнением (точнее, системой уравнений) второго порядка. Уравнения же Дирака являются дифференциальными уравнениями первого порядка. Возникает естественный вопрос, нельзя ли и уравнение (8) получить из системы дифференциальных уравнений первого порядка, тоже являющихся релятивистски инвариантными. Покажем, что это действительно возможно.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений первого порядка, связывающих компоненты двух действительных спиноров  $\psi_{(1)}$  и  $\psi_{(2)}$ :

$$\nabla \psi_{(1)} - \frac{e}{\hbar c} J A \psi_{(1)} = \frac{m_0 c}{\hbar} \psi_{(2)} \quad \left( A = A_\beta R^\beta, \nabla = R^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} \right), \quad (51)$$

$$\nabla \psi_{(2)} + \frac{e}{\hbar c} J A \psi_{(2)} = \frac{m_0 c}{\hbar} \psi_{(1)}. \quad (52)$$

Эти уравнения релятивистски инвариантны. В самом деле, поскольку  $e/\hbar c$  и  $m_0 c/\hbar$  — псевдоскаляры, то в результате преобразования симметрии, характеризуемого матрицей-четырёхмерным вектором  $A_1$ , первое уравнение перейдет в

$$-A_1 \nabla A_1^{-1} A_1 \psi_{(1)} - \left( -\frac{e}{\hbar c} \right) J (-A_1 A A_1^{-1}) A_1 \psi_{(1)} = \left( -\frac{m_0 c}{\hbar} \right) A_1 \psi_{(2)},$$

что совпадает с уравнением (51). Следовательно, (51) инвариантно относительно преобразований группы Лоренца. Аналогично убеждаемся в релятивистской инвариантности уравнения (52).

Характерной особенностью уравнений (51) и (52), так же как и уравнения (8), является то, что они не меняются при замене

$$\psi_{(1)} \text{ на } e^{Jf} \psi_{(1)}, \quad \psi_{(2)} \text{ на } e^{-Jf} \psi_{(2)}, \quad A_\alpha \text{ на } A_\alpha - \frac{\hbar c}{e} \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}. \quad (53)$$

Преобразование всех величин согласно (53) можно рассматривать как градиентное преобразование. Важно только отметить, что определение градиентного преобразования в соответствии с (53) отличается от обычного, в частности тем, что здесь  $f$  необходимо рассматривать как произвольную функцию, умноженную на псевдоскаляр, и, соответственно, меняющую знак при четырёхмерных отражениях.

Умножим обе части (51) слева на оператор  $\nabla + \frac{e}{\hbar c} J A$ . Пользуясь формулой (31) из [8], получим

$$\left[ \nabla^2 + \frac{e}{\hbar c} J F + \frac{e}{\hbar c} J R^\alpha R^\beta A_\beta \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \frac{e}{\hbar c} J R^\beta A_\beta R^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \left( \frac{e}{\hbar c} \right)^2 A^2 \right] \psi_{(1)} = \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \psi_{(1)}$$

или, учитывая, что  $R^\alpha A + A R^\alpha = 2\delta_\beta^\alpha A^\beta = 2A^\alpha$ , найдем

$$\left[ \square - \left( \frac{e}{\hbar c} \right)^2 A^2 + \frac{e}{\hbar c} J \left( F + A^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial}{\partial x^\alpha} A^\alpha \right) \right] \psi_{(1)} = \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \psi_{(1)}.$$

Положив  $\hat{E} = \hbar J \frac{\partial}{\partial t} + e\varphi$ ,  $\hat{P}_k = -\hbar J \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{e}{c} A_k$ , будем иметь

$$(\hat{E}^2 - c^2 \sum_k \hat{P}_k^2 - m_0^2 c^4 + e\hbar c J F) \psi_{(1)} = 0, \quad (54)$$

что совпадает с (8).

Аналогично, умножая (52) слева на оператор  $\nabla - \frac{e}{\hbar c} JA$ , получим

$$\left[ \left( -\hbar J \frac{\partial}{\partial t} + e\varphi \right)^2 - c^2 \sum_k \left( \hbar J \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{e}{c} A_k \right)^2 - m_0^2 c^4 - e\hbar c JF \right] \psi_{(2)} = 0. \quad (55)$$

Это уравнение отличается от (8) только тем, что  $J$  заменено на  $-J$ , что соответствует замене  $i$  на  $-i$  в (9), а это не может изменить физических результатов, так что (55) эквивалентно (54).

Таким образом, рассмотренное нами релятивистски инвариантное дифференциальное уравнение второго порядка, являющееся непосредственным простым обобщением уравнения Паули (5), получается как следствие из системы уравнений первого порядка (51) и (52).

Заметим, что при рассмотрении отдельных задач может оказаться полезным другой способ записи уравнений (51) и (52). Именно, положим

$$\psi_{(1)} \leftrightarrow \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{(1)1} + i\psi_{(1)3} \\ \psi_{(1)2} + i\psi_{(1)4} \end{pmatrix}, \quad \psi_{(2)} \leftrightarrow \eta = \begin{pmatrix} \psi_{(2)1} + i\psi_{(2)3} \\ \psi_{(2)2} + i\psi_{(2)4} \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Воспользуемся тем, что согласно [1],

$$-B\psi_{(1)} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -e^{-i\mu} \\ e^{-i\mu} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = e^{-i(\mu+\pi/2)} \sigma_2 \bar{\xi}. \quad (57)$$

Для определенности мы можем принять, как в [1] (стр. 662), что  $\mu + \pi/2 = 0$ , поскольку параметр  $\mu$  может быть выбран произвольно. Поэтому из (51) и (52), используя (57), получим

$$\left[ \sigma_k \left( \frac{\partial}{\partial x^k} + i \frac{e}{\hbar c} A_k \right) + \frac{1}{c} \left( \frac{\partial}{\partial t} - i \frac{e}{\hbar} \varphi \right) \right] \xi = \frac{m_0 c}{\hbar} \sigma_2 \bar{\eta}, \quad (58)$$

$$\left[ \sigma_k \left( \frac{\partial}{\partial x^k} - i \frac{e}{\hbar c} A_k \right) + \frac{1}{c} \left( \frac{\partial}{\partial t} + i \frac{e}{\hbar} \varphi \right) \right] \eta = \frac{m_0 c}{\hbar} \sigma_2 \bar{\xi}. \quad (59)$$

Чтобы можно было более детально исследовать систему уравнений (51), (52), нужно выяснить, для какой системы тензоров два действительных спинора  $\psi_{(1)}$  и  $\psi_{(2)}$  являются параметрами, и как связаны между собой первичные тензоры. Этот вопрос будет рассмотрен в следующей статье.

Иваново

Поступила в редакцию  
3 апреля 1954 г.

### Литература

- [1] Г. А. Зайцев. ЖЭТФ, 25, 653, 1953. — [2] P. A. M. Dirac. Proc. Roy. Soc. London, 117, 610; 118, 341, 1928. — [3] В. А. Фок. Начала квантовой механики. Кубуч, 1932. — [4] Луи де-Бройли. Магнитный электрон, ОНТИ, Харьков, 1936. — [5] В. Паули. Общие принципы волновой механики, ГИТТЛ, 1947. — [6] П. А. М. Дирак. Квантовая механика, ОНТИ, 1937. — [7] Г. А. Зайцев. ЖЭТФ, 25, 667, 1953. — [8] Г. А. Зайцев. ЖЭТФ, этот выпуск, стр. 524. — [9] Д. И. Блохинцев. Основы квантовой механики, ГИТТЛ, 1949. — [10] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. Квантовая механика, ГИТТЛ, 1948. — [11] Е. Кондон и Г. Шортли. Теория атомных спектров, ИИЛ, 1949. — [12] Г. Бете. Квантовая механика простейших систем, ОНТИ, 1935. — [13] А. А. Соколов и Д. Д. Иваненко. Квантовая теория поля, ГИТТЛ, 1952. — [14] Сб. «Сдвиг уровней атомных электронов», ИИЛ, 1950.

## ИЗМЕРЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВНУТРЕННЕЙ КОНВЕРСИИ $\gamma$ -ЛУЧЕЙ $\text{Sr}^{87*}$ , $\text{In}^{113*}$ , $\text{In}^{115*}$ И $\text{V}^{51*}$ НА ЭЛЕКТРОНАХ АТОМОВ

И. В. Эстулин и Е. М. Моисеева

Определены полные коэффициенты внутренней конверсии  $\gamma$ -лучей  $\text{Sr}^{87*}$ ,  $\text{In}^{113*}$ ,  $\text{In}^{115*}$  и  $\text{V}^{51*}$  на электронах атомов путем прямых измерений числа электронов и  $\gamma$ -квантов, излучаемых источником. Найденные соответственно значения:  $0,26 \pm 0,03$ ,  $0,39 \pm 0,04$ ,  $0,9 \pm 0,6$  и  $(3,1 \pm 0,2) \cdot 10^{-3}$  приводят к заключению об электрическом  $2^5$ -полном радиационном переходе  $\text{Sr}^{87*}$ ,  $\text{In}^{113*}$  и  $\text{In}^{115*}$  и электрическом квадрупольном переходе  $\text{V}^{51*}$ .

### 1. Введение

В случае ядерного радиационного перехода величина коэффициента внутренней конверсии  $\gamma$ -лучей на электронах атома зависит от характера перехода и мультипольности излучения [1]. При этом коэффициенты внутренней конверсии, соответствующие электрическому или магнитному характеру излучения, по соседним мультипольностям различаются в большинстве случаев не более, чем на 20—50%. Поэтому однозначные выводы о мультипольности и характере ядерного радиационного перехода, получаемые путем сравнения теоретических и экспериментальных значений коэффициентов внутренней конверсии  $\gamma$ -лучей, могут быть сделаны только при достаточно точных измерениях. При этом желательно применение различных способов измерения коэффициентов внутренней конверсии  $\gamma$ -лучей, чтобы исключить возможные методические ошибки отдельных опытов.

В работе [2] были измерены коэффициенты  $\alpha$  внутренней конверсии  $\gamma$ -лучей, испускаемых при изомерных переходах  $\text{Sr}^{87*}$ ,  $\text{In}^{113*}$  и  $\text{In}^{115*}$ , путем прямых измерений числа  $\gamma$ -квантов  $N_\gamma$  и электронов  $N_e$ , излучаемых изомером:  $\alpha = N_e / N_\gamma$ . Для измерения  $N_e$  и  $N_\gamma$  в этой работе применялась ионизационная методика. В случаях, рассмотренных в работе [2], возможно измерение монохроматического электронного и  $\gamma$ -излучения другими методами. Так, в настоящей работе излучения регистрировались газоразрядными счетчиками. Введение обоснованных поправок позволило определить абсолютное значение числа электронов и  $\gamma$ -квантов, излучаемых исследовавшимися источниками с монохроматическим спектром  $\gamma$ -излучения. Изложенные ниже исследования выполнялись с целью проверки данных работы [2], противоречащих заключениям о характере изомерных переходов  $\text{Sr}^{87*}$ ,  $\text{In}^{113*}$  и  $\text{In}^{115*}$ , полученным в работах, посвященных классификации ядерных изомеров [3].

### 2. Методика измерений

Для измерения  $\gamma$ -лучей в работе применялся обычный газоразрядный цилиндрический счетчик длиной 10 см и диаметром 2 см. Внутренний стеклянный баллон счетчика был металлизирован тонким медным покрытием. Эффективность этого счетчика в интересующей нас области энергий  $\gamma$ -лучей была измерена при помощи радиоактивных изотопов  $\text{Hg}^{203}$ ,  $\text{Sr}^{87*}$  и  $\text{Au}^{198}$  с простым спектром  $\gamma$ -лучей [4] с интен-

сивными монохроматическими линиями с энергией 279, 390 и 411 keV соответственно. Число  $\gamma$ -квантов, испускаемых упомянутыми источниками, предварительно измерялось на щелевой ионизационной камере, эффективность которой к  $\gamma$ -лучам была известна [5]. Найденная таким образом зависимость  $\epsilon$  от энергии  $\gamma$ -квантов приведена на рис. 1.

В силу малой эффективности газоразрядного счетчика к  $\gamma$ -лучам измерение исследовавшихся в работе источников с активностью порядка

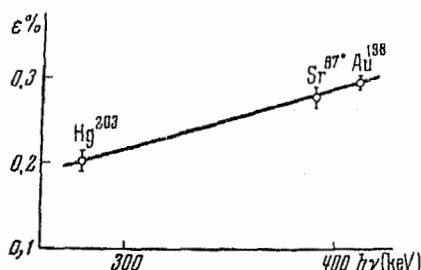


Рис. 1. Зависимость эффективности газоразрядного счетчика от энергии  $\gamma$ -квантов

0,1 mCi проводилось при расстояниях между источником и счетчиком 3—8 см. Геометрические условия этих опытов предварительно калибровались по измерениям с источником большой активности, который можно было измерять как при расстояниях 3—8 см, так и при значительно больших расстояниях между источником и счетчиком. При расстояниях 20—50 см вычисление телесного угла источника относительно счетчика не вызывает затруднений.

Исследуемый источник высаживался на слюдяную подложку толщиной 13,5 мг/см<sup>2</sup>, вклеивавшуюся в алюминиевую чашечку. При измерении числа электронов, излучаемых источником, алюминиевая чашечка 1 с препаратом помещалась внутри стеклянной вакуумной трубки 2 с внутренним диаметром 30—35 мм, как показано на рис. 2.

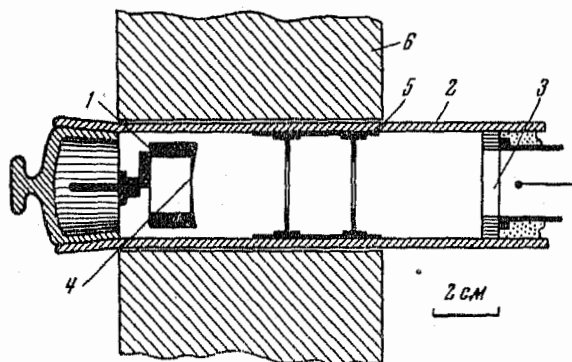


Рис. 2. Установка для измерений интенсивности электронов. 1 — алюминиевая чашечка, 2 — вакуумная трубка, 3 — торцовый газоразрядный счетчик, 4 — источник, 5 — алюминиевые диафрагмы, 6 — полюсы электромагнита

На другом конце вакуумной трубки находился торцовый газоразрядный счетчик 3 со слюдяным окном толщиной 3—4 мг/см<sup>2</sup>, диаметром 20 мм. Между источником 4 и счетчиком располагались алюминиевые диафрагмы 5, не закрывающие источника от входного окна счетчика, но преграждающие путь электронам, рассеявшимся на стенках вакуумной трубки. Область трубки, прилегающая к счетчику, не облучалась электронами, застревавшими в диафрагмах. Расстояние между источником и счетчиком было 6—9 см. Размер источника составлял 4—8 мм, что позволяло считать его близким к точечному. Вакуумная трубка помещалась между полюсами магнита 6 таким образом, чтобы счетчик был вне полюсов. При измерении числа электронов, испускаемых источником, воздух из трубки эвакуировался. Действие рентге-

новского и  $\gamma$ -излучения на торцовый счетчик учитывалось при измерениях в магнитном поле напряженностью в 1600 Г, отклонявшем электроны. Для получения абсолютной интенсивности электронов вводились поправки на поглощение электронов в слюдяном окне счетчика и источнике, а также поправки на обратное рассеяние электронов в подложке источника.

Путем изменения давления в вакуумной трубке измерялось поглощение электронов при расположении, применявшемся в данных опытах. Измеренные участки кривой поглощения аппроксимируются экспонентами с коэффициентами поглощения  $\mu = 24 \text{ см}^2/\text{г}$  для электронов, испускаемых  $\text{In}^{113*}$ ,  $\mu = 44 \text{ см}^2/\text{г}$  для электронов, излучаемых препаратом  $\text{Sr}^{87}$ , и  $\mu = 46 \text{ см}^2/\text{г}$  для электронов  $\text{In}^{115*}$ . Поглощение электронов в окне счетчика и в препарате вычислялось по этим экспериментально найденным значениям коэффициентов поглощения. Поправки на поглощение электронов в слюдяном окне счетчика были порядка 10—15%. Поправка на поглощение в источнике, естественно, зависела от толщины препарата.

В контрольных опытах источник  $\text{Sr}^{87}$  был высажен на слюдяной подложке толщиной в  $2,6 \text{ мг}/\text{см}^2$ . В дальнейшем с задней стороны подложки подклеивалась дополнительная слюда. Отсчеты счетчика увеличивались на 4—5% при толщине подложки  $13,5 \text{ мг}/\text{см}^2$  (подложка, применявшаяся при абсолютных измерениях электронов) и до 10—12% при толщине слюды в 2 мм. Пренебрегая эффектом отражения электронов от тонкой подложки, мы получили поправку на обратное рассеяние электронов в измерениях числа электронов, испускаемых источником. Контрольный опыт доказал также, что отражением от алюминиевой чашечки  $I$  можно пренебречь (70% площади дна чашечки вырезано).

Чистота изучавшихся источников контролировалась по кривой распада, измеренной по  $\beta$ - и  $\gamma$ -излучению. Энергия регистрируемых электронов оценивалась по пробегу их в алюминии. Найденное таким образом значение доказывало, что измерения производились с электронами, вырванными из атома при внутренней конверсии  $\gamma$ -лучей. Пробег этих электронов в рассмотренных случаях был порядка  $100 \text{ мг}/\text{см}^2$ .

### 3. Измерения с $\text{In}^{113*}$ , $\text{In}^{115*}$ и $\text{Sr}^{87*}$

Изотоп  $\text{In}^{113*}$ , образующийся при распаде изотопа  $\text{Sn}^{113}$ , добывался в чистом виде химическим путем из активного олова. Источник высаживался на слюдяную подложку в практически невесомом количестве. Вначале производились измерения числа  $\gamma$ -квантов, излучаемых препаратом. Затем источник помещался в вакуумную трубку, описанную в предыдущем разделе. При измерении числа электронов, испускаемых препаратом, вводились поправки на поглощение электронов в окне счетчика (11%) и обратное рассеяние электронов в подложке (4%). Всего было выполнено четыре различных серии измерений.

Чистый изотоп  $\text{In}^{115*}$ , образующийся при распаде 54-часового изотоп  $\text{Cd}^{115}$ , добывался химическим путем из активного кадмия. Вес нанесенного на слюду источника был меньше 1 мг. Поэтому поглощение электронов в препарате не учитывалось. При определении числа электронов, вырванных из атома при внутренней конверсии  $\gamma$ -лучей, мы принимали во внимание, что  $\text{In}^{115*}$  может путем  $\beta$ -распада переходить в  $\text{Sn}^{115}$  (ответвление  $\beta$ -спектра, 5,5% [4]). Среднее из полученных в четырех сериях опытов значение полного коэффициента внутренней конверсии  $\gamma$ -лучей  $\text{In}^{115*}$  приведено в табл. 1.

При измерении  $\text{Sr}^{87*}$  мы не располагали химическим чистым невесомым количеством изомера. Азотнокислый стронций, содержавший интере-

сующий нас изомер, в виде мелкого порошка наносился на слюдяную подложку. Во избежание распыления при откачивании в вакуумной трубке препарат толщиной  $8-16 \text{ мг/см}^2$  заклеивался тонкой органической пленкой толщиной  $\sim 0,1 \text{ мг/см}^2$ . Поправка на поглощение электронов в источнике была порядка  $10-20\%$ . Поглощение монохроматических электронов с энергией, близкой к энергии электронов, излучаемых  $\text{Sr}^{87*}$ , было ранее подробно изучено с невесомым препаратом  $\text{In}^{113*}$ . Всего было выполнено пять серий опытов, среднее значение результатов которых приведено в табл. 1. Какой-либо зависимости от толщины источника обнаружено не было, что указывало на правильное вычисление поглощения электронов в источнике.

Таблица 1

Характеристика изомерных переходов  $\text{In}^{113*}$ ,  $\text{In}^{115*}$  и  $\text{Sr}^{87*}$ 

| Наименование<br>изомера | Период полураспада<br>в часах | Энергия возбужде-<br>ния в KeV | Полный коэффициент внут-<br>ренней конверсии $\gamma$ -лучей<br>на электронах атома $\alpha$ |                                  | Коэффициент внутренней конверсии<br>$\gamma$ -лучей на $K$ -оболочке атома $\alpha_K$ |                                                     |                                                 |
|-------------------------|-------------------------------|--------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
|                         |                               |                                | По данным<br>работы[2]                                                                       | По данным<br>настоящей<br>работы | Экспери-<br>ментальное<br>значение                                                    | Теоретическое значение                              |                                                 |
|                         |                               |                                |                                                                                              |                                  |                                                                                       | Электрический<br>переход<br>2 <sup>+</sup> -полноты | Магнитный<br>переход<br>2 <sup>+</sup> -полноты |
| In <sup>113*</sup>      | 1,75                          | 392                            | 0,44 ± 0,03                                                                                  | 0,39 ± 0,04                      | 0,32                                                                                  | 0,33                                                | 0,46                                            |
| In <sup>115*</sup>      | 4,5                           | 334                            | 0,82 ± 0,13                                                                                  | 0,9 ± 0,06                       | 0,70                                                                                  | 0,69                                                | 0,92                                            |
| Sr <sup>87*</sup>       | 2,8                           | 390                            | 0,28 ± 0,03                                                                                  | 0,26 ± 0,03                      | 0,22                                                                                  | 0,23                                                | 0,19                                            |

В табл. 1 рассмотрены основные характеристики изомерных переходов  $\text{In}^{113*}$ ,  $\text{In}^{115*}$  и  $\text{Sr}^{87*}$ . В первых столбцах таблицы приведены периоды полураспада и энергии соответствующих переходов. В последующих столбцах приводятся значения коэффициентов внутренней конверсии  $\gamma$ -лучей на электронах атома  $\alpha$ , измеренные ранее в работе Антоновой и Эстулина [2], а также  $\alpha$ , полученные в настоящей работе. Ошибки измерений указаны среднеарифметические, найденные из разброса отдельных опытов. В опытах с  $\text{In}^{115*}$  разброс отдельных измерений был незначительным. В этом случае в качестве ошибки опыта принята половина максимальной аппаратурной ошибки. В пределах ошибки измерений результаты настоящей работы совпадают с данными работы [2]. При этом следует отметить, что в настоящей работе применялась иная методика абсолютных измерений числа электронов и  $\gamma$ -квантов, по сравнению с методикой, применявшейся в работе [2]. Таким образом возможность методической ошибки измерений для рассмотренных значений полных коэффициентов внутренней конверсии  $\gamma$ -лучей на электронах атома уменьшилась.

По найденным в настоящей работе значениям  $\alpha$  были определены экспериментальные значения коэффициентов внутренней конверсии  $\gamma$ -лучей на электронах  $K$ -оболочки атома  $\alpha_K$  (столбец 6 табл. 1). Отношение коэффициентов внутренней конверсии на  $K$ - и  $L + M + \dots$ -оболочках атома  $\alpha_K / \alpha_{L+M+\dots}$  взято из экспериментальных работ других авторов и принято точно таким же, как и в работе [2]. Теоретические значения  $\alpha_K$ , полученные экстраполяцией<sup>1</sup> данных работы [6], приведены в последних столбцах таблицы. Экспериментально найденные значения  $\alpha_K$  согласуются с теоретическими значениями  $\alpha_K$  для электри-

<sup>1</sup> Подробнее этот вопрос рассмотрен ранее в работе [2].

ческого перехода  $2^5$ -польности. Таким образом, если справедливы теоретические значения  $\alpha_K$  работы [6], изомерные переходы  $\text{In}^{113*}$ ,  $\text{In}^{115*}$  и  $\text{Sr}^{87*}$  следует отнести к типу электрических переходов  $2^5$ -польности. Эти выводы, полностью подтверждающие выводы работы [2], не противоречат предсказаниям теории ядерных оболочек.

#### 4. Мультипольность $\gamma$ -излучения $\text{V}^{51*}$

Радиоактивный изотоп  $\text{Cr}^{51}$  с периодом полураспада 26,5 дней распадается путем захвата орбитального электрона, образуя  $\text{V}^{51}$  частично в возбужденном состоянии [4]. В некоторых работах [7] указывалось на возникновение двух возбужденных состояний  $\text{V}^{51}$ . Однако в дальнейшем было доказано, что при распаде  $\text{Cr}^{51}$  реализуется лишь одно возбужденное состояние  $\text{V}^{51}$  с энергией возбуждения 320 keV. В работе [7] коэффициент внутренней конверсии  $\gamma$ -излучения, связанного с переходом  $\text{V}^{51*} \rightarrow \text{V}^{51}$ , принимается равным  $\alpha \sim 0,02$ . Позже в работе [8] приведено значение  $\alpha = 1,5 \cdot 10^{-3}$ .

Таким образом радиоактивный изотоп  $\text{Cr}^{51}$  излучает интенсивное характеристическое рентгеновское излучение и не имеет иного электронного излучения кроме тех электронов, которые вырваны из атома при внутренней конверсии  $\gamma$ -лучей  $\text{V}^{51*}$  с энергией возбуждения 320 keV. Ввиду отсутствия непрерывного  $\beta$ -спектра измерение коэффициента внутренней конверсии  $\gamma$ -лучей  $\text{V}^{51*}$  в магнитном спектрометре методом сравнения площадей невозможно. В рассматриваемом случае оказалось возможным, несмотря на малость  $\alpha$ , измерить его значение путем абсолютных измерений интенсивности электронов и  $\gamma$ -квантов методом, изложенным ранее в разделе 2 настоящей работы. Точно так же, как в измерениях с  $\text{In}^{113*}$ ,  $\text{In}^{115*}$  и  $\text{Sr}^{87*}$ , источник, содержащий радиоактивный изотоп  $\text{Cr}^{51}$ , наносился на слюдяную подложку и после измерения  $\gamma$ -лучей помещался в вакуумную трубку (рис. 2). Толщина источника была 5,5 мг/см<sup>2</sup>. Поправка на поглощение электронов в источнике составляла 10%. Оказалось существенным точное измерение отсчетов торцового счетчика при включенном магнитном поле и без него, так как газоразрядный счетчик с тонким окном был эффективен к характеристическому рентгеновскому излучению  $\text{V}^{51}$ . Всего было выполнено пять различных серий измерений. В результате получено значение полного коэффициента внутренней конверсии  $\alpha = (3,1 \pm 0,2) \cdot 10^{-3}$ .

Перейдем от полного коэффициента внутренней конверсии к коэффициенту конверсии  $\gamma$ -лучей на  $K$ -оболочке атома  $\alpha_K$ , теоретическое значение которого известно [9]. Естественно для этой цели использовать отношение коэффициентов внутренней конверсии на  $K$ - и  $L$ -оболочках атома  $\alpha_K/\alpha_L$ . В рассматриваемом случае дипольного или квадрупольного излучения и малого параметра  $Z^2/E = 1,65$  ( $Z$  — атомный номер,  $E$  — энергия радиационного перехода в keV), определяющего отношение  $\alpha_K/\alpha_L$  [8], величина  $\alpha_K/\alpha_L$  — порядка 11 для магнитного характера излучения и порядка 12 при электрическом характере излучения [10]. Эти значения отношения  $\alpha_K/\alpha_L$ , взятые из теоретических работ, вычислены в борновском приближении, справедливом, вероятно, в рассматриваемом случае. Экспериментальное значение  $\alpha_K$

Таблица 2  
Коэффициент внутренней конверсии  $\gamma$ -лучей  $\text{V}^{51*}$  на  $K$ -оболочке атома  $\alpha_K$

| Экспериментальное значение    | Теоретические значения      |                                     |
|-------------------------------|-----------------------------|-------------------------------------|
|                               | Дипольный магнитный переход | Квадрупольный электрический переход |
| $(2,9 \pm 0,2) \cdot 10^{-3}$ | $0,95 \cdot 10^{-3}$        | $3,8 \cdot 10^{-3}$                 |

(табл. 2) получено из  $\alpha$  — с учетом упомянутой величины отношения  $\alpha_K/\alpha_L$ . В табл. 2 приведены также теоретические значения  $\alpha_K$  для дипольного магнитного и квадрупольного электрического переходов, которые были найдены экстраполяцией данных работы [6] для  $Z = 23$ .

Сравнение экспериментальных и теоретических значений  $\alpha_K$  приводит к заключению об электрическом квадрупольном характере перехода  $V^{51*} \rightarrow V^{51}$ . Возможна небольшая примесь магнитного дипольного излучения. Согласно теории ядерных оболочек с сильной спин-орбитальной связью, основному состоянию  $V^{51}$  соответствует состояние  $f_{7/2}$ . При последовательном заполнении нуклонных оболочек первый возбужденный уровень будет иметь состояние  $f_{5/2}$ , дырочный уровень состояние  $s_{1/2}$ , или  $d_{3/2}$ . Заключение о квадрупольном характере излучения подтверждается последовательным заполнением нуклонных уровней при возбуждении ядра  $V^{51}$ , в соответствии с выводами работы [11]. Переход  $V^{51*} \rightarrow V^{51}$  является переходом типа  $f_{5/2} \rightarrow f_{7/2}$ . При этом соотношение вероятностей распада  $\text{Cr}^{51}$  в основное или возбужденное состояние  $V^{51}$  [8, 9] не противоречит состоянию  $f_{7/2}$  ядра  $\text{Cr}^{51}$ , предсказываемому теорией ядерных оболочек.

В заключение авторы выражают благодарность З. В. Пастуховой, Н. И. Мертц и Я. А. Клейману за помощь в работе.

Московский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
24 апреля 1954 г.

### Литература

- [1] Л. В. Грошев и И. С. Шапиро. Спектроскопия атомных ядер, ГИТТЛ, М., 1952. — [2] И. А. Антонова и И. В. Эстулин. Изв. АН СССР, серия физич., 18, 79, 1954. — [3] М. Гольдгабер и А. Суньяр. Проблемы современной физики, 4, 71, ИИЛ, М. 1952. M. Goldhaber a. R. D. Hill. Rev. Mod. Phys., 24, 179, 1952. — [4] J. M. Hollander, L. Perlman a. G. T. Seaborg. Rev. Mod. Phys., 25, 469, 1953. — [5] И. В. Эстулин. ЖЭТФ, 24, 224, 1953. — [6] M. Rose, G. Goertzel, B. Spinard, J. Harr a. P. Strong. Phys. Rev., 83, 79, 1951. — [7] H. Bradt, M. C. Gugelot, O. Huber, H. Medicus, P. Preiswerk u. P. Scherrer. Helv. Phys. Acta, 18, 259, 1945. — [8] D. Maeder, P. Preiswerk u. A. Strineman. Helv. Phys. Acta, 25, 461, 1952. — [9] W. S. Lyon. Phys. Rev., 87, 1126, 1952. — [10] M. H. Hebb a. E. N. Nelson. Phys. Rev., 58, 486, 1940. N. Traill a. J. S. Lowen. Phys. Rev., 76, 1541, 1949. — [11] Л. К. Пекер, Л. А. Слив и Л. В. Золотавин. ДАН СССР, 88, 781, 1953. Л. К. Пекер и Л. А. Слив. Изв. АН СССР, серия физич., 17, 414, 1953.

## ЭНТРОПИЯ В КВАНТОВОЙ СТАТИСТИКЕ

Р. Л. Стратонович

Рассмотрены состояния и энтропия квантово-механических систем при неортогональных реализациях волновой функции. Показано, что из общих формул вытекают, с одной стороны, формулы классической статистики и, с другой стороны, известные результаты квантовой статистики.

Когда речь идет о квантовой теории, слово «статистика» можно понимать в двух различных смыслах. Квантовая теория статистична сама по себе, в частности, волновая функция имеет статистический смысл. Соответствующие этому статистические коллективы можно, пользуясь терминологией Д. И. Блохинцева, назвать «чистыми» ансамблями. Но наряду с этой «чистой» статистичностью существует статистика другого рода, вступающая в силу, когда волновая функция сама является случайной. Мы под термином «квантовая статистика» будем понимать последнее, а именно, статистику, которая занимается рассмотрением «смешанных» ансамблей. В то же время к квантовой статистике мы будем относить не только статистическую физику равновесных состояний, т. е. статистическую термодинамику, но и квантовую статистику неравновесных состояний, хотя в настоящее время последняя еще не развита.

Современная квантовая статистика, ограниченная статистической термодинамикой, оперирует с таким статистическим коллективом волновых функций, в котором отдельные реализации волновой функции, являясь собственными функциями энергии, ортогональны друг другу. Для такого коллектива известны формулы, определяющие энтропию.

Естественно поставить вопрос, чему равна энтропия произвольного статистического коллектива волновых функций, другими словами, произвольной системы, над которой не произведен максимально полный опыт, т. е. произвольного смешанного ансамбля. Искомая формула должна, с одной стороны, переходить при соответствующих условиях в формулы классической статистики и, с другой стороны, для ортогональных реализаций волновой функции — в известные формулы квантовой статистической термодинамики.

1. Пусть имеется ряд возможных реализаций волновой функции:  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_2(x)$ , ... ( $x$  обозначает совокупность аргументов  $x_1, \dots, x_r$ , которые могут быть также дискретными). Пусть, далее, известна вероятность  $w_1$  того, что выпадет функция  $\psi_1(x)$ , вероятность  $w_2$  того, что выпадет  $\psi_2(x)$ , и т. д., т. е. известны вероятности

$$w_i = P\{\psi(x) = \psi_i(x)\}, \quad i = 1, 2, \dots$$

В таком случае мы будем говорить, что задана схема

$$\begin{pmatrix} \psi_1(x) & \psi_2(x) & \dots \\ w_1 & w_2 & \dots \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Волновая функция  $\psi(x)$  иногда может реализоваться в функции из некоторого непрерывного множества функций. В любом случае

$\psi(x)$  является случайной функцией и как таковая может полно описываться известными для случайной функции статистическими характеристиками, например, бесконечной последовательностью моментных функций:

$$\begin{aligned} & M\psi(x), \quad M\psi(x_1)\psi(x_2), \quad M\psi(x_1)\psi^*(x_2), \\ & M\psi(x_1)\psi(x_2)\psi(x_3), \quad M\psi(x_1)\psi(x_2)\psi^*(x_3), \dots \end{aligned} \quad (2)$$

(Здесь  $M$  — математическое ожидание.)

С самого начала возникает вопрос, какую роль играют те или другие моментные функции, все ли они важны для описания физического объекта (смешанного квантового ансамбля)? В этом отношении далеко не тривиальным является постулат: из всей совокупности (2) ни одна моментная функция, кроме  $M\psi(x)\psi^*(x') = \rho(x, x')$ , не имеет абсолютно никакого значения.

Если зафиксировать  $\rho(x, x')$  и менять прочие моментные функции, то случайная волновая функция неизменно будет описывать один и тот же физический объект. Аналогичное положение имеет место, например, в электродинамике, где различные 4-компонентные вектор-потенциалы  $A_1$  и  $A_2$  описывают одно и то же поле, если разность  $A_1 - A_2$  является градиентом некоторой функции, или в квантовой механике в отношении умножения волновой функции на число единичного модуля. Причину указанного обстоятельства следует искать в следующем. «Матрица состояния»  $\psi(x)\psi^*(x')$  в квантовой механике играет роль плотности распределения вероятностей (как известно, при  $x = x'$  мы имеем точную плотность распределения вероятностей, но в редуцированном пространстве). Если же плотность распределения случайна, то во всех вероятностных задачах имеет значение лишь математическое ожидание этой плотности распределения — в этом же причина линейности математического аппарата квантовой механики. Таким образом, как указанный постулат, так и линейность математического аппарата имеют своим основанием первичную («чистую») статистичность квантовой теории.

Итак, вместо схемы (1), мы вправе взять любую другую схему

$$\begin{pmatrix} \psi'_1(x) & \psi'_2(x) & \dots \\ w'_1 & w'_2 & \dots \end{pmatrix}, \quad (3)$$

для которой

$$\sum_i w'_i \psi'_i(x) \psi_i^{**}(x') = \sum_i w_i \psi_i(x) \psi_i^*(x').$$

Подобные схемы, равноправно описывающие один и тот же физический объект, мы будем называть эквивалентными.

Каждой квантово-статистической системе и описывающей ее матрице плотности соответствует бесконечное множество эквивалентных схем, представляющих данный физический объект. Среди них особую роль играют схемы с ортогональными реализациями, т. е. схемы

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix}, \quad (4)$$

для которых

$$\int \varphi_i(x) \varphi_j^*(x) dx = \delta_{ij}. \quad (5)$$

Пусть задана произвольная неортогональная схема; попытаемся найти эквивалентную ей схему с ортогональными реализациями. Эта

задача эквивалентна задаче приведения эрмитовой матрицы

$$\rho(x, x') = \sum_i \omega_i \psi_i(x) \psi_i^*(x') \quad (6)$$

к диагональному виду унитарным преобразованием. Последнее может быть найдено для любой матрицы плотности (6), поскольку эта матрица — эрмитова. Как обычно, это преобразование находится путем решения уравнения:

$$\rho\varphi = \lambda\varphi, \quad (7)$$

или для непрерывных координат  $x$

$$\int \rho(x, x') \varphi_m(x') dx' = \lambda_m \varphi_m(x). \quad (7a)$$

Для дискретного пространства  $x$  интегралы в (5), (7a), а также во многих последующих равенствах, следует, разумеется, заменить на суммы.

Матрица  $\varphi_m(x)$  и будет матрицей искомого унитарного преобразования. В новом представлении матрица плотности будет иметь диагональный вид

$$\rho_{mn} = \iint \varphi_m^*(x) \rho(x, x') \varphi_n(x') dx dx' = \lambda_m \delta_{mn}.$$

Обратное преобразование запишется в форме

$$\rho(x, x') = \sum_m \varphi_m(x) \rho_{mn} \varphi_n^*(x') = \sum_m \lambda_m \varphi_m(x) \varphi_m^*(x'), \quad (8)$$

откуда видно, что  $\rho(x, x')$  является матрицей плотности схемы

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots \end{pmatrix}, \quad (9)$$

которая вследствие (6) и (8) эквивалентна схеме (1). Ортогональность этой схемы, т. е. равенство (5), следует из условия унитарности матрицы  $\varphi_m(x)$ .

Вследствие инвариантности следа матрицы при унитарных преобразованиях имеем

$$\sum \lambda_m = \text{Tr} \rho = \int \rho(x, x) dx = 1. \quad (10)$$

Остается только проверить неотрицательность  $\lambda_m$ , т. е., что  $\lambda_m$  действительно могут играть роль вероятностей.

Матрица плотности всегда является положительно определенной, так как при любой функции  $f(x)$

$$\iint \rho(x, x') f(x) f^*(x') dx dx' = \sum_i \omega_i \left| \int \psi_i(x) f(x) dx \right|^2 \geq 0. \quad (11)$$

Отсюда следует, что все  $\lambda_m$  неотрицательны, в чем легко убедиться, полагая в (11)  $f(x) = \varphi_m^*(x)$  [при этом левая часть (11) совпадает с  $\lambda_m$ ].

Разберем вопрос о единственности схемы из ортогональных реализаций. Линейная алгебра дает указание, что разложение матрицы плотности по ортогональным реализациям можно провести единственным образом тогда, и только тогда, когда среди собственных значений  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  нет совпадающих. В противоположном случае мы будем говорить, что имеет место вырождение. Пусть  $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots$  — набор

различных значений, которые встречаются среди  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ , а  $l_1, l_2, \dots$  — соответствующие им кратности ( $\Lambda_j$  встречается среди  $\lambda_1, \lambda_2, \dots$  именно  $l_j$  раз). При таких обозначениях (10) можно записать в виде

$$\sum_j l_j \Lambda_j = 1.$$

Каждому  $\Lambda_j$  будет соответствовать  $l_j$  ортогональных функций

$$\varphi_{j1}, \dots, \varphi_{jl_j} \quad \left( \int \varphi_{jm}(x) \varphi_{jn}^*(x) dx = \delta_{mn} \right). \quad (12)$$

Однако совокупность функций (12) не определяется однозначно; ее можно заменить любой другой совокупностью, полученной из (12) путем применения унитарного преобразования. Инвариантным при всех таких преобразованиях остается лишь линейное многообразие

$$[\varphi_{j1}, \dots, \varphi_{jl_j}] \equiv \mu_1 \varphi_{j1} + \dots + \mu_{l_j} \varphi_{jl_j} \quad (13)$$

( $\mu_1, \dots, \mu_{l_j}$  — произвольные числа), а также сфера  $|\mu_1|^2 + \dots + |\mu_{l_j}|^2 = 1$ .

В случае вырождения ( $l_j > 1$ ) выделение какой-либо преимущественной системы реализаций не имеет смысла, и даже требование ортогональности не способно привести к такой системе. Избегая неоправданной многозначности и не желая переопределять объект (т. е. говорить о нем что-либо лишнее), мы будем в этом случае характеризовать объект указанием описывающего его линейного многообразия (или сферы)

$$[\psi_1(x), \dots, \psi_s(x)]. \quad (14)$$

Квантово-статистическое состояние, описываемое посредством (14), является обобщением состояния, описываемого отдельной волновой функцией  $\psi(x)$ . Выбирая в качестве возможных реализаций состояния типа (14), мы приходим к эквивалентной схеме

$$\left( \begin{array}{ccc} [\varphi_{11}(x), \dots, \varphi_{1l_1}(x)] & [\varphi_{21}(x), \dots, \varphi_{2l_2}(x)] & \dots \\ P_1 & P_2 & \dots \end{array} \right) \quad (P_j = l_j \Lambda_j). \quad (15)$$

Эта схема является фундаментальной в том смысле, что всякое квантово-статистическое состояние (всякая схема) приводится к ней однозначно, и наоборот, различным состояниям (матрицам плотности) соответствуют различные фундаментальные схемы, т. е. имеет место взаимоднозначное соответствие. Различные реализации схемы (15) (например,  $[\varphi_{j1}, \dots, \varphi_{jl_j}]$  и  $[\varphi_{k1}, \dots, \varphi_{kl_k}]$ ,  $j \neq k$ ) ортогональны между собой. Линейные многообразия ортогональны, когда ортогональны их элементы:

$$\int \varphi_{ja} \varphi_{kb}^* = 0, \quad a = 1, \dots, l_j, \quad b = 1, \dots, l_k \quad (j \neq k).$$

Случай, когда вырождение отсутствует, формально также можно записать в виде (15), так как в случае одной функции  $[\varphi(x)]$  совпадает с  $\varphi(x)$ .

2. Перейдем к рассмотрению энтропии, которую мы понимаем, в соответствии с работами [1-2], как величину, характеризующую неопределенность (дезинформацию), или статистический разброс данного состояния. Безразмерную энтропию мы, следуя традиции, установившейся в теории информации, будем обозначать буквой  $H$ . Тогда

обычная энтропия, имеющая размерность энергия/градус, будет равна

$$S = kH,$$

где  $k$  — постоянная Больцмана.

Обозначим через  $A_i$  событие, заключающееся в выпадении реализации  $\psi_i(x)$  схемы (1),  $i = 1, 2, \dots$ . Если события  $A_1, A_2, \dots$  — взаимноисключающие, то, согласно общей формуле, приведенной в [2], энтропия системы равна

$$H = - \sum_i P(A_i) \ln \frac{P(A_i)}{Q(A_i)}, \quad (16)$$

где  $P(A_i)$  и  $Q(A_i)$  — вероятность и абстрактный «объем» события  $A_i$ .

Пользуясь независимостью «объемов» событий от распределения вероятностей, определим  $Q(A_i)$ . Напомним, что энтропия «детерминированного» (в смысле отсутствия «смешанной» статистичности) квантового состояния, описываемого определенной волновой функцией  $\psi_i(x)$ , равна нулю. Полагая в (16)  $w_i = 1$ ,  $w_j = 0$  ( $j \neq i$ ) и приравняв это выражение нулю, получаем  $Q(A_i) = 1$ . Такую процедуру можно проделать для различных  $i$ , следовательно

$$H = - \sum_i w_i \ln w_i. \quad (17)$$

Эта известная формула справедлива, когда события  $A_1, A_2, \dots$  являются взаимно исключающими.

Особенность квантовой теории состоит в том, что систему, описываемую волновой функцией  $\psi_i$ , можно обнаружить в состоянии  $\psi_j$  с вероятностью

$$P_{ij} = \left| \int \psi_i \psi_j^* dx \right|^2. \quad (18)$$

Поэтому, если  $P_{ij} \neq 0$ , то в отношении несовместимости событий  $A_i$  и  $A_j$  ( $i \neq j$ ) имеет место двойственность: с одной стороны, они являются несовместимыми, так как функция  $\psi_j$  заведомо не выпала, если выпала функция  $\psi_i$ , не равная  $\psi_j$  (и наоборот); с другой стороны, имеется отличная от нуля вероятность пребывания (обнаруживаемого измерением) системы, описываемой функцией  $\psi_i$ , в состоянии  $\psi_j$ . Если под  $A_i$  понимать пребывание системы в физическом состоянии  $\psi_i$ , то в известном смысле вероятность совместного события  $A_i A_j$  равна  $P_{ij}$ . Согласно квантовой теории, зная волновую функцию, нельзя (без изменения этой функции) произвести дальнейшее уточнение состояния системы. Это препятствует разделению каждого события  $A_i$  на какие-либо элементарные подсобытия (например, на  $A_i A_j$  и  $A_i - A_i A_j$ ) с тем, чтобы далее определить энтропию аналогично формуле (16), суммируя по элементарным событиям.

Если одному физическому состоянию можно (правда, с различными вероятностями) отнести различные волновые функции, то, следовательно, в описании состояния волновой функцией имеет место некоторая переопределенность (описание с избытком). При введении смешанной статистичности, описывая много различных эквивалентных схем одним математическим объектом (матрицей плотности или фундаментальной схемой), мы частично снимаем указанную переопределенность, и в этом отношении квантовое описание приближается к классическому. Поэтому решение трудности в определении энтропии неортогональной

схемы, возникшей вследствие переопределенности, следует искать в духе идей эквивалентности, изложенных в разделе 1.

Заменяем исходную схему (1) эквивалентной ортогональной схемой (9). Для ортогональных реализаций события  $A_1, A_2, \dots$  являются взаимоисключающими в обоих смыслах, и поэтому применима формула (17). Эквивалентные схемы, описывая один и тот же объект, должны иметь одинаковую энтропию, поэтому энтропия неортогональной схемы (1) равна

$$H = - \sum_m \lambda_m \ln \lambda_m, \quad (19)$$

где  $\lambda_m$  — собственные значения матрицы плотности (8).

Рассмотрим для примера схему

$$\begin{pmatrix} \psi_1(x) & \psi_2(x) \\ w_1 & w_2 \end{pmatrix},$$

состоящую из двух неортогональных реализаций. Когда  $\psi_1 \neq \psi_2$ ;  $w_1 \neq 0, 1$ , в системе имеется дополнительная неопределенность, поэтому

$$H > 0.$$

Но так как вследствие неортогональности состояния  $\psi_1$  и  $\psi_2$  в известной степени представляют одно и то же, то энтропия будет меньше, чем при совершенно различных состояниях, т. е.

$$H < -w_1 \ln w_1 - w_2 \ln w_2.$$

Действительно, интерполяция согласно (19) на промежуточный случай, когда  $0 < P_{12} < 1$ , дает

$$H = -\lambda_1 \ln \lambda_1 - \lambda_2 \ln \lambda_2,$$

где

$$\lambda_{1,2} = \frac{w_1 + w_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{w_1 - w_2}{2}\right)^2 - P_{12} w_1 w_2}.$$

Когда имеется вырождение собственных значений, (19) можно записать в виде

$$H = - \sum_j l_j \Delta_j \ln \Delta_j.$$

Величина  $l_j \Delta_j = P_j$  есть не что иное, как вероятность выпадения  $j$ -го линейного многообразия [состояния типа (14)]. Поэтому в полном соответствии с формулой (16) имеем

$$H = - \sum_j P_j \ln (P_j / Q_j), \quad (20)$$

где  $Q_j$  — абстрактный «объем» события, заключающегося в выпадении  $j$ -го линейного многообразия, равный размерности  $l_j$  последнего.

Формулы (19), (20) можно записать в матричном виде:

$$H = - \text{Tr } \lambda \ln \lambda \quad (\lambda = \|\lambda_{mn}\| = \|\lambda_{mn} \delta_{mn}\|),$$

или в произвольном представлении

$$H = - \text{Tr } \rho \ln \rho. \quad (21)$$

Из такой формы записи, а особенно из формы  $H = -\overline{\ln \rho}$ , очевидно, что энтропия квантово-статистических систем является прямым обобщением классической энтропии.

3. Покажем, что приведенные формулы при соответствующих условиях переходят в формулы для энтропии «классической» статистики.

Если квантовая система (не состоящая из одинаковых частиц) не имеет циклических или спиновых степеней свободы и координаты  $x$  непрерывны, то ее матрица плотности может быть записана в виде

$$\rho(x, x') = \int w\left(\frac{x+x'}{2}, p\right) \exp\{ip(x-x')/\hbar\} dp, \quad (22)$$

где  $w(q, p)$  — нормированная «плотность вероятности» в фазовом пространстве:

$$\int w(q, p) dq dp = 1.$$

Однако не всякая функция  $w(q, p)$ , будучи преобразована по формуле (22), дает функцию  $\rho(x, x')$ , способную выступать в качестве матрицы плотности, так как может нарушиться условие положительной определенности матрицы  $\rho(x, x')$ . Квантовая «плотность вероятности»  $w(q, p)$  удовлетворяет условию

$$\iiint w\left(\frac{x+x'}{2}, p\right) e^{ipx/\hbar} f(x) [e^{ipx'/\hbar} f(x')]^* dx dx' dp \geq 0 \quad (23)$$

при произвольной функции  $f(x)$ . Неравенство (23) является, пожалуй, наиболее точной, хотя и неявной, математической формулировкой принципа неопределенности Гейзенберга.

Выведем из квантовой формулы (19) выражение для энтропии при условии применимости классического приближения, когда

$$p_{0i} q_{0i} \gg \hbar, \quad (24)$$

$$\frac{1}{p_{0i}} \sim \frac{1}{w} \frac{\partial w}{\partial p_i}; \quad \frac{1}{q_{0i}} \sim \frac{1}{w} \frac{\partial w}{\partial q_i} \quad (i = 1, \dots, r).$$

Для этого рассмотрим (7а), где матрицу плотности представим в форме (22). Выберем интервал:

$$\tilde{\lambda}_j < \lambda_m < \tilde{\lambda}_j + \Delta\lambda, \quad (25)$$

в который попадает  $l_j$  собственных значений ( $m = m_j + 1, \dots, m_j + l_j$ ). Когда  $\Delta\lambda$  достаточно мало, все входящие в (25) собственные значения  $\lambda_m$  можно заменить на  $\tilde{\lambda}_j$ . Поэтому для собственных функций, соответствующих указанным  $\lambda_m$ , имеем

$$\int \rho(x, x') \varphi_m(x') dx' \approx \tilde{\lambda}_j \varphi_m(x). \quad (26)$$

Такому же уравнению удовлетворяет любая линейная комбинация этих собственных функций, и, в частности,

$$\int \rho(x, x') \tilde{\varphi}_s(x') dx' \approx \tilde{\lambda}_j \tilde{\varphi}_s(x); \quad (27)$$

$$\tilde{\varphi}_s(x) = \sum_{k=1}^{l_j} c_{sh} \varphi_{m_j+h}(x) \quad (s = 1, \dots, l_j).$$

Переход от (7а) к (27) является переходом к приближенно эквивалентной схеме. Подберем  $\|c_{sh}\|$  таким образом, чтобы каждая функ-

ция  $\tilde{\varphi}_s(x)$  содержала гармонический сомножитель, быстро меняющийся по сравнению с другим (амплитудным) сомножителем:

$$\tilde{\varphi}_s(x) = \varphi_s^0(x) \exp \{ik_s x\}; \quad (28)$$

$$k_s \gg \frac{1}{\varphi_s^0} \frac{\partial}{\partial x} \varphi_s^0; \quad (29)$$

и чтобы  $\varphi_s^0(x)$ , тем не менее, была заметно отлична от нуля лишь в небольшой (по сравнению с  $q_{0i}$ ) области вблизи некоторой точки  $q_s$ . Условие осуществимости такого подбора совместимо с условием малости  $\Delta\lambda$  лишь при уверенном выполнении неравенств (24).

Подставляя (28) в (27) и обозначая  $p_s = k_s \hbar$ , находим

$$\int w\left(\frac{x+x'}{2}, p\right) \exp \{i(p-p_s)(x-x')/\hbar\} \varphi_s^0(x') dp dx' \approx \tilde{\lambda}_j \varphi_s^0(x). \quad (30)$$

Воспользуемся формулой

$$\int F(x', y') \exp \{i(y-y')(x-x')/\hbar\} dx' dy' \approx h^r F(x, y), \quad (31)$$

справедливой, как можно убедиться из рассмотрения

$$\begin{aligned} & \int F(x', y') \exp \{i(y-y')(x-x')/\hbar\} dy' = \\ & = F(x', y) \int \exp \{i\eta(x'-x)/\hbar\} \mu(\eta) d\eta = F(x', y) (2\pi\hbar)^r \delta_\varepsilon(x'-x), \end{aligned}$$

при условии

$$\left(F / \frac{\partial F}{\partial x_i}\right) \left(F / \frac{\partial F}{\partial y_i}\right) \gg h. \quad (32)$$

Здесь  $\eta = y' - y$ ,  $\mu(\eta) = F(x', y + \eta) / F(x', y)$  (т. е.  $\mu(\eta) \sim 1$  при  $\eta \ll F / \frac{\partial F}{\partial y}$ );

$$\delta_\varepsilon(x' - x) = \prod_{i=1}^r \delta_{\varepsilon_i}(x'_i - x_i);$$

$\delta_{\varepsilon_i}(x'_i - x_i)$  — функция, аппроксимирующая  $\delta$ -функцию, имеющая эквивалентную ширину

$$\varepsilon_i \sim \hbar \frac{1}{F} \frac{\partial F}{\partial y_i}.$$

Для  $F = w\varphi_s^0$  условие (32) выполняется вследствие (24), (29) (т. к.  $p_{0i} \sim k_s \hbar = p_s$ ), поэтому формулу (31) можно применить для вычисления левой части равенства (30). В результате из (30) получим

$$\tilde{\lambda}_j \varphi_s^0(x) \approx h^r w(x, p_s) \varphi_s^0(x) \approx h^r w(q_s, p_s) \varphi_s^0(x)$$

или

$$\tilde{\lambda}_j \approx h^r w(q_s, p_s). \quad (33)$$

При замене  $x$  на  $q_s$  использовано, что  $\varphi_s^0(x)$  заметно отлична от нуля лишь в области, расположенной вблизи  $q_s$ .

Беря различные  $s$ , мы будем получать различные точки  $q_s, p_s$  ( $s = 1, \dots, l_j$ ), однако для всех этих точек

$$h^r w(q_1, p_1) \approx \dots \approx h^r w(q_{l_j}, p_{l_j}) \approx \tilde{\lambda}_j.$$

Учитывая это, имеем

$$H = - \sum \lambda_m \ln \lambda_m \approx - \sum_i \tilde{\lambda}_i \sum_{s=1}^{l_j} \ln h^r w(q_s, p_s). \quad (34)$$

Пусть  $L(q, p)$  — произвольная функция и  $L$  — соответствующий ей оператор<sup>1</sup>. По принципу соответствия, когда применимо классическое приближение,

$$\bar{L} = \text{Tr}(\rho L) \approx \int L(q, p) w(q, p) dq dp, \quad (35)$$

но

$$\text{Tr}(\rho L) = \sum \lambda_m (\varphi_m^* L \varphi_m) \approx \sum_i \tilde{\lambda}_i \sum_{s=1}^{l_j} (\tilde{\varphi}_s^* L \tilde{\varphi}_s). \quad (35.a)$$

Отсюда имеем

$$\sum_i \tilde{\lambda}_i \sum_{s=1}^{l_j} L(q_s, p_s) \approx \int w(q, p) L(q, p) dq dp. \quad (36)$$

Если положить  $L(q, p) = \ln h^r w$ , то из (34), используя (36), получим

$$H \approx - \int w(q, p) \ln [h^r w(q, p)] dq dp \quad (37)$$

( $r$  — число степеней свободы). Эта формула, отличающаяся от обычной формулы

$$H = - \int w \ln w dq dp$$

(в которой аддитивная постоянная не определена) на постоянную  $r \ln h$ , полностью совпадает с уточненной формулой, приведенной в [2]. Тем самым подтверждаются рассуждения последней работы, приведшие к формуле, содержащей постоянную Планка.

Формулу (37) можно вывести иначе путем доказательства, что матрица плотности есть оператор для «физической величины»  $h^r w(q, p)$  с последующим использованием (35) при  $L = \ln \rho$ . Из приведенного выше рассмотрения видно, что в качестве одной из возможных схем при классическом приближении может быть взята схема, составленная из локальных (сосредоточенных вблизи точки фазового пространства) реализаций. Последняя схема наиболее наглядна с точки зрения классических представлений.

Когда система состоит из тождественных частиц, т. е. частиц, подчиняющихся статистике Бозе или Ферми, появляются специфические отличия от рассмотренного ранее случая. Для  $M$  тождественных частиц, каждая из которых имеет  $n$  степеней свободы ( $r = nM$ ), матрица плотности вместо (22) имеет вид

$$\rho(x_1, \dots, x_M; x'_1, \dots, x'_M) = C \sum_{\alpha} x_{\alpha}^r r(x_1, \dots, x_M; x'_{\alpha_1}, \dots, x'_{\alpha_M}), \quad (38)$$

где

$$r(x_1, \dots, x_M; x'_1, \dots, x'_M) = \int \dots \int w\left(\frac{x_1 + x'_1}{2}, \dots, \frac{x_M + x'_M}{2}; p_1, \dots, p_M\right) \times \\ \times \exp\left\{\frac{i}{\hbar} [p_1(x_1 - x'_1) + \dots + p_M(x_M - x'_M)]\right\} dp_1, \dots, dp_M.$$

<sup>1</sup> Отметим без доказательства, что имеет место связь:

$$L = \frac{1}{h^r} \int L\left(\frac{x + x'}{2}, p\right) \exp\{ip(x - x')/\hbar\} dp.$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_M$  — некоторая перестановка из чисел  $1, 2, \dots, M$ ;  $\sum_{\alpha}$  — сумма по всем  $M!$  таким перестановкам;  $x_{\alpha} = 1$  для бозонов и  $x_{\alpha} = (-1)^{p_{\alpha}}$  для фермионов ( $p_{\alpha}$  — число транспозиций перестановки  $\alpha_1, \dots, \alpha_M$ );  $C$  — нормировочная постоянная. Плотность распределения  $w$  для тождественных частиц мы предполагаем, разумеется, симметричной.

При условии применимости классического приближения (24) функция  $r(x_1, \dots; x'_1, \dots)$  заметно отлична от нуля лишь при близких значениях штрихованных и нештрихованных аргументов:

$$r(x_1, \dots; x'_1, \dots) = \tilde{r}(x_1, \dots, x_M) \delta_{\varepsilon_1}(x_1 - x'_1) \dots \delta_{\varepsilon_M}(x_M - x'_M), (\varepsilon \sim \hbar/p_0).$$

Отсюда следует, что при  $x_1 = x'_1, \dots, x_M = x'_M$ ,  $x_{\alpha} - x_{\beta} \gg \varepsilon$  ( $\alpha \neq \beta$ ) можно принимать во внимание лишь один член суммы (38), для которого

$$\rho(x_1, \dots, x_M; x_1, \dots, x_M) \approx Cr(x_1, \dots, x_M; x_1, \dots, x_M).$$

Пренебрегая интегралом по областям, где аргументы  $x_1, \dots, x_M$  сближаются на расстоянии порядка  $\varepsilon$  ( $\varepsilon \ll q_0$ ) и где это равенство несправедливо, имеем

$$\begin{aligned} \int \rho(x_1, \dots, x_M; x_1, \dots, x_M) dx_1 \dots dx_M &\approx \\ \approx C \int r(x_1, \dots, x_M; x_1, \dots, x_M) dx_1 \dots dx_M &= C, \end{aligned}$$

откуда

$$C \approx 1. \quad (39)$$

Возьмем локальную волновую функцию  $\tilde{\Psi}_{q_1 \dots q_M p_1 \dots p_M}(x_1, \dots, x_M)$ , соответствующую тому случаю, когда одна частица находится вблизи точки  $(q_1, p_1)$ , другая — вблизи точки  $(q_2, p_2)$  и т. д.:

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_{q_1 \dots q_M p_1 \dots p_M}(x_1, \dots, x_M) &= C' \sum_{\beta} x_{\beta} \psi_{q_1 \dots q_M}^0(x_{\beta_1}, \dots, x_{\beta_M}) \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (p_1 x_{\beta_1} + \dots + p_M x_{\beta_M}) \right\}. \end{aligned} \quad (40)$$

Здесь  $C'$  — нормировочная постоянная;  $\psi_{q_1 \dots q_M}^0(x_1, \dots, x_M)$  — медленно (по сравнению с гармоническим множителем) меняющаяся функция, которая заметно отлична от нуля лишь при  $x_1 \sim q_1, \dots, x_M \sim q_M$ .

Применим к функции (40) оператор  $\rho$ . Учитывая (38) и меня обозначения переменных интегрирования, находим

$$\begin{aligned} \rho \tilde{\Psi} &= MC'C \sum_{\gamma} x_{\gamma} \int w \left( \frac{x_1 + x'_1}{2}, \dots, \frac{x_M + x'_M}{2}; p'_1, \dots, p'_M \right) \psi^0(x'_{\gamma_1}, \dots) \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} [p'_1(x_1 - x'_1) + p_1 x'_{\gamma_1} + \dots] \right\} dx'_1 \dots dp'_1 = \\ &= MC'C \sum_{\gamma} x_{\gamma} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (p_1 x_{\gamma_1} + \dots) \right\} \int w \left( \frac{x_1 + x'_1}{2}, \dots; p'_1, \dots \right) \psi^0(x'_{\gamma_1}, \dots) \times \\ &\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} [(p'_1 - p_{\alpha_1})(x_1 - x'_1) + \dots] \right\} dx'_1 \dots dp'_1, \end{aligned}$$

где  $\sigma_1, \dots, \sigma_M$  — перестановка, обратная  $\gamma_1, \dots, \gamma_M$  ( $\gamma_{\sigma_i} = i$ ). Применяя формулу (31), получаем отсюда

$$\begin{aligned} \rho \tilde{\Psi} &\approx M! C' h^r \sum_{\gamma} x_{\gamma} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (p_1 x_{\gamma_1} + \dots) \right\} \omega(x_1, \dots; p_{\sigma_1}, \dots) \Psi_{q_1}^0 \dots (x_{\gamma_1}, \dots) \approx \\ &\approx M! h^r C' \sum_{\gamma} x_{\gamma} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} p_1 x_{\gamma_1} + \dots \right\} \omega(q_{\sigma_1}, \dots; p_{\sigma_1}, \dots) \Psi_{q_1}^0 \dots (x_{\gamma_1}, \dots) \end{aligned}$$

или, учитывая симметрию функции плотности,

$$\rho \tilde{\Psi}_{q_1 \dots p_1 \dots} (x_1, \dots) \approx M! h^r \omega(q_1, \dots; p_1, \dots) \tilde{\Psi}_{q_1 \dots p_1 \dots} (x_1, \dots). \quad (41)$$

Принимая во внимание полученное равенство или вытекающее из него соотношение

$$(\tilde{\Psi}_{q_1 \dots p_1 \dots}^* \rho \tilde{\Psi}_{q_1 \dots p_1 \dots}) \approx M! h^r \omega(q_1, \dots; p_1, \dots), \quad (42)$$

закключаем, что матрица плотности является оператором «физической величины»  $M! h^r \omega(q_1, \dots; p_1, \dots)$ . Далее функции  $\ln [M! h^r \omega(q_1, \dots; p_1, \dots)]$  соответствует оператор  $\ln \rho$  и, вследствие (21), (35) и (35а), имеем

$$H \approx - \int \omega(q, p) \ln [M! h^r \omega(q, p)] dq dp, \quad (43)$$

$$[q = (q_1, \dots, q_r); \quad p = (p_1, \dots, p_r); \quad r = nM].$$

Аналогичная формула была приведена в [2] как формула, определяющая конфигурационную дезинформацию, совпадающую с фактической дезинформацией для принципиально неразличимых частиц. Таким образом, квантовое рассмотрение подтверждает рассуждения указанной работы.

4. В тех случаях, когда схема типа (1) не является заданной, а о квантово-статистической системе имеются какие-то сведения  $\Gamma$  другого рода, матрицу плотности можно определять, пользуясь следующим принципом максимальной дезинформации: поскольку о системе неизвестно ничего, кроме  $\Gamma$ , то искомая матрица плотности должна иметь максимальную дезинформацию (энтропию) из всех матриц плотности, совместимых с  $\Gamma$ .

Выбор другой матрицы плотности, имеющей меньшую дезинформацию, означал бы фиксацию каких-то добавочных сведений в дополнение к  $\Gamma$ . Таким образом, задача отыскания неизвестной матрицы плотности сводится к условной экстремальной задаче для выражения, определяющего энтропию. Отметим, что указанный принцип не является следствием второго начала термодинамики, так как он гораздо шире последнего и пригоден для отыскания матриц плотности для неравновесных состояний, т. е. выходит за рамки статистической термодинамики.

Если в качестве  $\Gamma$  выбрать условие  $E \leq H \leq E + \Delta E$  ( $H$  — гамильтониан системы), то решение экстремальной задачи приведет к квантовому микроканоническому распределению. Однако в физических задачах не может быть полной уверенности, что энергия или какая-либо другая физическая величина не выходит за пределы некоторого интервала. В качестве условий  $\Gamma$  правильнее брать фиксацию феноменологических параметров:  $\mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_m$ . Но при переходе от феноменологической картины к динамической феноменологическим параметрам соответствуют статистические средние. С этой точки зрения

правильнее брать условия  $\Gamma$  в форме:  $\bar{L}_1 = \mathcal{L}_1, \dots, \bar{L}_m = \mathcal{L}_m$ . Тогда вариационная задача будет иметь вид:

$$\delta \text{Tr}(\rho \ln \rho) = 0 \quad (44)$$

при условиях

$$\text{Tr} \rho = 1; \text{Tr}(\rho L_1) = \mathcal{L}_1; \dots; \text{Tr}(\rho L_m) = \mathcal{L}_m. \quad (45)$$

К этим условиям, вообще говоря, следовало бы добавить условие положительной определенности и эрмитовости функции  $\rho$ . Однако функции, не определенные положительно, имеют меньшую (и даже отрицательную) энтропию, поэтому включение их в класс функций сравнения не изменит результата. Не вводя условия эрмитовости, мы также расширяем класс функций сравнения. Если экстремаль этого расширенного класса будет эрмитовой (что, как легко проверить, выполняется), то она будет одновременно экстремалью для более узкого класса эрмитовых функций сравнения.

Решая задачу (44), (45) при помощи множителей Лагранжа и учитывая, что вообще

$$\delta \text{Tr}(\rho^h) = \text{Tr}(h \rho^{h-1} \delta \rho),$$

находим

$$\text{Tr}[(\ln \rho + \gamma_0 + \gamma_1 L_1 + \dots + \gamma_m L_m + 1) \delta \rho] = 0,$$

откуда

$$\rho = \exp \{\gamma - \gamma_1 L_1 - \dots - \gamma_m L_m\}, \quad (46)$$

причем  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  и  $\gamma = -\gamma_0 - 1$  определяются из условий (45).

Когда  $m = 1$ ,  $L_1 = H$ , матрица плотности (46) совпадает с квантовым каноническим распределением, которое обычно постулируется [3] или выводится из (постулируемого, в свою очередь) микроканонического распределения [4].

Выходя за рамки статистической термодинамики, в качестве  $L_1, \dots, L_m$  можно брать неравновесные распределения энергии, плотности, потоков и т. д. и получать описывающие такие системы матрицы плотности. Таким образом, давая основу для аналитического использования принципа максимальной дезинформации, формула квантовой энтропии оказывается полезной в квантовой статистической теории неравновесных процессов.

Московский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
19 января 1954 г.;  
после переработки  
4 февраля 1955 г.

### Литература

- [1] Теория передачи электрических сигналов при наличии помех, Сб. переводов под ред. Н. А. Железнова, ИИЛ, М., 1953. — [2] Р. Л. Стратонович. ЖЭТФ, 27, 409, 1955. — [3] М. А. Леонтович. Статистическая физика, ГИТТЛ, М. — Л., 1944. — [4] А. Я. Хинчин. Математические основания квантовой статистики, ГИТТЛ, М. — Л., 1951.

## ПОГЛОЩЕНИЕ И ИСПУСКАНИЕ СВЕТА СЕРЫМ ВЕЩЕСТВОМ

Б. И. Степанов

Построена феноменологическая теория спектроскопических свойств серого вещества. Определены коэффициенты Эйнштейна для поглощения, вынужденного и самопроизвольного излучения. Получено выражение для функции распределения по уровням энергии. Выяснено, что серое вещество обладает особенностями, приближающими его к классической электродинамической системе. Решение поставленной задачи существенно для выяснения законов поглощения и испускания света сложными молекулами.

1. С точки зрения поглощения и испускания света, сложные молекулы типа молекул красителей являются промежуточным звеном между простыми двухатомными молекулами и сложными конденсированными системами, излучение которых близко по своему характеру к излучению черного тела. Спектры двухатомных молекул в основном дискретны и, что особенно важно, строго индивидуальны. Спектры сложных молекул также обладают некоторой индивидуальностью: положение полос поглощения и флуоресценции для разных молекул различно. Однако эта индивидуальность весьма ограничена, так как распределение интенсивностей в длинноволновой полосе поглощения и в полосе флуоресценции во многих молекулах одинаково. Сложные молекулы обладают и другими принципиальными особенностями. В них соблюдаются законы зеркальной симметрии полос поглощения и испускания, независимость положения и формы полосы испускания от длины волны возбуждающего света и т. д. [1,2].

Отсутствие специфичности в спектрах сложных молекул связано с наличием в таких молекулах очень большого числа колебательных степеней свободы, с теснейшим взаимодействием между ними и переносом колебательной энергии внутри молекулы. Тем не менее, в них сохраняется, в основном, разделение энергии на электронную и колебательную, а также специфичность отдельных электронных уровней, проявляющаяся в существовании отдельных полос в спектрах поглощения и испускания.

Следующий принципиально иной класс соединений составляют сильно конденсированные системы, так называемые серые тела. В их спектрах поглощения и теплового излучения не проявляется какая-либо избирательность; все длины волн падающей радиации поглощаются одинаково, спектральный состав излучения тот же, что и для равновесного излучения, отличаясь от него лишь масштабом [3]. Флуоресценция в таких телах отсутствует, так как поглощенная энергия быстро преобразуется в тепловую энергию. Эти особенности связаны с сильнейшим взаимодействием электронов и ядер, вследствие чего разделение энергии системы на электронную и колебательную совершенно недопустимо. Можно говорить лишь о полной энергии системы как о целом.

В настоящей работе исследуются спектроскопические характеристики серого вещества — функции распределения по уровням энергии и вероятности перехода между ними при поглощении и испускании света. Решение поставленной задачи должно способствовать опреде-

лению тех же величин в процессах испускания и поглощения света сложными молекулами.

2. Рассмотрим сперва конденсированное вещество (не обязательно серое) со сплошным спектром возможных значений энергии, находящееся в тепловом равновесии. Ввиду сильного взаимодействия отдельных элементов в нем нельзя выделить изолированные центры поглощения и испускания — оно является однородным. Коэффициенты Эйнштейна следует относить не к атомам или молекулам, а к некоторым малым объемам  $v_0$  исследуемого вещества. Пусть в  $1 \text{ см}^3$  находится  $n$  таких объемов. Если плотность лучистой энергии, пронизывающей исследуемое вещество, равна  $u(\nu)$ , то число поглощаемых за 1 сек. квантов  $h\nu$  в интервале частот  $d\nu$  в объеме  $d\tau$  и при переходах с уровней  $E$  (в интервале  $dE$ ) на уровни  $E + h\nu$  равно

$$n\rho(E, T)dEB_{\text{полг}}(E, \nu)u(\nu)d\nu d\tau.$$

Здесь  $B_{\text{полг}}(E, \nu)$  — коэффициент Эйнштейна объема  $v_0$  для пары уровней  $E$  и  $E + h\nu$ , а  $n\rho(E, T)dE$  — число объемов с энергиями в интервале от  $E$  до  $E + dE$ . Функция распределения  $\rho(E)$  имеет обычный вид

$$\rho(E, T) = C(T)g(E)e^{-E/kT}, \quad (1)$$

где  $g(E)$  — статистический вес, а  $C(T)$  — постоянная нормировки. Общее число поглощенных квантов при переходах со всех уровней  $E$  равно

$$nu(\nu)d\nu d\tau \int_0^\infty \rho(E, T)B_{\text{полг}}(E, \nu)dE.$$

При этом поглощается энергия

$$dE_{\text{полг}} = nu(\nu)h\nu d\nu d\tau \int_0^\infty \rho(E, T)B_{\text{полг}}(E, \nu)dE. \quad (2)$$

Если вещество находится под действием лучистой энергии, то кроме поглощения всегда имеется вынужденное испускание. Энергия вынужденного испускания равна

$$dE_{\text{исп}}^{\text{вын}} = nu(\nu)h\nu d\nu d\tau \int_0^\infty \rho(E + h\nu, T)B_{\text{исп}}(E, \nu)dE. \quad (3)$$

Здесь  $B_{\text{исп}}(E, \nu)$  — коэффициент Эйнштейна для вынужденного испускания при переходах с уровня  $E + h\nu$  на уровень  $E$  (значение  $E$  всегда относится к нижнему уровню). Так как

$$\begin{aligned} B_{\text{исп}}(E, \nu) &= B_{\text{полг}}g(E)/g(E + h\nu), \\ \rho(E + h\nu, T) &= C(T)g(E + h\nu)e^{-(E + h\nu)/kT}, \end{aligned} \quad (4)$$

то (3) равно

$$dE_{\text{исп}}^{\text{вын}} = e^{-h\nu/kT}dE_{\text{полг}}. \quad (5)$$

При больших  $h\nu/kT$  роль вынужденного испускания ничтожна, при малых  $h\nu/kT$  — весьма существенна. При вынужденном излучении соответствующий квант испускается в направлении распространения падающего кванта. Как подчеркнул Фриш [4], это обстоятельство позволяет рассматривать вынужденное испускание как своего рода «отрицательное поглощение». Экспериментально измеряется не величина  $dE_{\text{полг}}$ , а величина

$$dE'_{\text{полг}} = dE_{\text{полг}} - dE_{\text{исп}} = \\ = (1 - e^{h\nu/hT}) n u(\nu) h\nu d\nu d\tau \int_0^\infty C(T) g(E) e^{-E/hT} B_{\text{полг}}(E, \nu) dE. \quad (6)$$

Коэффициент пропорциональности  $\alpha$  между количеством поглощенной энергии и количеством световой энергии  $u(\nu) d\nu d\tau$  в объеме  $d\tau$  называется, в соответствии с терминологией Фриша, поглощательной способностью. Таким образом

$$\alpha(\nu, T) = \frac{dE'_{\text{полг}}}{u(\nu) d\nu d\tau} = n (1 - e^{-h\nu/hT}) h\nu \int_0^\infty C(T) g(E) e^{-E/hT} B_{\text{полг}}(E, \nu) dE. \quad (7)$$

Аналогично (2) и (5) можно написать выражение для энергии самопроизвольного испускания за секунду

$$dE_{\text{исп}}^{\text{сам}} = n h\nu d\nu d\tau \int_0^\infty \rho(E + h\nu, T) A(E, \nu) dE = w(\nu, T) d\nu d\tau. \quad (8)$$

Здесь  $w(\nu, T)$  — мощность (самопроизвольного) испускания исследуемого вещества. Так как

$$A' = B_{\text{полг}} \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{g(E)}{g(E + h\nu)},$$

то

$$w(\nu, T) = n h\nu \int_0^\infty \rho(E + h\nu, T) A(E, \nu) dE = \alpha(\nu, T) \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/hT} - 1}. \quad (9)$$

3. Рассмотрим теперь серое вещество. Серым веществом назовем такое вещество, поглощательная способность которого для всех частот одинакова, а мощность излучения пропорциональна мощности излучения черного тела<sup>1</sup>. Отсюда следует

$$\alpha(\nu, T) = n (1 - e^{-h\nu/hT}) h\nu \int_0^\infty C(T) g(E) e^{-E/hT} B_{\text{полг}}(E, \nu) dE = P, \quad (10)$$

где  $P$  — некоторая постоянная. Это уравнение совместно с условием нормировки

$$\int_0^\infty C(T) g(E) e^{-E/hT} dE = 1 \quad (11)$$

может служить для определения неизвестной функции  $B_{\text{полг}}(E, \nu)$ . Вводя подстановку

$$B_{\text{полг}}(E, \nu) = P \frac{4}{nh\nu} B'(E) \quad (12)$$

в уравнение (10), получим

$$(1 - e^{-h\nu/hT}) \int_0^\infty C(T) g(E) e^{-E/hT} B'(E) dE = 1. \quad (13)$$

Уравнение (13) в сочетании с (11) имеет решение только для больших частот ( $h\nu \gg kT$ ). В этом случае множитель  $(1 - e^{-h\nu/hT})$  равен едини-

<sup>1</sup> Мы будем говорить в дальнейшем о сером веществе, а не о серых телах, так как нас не интересуют условия на границе и размеры тел.

це. Строгий расчет показывает, что решение совершенно однозначно

$$B' = 1. \quad (14)$$

Тот же результат получается из простых качественных соображений. Действительно, из (12) следует, что  $B'$  не зависит от температуры. Если, учитывая это обстоятельство, пытаться искать решение (13) в сочетании с (11) в виде функции  $B'(E)$ , то всякая функция  $B'(E)$ , выбранная так, чтобы удовлетворить (13) при одной температуре, не будет удовлетворять (13) при другой температуре.

Таким образом решение (10) при  $h\nu \gg kT$  имеет вид

$$B_{\text{погл}}(\nu) = P / n h \nu. \quad (15)$$

Зависимость  $B_{\text{погл}}$  от  $\nu$  имеет простой смысл. Действительно, в равенстве

$$n B_{\text{погл}}(\nu) u(\nu) d\nu = P \frac{u(\nu) d\nu}{h\nu} \quad (16)$$

слева стоит число квантов, поглощенных в единице объема за секунду. В правой части  $u(\nu) d\nu / h\nu$  равно числу квантов заданной частоты в единице объема. Следовательно, для серого вещества при  $h\nu \gg kT$  число поглощенных квантов пропорционально общему числу квантов — вероятность поглощения квантов любых частот одинакова. Так как  $B_{\text{погл}}$  не зависит от  $E$ , то вероятность поглощения кванта не зависит и от состояния тела (его энергии) в момент его взаимодействия с фотоном. Таким образом для серого вещества вероятность поглощения кванта не зависит ни от свойств вещества ( $E$ ), ни от свойств кванта ( $\nu$ ). В сером веществе осуществляется мыслимый предел полного отсутствия избирательности в процессах взаимодействия света и вещества.

4. Решение уравнения (10) получено при  $h\nu \gg kT$ . При  $h\nu \sim kT$  или  $h\nu < kT$  оно непригодно. Более того, можно показать, что решение (10), справедливое для всех температур, вообще не существует, а это означает, что несправедливо самое уравнение (10), т. е., что поглощательная способность  $a(\nu, T)$  не может быть постоянной во всем диапазоне частот. Если  $a(\nu, T)$  постоянно при  $h\nu \gg kT$ , то при  $h\nu < kT$  оно в той или иной степени зависит от  $\nu$ , а это, в свою очередь, означает, что серого вещества в том смысле, в котором мы его определили, в природе не существует. Последнее утверждение не противоречит известным экспериментальным фактам. Действительно, обычное определение серого тела основано на изучении поглощательной способности в широком диапазоне длин волн — ультрафиолетовой, видимой и близкой инфракрасной области. Во всех этих областях  $a$  постоянно. Только при переходе в далекую инфракрасную область и область радиоволн могут наблюдаться сначала небольшие, а потом и более заметные отступления от этого закона.

Отступления от закона  $a = \text{const}$  при переходе в область  $h\nu \sim kT$  связаны с проявлением вынужденного испускания, энергия которого зависит от частоты и температуры даже для серых веществ. Если допустить, что коэффициент  $B_{\text{погл}}$  сохраняет значение (15) и при малых  $\nu$ , то поглощательная способность серого вещества с учетом вынужденного испускания равна

$$a(\nu, T) = (1 - e^{-h\nu/kT}) P. \quad (17)$$

В предельных случаях очень малых  $\nu$  ( $\nu \rightarrow 0$ ) и очень высоких температур ( $T \rightarrow \infty$ ) поглощательная способность ничтожно мала, и, следовательно, серое вещество, как, впрочем, и всякое другое, теряет спо-

способность поглощать падающую радиацию. Имеющееся поглощение полностью компенсируется вынужденным испусканием.

5. Зная коэффициент Эйнштейна, характеризующий вероятность поглощения падающей радиации (15), и используя общее соотношение (4), нетрудно написать выражение для коэффициента Эйнштейна вынужденного испускания

$$B_{\text{исп}} = \frac{P}{nh\nu} \frac{g(E)}{g(E+h\nu)}. \quad (18)$$

Выражения (18) и (15) противоречат друг другу; коэффициент  $B_{\text{погл}}$  не зависит от энергии исходного уровня, а коэффициент  $B_{\text{исп}}$  зависит от нее. В свойствах поглощения серого вещества избирательность отсутствует. В то же время согласно (18) она очень характерна в свойствах вынужденного излучения. Это противоречие можно устранить только в том случае, если сделать дополнительные предположения относительно свойств функции  $g(E)$  и потребовать, чтобы отношение  $g(E)/g(E+h\nu)$  не зависело от  $E$ . Дифференцируя соотношение

$$g(E+h\nu) = f(h\nu) g(E)$$

сперва по  $E$ , а затем по  $h\nu$  и приравнявая полученные результаты, легко показать, что функция  $g(E)$  должна иметь вид

$$g(E) = Ae^{-\alpha E}. \quad (19)$$

Далее возникает вопрос о значении параметра  $\alpha$ . На первый взгляд можно допустить, что он произволен (положителен) и что разные серые вещества обладают разными значениями  $\alpha$ . Однако это допущение также наталкивается на противоречия. Действительно, согласно (16) вероятность поглощения кванта для серого вещества не зависит от частоты падающего света. В то же время вероятность вынужденного испускания кванта, равная

$$\frac{nB_{\text{исп}}^u(\nu) d\nu}{u(\nu) d\nu/h\nu} = P \frac{g(E)}{g(E+h\nu)} = Pe^{\alpha h\nu}, \quad (20)$$

будет зависеть от  $\nu$ . Следовательно, при  $\alpha \neq 0$  все еще сохраняется известная избирательность процесса взаимодействия света и вещества. Для серого вещества этого не должно быть, и, следовательно,  $\alpha = 0$ ,  $g(E) = 1$  при любом  $E$ , а функция распределения имеет вид

$$\rho(E) = Ce^{-E/hT}. \quad (21)$$

6. Полученный результат, на первый взгляд, несколько парадоксален. Рассматривая вопросы химической кинетики, обычно предполагают, что в сложных молекулах статистический вес  $g(E)$  равен  $E^{L-1}$ , где  $L$  — число колебательных степеней свободы. Соответственно этому функция распределения принимает обычный вид

$$\rho(E) = CE^{L-1} e^{-E/hT}. \quad (22)$$

При применении этого выражения нередко забывают, что оно грубо приближенно. Действительно, выражение (22) получается, если считать, что энергия молекулы может быть представлена суммой  $2L$  квадратичных членов, т. е., если полностью пренебречь ангармоничностью потенциальной функции, в том числе и взаимодействием отдельных степеней свободы. В реальных сложных молекулах и тем более в сером веществе эти условия никогда не осуществляются. Мы уже упоминали, что характерной особенностью рассматриваемых объектов является сильнейшее взаимодействие отдельных степеней

свободы и перераспределение энергии между ними. Степень сложности молекулы характеризуется не только числом колебательных степеней свободы  $L$ , но и, прежде всего, величиной взаимодействия между ними. Серое вещество представляет, с нашей точки зрения, предельно сложный случай. Поэтому функция  $\rho(E)$  типа (22) безусловно не применима. Расчеты, основанные на учете оптических свойств серого вещества (отсутствие избирательности), показывают, что вид функции распределения задан формулой (21), т. е., что функция распределения серого вещества очень проста — совпадает с функцией распределения классического гармонического осциллятора с одной степенью свободы. Следовательно, при наличии очень сильного взаимодействия между отдельными степенями свободы вид функции распределения перестает зависеть от их числа. Весь объект — серое вещество — является некоторой единой системой. В таких системах полную энергию всей системы принципиально нельзя представить в виде суммы энергий, локализованных на отдельных степенях свободы. Статистический вес, который для слабо взаимодействующих степеней свободы определяется числом возможных способов распределения энергии, в данном случае равняется единице<sup>2</sup>.

К точно такому же выводу можно было бы прийти и иначе. Пусть, решая задачу в нулевом приближении и пренебрегая некоторыми видами взаимодействий, мы получили вполне определенное вырождение уровней энергии. Известно, что учет взаимодействия всегда приводит к снятию вырождения, к расщеплению уровней. Если это взаимодействие очень велико, то вырождение будет снято всегда, даже в том случае, если мы имеем сплошной спектр значений энергии.

7. Коэффициенты Эйнштейна для серого вещества равны

$$B_{\text{погл}}(\nu) = B_{\text{исп}}(\nu) = \frac{P}{nh\nu}, \quad A(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{P}{n}. \quad (23)$$

Из формулы (23) следует, что вероятность самопроизвольного излучения серого вещества  $A_{\text{исп}}$  зависит только от частоты, причем самая зависимость очень проста ( $A \sim \nu^2$ ). Аналогичной зависимости в простых квантовых системах не существует ( $A$  зависит от свойств обоих комбинирующих уровней энергии). В то же время в классической электродинамике она получается даже для простого диполя; энергия колебаний диполя пропорциональна  $\nu^2$ , энергия, излучаемая диполем за секунду, пропорциональна  $\nu^4$ , отношение излученной энергии к самой энергии —  $\nu^2$ . Точный расчет показывает (см., например, [5]), что это отношение равно

$$\gamma = \frac{8\pi^2 e^2}{3m} \frac{\nu^2}{c^3}.$$

Величина  $\gamma$  определяет скорость убывания интенсивности свечения и соответствует вероятности перехода в квантовой теории. Таким образом с точки зрения законов испускания света серое вещество значительно ближе к классическому, чем к квантовому объекту. По мере усложнения объекта, увеличения числа степеней свободы и роста взаимодействия между ними квантовые особенности объектов стираются: дискретный спектр возможных значений энергий превращается в сплошной, вероятности переходов между всеми уровнями, распо-

<sup>2</sup> Аналогичный результат получается при квантово-механическом рассмотрении электронной оболочки сложных атомов. Энергия всего атома не может быть представлена в виде суммы энергий отдельных электронов. Точно так же определенный смысл имеет только полный орбитальный момент всего атома, а не орбитальные моменты отдельных электронов. Если, вводя внешнее поле, исключить вырождение, связанное с разной ориентацией вектора  $L$  в пространстве, то статистические веса каждого уровня энергии будут равны единице.

женными на одинаковом расстоянии друг от друга, становятся одинаковыми.

Разумеется, серое вещество нельзя сопоставить одному классическому диполю — классический диполь излучает только одну частоту (в пределах естественной ширины линии), серое тело излучает все частоты. Серое тело можно сопоставить только бесконечному набору диполей всех частот, т. е. системе зарядов,двигающихся по каким-то апериодическим законам. В этом последнем случае в разложении в ряд Фурье будут представлены все частоты.

Заметим, что величина

$$\frac{nA(\nu)d\nu}{P} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}d\nu \quad (24)$$

имеет очень простое физическое толкование. Правая часть в точности совпадает с числом независимых собственных колебаний равновесного излучения в интервале частот  $d\nu$  и в единице объема. Числитель левой части представляет собой число квантов  $h\nu$  в интервале  $d\nu$ , испускаемых (самопроизвольно) единицей объема вещества. Таким образом число квантов, испускаемых серым веществом, пропорционально числу частот, которое должно быть у равновесного излучения. Это еще раз показывает, что значения вероятностей определяются в значительной мере чисто классическими соотношениями.

8. Следует подчеркнуть, что определение серого вещества принципиально отличается от определения черного тела. Черным телом называется тело, которое поглощает всю падающую на него энергию, т. е. ничего не пропускает и ничего не отражает. Тело, не являющееся черным при малых объемах (толщинах), может стать практически черным при большом объеме. Черное тело не обязательно должно состоять из серого вещества. Разные частоты могут поглощаться по-разному — важно только, чтобы толщина тела была велика и энергия всех частот поглощалась нацело. Кроме того, определение черного тела принципиально связано со свойствами среды. Тело, являющееся черным по отношению к одной среде, может перестать быть черным в другой среде. В первом случае и тело, и среда должны иметь одинаковые показатели преломления. Изменение показателя преломления среды приводит к появлению отраженной волны. Серое вещество определено нами качественно иначе. Его свойства не связаны со средой и, тем более, размерами тела, а определяются исключительно особенностями его строения, большим взаимодействием атомов и молекул. В то же время черное тело может быть очень простым по составу, но очень большим по объему.

Нужно иметь в виду, что поглощательную способность (7) нельзя положить равной единице, хотя такая ошибка иногда и допускается в литературе. Действительно, поглощательная способность (7) есть поглощение света в единице объема и за единицу времени, и, следовательно, она имеет размерность, связанную со временем. Ту же временную размерность имеет мощность излучения  $w(\nu, T)$ , и только их отношение не зависит от времени. Определить понятие черного тела из формулы (9) невозможно.

9. Результаты, полученные выше для законов поглощения и испускания света серым веществом, должны способствовать выяснению законов поглощения и испускания света сложными молекулами. С точки зрения строения колебательных уровней энергии и переходов между ними эти объекты, по видимому, близки к серому веществу. С точки зрения строения электронных уровней энергии и переходов между ними они близки к простым молекулам. Разделение полной энергии системы на электронную энергию и энергию движения ядер в них еще сохраняется, по крайней мере, приближенно. Анализируя экспе-

риментальный материал, Непорент [1,2] пришел к выводу, что вероятности переходов между колебательными уровнями верхнего и нижнего электронного состояния почти не зависят от значения колебательной энергии в исходном состоянии. По мнению Непорента, они зависят только от частоты. Эти экспериментальные данные показывают, что многие особенности, характерные для серого вещества, проявляются также и в сложных молекулах. Разумеется, для полного выяснения спектроскопических особенностей сложных молекул необходимо учесть специфику взаимодействия электронной и колебательной энергий. Этот вопрос подлежит дальнейшей разработке.

Институт физики и математики  
Академии наук Белорусской ССР  
Минск

Поступила в редакцию  
13 апреля 1954 г.

#### Литература

- [1] Б. С. Непорент. ЖЭТФ, 21, 172, 1951; Изв. АН СССР, серия физ., 15, 533, 1951.— [2] Б. С. Непорент и Б. И. Степанов. Усп. физ. наук, 43, 380, 1951.— [3] Ш. Фабри. Общее введение в фотометрию, ОНТИ, 1934.— [4] С. Э. Фриш. Усп. физ. наук, 43, 512, 1951; Вести. Ленингр. ун-та, 8, 130, 1953.— [5] Ф. А. Королев. Спектроскопия высокой разрешающей силы, ГИТТЛ, 1953, гл. 4.

## ОБ УСЛОВИЯХ САМОВОЗБУЖДЕНИЯ ПОЮЩЕГО ПЛАМЕНИ

Ю. И. Неймарк и Г. В. Аронович

Рассмотрен вопрос об устойчивости поющего пламени, исходя из соображений Рэлея с учетом феноменологического запаздывания горения.

Явление поющего пламени наблюдалось еще во второй половине XVIII в. и с тех пор часто служило предметом эффектной лекционной демонстрации. Состоит оно в том, что если поместить внутрь трубы газовую горелку, как показано на рис. 1, то в ряде случаев возникают интенсивные колебания пламени и воздуха в трубе — труба начинает звучать, или, как говорят, пламя начинает петь.

Указанное явление наблюдалось многими авторами<sup>1</sup>. При этом высказывались различные наивные гипотезы о причинах возникновения колебаний. Впервые правильное качественное объяснение механизма поддержания колебаний было дано Рэлеем [2], указавшим, каким образом колеблющееся пламя может поддерживать звуковые колебания воздуха в трубе. Именно, пламя поддерживает колебания столба воздуха, если оно находится вблизи пучности давления и колеблется так, что в момент сжатия выделяет больше тепла, чем в момент разрежения. В дальнейшем эта качественная картина, несмотря на значительное число работ, не была сколько-нибудь существенно развита<sup>2</sup>.

В настоящей работе, основываясь на соображениях Рэлея [2] и учитывая феноменологическое запаздывание горения, проводится детальное исследование условий самовозбуждения поющего пламени. Полученные результаты находятся в хорошем качественном согласии с известными экспериментальными фактами, однако количественной проверке они не подвергались.

## 1. Дискретная модель поющего пламени (модель № 1)

Изучение условий самовозбуждения поющего пламени требует рассмотрения малых колебаний, накладывающихся на установившееся течение газа в системе. К дискретной модели мы, естественно, придем, если возьмем звучащую и подводющую трубки в форме резонаторов, изображенных на рис. 2. Каждый из этих резонаторов по отношению к частотам колебаний  $\omega \ll a/l$ , где  $l$  — линейный размер резонатора, а  $a$  — скорость звука, представляет собой осциллятор, массой которого является масса колеблющегося в горле резонатора воздуха, а упругостью — упругость воздуха, заключенного внутри резонатора и сжимаемого колеблющимся в горле воздухом, как поршнем.



Рис. 1

<sup>1</sup> Обзор и библиографию см. в работе [1].

<sup>2</sup> Данная работа выполнена в 1952 г. (см. отчет ГИФТИ за 1952 г.). В 1953 г. была опубликована работа [3], в которой рассмотрен вопрос о возбуждении вибраций при медленном распространении пламени в трубах.

Пусть  $x$  — малое смещение воздуха в горле резонатора  $A$  (для наглядности это смещение можно представлять себе как перемещение поршня в горле резонатора), а  $y$  — смещение газа в горле резонатора  $B$ . Пусть также  $m_1$  и  $m_2$  — «массы» колеблющегося газа в горлышках резонаторов  $A$  и  $B$ , а  $p$ ,  $p_1$  и  $p_2$  — наружное давление и давления в резонаторах  $A$  и  $B$ , соответственно. Тогда уравнения движения масс воздуха в горлышках при малых колебаниях (для собственных частот, удовлетворяющих указанному выше ограничению) можно записать так:

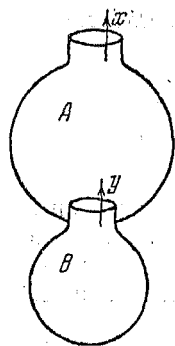


Рис. 2

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x} + \delta_1 \dot{x} &= S_1 \Delta p_1; \\ m_2 \ddot{y} + \delta_2 \dot{y} &= S_2 (\Delta p_2 - \Delta p_1), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $S_1$  и  $S_2$  — площади сечений горлышек резонаторов  $A$  и  $B$ . В отсутствие пламени между парциальными осцилляторами  $x$  и  $y$  имеет место взаимная упругая связь. Действительно, изменение  $x$  вызовет изменение  $p_1$ , пропорциональное  $S_1 x$ , а изменение  $y$  вызовет изменения  $p_1$  и  $p_2$ , пропорциональные  $S_2 y$ , т. е.

$$\Delta p_1 = -k_1 S_1 x + k_1 S_2 y, \quad \Delta p_2 = -k_2 S_2 y,$$

что после подстановки в уравнение (1.1) дает

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x} + \delta_1 \dot{x} &= -k_1 S_1^2 x + k_1 S_1 S_2 y; \\ m_2 \ddot{y} + \delta_2 \dot{y} &= -(k_1 + k_2) S_2^2 y + k_1 S_1 S_2 x. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Вторые члены в правых частях (1.2) говорят о наличии между осцилляторами  $x$  и  $y$  упругого взаимодействия. Легко проверить, что малые колебания, описываемые дифференциальными уравнениями (1.2), затухают с течением времени, т. е. исходная система устойчива.

С появлением пламени характер связи между осцилляторами существенно меняется, и именно в этом лежит причина возможности самовозбуждения колебаний. Несколько забегаая вперед, можно сказать, что изучаемая система состоит из двух диссипативных частей — звучащей трубы и подводящей газовой трубки, между которыми имеется неконсервативная связь, черпающая свою энергию в горящем пламени. Задача изучения условий возбуждения поющего пламени — это прежде всего и главным образом исследование этой связи.

Примем, что скорость выделения тепла пламени (т. е. скорость химической реакции горения) пропорциональна скорости истечения горючего газа и происходит с некоторым феноменологическим запаздыванием горения  $\tau$  (если бы речь шла о жидком горючем, то  $\tau$  было бы величиной порядка времени, по истечении которого происходит сгорание капель после их выбрасывания форсункой). Будем считать также, что при горении теплоотдача из-за теплопроводности и конвекции во внешнюю среду стационарна. Тогда при наличии пламени такое же, как и раньше, изменение  $y$  вызовет большее изменение давления  $p_1$ , так как выходящий из трубки газ, сгорая, производит дополнительное увеличение давления.

Согласно предположению, теперь имеем

$$\Delta p_1 = -k_1 S_1 x + k_1 S_2 y + \alpha k_1 S_2 y_\tau$$

( $\alpha$  — коэффициент пропорциональности,  $y_\tau$  — значение  $y$  в момент  $t - \tau$ ), что после подстановки в уравнения (1.1) дает

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x} + \delta_1 \dot{x} &= -k_1 S_1^2 x + k_1 S_1 S_2 y + \alpha k_1 S_1 S_2 y \tau; \\ m_2 \ddot{y} + \delta_2 \dot{y} &= -(k_1 + k_2) S_2^2 y + k_1 S_1 S_2 x. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Если обозначить собственные частоты резонаторов  $A$  и  $B$  через  $\omega_1$  и  $\omega_2$  и пренебречь членом  $k_1 S_1 S_2 y$  по сравнению с  $\alpha k_1 S_1 S_2 y \tau$ , то приходим к следующим линеаризованным уравнениям малых колебаний:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + h_1 \dot{x} + \omega_1^2 x &= \mu y \tau; \\ \ddot{y} + h_2 \dot{y} + \omega_2^2 y &= \nu x. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} h_1 &\equiv \frac{\delta_1}{m_1}, \quad \omega_1^2 \equiv \frac{k_1 S_1^2}{m_1}, \quad \mu \equiv \frac{\alpha k_1 S_1 S_2}{m_1}, \\ h_2 &\equiv \frac{\delta_2}{m_2}, \quad \omega_2^2 \equiv \frac{(k_1 + k_2) S_2^2}{m_2}, \quad \nu \equiv \frac{k_1 S_1 S_2}{m_2}. \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение этой системы, получаемое обычным образом, будет:

$$(z^2 + h_1 z + \omega_1^2)(z^2 + h_2 z + \omega_2^2) - \nu \mu e^{-\tau z} = 0. \quad (1.5)$$

D-разбиение по параметру  $\nu \mu$  легко строится по правилам, изложенным в [4]. Полагая в (1.5)  $z = i\omega$ , находим

$$\nu \mu = (\omega_1^2 - \omega^2 + i h_1 \omega)(\omega_2^2 - \omega^2 + i h_2 \omega) e^{i \tau \omega}. \quad (1.6)$$

При  $\tau = 0$

$$(\nu \mu)_0 = (\omega_1^2 - \omega^2 + i h_1 \omega)(\omega_2^2 - \omega^2 + i h_2 \omega).$$

Кривая  $(\nu \mu)_0$  изображена на рис. 3, а. Абсцисса точки  $b$  пересечения кривой с действительной осью, равная

$$-\frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2} [(\omega_1^2 - \omega_2^2) + h_1 \omega_2^2 + h_2 \omega_1^2],$$

уменьшается при сближении частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

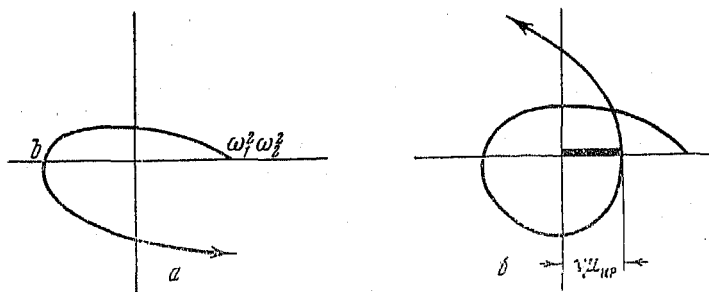


Рис 3. а —  $(\nu \mu)_0$ , б —  $(\nu \mu)$

При наличии запаздывания  $\tau$  кривая рис. 3, а «закручивается» и принимает вид, изображенный на рис. 3, б. Отрезок устойчивости выделен жирной линией. Система будет устойчивой при любом запаздывании, если  $|\nu \mu| < r_{\min}$ , где  $r_{\min}$  — минимальное расстояние от точек кривой рис. 3, а до начала координат. D-разбиение по параметрам  $\nu \mu$

и  $\tau$  представлено на рис. 4, на котором область устойчивости заштрихована.

Из рис. 3, а, б и рис. 4 следует, что а) при небольших значениях  $\mu$  без запаздывания  $\tau$  нет неустойчивости; б) для возбуждения колебаний благоприятно увеличение  $\mu$ , сближение частот  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , а также уменьшение коэффициентов затуханий  $h_1$  и  $h_2$ .

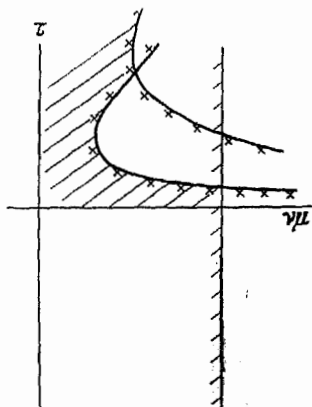


Рис. 4

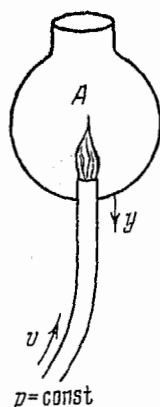


Рис. 5

## 2. Полураспределенная модель явления (модель № 2)

В резонатор  $A$  через узкую длинную трубку  $B$  с площадью сечения  $\sigma$  из резервуара  $C$  подается газ (рис. 5). Требуется найти условия самовозбуждения колебаний пламени, считая, как и раньше, резонатор  $A$  дискретным звеном, но учитывая волновые явления в подводящей трубке  $B$ .

Уравнения малых колебаний газа в горлышке резонатора имеют вид

$$m\ddot{x} + \delta\dot{x} = S\Delta p, \quad (2.1)$$

а уравнения малых колебаний газа, накладывающихся на его установившееся течение в подводящей трубке, описываются теперь уже уравнениями в частных производных

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\rho a^2} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (2.2)$$

где  $v$  — изменение скорости газа в трубке,  $p$  — изменение давления,  $\rho$  — плотность газа,  $a$  — скорость звука в газе.

К уравнению (2.2) нужно присоединить следующие граничные условия при  $y = L$  и  $y = 0$ :

в резервуаре  $C$  давление считаем постоянным, поэтому

$$p_{y=L} = 0; \quad (2.2')$$

при  $y = 0$  имеет место условие истечения, которое после линеаризации можно записать в виде

$$v = \gamma(p - \Delta p), \quad (2.2'')$$

где  $\gamma = \alpha_1^2 / v_0 \rho$  ( $\alpha_1$  — коэффициент расхода,  $v_0$  — скорость стационарного потока газа).

Как и в предыдущей модели,

$$\Delta p = \alpha \int v_{\tau} dt + \beta \int v dt - \gamma x, \quad (2.3)$$

где  $v$  — отклонение скорости вытекания газа из подводящей трубки от ее установившегося значения в момент времени  $t$ , а  $v_{\tau}$  — в момент  $t - \tau$ ;  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  — постоянные, равные соответственно

$$\alpha = \frac{\sigma \rho n R q}{c_v M_1 V}, \quad \beta = \frac{\sigma p_0}{V}, \quad \gamma = \frac{S p_0}{V}.$$

Здесь  $M_1$  — масса смеси газообразных продуктов горения и воздуха в резонаторе,  $q$  — теплотворная способность газа,  $n$  — число граммолекул,  $R$  — газовая постоянная,  $\rho$  — плотность газа,  $p_0$  — стационарное давление в резонаторе,  $V$  — объем резонатора. Действительно, в силу линеаризации общее изменение давления  $\Delta p$  в резонаторе складывается из изменений, вызываемых

а) втеканием газа через трубку  $B$ , равным  $\frac{\sigma p_0}{V} \int v dt$ ;

б) вытеканием через горло резонатора  $A$ , равным

$$\frac{S p_0}{V} \int \dot{x} dt = \frac{S p_0}{V} x;$$

в) выделением избыточного тепла от сгорания газа, равным<sup>3</sup>

$$\frac{\sigma \rho n R q}{c_v M_1 V} \int v_{\tau} dt;$$

г) изменением  $\Delta p_{\text{хим}}$  в результате химической реакции. Этим последним членом можно пренебречь, так как, например, для водорода

$$\left| \frac{\Delta p_{\text{хим}}}{\Delta p_{\tau}} \right| \approx \frac{1}{80}.$$

Итак, полная система линеаризованных уравнений «полураспределенной» модели будет

$$\begin{aligned} m \ddot{x} + \delta \dot{x} &= S \Delta p_{y=0} = S \left[ \alpha \int v_{\tau} dt + \beta \int v dt - \gamma x \right]_{y=0}; \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\rho a^2} \frac{\partial p}{\partial t}; \\ p_{y=L} &= 0, \quad v_{y=0} = v(p - \Delta p). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для того, чтобы найти характеристическое уравнение системы уравнений (2.4), согласно [5] положим

$$\begin{aligned} p(y, t) &= (A e^{-zy/a} + B e^{zy/a}) e^{zt}, \\ v(y, t) &= \frac{1}{\sigma \rho} [-A e^{-zy/a} + B e^{zy/a}] e^{zt}, \\ x &= C e^{zt}, \end{aligned}$$

<sup>3</sup> При горении за время  $t$  будет сгорать масса  $M = \sigma \rho \int v_{\tau} dt$  горючего газа, которая прореагирует с массой  $\epsilon M$  воздуха ( $\epsilon$  — коэффициент, определяемый из химической формулы горения). В результате горения получим  $(1 + \epsilon)M$  продуктов горения +  $qM$  тепла. Из-за повышения температуры давление в резонаторе увеличится на величину:

$$\Delta p_{\tau} = \frac{nR}{V} \Delta T = \frac{nR}{V} \frac{qM}{c_v M_1} = \frac{\sigma \rho n R q}{V c_v M_1} \int v_{\tau} dt.$$

что после подстановки в первое, третье и четвертое условия (2.4) приводит к системе уравнений:

$$\begin{aligned} C(mz^2 + \delta z) &= S \left\{ [\alpha(-A + B)e^{-z\tau} + \beta(-A + B)] \frac{1}{a\rho z} - \gamma C \right\}, \\ A e^{-zL/a} + B e^{zL/a} &= 0, \\ \frac{1}{a\rho}(-A + B) &= \gamma \left\{ A + B - \left[ \frac{\alpha}{a\rho z} e^{-z\tau}(-A + B) + \frac{\beta}{a\rho z}(-A + B) - \gamma C \right] \right\}. \end{aligned}$$

Исключая из этой системы постоянные  $A$ ,  $B$  и  $C$ , придем к характеристическому уравнению:

$$(z^2 + hz + k^2) \left( 1 + D \operatorname{th} \frac{z\tau_1}{2} \right) + (z + h)E(1 + \mu e^{-z\tau}) = 0. \quad (2.5)$$

Здесь

$$h = \frac{\delta}{m}; \quad k^2 = \frac{\gamma S}{m}; \quad D = \gamma a\rho; \quad E = \gamma\beta; \quad \mu = \frac{\alpha}{\beta}; \quad \tau_1 = \frac{2L}{a}.$$

Рассматриваемая система будет устойчива, если все корни характеристического уравнения (2.5) лежат слева от мнимой оси. Найдем на плоскости параметров  $D$  и  $\tau_1$  области, где выполняется и где не выполняется это условие. Из уравнения (2.5) следует, что

$$\begin{aligned} D &= - \left[ \frac{P_1}{P_2} (1 + \mu e^{-z\tau}) + 1 \right] \operatorname{cth} \frac{z\tau_1}{2}, \\ P_1 &\equiv E(z + h), \quad P_2 \equiv z^2 + hz + k^2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Положим в (2.6)  $z = i\omega$ . Тогда

$$D = i \left[ \frac{P_1(i\omega)}{P_2(i\omega)} (1 + \mu e^{-i\tau\omega}) + 1 \right] \operatorname{ctg} \frac{\omega\tau_1}{2} \equiv Q \operatorname{ctg} \frac{\omega\tau_1}{2}. \quad (2.7)$$

Граница области устойчивости состоит из точек, удовлетворяющих, по крайней мере для одного действительного  $\omega$ , уравнению (2.7). Такими  $\omega$  могут быть или корни уравнения

$$\operatorname{ctg} (\omega\tau_1/2) = 0,$$

или значения  $\omega$ , обращающие выражение

$$Q \equiv i \left[ \frac{P_1(i\omega)}{P_2(i\omega)} (1 + \mu e^{-i\tau\omega}) + 1 \right] \quad (2.8)$$

в чисто действительное число (ибо  $D$  — действительно). Каждому из корней уравнения  $\operatorname{ctg} (\omega\tau_1/2) = 0$ , т. е.

$$\omega = (2n + 1)\pi/\tau_1 \quad (2.9)$$

отвечает прямая  $D = 0$ .

Для нахождения значений  $\omega$ , для которых  $Q$  — действительное число, построим кривую  $Q(i\omega)$ . При  $\tau = 0$  вид этой кривой показан на рис. 6, а (изображена только часть этой кривой, соответствующая  $\omega > 0$ ; вторая половина кривой для  $\omega < 0$  расположена симметрично относительно мнимой оси). Ее выступ, увеличивающийся с уменьшением затухания  $h$ , при малом  $h$  соответствует примерно собственной частоте резонатора. При увеличении  $\mu$ , так как обычно  $\mu \gg 1$ , она подобно увеличивается с центром подобия в точке  $(0, i)$ . Наличие  $\tau$  вызывает вращение точек этой кривой вокруг точки  $(0, i)$  на угол  $-\omega\tau$ , в результате чего у нее могут появиться точки пересечения с действительной осью (рис. 6, б).

Уравнение для определения соответствующих точкам пересечения значений  $\omega = \omega_j$  получим, приравняв мнимую часть  $Q(i\omega)$  нулю. Условие  $\text{Im } Q(i\omega) = 0$  дает

$$(k^2 - \omega^2)^2 + h^2 \omega^2 + E[(1 + \mu \cos \omega \tau) h k^2 + \mu \omega \sin \omega \tau (k^2 - \omega^2 - h^2)] = 0. \quad (2.10)$$

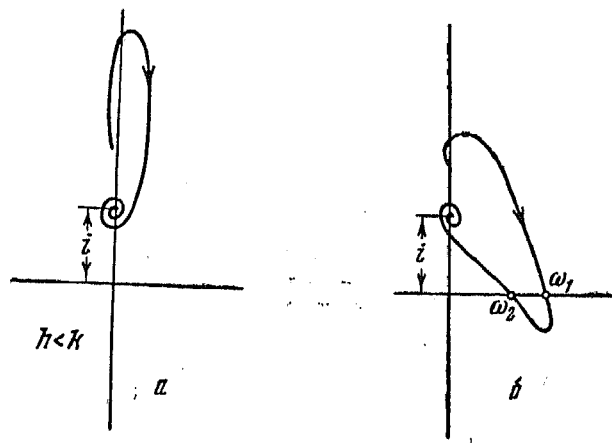


Рис. 6. а —  $(Q)_0$ , б —  $(Q)$

После того как  $\omega_j$  найдены, уравнение границы области устойчивости на плоскости  $D, \tau_1$  запишется в форме

$$D = Q(\omega_j) \text{ctg}(\omega_j \tau_1 / 2).$$

После нанесения штриховки, согласно правилам, изложенным в [4], придем к D-разбиению, показанному на рис. 7. Область устойчи-

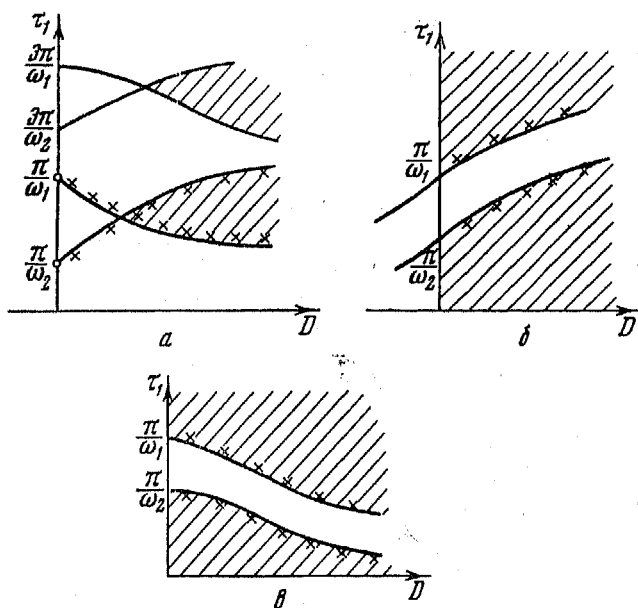


Рис. 7

вости на нем заштрихована. Из этого рисунка и вида вспомогательной кривой следует:

а) при отсутствии запаздывания горения самовозбуждение невозможно;

б) при увеличении длины подводящей трубки происходит вначале чередование устойчивости и неустойчивости, а при достаточно длинной трубке наступает неустойчивость (заметим, что неустойчивость возможна и при отсутствии подводящей трубки, т. е. при  $\tau_1 = 0$ );

в) при малом затухании и не очень большом  $\mu$  возбуждаемая частота колебаний близка к собственной частоте колебаний резонатора;

г) уменьшение  $h$  и увеличение  $E$  или  $\mu$  способствуют появлению неустойчивости.

### 3. Распределенная модель поющего пламени без учета конвекции (модель № 3)<sup>4</sup>

Будем рассматривать теперь подводящую трубку и звучащую трубу, как одномерные распределенные звенья, а пламя — только как распределенный линейный источник тепла. Рассматриваемую систему

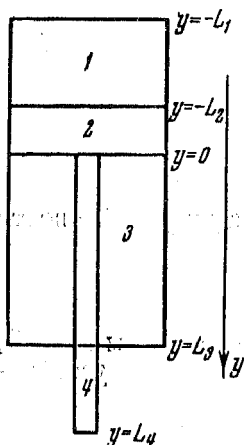


Рис. 8

разобьем условно на четыре части: зону горения 2, зоны 1 и 3, в которых изменениями температуры, вызываемыми колебаниями пламени, пренебрежем, и подводящую трубку 4 (рис. 8).

В областях 1, 3 и 4 для изменений скоростей и давлений при пренебрежении членами порядка отношения скорости конвекционного тока к скорости звука имеют место линейаризованные уравнения

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{1}{\rho_{i0}} \frac{\partial p_i}{\partial y}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial t} = \rho_{i0} a_{i0}^2 \frac{\partial v_i}{\partial y} \quad (i = 1, 3, 4). \quad (3.1)$$

Для зоны горения имеем линейаризованные уравнения Эйлера

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} = \frac{1}{\rho_{20}} \frac{\partial p_2}{\partial y} \quad (3.2)$$

и уравнения неразрывности в форме

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} = \rho_{20} \frac{\partial v_2}{\partial y}, \quad (3.3)$$

к которым нужно еще присоединить вытекающее из уравнения состояния и первого принципа термодинамики соотношение между субстанциальными изменениями давления и плотности:

$$dp_2 = \frac{p_{20}}{1 c_v T_0} dQ + a_{20}^2 d\rho_2, \quad (3.4)$$

где  $c_v$  — теплоемкость.

Пренебрегая в  $dQ$  членом, связанным с теплообменом между отдельными слоями газа, предположим, что

$$dQ = b v_4 (t - \tau)_{y=0} dt \quad (3.5)$$

( $\tau$  — феноменологическое запаздывание горения).

<sup>4</sup> Поющее пламя экспериментально наблюдалось и в горизонтальной трубе при отсутствии конвекционного тока воздуха [6].

Заменяя в уравнении (3.4) субстанциальные приращения через

$$\left(\frac{\partial p_2}{\partial t} - v_{20} \frac{\partial p_2}{\partial y}\right) dt \text{ и } \left(\frac{\partial \rho_2}{\partial t} - v_{20} \frac{\partial \rho_2}{\partial y}\right) dt,$$

соответственно, и пренебрегая конвекционными членами, найдем

$$\frac{\partial p_2}{\partial t} = \frac{p_{20}}{I_{c_0} T_0} b v_4 (t - \tau)_{y=0} + a_{20}^2 \frac{\partial p_2}{\partial t}. \quad (3.6)$$

Исключая из уравнений (3.3) и (3.6) плотность  $\rho_2$ , окончательно получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_2}{\partial t} - a_{20}^2 \rho_{20} \frac{\partial v_2}{\partial y} &= N v_4 (t - \tau)_{y=0}, \\ N &\equiv (p_{20}/I_{c_0} T_0) b. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Напишем теперь краевые условия для уравнений (3.1), (3.2) и (3.7) и условия сшивания решений в областях 1, 2 и 3:

$$\begin{aligned} \text{при } y = -L_1: v_1 &= v_1 p_1; & \text{при } y = L_3: v_3 &= -v_3 p_3; \\ \text{при } y = 0: v_4 &= v_4 (p_4 - p_2); & \text{при } y = L_4: p_4 &= 0; \\ \text{при } y = -L_2: v_1 &= v_2; & \text{при } y = -L_2: p_1 &= p_2; \\ \text{при } y = 0: v_2 &= v_3; & \text{при } y = 0: p_2 &= p_3; \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$v_1 = \frac{\alpha_1^2}{v_{10} \rho_{10}}, \quad v_3 = \frac{\alpha_3^2}{v_{30} \rho_{30}}, \quad v_4 = \frac{\alpha_4^2}{v_{40} \rho_{40}}.$$

Теперь можно перейти к основной задаче исследования условий самовозбуждения колебаний. Для этого, прежде всего, нужно составить, следуя [5], характеристический квазиполином системы уравнений (3.1), (3.2), (3.7) с краевыми условиями (3.8). Именно, ищем решения уравнений (3.1), (3.2) и (3.7) вида

$$p_i(y, t) = P_i(y) e^{zt}, \quad v_i(y, t) = V_i(y) e^{zt} \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (3.9)$$

После подстановки в соответствующие уравнения для  $i = 1, 3$  и 4 найдем, что

$$\begin{aligned} P_i(y) &= A_i e^{-zy/a_i} + B_i e^{zy/a_i}; \\ V_i(y) &= \frac{1}{a_i \rho_i} [-A_i e^{-zy/a_i} + B_i e^{zy/a_i}], \end{aligned} \quad (3.10)$$

где  $A_i$  и  $B_i$  — произвольные постоянные.

Из уравнений (3.2) и (3.7) после такой же подстановки (используя полученное только что выражение для  $v_4$ ) придем к уравнениям

$$\begin{aligned} z V_2 &= \frac{1}{\rho_{20}} P_2', \\ z P_2 - a_{20}^2 \rho_{20} V_2 &= \frac{N}{a_4 \rho_4} [-A_4 + B_4] e^{-\tau z}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

общее решение которых есть

$$\begin{aligned} P_2(y) &= A_2 e^{-zy/a_2} + B_2 e^{zy/a_2} + \frac{N}{a_4 \rho_4 z} (B_4 - A_4) e^{-\tau z}, \\ V_2(y) &= \frac{1}{a_2 \rho_2} \{-A_2 e^{-zy/a_2} + B_2 e^{zy/a_2}\}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Подставляя теперь найденные решения в краевые условия (3.8), придем к системе восьми уравнений относительно произвольных постоянных

$A_i, B_i$  и частоты  $z$ , причем ради простоты будем считать  $a_{i0}$  и  $\rho_{i0}$  в зонах 1, 2 и 3 одинаковыми и равными, соответственно,  $a$  и  $\rho$ :

$$\begin{aligned}
 -A_1 e^{zL_1/a} + B_1 e^{-zL_1/a} &= \nu_1 a \rho (A_1 e^{zL_1/a} + B_1 e^{-zL_1/a}), \\
 -A_3 e^{-zL_3/a} + B_3 e^{zL_3/a} &= -\nu_3 a \rho (A_3 e^{-zL_3/a} + B_3 e^{zL_3/a}), \\
 -A_4 + B_4 &= a_4 \rho_4 \nu_4 (A_4 + B_4 - A_3 - B_3), \\
 A_4 e^{-zL_4/a_4} + B_4 e^{zL_4/a_4} &= 0, \\
 -A_1 e^{zL_2/a} + B_1 e^{-zL_2/a} &= -A_2 e^{zL_2/a} + B_2 e^{-zL_2/a}, \\
 A_1 e^{zL_2/a} + B_1 e^{-zL_2/a} &= A_2 e^{zL_2/a} + B_2 e^{-zL_2/a} + \frac{N(B_4 - A_4)}{a_4 \rho_4 z} e^{-\tau z}, \\
 -A_2 + B_2 &= -A_3 + B_3, \\
 A_2 + B_2 + \frac{N(B_4 - A_4)}{a_4 \rho_4 z} e^{-\tau z} &= A_3 + B_3.
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Введем обозначения

$$2 \frac{L_1 - L_2}{a} = \tau_1, \quad 2 \frac{L_2}{a} = \tau_2, \quad 2 \frac{L_3}{a} = \tau_3, \quad 2 \frac{L_4}{a} = \tau_4,$$

$$N \nu_4 = 2\mu, \quad \nu_1 a \rho = \mu_1, \quad \nu_3 a \rho = \mu_2, \quad \nu_4 a_4 \rho_4 = \mu_3.$$

Тогда характеристическое уравнение задачи, получаемое из уравнений (3.13) исключением постоянных  $A_i, B_i$ , может быть представлено в следующем виде:

$$\mu_3 \operatorname{th} \frac{z\tau_4}{2} = 1 - \frac{\mu}{z} e^{-\tau z} \frac{(1 + D_2 e^{z\tau_3})(1 + D_1 e^{z(\tau_1 + 1/2\tau_2)})(e^{z\tau_2/2} - 1)}{1 - D_1 D_2 e^{z(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)}}. \tag{3.14}$$

Здесь

$$D_1 = (1 + \mu_1)/(1 - \mu_1), \quad D_2 = (1 + \mu_2)/(1 - \mu_2).$$

Рассмотрим D-разбиение по параметрам  $\mu_3$  и  $\tau_4$ . Граница D-разбиения октанта  $\mu_3 > 0, \tau_4 > 0$  по этим параметрам состоит из серии кривых:

$$\mu_3 = -iF(i\omega_j) \operatorname{ctg}(\omega_j \tau_4/2),$$

где  $\omega_j$  — корни уравнения  $\operatorname{Re} F(i\omega_j) = 0$ , а  $F(z)$  обозначает правую часть уравнения (3.14). Для отыскания корней этого уравнения построим вспомогательную кривую  $F(i\omega)$ . Примерный ее вид показан на рис. 9. Выступы  $A_1, A_2, \dots$  соответствуют значениям  $\omega$ , при которых величина

$$1 - D_1 D_2 \exp \{i\omega(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)\}$$

близка к нулю, что будет (примерно) иметь место при частотах, близких к собственным частотам резонатора. Величины этих выступов, вообще, убывают из-за наличия  $z$  в знаменателе выражения  $F(z)$ . Кроме того, некоторые из них могут уменьшиться или даже исчезнуть:

а) если  $1 + D_2 e^{z\tau_3} \approx 0$ , т. е. если конец трубки, подводящей газ, находится в узле давления;

б) если  $1 + D_1 \exp \{z[\tau_1 + (\tau_2/2)]\} \approx 0$ , т. е. если центр зоны горения находится в узле давления;

в) если на этих частотах  $e^{i\omega(\tau_1/2)} \approx 1$ , т. е. если в зоне горения уместится целое число волн.

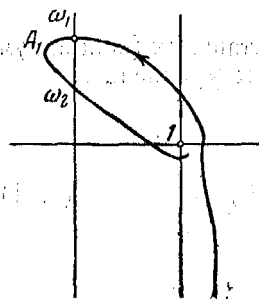


Рис. 9. ( $F$ )

Диаграмма областей устойчивости и неустойчивости по параметрам  $\mu_3$  и  $\tau_4$  представлена на рис. 10<sup>5</sup>. Каждому выступу вспомогательной кривой, пересекающемуся с мнимой осью, соответствует на ней ряд областей неустойчивости. Параметры  $\mu_3$  и  $\tau_4$  соответствуют параметрам  $D$  и  $\tau_1$  предыдущей модели, и отличие D-разбиений рис. 7 и рис. 10 заключается только в значениях и числе корней  $\omega_j$  и значениях величин  $-iF(i\omega_j)$  и  $Q(i\omega_j)$  соответственно.

То новое, что позволяет обнаружить эта модель, состоит в возможности возбудить не только основную частоту звучащей трубы, но и высшие гармоники, и в обнаружении зависимости такого возбуждения от положения пламени, его размеров и интенсивности и запаздывания горения.

Заметим, что роль параметров  $\mu$  и  $\tau$  для вспомогательной кривой этой модели и предыдущей одна и та же.

Роль, аналогичную затуханию  $h$  в предыдущей модели, теперь играет произведение  $D_1 D_2$ : выступы будут увеличиваться при приближении  $|D_1 D_2|$  к единице.

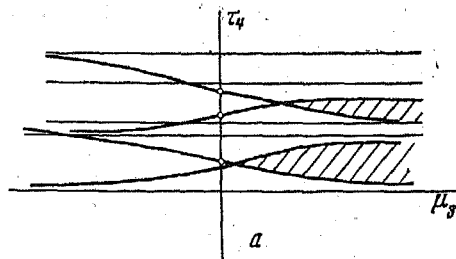


Рис. 10

#### 4. Обсуждение полученных результатов

Сравним экспериментально наблюдавшиеся различными авторами факты с выводами, которые можно сделать из предлагаемой теории. Естественно, что дискретная модель объясняет наименьшее число фактов, и, наоборот, распределенная модель наиболее полно описывает явление.

1. Опыт показывает, что колебания поющего пламени возбуждаются периодически в зависимости от длины подводящей трубки. Модель № 1 этого факта не объясняет. Для моделей № 2 и № 3 этот вывод непосредственно получается из рис. 7 и 10. Если при фиксированном  $D$  ( $\mu_3$ ) увеличивать  $\tau_1$  ( $\tau_4$ ), то область устойчивости будет сменяться областью неустойчивости, и наоборот. При этом количественно условия возбуждения могут оказаться отличными от условий, указанных Рэлеем (пламя звучит, когда длина газовой трубки несколько меньше  $1/4 \lambda$ ,  $3/4 \lambda$ , ..., и молчит, когда ее длина около  $1/2 \lambda$ ,  $\lambda$ ,  $3/2 \lambda$ , ..., где  $\lambda$  — длина волны в газе). Это отклонение условий возбуждения от условий Рэлея наблюдалось некоторыми экспериментаторами. В [1] оно объясняется действием прогрессивных волн, которые якобы возникают в газовой трубке наряду со стоячими волнами. Как можно усмотреть из поведения кривых на рис. 7 и 10, при достаточно большом  $\tau_1$  ( $\tau_4$ ) система будет всегда неустойчивой.

2. Опыт показывает, что частота поющего пламени близка к основной собственной частоте звучащей трубы. Однако иногда могут возбуждаться и высшие гармоники. То, какая частота возбуждается, зависит от места пламени в звучащей трубе, причем для возбуждения высших гармоник короткое пламя лучше. Модели № 1 и № 2 этих фактов объяснить не могут. Модель № 3 их объясняет (в модели № 3 размеры пламени учитываются непосредственно параметром  $\tau_2$  и косвенно параметром  $\mu$ , в который входит плотность источника тепла).

3. В отсутствие пламени система устойчива, и газ просто продвигается через резонатор. В этом случае параметр  $\mu = 0$ . Устойчивость

<sup>5</sup> Рисунки для случаев б и в рис. 10 те же, что и рис. 7, б, в.

системы для модели № 1 непосредственно видна из рис. 4. Для моделей № 2 и № 3 устойчивость вытекает из того, что кривая  $Q(i\omega)$  на рис. 6 [ $-iF(i\omega)$  на рис. 9] не имеет точек пересечения с действительной осью. Область устойчивости занимает здесь первый квадрант ( $D > 0$ ,  $\tau_1 > 0$ ) рис. 7 (соответственно  $\mu_3 > 0$ ,  $\tau_4 > 0$  рис. 10). Опыт показывает, что звучать могут и другие неводородные пламена, например пламя светильного газа [1, 2], но «поют» они хуже водородного пламени. Объясняется это тем, что для неводородных пламен параметр  $\mu$  меньше.

4. Опыт показывает, что если подводящую трубку заткнуть ватой, однако так, чтобы газ мог просачиваться сквозь вату, то пламя звучать не будет [2]. Влияние ваты эквивалентно увеличению затухания системы. Для модели № 1 это означает увеличение коэффициента  $h_2$ . С ростом же  $h_2$ , как следует из рис. 3, 4, устойчивость системы растет. Для модели № 2 наличие ваты означает уменьшение коэффициента расхода  $\alpha_1$ , т. е. уменьшение параметров  $D$  и  $E$ . При малом  $E$  кривая  $Q(i\omega)$  не имеет точек пересечения с действительной осью, и, следовательно, система устойчива. Аналогично для модели № 3, уравнение  $\text{Im}[-iF(i\omega)] = 0$  при малых  $\alpha_4$  не имеет действительных корней.

5. Опыт показывает, что пламя не звучит, если отверстие подводящей трубки весьма мало. Для модели № 1 малое  $S_2$  соответствует малому  $\mu$ . При малых  $\mu$ , как следует из рис. 4, система устойчива. Для модели № 2 малая площадь отверстия  $\sigma$  эквивалентна малому  $E$ , а для модели № 3 — малому  $\mu$  [площадь сечения газовой трубки включена в коэффициент  $b$  уравнения (3.5)]. Как уже было сказано выше, при малом  $E(\mu)$  система устойчива.

6. Опыт показывает, что частота поющего пламени близка к собственной частоте резонатора, но может несколько от нее отличаться (при широком отверстии подводящей трубки). Предлагаемая теория объясняет это тем, что частота  $\omega$  из (1.6) и значения  $\omega = \omega_j$ , при которых  $Q(i\omega)$  и  $-iF(i\omega)$  пересекают действительную ось, зависят, помимо параметров резонатора, также от параметров газовой трубки и параметров горения.

7. Так как в предлагаемой теории влияние конвекции не учитывалось, то ни одна из рассмотренных моделей не объясняет тот экспериментальный факт, что пламя, помещенное в верхней части трубы, возбуждает колебания хуже, чем когда оно находится в нижней части трубы.

Горьковский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
10 мая 1954 г.

#### Литература

- [1] A. T. Jones. Journ. Acoust. Soc., 16, 254, 1945.— [2] Дж. Рэлей. Теория звука, т. II, стр. 222—228, ГТТИ, 1944.— [3] Б. В. Раушенбах. Журн. техн. физ., 23, 358, 1953.— [4] Ю. И. Неймарк. Устойчивость линеаризованных систем, ЛКВВИА, 1949.— [5] Ю. И. Неймарк. Уч. зап. ГГУ, 14, 191, 1950.— [6] Z. Carrière. Revue d'Acoustique, 4, 149, 1935.

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ К ВОЗМОЖНЫМ ФОРМУЛИРОВКАМ  
ТЕОРИИ ПРОТЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

В. С. Барашенков

Рассматриваются некоторые черты возможных формулировок теории нелокализованных полей. В частности, показано, что если операторы нелокализованных полей рассматриваются как недиагональные в пространстве координат матрицы, то невзаимодействующие нелокализованные поля не могут быть эквивалентны совокупности полей локального типа. В заключение приводятся некоторые соображения, касающиеся сравнения выводов теории протяженных частиц с опытом.

1. Исследования возможностей устранения фундаментальных трудностей теории поля, связанных с наличием расходящихся выражений в аппарате современной теории, занимают одно из центральных мест в современной физической литературе, посвященной изучению свойств и взаимодействия элементарных частиц. Такое положение обусловлено тесной связью этих трудностей с самыми глубокими проблемами строения вещества: масса и структура элементарных частиц, взаимосвязь этих частиц, ядерные силы и т. д.

Можно думать [1], что устранение многих трудностей современных физических теорий, в том числе и трудностей с расходимостями, связано с незаконным применением для описания явлений, протекающих в малых пространственно-временных областях, понятий и принципов, соответствующих экспериментам лишь в больших областях пространства — времени<sup>1</sup>. С этой точки зрения, большой интерес представляют усиленно обсуждаемые в последнее время гипотеза нелокализованного поля [2-4], где погрешности в определении поля  $\Delta A$  и координаты  $\Delta x$  связаны соотношением  $\Delta A \Delta x \sim \lambda_0 A$ , и тесно связанная с ней гипотеза нелокального взаимодействия [5], т. е. взаимодействия «размазанного» по малой пространственно-временной области. Математически эти идеи оформляются введением в аппарат теории «обрезающих» форм-факторов, что можно интерпретировать, как попытку ввести в теорию пространственно-временную протяженность частиц.

Гипотезы нелокализованного поля и нелокального взаимодействия не имеют специфически квантового характера и приложимы к классической теории поля [6].

Существенно отметить, что все предлагавшиеся до сих пор в этом направлении схемы приводят к серьезным трудностям, связанным с нарушением релятивистской инвариантности [7,8]. Можно попытаться [8] устранить эти трудности путем введения в теорию «динамически деформируемых» форм-факторов, соответствующих рассмотрению «мягкой» частицы в том смысле, что скорость распространения сигнала по такой частице не превосходит скорость света. Однако, на наш взгляд, представляется весьма разумным еще в рамках теории с «жесткой» частицей изучить возможность построения теории, в которой отклонения от

<sup>1</sup> С другой стороны, трудно не согласиться с тем, что известная часть трудностей обусловлена незаконностью использования в отдельных случаях тех или иных математических методов. В частности, возможно, существенные коррективы внесет учет высших приближений теории возмущений.

релятивистской инвариантности локализованы в малых пространственно-временных областях. Ранее было показано<sup>[9]</sup>, что подобная «малая пространственно-временная область» ( $\leq \lambda_0$ ), в которой скорость сигнала может превосходить скорость света, остается малой ( $\leq \lambda_0$ ) в любой системе координат. В этом смысле теорию можно назвать релятивистски инвариантной и рассматривать ее, как предельный случай теории с динамически деформируемым форм-фактором.

Существенно также, чтобы аппарат теории автоматически обеспечивал ограничения измерений в малых областях  $\sim \lambda_0$ ; физически наблюдаемыми величинами в такой теории должны быть величины, соответствующие большему ( $> \lambda_0$ ) пространственно-временным интервалам. В этом отношении теория нелокализованных полей, в которой поле и координата удовлетворяют соотношению  $\Delta A x \sim \lambda_0 A$ , имеет преимущества перед теорией нелокального взаимодействия.

2. Интересный вариант теории нелокализованного поля был предложен и подробно исследован в работе<sup>[3]</sup>. В отличие от теории локального поля, где поле рассматривается локальной функцией точки  $A = A(x)$ , в теории нелокализованных полей Юкавы поле рассматривается, как недиагональная матрица в пространстве координат:

$$A = (x'|A|x''), \text{ причем } [A, x] \neq 0.$$

Полная система уравнений, описывающая невзаимодействующее нелокализованное поле  $(x'|A|x'')$ , в том виде, как она была записана в<sup>[3]</sup>, имеет вид:

$$\begin{aligned} [p[p, A]] + m_0^2 A &= 0, \\ [x[x, A]] - \lambda_0^2 A &= 0, \\ [p[x, A]] &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $p$  — оператор импульса:  $(x'|p|x'') = -i \frac{\partial}{\partial x'} \delta(x' - x'')$ ;  $x$  — оператор координаты:  $(x'|x|x'') = x' \delta(x' - x'')$ .

Таким образом рассматриваемый вариант теории отличается от теории локальных полей изменением системы законов движения для свободных полей; вторичное квантование выполняется в соответствии с измененными уравнениями движения<sup>[3]</sup>.

В последующем некоторые авторы<sup>[10,11]</sup> пришли к выводу, что теория свободного нелокализованного поля является лишь одной из возможных форм описания совокупности локальных полей, описывающих частицы массы  $m_0$  и различных спинов. В свете исходной идеи о существенно недиагональном характере оператора поля  $(x'|A|x'')$  подобное заключение является весьма удивительным и заслуживает более пристального рассмотрения.

Легко видеть, что матричные элементы коммутационной скобки оператора координаты и произвольной матричной величины  $(x'|T|x'')$ , в соответствии с законами матричного умножения могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} (x'|[x, T]|x'') &= \int x' \delta(x' - t) (t|T|x'') dt - \\ &- \int (x'|T|t) t \delta(t - x'') dt = (x' - x'')(x'|T|x''). \end{aligned} \quad (2)$$

Аналогично для матричных элементов коммутационной скобки оператора импульса и матрицы  $T$  получим выражение:

$$\begin{aligned} (x'|[p, T]|x'') &= i \int (x'|T|t) \frac{\partial}{\partial t} \delta(t - x'') dt - \\ &- i \int \frac{\partial}{\partial x'} \delta(x' - t) (t|T|x'') dt = -i \left( \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial x''} \right) (x'|T|x''). \end{aligned} \quad (3)$$

Если выбрать матрицу  $T$  в виде  $(x' | T | x'') = (x' | [x, A] | x'')$  или  $(x' | T | x'') = (x' | [p, A] | x'')$ , то систему уравнений (1) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}(x' | F_1 | x'') &\equiv \left( \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial x''} \right)_\mu \left( \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial x''} \right)^\mu (x' | A | x'') - m_0^2 (x' | A | x'') = 0, \\(x' | F_2 | x'') &\equiv (x' - x'')_\mu (x' - x'')^\mu (x' | A | x'') - \lambda_0^2 (x' | A | x'') = 0, \\(x' | F_3 | x'') &\equiv (x' - x'')_\mu \left( \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial x''} \right)^\mu (x' | A | x'') = 0.\end{aligned}\quad (4)$$

Введем, далее, вместо матричных операторов  $F_1, F_2, F_3$  новые операторы  $E_1, E_2, E_3$ , матричные элементы которых определим следующим образом:

$$(X' | E_i | X'') = (X' + X'' | F | X' - X'') = (x' | F_i | x''). \quad (5)$$

Если матричные элементы операторов  $F_i$  и  $E_i$  рассматривать как функции переменных  $x'$ ;  $x''$  и  $X'$ ;  $X''$ , то (5) соответствует переходу от переменных  $x'$ ;  $x''$  к новым переменным  $X' = 1/2(x' + x'')$  и  $X'' = 1/2(x' - x'')$ . Каждый элемент матрицы  $E_i$  совпадает с одним из элементов матрицы  $F_i$ ; другими словами, матрица  $E_i$  получена из матрицы  $F_i$  перестановкой элементов в соответствии с законом (5).

Таким образом

$$\begin{aligned}(X' | E_1 | X'') &\equiv \left( \frac{\partial}{\partial X'_\mu} \frac{\partial}{\partial X''^\mu} - m_0^2 \right) (X' | \bar{A} | X'') = 0, \\(X' | E_2 | X'') &\equiv (X'_\mu X''^\mu - \lambda_0^2) (X' | \bar{A} | X'') = 0, \\(X' | E_3 | X'') &\equiv X''_\mu \frac{\partial}{\partial X'_\mu} (X' | \bar{A} | X'') = 0,\end{aligned}\quad (6)$$

где оператор  $(X' | \bar{A} | X'')$  определен в соответствии с законом (5).

Существенно заметить, что  $X'$ ,  $X''$ , так же как и  $x'$ ,  $x''$ , являются совершенно равноправными собственными значениями оператора координаты.

Матричные операторы  $E_i$  можно представить в виде:

$$\begin{aligned}E_1 &\equiv (K - m_0^2) \bar{A} = 0, \\E_2 &\equiv \bar{A} (L - \lambda_0^2) = 0, \\E_3 &\equiv M \bar{A} N = 0,\end{aligned}\quad (7)$$

где

$$\begin{aligned}(X' | K | X'') &= \frac{\partial}{\partial X'_\mu} \frac{\partial}{\partial X''^\mu} \delta(X' - X''), \\(X' | L | X'') &= X'_\mu X''^\mu \delta(X' - X''), \\(X' | M | X'') &= \frac{\partial}{\partial X'} \delta(X' - X''), \\(X' | N | X'') &= X' \delta(X' - X'').\end{aligned}\quad (8)$$

Построение при помощи канонического преобразования соотношений, описывающих нелокализованное не взаимодействующее поле, из соответствующих соотношений, описывающих локальное поле ( $\lambda_0 = 0$ ), основано на возможности представить систему уравнений (6) в виде:

$$(K - m_0^2) \bar{A} = (L - \lambda_0^2) \bar{A} = M \bar{A} N = 0,$$

где операторы  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  коммутируют друг с другом<sup>[10]</sup>. Однако подобная запись системы уравнений (6) возможна лишь, если  $X'$  и  $X''$  рассматриваются как независимые переменные, а оператор поля  $\bar{A}$  в соответствии с этим — как функция  $\bar{A} = \bar{A}(X', X'')$  в пространстве  $X'$  и  $X''$ .

Анализ теории Юкавы, приведенный в [11], также в значительной степени основан на рассмотрении оператора поля  $\bar{A}$  как функции  $A(X', X'')$  в пространстве  $X'$  и  $X''$ . Однако подобная постановка вопроса существенно отличается от первоначально предлагавшейся идеи рассматривать поле  $A$  как недиагональный в пространстве координаты  $x$  оператор.

При рассмотрении операторов нелокализованного поля, как недиагональных матриц в пространстве координат  $A = (x' | A | x'')$ , различная физическая интерпретация полностью равноправных по своему математическому смыслу величин  $X'$  и  $X''$  является, на наш взгляд, несостоятельной. Последнее замечание особенно относится к новому, недавно предложенному в [4] варианту теории, где в уравнениях движения операторы нелокализованного поля рассматриваются с двух существенно различных точек зрения: во-первых, как матрицы в пространстве координат  $A = (x' | A | x'')$ , где  $x'$  и  $x''$  — равноправные собственные значения оператора координаты  $x$ ; во-вторых, как функции  $A = A(X', X'')$ , где независимым переменным  $X'$  и  $X''$  приписывается различный физический смысл.

Очень важно также отметить, что в теории Юкавы<sup>[3]</sup> отклонения от релятивистской инвариантности не являются локализованными в малой пространственно-временной области<sup>[12]</sup>.

3. Недавно выполненные эксперименты по рассеянию  $\pi$ -мезонов на протонах<sup>[13]</sup> показывают, что эффективные сечения в исследованной области энергий ( $\leq 1,45$  BeV) имеют два ярко выраженных максимума. Подобную энергетическую зависимость сечений можно было бы попытаться объяснить наличием изобарных состояний (аналогия с классическими опытами Франка и Герца по рассеянию электронов на атомах) или явлениями, аналогичными эффекту Рамзауэра<sup>[14]</sup>.

Как в первом, так и во втором случаях требуется учет протяженности участвующих в реакции частиц. Наличие обрезывающих форм-факторов в выражениях, описывающих взаимодействие, может привести<sup>[8]</sup> к быстрому уменьшению величины эффективных сечений с ростом энергии участвующих в реакции частиц. Однако это имеет место лишь в частном случае форм-факторов, быстро уменьшающихся с ростом энергии, например форм-факторов типа  $e^{-\lambda k_0 p^2}$ . Повидимому, для описания протяженности частиц необходимо вводить форм-факторы, осциллирующие при энергиях  $E < E^*(\lambda_0)$  и быстро спадающие при  $E > E^*(\lambda_0)$ <sup>3</sup>.

Для объяснения различия в энергетической зависимости сечений рассеяния  $\pi^-$ - и  $\pi^+$ -мезонов, возможно, окажется необходимым сделать какие-то дополнительные предположения.

Все эти вопросы требуют последующего изучения. Существенно отметить, что основным препятствием для изучения влияния возможных размеров частиц в настоящее время является не столько недоста-

<sup>2</sup> Интересно отметить, что быстрого уменьшения величины эффективных сечений с ростом энергии нет в теории с нелокальным взаимодействием, описываемым форм-функцией  $F(x', x'')$ , однако в подобной теории остается неустраненной часть трудностей с расходимостями.

<sup>3</sup> Интересные возможности в этом отношении представляют также «знакопеременные форм-факторы», т. е. форм-факторы типа рассмотренного ранее cos-фактора (или  $\sin kx/kx$  и т. д.). Однако в этом случае выражения, описывающие энергию взаимодействия, становятся неэрмитовыми.

точное количество экспериментальных данных, сколько недостаточно точное знание границ применимости тех или иных методов, используемых в современной теории поля. В частности, остается невыясненным, как скажется на величине эффективных сечений в теории с форм-фактором учет высших приближений теории возмущений.

Кроме того, до тех пор, пока в рассматриваемой теории не будет выяснена величина постоянной  $\lambda_0$ , всегда остается возможность выбрать ее значение столь малым, что в достигнутой на опыте области энергий размеры частицы или еще не проявятся, или проявятся очень незначительно<sup>4</sup>.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить благодарность проф. Д. И. Блохинцеву за внимание, ценные советы и интересные обсуждения, а также проф. М. А. Маркову за интересные обсуждения, касающиеся общих вопросов теорий с форм-факторами.

*Примечание при корректуре.* В недавно опубликованной работе Хаяши (Progr. Theor. Phys., 10, 533, 1953) обращается внимание на тот факт, что в теории с форм-функцией комбинации из знакомых функций  $\theta^\pm(x_i - x_j)$ , связывающие между собой узлы в замкнутых частях диаграмм Фейнмана, не имеют определенного значения (например, формулы (42) и (47) в работе Хаяши). Вследствие этого сингулярные функции  $\Delta$ ,  $\Delta_\pm$  и т. д. в выражении для  $S$ -матрицы нельзя объединить в произведения каузальных  $\Delta^c$ -функций, что приводит к нарушению причинности в макроскопических ( $\gg \lambda$ ) областях. Относительный вклад каузальных эффектов пропорционален степеням  $\lambda$  и обращается в нуль при  $\lambda \rightarrow 0$ .

Поступила в редакцию  
8 мая 1954 г.

#### Литература

- [1] Д. И. Блохинцев. Уч. зап. МГУ, Физика, 3, 77, 101, 1945. М. А. Марков. ЖЭТФ, 8, 124, 1938. — [2] М. А. Марков. ЖЭТФ, 10, 1311, 1940; 21, 11, 1951. — [3] H. Yukawa Phys. Rev., 77, 219, 1950; 80, 1047, 1950. — [4] H. Yukawa. Phys. Rev., 91, 415, 416, 1953. — [5] K. Bloch. Det. Kgl. Den. Vid. Selsk., 27, № 8, 1952. — [6] Д. И. Блохинцев. ЖЭТФ, 16, 480, 1946; 18, 566, 1948. H. Yukawa. Progr. Theor. Phys., 2, 209, 1947. — [7] М. А. Марков. ЖЭТФ, 16, 790, 1946. — [8] М. А. Марков. ЖЭТФ, 25, 527, 1953. — [9] Д. И. Блохинцев. Journ. of Phys., 10, 167, 1946; ЖЭТФ, 22, 254, 1952. — [10] O. Hara a. H. Shimazu. {Progr. Theor. Phys., 7, 255, 1952. — [11] M. Fierz. Phys. Rev., 78, 184, 1950; Helv. Phys. Acta, 23, 412, 1950. — [12] Y. Ono a. M. Sugawara. Progr. Theor. Phys., 6, 182, 1951. — [13] R. L. Cool, L. Madansky a. P. Piccioni. Bull. of Amer. Phys. Soc., 28, 14, 1953. — [14] H. Мотт и Г. Месси. Теория атомных столкновений, ИИЛ, М., 1951, гл. X.

<sup>4</sup> Существующий ныне произвол в выборе вида форм-фактора и величины постоянной  $\lambda_0$  является одним из существеннейших недостатков теорий нелокализованного поля и нелокального взаимодействия.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ ПОПЕРЕЧНОЙ РЕЛАКСАЦИИ ЯДЕРНЫХ МАГНИТНЫХ МОМЕНТОВ

С. Д. Гвоздовер, Н. М. Померанцев и А. Л. Полякова

Предложен новый метод определения времени поперечной релаксации по форме сигналов магнитного резонанса атомных ядер. При применении этого метода одновременно может быть измерена эффективная неоднородность магнитного поля в объеме образца.

Экспериментальная проверка показала пригодность этого метода и согласна с результатами других авторов, полученными другими методами.

1. Форма сигналов ядерного магнитного резонанса в сильной степени зависит от времен релаксации  $T_1$  и  $T_2$ , получивших наименование, соответственно, продольного и поперечного [1]. Кроме того, форма сигнала зависит от амплитуды радиочастотного магнитного поля, а также от амплитуды и частоты модуляции продольного магнитного поля [1-3]. (Эти последние параметры находятся в распоряжении экспериментатора.)

В настоящей работе для определения времени релаксации  $T_2$  были использованы сигналы, полученные при помощи автоколебательной системы. Описание примененной аппаратуры дано в [4]. Там же показано, что при выполнении условия резонанса  $\omega = |\gamma| H_0$ , где  $\omega$  — угловая частота радиочастотного поля,  $H_0$  — продольная компонента вектора напряженности магнитного поля и  $\gamma$  — гиромагнитное отношение, амплитуда колебаний модулирована сигналом

$$v(t) = - \int_{-\infty}^t e^{(\xi-t)/T_2} \cos [f(t) - f(\xi)] d\xi, \quad (1)$$

а частота — сигналом

$$u(t) = \int_{-\infty}^t e^{(\xi-t)/T_2} \sin [f(t) - f(\xi)] d\xi. \quad (2)$$

В этих формулах  $T_2$  — время релаксации,  $f(t) - f(\xi)$  — функция, имеющая вид

$$f(t) - f(\xi) = \int_{\xi}^t [|\gamma| H_z - \omega] d\eta,$$

$H_z$  — продольная компонента магнитного поля.

Амплитуда автоколебаний поддерживалась на низком уровне. Сигналы имели вид осциллирующих с затуханием функций (рис. 1).

2. Метод измерения времени релаксации, примененный в настоящей работе, основан на том, что отношение  $Z$  амплитуд первого и второго экстремумов сигнала  $v(t)$  зависит от  $T_2$ . Найдя функцию, определяющую форму сигнала, можно получить зависимость

$$T_2 = T_2'(Z), \quad (3)$$

из которой определяется  $T_2$ .

На форму сигнала также влияет неоднородность постоянного магнитного поля. При наличии неоднородности форма сигнала  $v(t)$  имеет вид [5]

$$v^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v(\Delta H, t) f(\Delta H) d(\Delta H), \quad (4)$$

где  $\Delta H$  — отклонение напряженности магнитного поля от резонансного в данной точке образца;  $f(\Delta H)$  — функция распределения неоднородности поля, подчиняющаяся условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\Delta H) d(\Delta H) = 1. \quad (5)$$

Различные функции распределения, применяемые для расчетов, являются по сути дела идеализацией действительной функции распределения неоднородности поля. Наиболее удобной для расчетов является лоренцова форма функции распределения

$$f(\Delta H) = \frac{1}{\pi} \frac{\Delta H^*}{(\Delta H^*)^2 + (\Delta H)^2}, \quad (6)$$

где  $\Delta H^*$  — среднее значение неоднородности. Действие неоднородности поля с указанной выше функцией распределения, как показано в [5], сводится к уменьшению времени релаксации  $T_2$ .

Для большинства жидкостей при комнатной температуре имеет место равенство [5,6]

$$T_1 = T_2. \quad (7)$$

Поэтому время релаксации  $T_2$ , найденное экспериментально, при наличии неоднородности постоянного магнитного поля в этом случае можно записать в виде [5]

$$\frac{1}{T_2} = \frac{1}{T_1} + |\gamma| \Delta H^*. \quad (8)$$

3. Построение функциональной зависимости (3) для экспериментального определения  $T_2$  по отношению  $Z$  амплитуд первого и второго экстремумов сигнала  $v(t)$  произведено следующим образом. Используя функции, полученные в [1] [формулы (33), (33a)], имеем

$$Z = \frac{v(t_1)}{v(t_2)} = \frac{\int_{-\infty}^{r_1} e^{\alpha(\xi - r_1)} \cos(r_1^2 - \xi^2) d\xi}{\int_{-\infty}^{r_2} e^{\alpha(\xi - r_2)} \cos(r_2^2 - \xi^2) d\xi}, \quad (9)$$

где

$$r = \sqrt{\frac{a}{2}} t, \quad \alpha = \frac{1}{T_2} \sqrt{\frac{2}{a}}, \quad \alpha = |\gamma| \frac{dH_z}{dt}, \quad (10)$$

$t_1$  и  $t_2$  и соответствующие им  $r_1$  и  $r_2$  — моменты времени, в которые функция  $v(t)$  экстремальна.

Интегралы в (9) могут быть сведены к табулированным функциям следующим образом. Комбинируя (1) и (2) с учетом подстановки (10), получим

$$w(r) = -v + iu = \sqrt{\frac{2}{a}} e^{-\alpha r + i r^2} \int_{-\infty}^r e^{\alpha \xi - i \xi^2} d\xi. \quad (11)$$

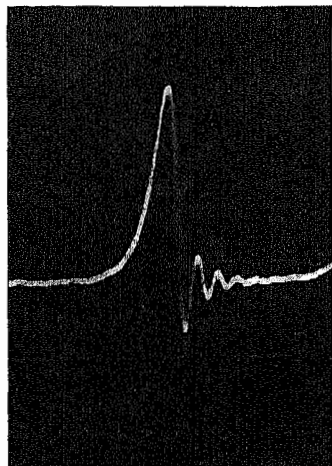


Рис. 1. Осциллограмма сигнала  $v(t)$ , полученного от протонов в 0,7 см<sup>3</sup> одномолярного раствора  $\text{CuSO}_4$

После замены

$$\xi = -i\left(\frac{\alpha}{2} - \eta\right) \quad (12)$$

выражение для  $w(r)$  принимает вид

$$w(r) = i\sqrt{\frac{2}{a}} \exp\left\{-\alpha r + i\left(r^2 - \frac{\alpha^2}{4}\right)\right\} \int_{(\alpha/2)+i\infty}^{(\alpha/2)-ir} e^{i\eta^2} d\eta. \quad (13)$$

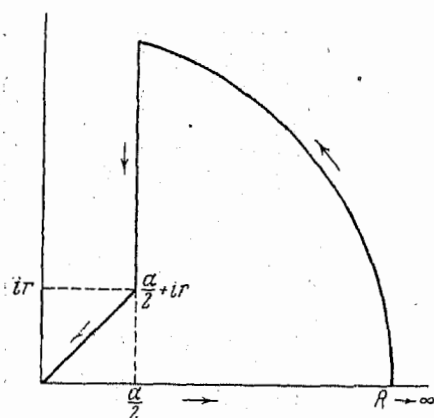


Рис. 2. Замена пути интегрирования в интеграле (13)

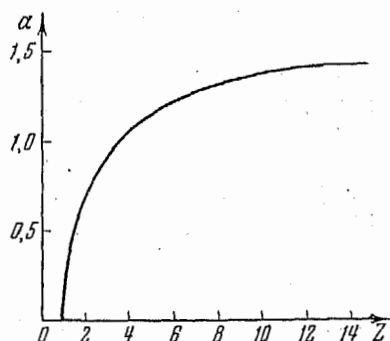


Рис. 3. Функциональная зависимость параметра  $\alpha = \frac{1}{T_2} \left( \frac{1}{2} |\gamma| \frac{dH_z}{dt} \right)^{-1/2}$  от отношения  $Z$  амплитуд первого и второго экстремумов сигнала

Произведя на основании теоремы о вычетах замену пути интегрирования (рис. 2), имеем

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{(\alpha/2)+iR}^{(\alpha/2)-ir} e^{i\eta^2} d\eta = \int_0^{(\alpha/2)-ir} e^{i\eta^2} d\eta - \int_0^{\infty} e^{i\eta^2} d\eta. \quad (14)$$

Последний интеграл правой части (14) равен  $\sqrt{\pi/2}(1+i)/2$ .

Произведя снова замену переменного

$$\eta = (i-1)t/\sqrt{2} \quad (15)$$

и положив

$$z' = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\alpha}{2} + r \right) + i \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\alpha}{2} - r \right) = x + iy, \quad (16)$$

приведем выражение для  $w(r)$  к виду

$$w(r) = i\sqrt{\frac{2}{a}} \exp\left\{-\alpha r + i\left(r^2 - \frac{\alpha^2}{4}\right)\right\} \left\{ \frac{i-1}{\sqrt{2}} \int_0^{z'} e^{t^2} dt - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right\}. \quad (17)$$

Интеграл в (17) может быть выражен через табулированную функцию комплексного переменного [6]

$$W(z') = U(x, y) + iV(x, y) = e^{-z'^2} \left( 1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^{z'} e^{t^2} dt \right). \quad (18)$$

Окончательно имеем

$$w(r) = -v + iu = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \left\{ -\frac{1}{2}(V + U) + e^{-\alpha r} \left[ \cos\left(r^2 - \frac{\alpha^2}{4}\right) + \sin\left(r^2 - \frac{\alpha^2}{4}\right) \right] + i \left[ \frac{1}{2}(U - V) + e^{-\alpha r} \sin\left(r^2 - \frac{\alpha^2}{4}\right) - e^{-\alpha r} \cos\left(r^2 - \frac{\alpha^2}{4}\right) \right] \right\}. \quad (19)$$

4. Приведенные выше формулы позволяют вычислить выражение (9), но для этого необходимо знать моменты времени  $t_1$  и  $t_2$ , в которые функция  $v(t)$  принимает экстремальные значения. Величины  $t_1$  и  $t_2$  были найдены из решения трансцендентного уравнения для экстремумов функции  $v(r)$

$$r = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} - \frac{\alpha}{2} \left\{ U + V - 2e^{-\alpha r} \left[ \sin\left(r^2 - \frac{\alpha^2}{4}\right) + \cos\left(r^2 - \frac{\alpha^2}{4}\right) \right] \right\}}{U - V + 2e^{-\alpha r} \left[ \sin\left(r^2 - \frac{\alpha^2}{4}\right) - \cos\left(r^2 - \frac{\alpha^2}{4}\right) \right]}, \quad (20)$$

которое может быть получено дифференцированием функции (1). Решение этого уравнения произведено методом подбора. Величины  $t_1$  и  $t_2$ , определенные приближенно, уточнялись подстановкой этих значений в уравнение (20).

Получаемая описанным выше путем функциональная зависимость величины

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{a}} \frac{1}{T_2}$$

от отношения  $Z$  представлена табл. 1 и графиком на рис. 3

Таблица 1

Зависимость параметра  $\alpha = \frac{1}{T_2} \left( \frac{1}{2} \left| \gamma \left| \frac{dH_z}{dt} \right| \right)^{-1/2}$  от отношения  $Z$  первого и второго экстремумов сигнала поглощения

|          |       |       |       |       |        |
|----------|-------|-------|-------|-------|--------|
| $\alpha$ | 0,000 | 0,283 | 0,707 | 0,990 | 1,412  |
| $Z$      | 0,907 | 1,280 | 2,227 | 3,712 | 15,300 |

5. Изложенная методика была применена в эксперименте. Согласно существующей теории [7], при наличии в растворе парамагнитных ионов время релаксации обратно пропорционально концентрации этих последних

$$1/T_1 = CN, \quad (21)$$

где  $N$  — число ионов в единице объема, а  $C$  — коэффициент пропорциональности. Из (8) и (21) получаем

$$1/T_2 = CN + |\gamma| \Delta H^*, \quad (22)$$

т. е. уравнение прямой.

На рис. 4 представлена полученная экспериментально зависимость  $1/T_2$  от концентрации ионов в растворе  $\text{CuSO}_4$  для разных значений

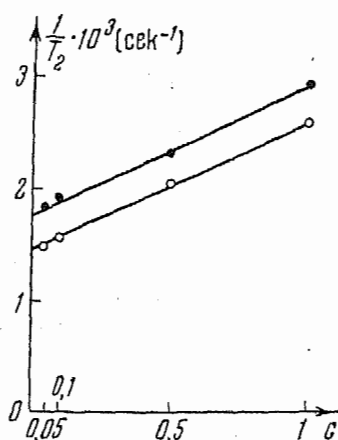


Рис. 4. Зависимость измеренного экспериментально времени релаксации  $T_2$  от концентрации  $c$  парамагнитных ионов в растворе  $\text{CuSO}_4$  [см. формулу (22)] для двух значений неоднородности магнитного поля;  $c$  измеряется в молях

неоднородности магнитного поля. График подтверждает соотношение (21) и дает возможность определить среднюю неоднородность магнитного поля в объеме образца (по величине отрезка, отсекаемого на оси ординат). Наблюдается хорошее согласие с экспериментами других авторов [7].

Кроме того, изложенным выше методом измерено время релаксации ядер  $\text{F}^{19}$  в соединении  $\text{BF}_3 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$ . Получено значение  $T_2 = 0,9 \cdot 10^{-3}$  сек.

Московский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
8 мая 1954 г.

#### Литература

- [1] С. Д. Гвоздовер и А. А. Магазаник. ЖЭТФ, 20, 705, 1950. — [2] С. Д. Гвоздовер и Н. М. Померанцев. Вестн. МГУ, 6, 85, 1953. — [3] С. Д. Гвоздовер и Н. М. Померанцев. Вестн. МГУ, 9, 79, 1953. — [4] Н. М. Померанцев. Вестн. МГУ, 2, 47, 1955. — [5] В. А. Jacobson и R. K. Wangsness. Phys. Rev., 73, 942, 1948. — [6] В. Н. Фаддеева и Н. М. Терентьев. Таблицы значений интеграла вероятности от комплексного аргумента, ГИТТЛ, 1954. — [7] N. Bloembergen. Nuclear Magnetic Relaxation, Leiden, 1948.

## ЗАХВАТ ЭЛЕКТРОНОВ И ИОНИЗАЦИЯ ПРОТОНАМИ В ВОДОРОДЕ

Я. М. Фогель, Л. И. Крупник и Б. Г. Сафронов

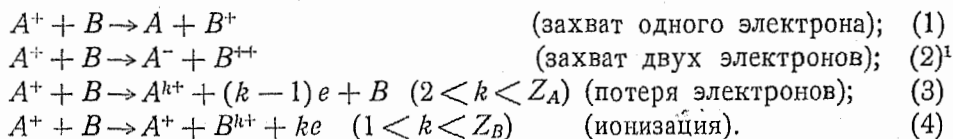
При помощи усовершенствованного метода собирания медленных частиц на измерительный электрод плоского конденсатора измерены в интервале энергии от 12,3 до 36,7 keV эффективные сечения захвата одного электрона и ионизации протонами в водороде. Произведено сравнение полученных результатов с данными других работ и с данными теоретических расчетов. При прохождении протонов через водород в прошедшем пучке обнаружены отрицательные ионы водорода. Показано, что при малых давлениях газа в камере столкновений появление в прошедшем пучке отрицательных ионов водорода связано с процессом захвата протоном двух электронов у молекулы водорода. Ориентировочное измерение эффективного сечения этого процесса для протонов с энергией 13, 21 и 31,4 keV показывает, что наличие этого процесса не может существенно исказить результаты измерения эффективного сечения захвата одного электрона методом собирания медленных частиц.

### Введение

Изучению элементарных процессов, имеющих место при столкновениях положительных ионов с частицами газов, посвящено значительное число работ, обзор которых можно найти в монографии Месси и Берхопа [1]. В числе других неупругих процессов изучались явления захвата одного электрона (перезарядка) и ионизация положительными ионами, проходящими через газ. Ряд работ [2-5] посвящен изучению этих процессов при прохождении протонов через водород. Ознакомление с этими работами показывает, что эффективные сечения захвата электрона, измеренные различными авторами, значительно отличаются друг от друга; что же касается эффективного сечения ионизации, то оно было измерено только в одной работе [4].

Значительное расхождение результатов измерения эффективного сечения захвата электрона у различных авторов связано с наличием в их работах методических погрешностей, искажавших результаты измерений.

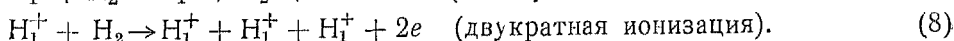
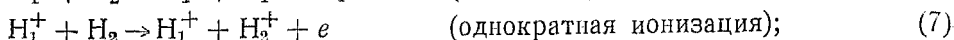
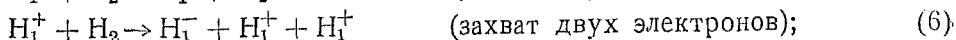
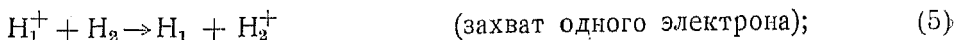
При прохождении быстрых однозарядных ионов через газ могут происходить следующие элементарные процессы:



В результате этих процессов в прошедшем пучке часть однозарядных ионов превращается в многозарядные ионы, нейтральные атомы и отрицательные ионы. Кроме того, в газе, через который прошел пучок, появляются медленные частицы — положительные ионы разных зарядностей и электроны.

При прохождении протонов через водород фактически могут осуществиться следующие процессы:

<sup>1</sup> Процесс (2) может иметь место только в том случае, когда атом А обладает положительным электронным сродством.



Определение эффективных сечений процессов (5) — (8) основано либо на исследовании состава прошедшего через газ пучка быстрых частиц, либо на измерении количества медленных ионов и электронов, образовавшихся в газе при прохождении через него пучка быстрых ионов.

Учитывая научную и практическую важность достаточно точного измерения сечений захвата одного электрона и ионизации протонами в водороде, мы предприняли новые измерения этих величин, имея целью при этом, по возможности, устранить все систематические ошибки, свойственные методу собирания медленных частиц.

Методика наших измерений, в основных своих чертах, следует методике экспериментов Бредова и Федоренко [6], давших развернутую критику ранее сделанных работ, с некоторыми добавлениями, позволяющими дальнейшее уточнение результатов измерений.

Одновременно с изучением процессов захвата одного электрона и ионизации протонами в водороде нами было впервые наблюдаено явление захвата протоном двух электронов в одном столкновении с молекулой водорода и ориентировочно измерено эффективное сечение этого процесса.

### Описание установки

Схематический чертеж установки, на которой были проведены описанные ниже эксперименты, приведен на рис. 1.

В качестве источника протонов использовался высокочастотный ионный источник 1 типа Тоунмена [7]. Пройдя ионную линзу и ускорительную трубку 2, ускоренный и сфокусированный пучок водородных ионов поступал в патрубок, при помощи которого вся установка соединялась с насосным агрегатом. Внутри патрубка 3 находился электростатический корректор направления пучка 4, состоящий из двух скрещенных плоских конденсаторов. За качеством фокусировки пучка можно было наблюдать в смотровое окно 5. Измерение силы тока ионного пучка производилось фарадеевым цилиндром 6, который вводился на скользящем уплотнении и поэтому мог быть убран с пути пучка.

Для выделения из ионного пучка протонов использовался магнитный масс-монохроматор 7 с поворотом пучка на  $15^\circ$ . Напряженность магнитного поля в межполюсном пространстве электромагнита масс-монохроматора была достаточна для выделения протонного пучка с энергией 60 keV. Камера масс-монохроматора соединялась с камерой столкновений 10 через сильфонное соединение 9, обеспечивающее возможность установки камеры столкновений в правильное положение по отношению к пучку.

Камера столкновений в разрезе изображена на рис. 2. Протонный пучок поступает в камеру столкновений через диафрагму 11, изолированную от корпуса алундовым кольцом 12. Для подачи потенциала на диафрагму служил ввод 13. После диафрагмы протонный пучок проходил канал 34 диаметром 5 мм и длиной 100 мм и поступал в измерительный объем камеры. Для наблюдения за падением пучка на входную диафрагму служило смотровое окно 14. Измерительный объем создавался пятью плоскими конденсаторами 15 с электродами площадью  $50 \times 50 \text{ мм}^2$  и расстоянием между ними 20 мм. Потенциал на пластины плоских конденсаторов подавался при помощи вводов 16, изолированных от корпуса камеры полистироловыми втулками 17, вклеенными в плоские крышки камеры. Корпус камеры 18 представлял собой медный блок прямоугольного сечения, внут-

ри которого было вырезано пространство для размещения измерительных и охранных электродов.

Для создания в камере продольного магнитного поля служили четыре катушки 19, надетые непосредственно на ее корпус. При помощи этих катушек можно было создавать в камере магнитное поле с напряженностью вплоть до 300 Ое.

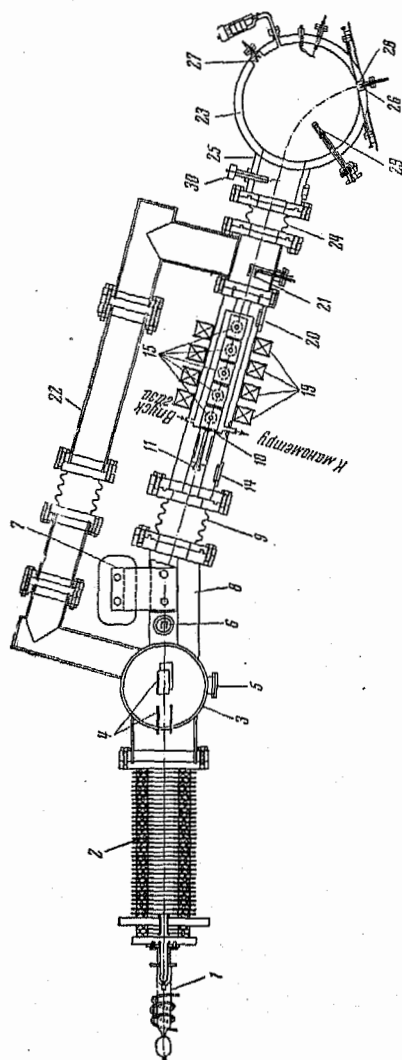


Рис. 1

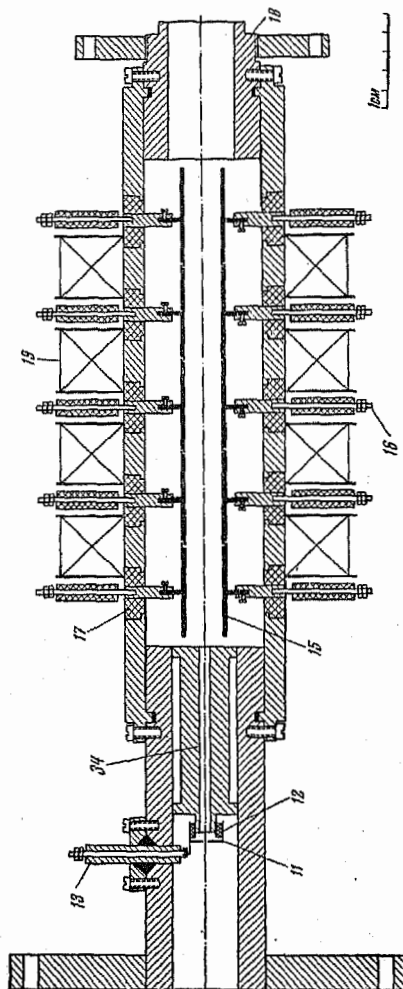


Рис. 2

Протонный пучок, пройдя измерительный объем камеры столкновений, выходил из нее через канал диаметром 35 мм и длиной 74 мм. Для наблюдения за пучком на выходе из камеры столкновений служило смотровое окно 20. Впуск водорода в камеру производился через палладиевый фильтр, находившийся внутри стального бака, содержавшего водород при давлении 5 атм. Измерение давления в камере производилось манометром Мак-Леода. Между манометром Мак-Леода и камерой располагалась ловушка ртутных паров, заполняемая жидким воздухом.

Измерение тока протонного пучка, прошедшего через камеру столкновений, производилось фарадеевым цилиндром 21, изображенным на рис. 3.

Внутри фарадеева цилиндра *J* были введены два электрода *A* и *B*, служащие для создания поперечного электрического поля, препятствующего вылету из него вторичных электронов. Входное отверстие цилиндра было закрыто кольцевой диафрагмой *C* с отверстием диаметром 17 мм, изолированной от корпуса полистироловым кольцом *D*. Эта диафрагма предназначалась для оценки степени рассеяния протонного пучка. Цилиндр имел откидное днище *E*, управляемое штоком *F*, изолированным от земли полистироловым стержнем *G*.

Откачка пространства, расположенного за камерой столкновений, производилась насосным агрегатом через вакуумпровод 22, сделанный из латунных труб диаметром 140 мм. Протонный пучок, прошедший через камеру столкновений, попадал затем в камеру 23 магнитного анализатора,

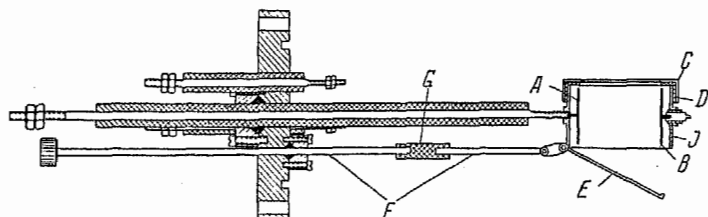


Рис. 3

находившуюся между полюсами электромагнита. При помощи сильфонного соединения 24 камера анализатора ставилась в правильное положение по отношению к пучку.

Камера анализатора представляла собой латунное кольцо с внешним диаметром 290 мм, внутренним диаметром 220 мм и высотой 20 мм. Крышками камеры являлись железные диски диаметром 290 мм и толщиной 30 мм. К боковой поверхности камеры анализатора был припаян железный патрубок 25, соединявший ее с остальной частью установки. Этот патрубок сделан из железа с целью уменьшения рассеянного поля на входе пучка в анализатор. Внутри камеры анализатора находились два фарадеевых цилиндра 26 и 27, расположенные таким образом, что в них попадали отклоненные на  $60^\circ$  протоны и отрицательные ионы водорода. Перед цилиндром 26, предназначенным для измерения интенсивности протонной компоненты в пучке, прошедшем через камеру столкновений, находилась регулируемая щель 28. Специальных мер для подавления вторичной эмиссии из фарадеевых цилиндров анализатора не предпринималось, так как при измерениях они находились в магнитном поле.

Для определения напряженности магнитного поля в камере анализатора во время измерений внутрь ее была введена баллистическая катушка 29. Камера анализатора после ее сборки вставлялась между полюсными наконечниками электромагнита, имевшими диаметр 290 мм. Зазор между полюсами был равен 80 мм, так что камера плотно входила в этот зазор. Электромагнит обеспечивал получение в камере магнитного поля с напряженностью до 6000 Ое.

Токи на измерительный электрод измерялись зеркальным гальванометром с чувствительностью  $1,8 \cdot 10^{-10}$  А/дел., а ток пучка измерялся теневым гальванометром с чувствительностью  $6,9 \cdot 10^{-9}$  А/дел. Измерение токов на фарадеевы цилиндры магнитного анализатора производилось струнным электрометром, включенным по схеме постоянного отклонения. Чувствительность электрометра к току можно было изменять, подключая различные сопротивления. В нашей схеме были применены изготовленные нами электрометрические сопротивления величиной  $1,4 \cdot 10^{11}$  и  $3,1 \cdot 10^9 \Omega$ .

Энергия протонов определялась по пройденной ими разности потенциалов, складывавшейся из вытягивающей и фокусирующей разности потенциалов, приложенной к ионному источнику, и разности потенциалов,

приложенной к ускорительной трубке. Измерение вытягивающей и фокусирующей разности потенциалов производилось электростатическими вольтметрами. Измерение ускоряющей разности потенциалов производилось при помощи построенной нами системы градуированных сопротивлений.

### Методика измерений

Хотя с принципиальной стороны метод измерения эффективных сечений захвата одного электрона и ионизации путем собирания медленных частиц на измерительный электрод является простым, но при практическом его выполнении он может дать надежные результаты лишь при выполнении следующих условий:

а) Вероятность всех процессов, происходящих при столкновении протона с молекулой водорода и сопровождающихся появлением медленных заряженных частиц, должна быть мала по сравнению с вероятностью процессов захвата одного электрона и ионизации.

б) Должно быть устранено попадание в измерительный объем вторичных электронов с дифрагм и каналов, ограничивающих пучок, и из фарадеева цилиндра, измеряющего ток протонного пучка.

в) Должен быть устранен обмен медленными частицами между измерительным объемом и объемом фарадеева цилиндра вследствие возникновения продольных электрических полей.

г) Рассеяние протонов в газе камеры столкновений должно быть незначительным.

д) Должна быть устранена эмиссия электронов с измерительного электрода при попадании на него положительных ионов (потенциальное вырывание электронов) или фотонов (фотоэффект).

е) Образующиеся в газе измерительной камеры медленные частицы должны возникать в результате однократных процессов.

ж) При измерении тока протонного пучка должна быть учтена нейтронизация части протонов в газе измерительной камеры.

Прежде чем приступить к измерению интересующих нас эффективных сечений, мы провели ряд предварительных измерений, имевших целью выяснить, в какой мере выполнены в наших экспериментах условия, обеспечивающие надежность полученных результатов. Как уже упоминалось во введении, при взаимодействии протонов с молекулами водорода, кроме процессов захвата одного электрона и однократной ионизации, в результате которых в измерительном объеме возникают медленные молекулярные ионы водорода и медленные электроны [см. (5) и (7)], возможны процессы захвата двух электронов и двукратной ионизации.

При процессе захвата двух электронов в измерительном объеме образуются медленные протоны, в прошедшем пучке появляются быстрые отрицательные ионы водорода, а при процессе двукратной ионизации в измерительном объеме, кроме медленных электронов, появляются также медленные протоны [см. (6) и (8)].

Некоторую оценку относительной вероятности процессов захвата одного электрона и однократной ионизации, с одной стороны, и процессов захвата двух электронов и двукратной ионизации, с другой стороны, можно произвести на основании масс-спектрометрического анализа состава медленных частиц, образованных в водороде при прохождении через него пучка протонов.

Такой масс-спектрометрический анализ был сделан в работе [4]. В масс-спектре медленных частиц был обнаружен пик с массой 2 (ионы  $H_2^+$ ) и очень небольшой пик с массой 1 (протоны). Интенсивность протонного пика составляла несколько процентов интенсивности пика с массой 2. При прохождении через водород быстрых ионов  $He^+$  в масс-спектре медленных частиц наблюдался только пик с массой 2.

Результаты масс-спектрометрического анализа медленных частиц показывают, что вероятность процессов (6) и (8), связанных с появлением в водороде медленных протонов, мала по сравнению с вероятностью процессов (5) и (7).

Так как процесс захвата протоном двух электронов связан с появлением в прошедшем через водород пучке быстрых отрицательных ионов водорода, то возможна оценка вероятности этого процесса при помощи анализа пучка, прошедшего через камеру столкновений. Наличие в нашей установке магнитного анализатора, расположенного после камеры

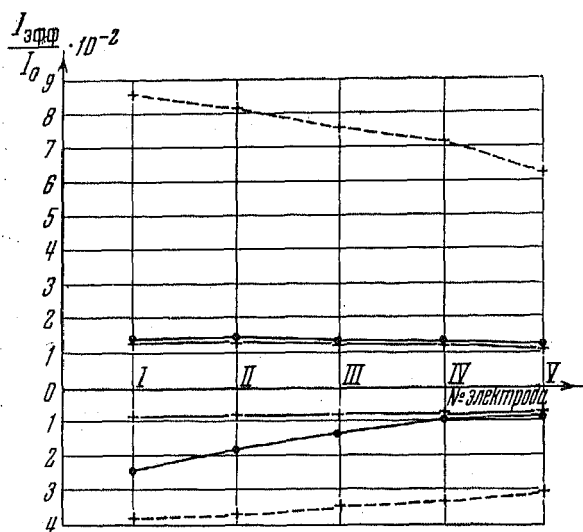


Рис. 4. Давление газа в камере: сплошная кривая —  $8 \cdot 10^{-6}$  мм рт. ст. (фон), пунктир —  $6,5 \cdot 10^{-4}$  мм рт. ст.; диаметр диафрагмы:  $\bullet$  — 3 мм,  $\times$  — 1 мм

столкновений, позволило нам произвести анализ прошедшего пучка и оценить вероятность процесса захвата двух электронов при однократном столкновении протона с молекулой водорода. Полученные нами результаты, описание которых будет приведено ниже, подтверждают выводы о малой вероятности процесса захвата двух электронов протоном, вытекающие из данных масс-спектрометрического анализа медленных частиц.

Для устранения возможности попадания в измерительный объем вторичных электронов, выбитых протонами с краев входной диафрагмы, мы подавали на нее положительный потенциал в 70 В по отношению к корпусу камеры столкновений. Электрическое поле, возникающее благодаря подаче положительного потенциала на входную диафрагму, не проникает в измерительный объем, так как между ними находится длинный канал. Это было подтверждено специальными измерениями, которые показали, что подача положительного потенциала на входную диафрагму не влияет на ток ионов на ближайший к входному каналу измерительный электрод. Однако, если протоны пучка могут попадать на стенки входного канала, то выбитые из них вторичные электроны могут проникать в измерительный объем и искажать результаты измерений. Что это явление может иметь место, видно по результатам измерений положительного и отрицательного тока на измерительные электроды  $I_{\text{эфф}}$ , отнесенного к току  $I_0$  протонов, прошедших при разных диаметрах входной диафрагмы, представленным на рис. 4.

Неравномерное распределение отрицательного тока по измерительным электродам (номер электрода растет по мере удаления от входного канала), которое наблюдалось при входной диафрагме диаметром 3 мм и при давлении остаточного газа в камере порядка  $8 \cdot 10^{-6}$  мм рт. ст., указывает на проникновение вторичных электронов, выбитых из стенок входного канала, в измерительный объем. При уменьшении диаметра диафрагмы до 1 мм это явление исчезает, вследствие чего в последующих измерениях мы работали с диафрагмой диаметром 1 мм. Некоторое уменьшение положительного и отрицательного токов при давлении  $6,5 \cdot 10^{-4}$  мм рт. ст. при переходе от I к V электроду объясняется уменьшением числа протонов в пучке вследствие их нейтрализации.

Нами были приняты меры к устранению возможности попадания в измерительный объем вторичных электронов от днища фарадеева цилиндра и от кольцевой диафрагмы на его входе. Для подавления вторичной эмиссии от днища фарадеева цилиндра мы создали между электродами  $A$  и  $B$  (рис. 3) поперечное электрическое поле. Как показали измерения зависимости тока протонного пучка от разности потенциалов между электродами  $A$  и  $B$  полное подавление вторичной эмиссии из фарадеева цилиндра имеет место при разности потенциалов между электродами  $A$  и  $B$ , большей 150 В.

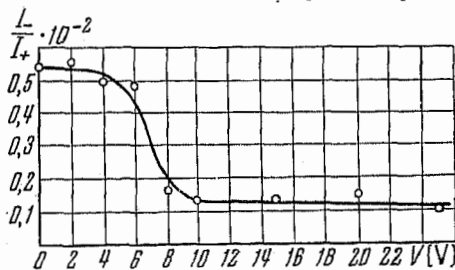


Рис. 5

Для подавления вторичной эмиссии с диафрагмы фарадеева цилиндра мы подавали на нее положительный потенциал. Для того чтобы установить величину положительного потенциала диафрагмы, необходимого для подавления вторичной эмиссии с нее, мы исследовали зависимость отрицательного тока на измерительный электрод от положительного потенциала диафрагмы. На рис. 5 представлена эта зависимость, полученная для  $V$  электрода, ближайшего к фарадееву цилиндру. Такие же кривые были получены и для остальных электродов. Измерения производились при поперечной разности потенциалов в фарадеевом цилиндре, равной 160 В. Как видно из кривой на рис. 5, полное подавление вторичной эмиссии от диафрагмы фарадеева цилиндра достигается при потенциале на ней + 10 В.

Наличие поперечной разности потенциалов в фарадеевом цилиндре может создавать продольное электрическое поле, способствующее обмену медленными частицами между пространством внутри его и измерительным объемом.

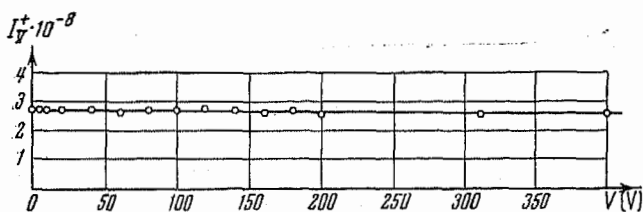


Рис. 6

Специальными опытами, результаты которых изображены на рис. 6, мы установили, что явление обмена частицами не имело места. На рис. 6 дан график зависимости между положительным током на  $V$  электрод и поперечной разностью потенциалов в фарадеевом цилиндре. Из этого графика следует, что ток на ближайший к фарадееву цилиндру измерительный электрод не зависит от поперечной разности потенциалов в нем вплоть до разности потенциалов в 400 В. При этих измерениях на диафрагму фарадеева цилиндра был подан потенциал + 10 В. Отсутствие обмена частицами между фарадеевым цилиндром и измерительным объемом в наших опытах является вполне естественным, так как они отделены друг от друга длинным каналом.

На рис. 7 представлена зависимость тока на диафрагму фарадеева цилиндра от поперечной разности потенциалов между электродами  $A$  и  $B$  (рис. 3), при потенциале + 10 В на ней. Отрицательный ток на диафрагму происходит оттого, что на нее попадает часть вторичных электронов, выбитых из днища фарадеева цилиндра. При поперечной разности

потенциалов порядка 400 В на диафрагму идет положительный ток, обусловленный попаданием на нее протонов, рассеянных из пучка. Малая величина этого тока свидетельствует о незначительном рассеянии протонов в наших опытах.

Проводившийся нами в дальнейшем контроль за степенью рассеяния протонного пучка по положительному току на кольцевую диафрагму фарадеева цилиндра показал, что рассеяние пучка настолько мало, что его влиянием на результаты опыта можно пренебречь.

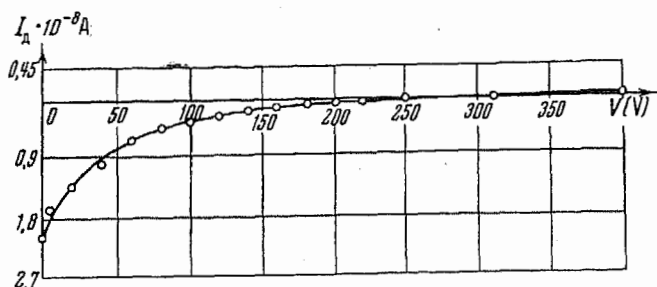


Рис. 7

Для подавления возможной вторичной эмиссии с поверхности измерительных электродов мы использовали продольное магнитное поле, создаваемое катушками, надетыми на камеру столкновений. Напряженность магнитного поля подбиралась таким образом, чтобы поле было достаточно сильным для поворачивания всех вторичных электронов назад к электроду и достаточно слабым, чтобы не отклонить в сторону идущие к электроду положительные ионы. Величины положительного и отрицательного токов на измерительный электрод при отсутствии магнитного поля выражаются следующим образом:

$$i_+ = i_1 + i_2 + i_3, \quad (9a)$$

$$i_- = i_2 + i_3, \quad (9б)$$

где  $i_1$  — ток, обусловленный ионами, образовавшимися из молекул газа в результате захвата электронов протонами,  $i_2$  — ток ионов или электронов, образованных в результате ионизации молекул газа протонами, и  $i_3$  — ток вторичной эмиссии из электродов измерительного конденсатора.

При наличии магнитного поля положительный и отрицательный токи на электрод определяются соотношениями:

$$i_+^H = i_1 + i_2, \quad (10a)$$

$$i_-^H = 0. \quad (10б)$$

Из выражений (9a), (9б) и (10a) получаем следующие выражения для вычисления токов  $i_1$  и  $i_2$ :

$$i_1 = i_+ - i_- \quad (11a)$$

$$i_2 = i_+^H - (i_+ - i_-). \quad (11б)$$

Таким образом, производя измерения положительного и отрицательного токов без магнитного поля и измерения положительного тока с магнитным

полем, мы получаем возможность определить токи ионов и электронов, образуемых благодаря захвату электронов и ионизации, не искаженные вторичной эмиссией.

Из снятых нами вольтамперных характеристик токов на измерительный электрод с продольным магнитным полем напряженностью в 70 Ое и без него следует, что в обоих случаях насыщение измеряемых токов достигается при потенциале  $\pm 25$  В.

На рис. 8 и 9 приведены графики зависимости положительного и отрицательного токов на измерительный электрод от давления водорода в камере столкновений и от силы тока протонного пучка. Как видно из

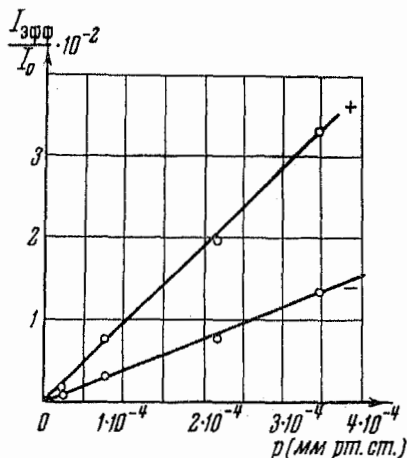


Рис. 8

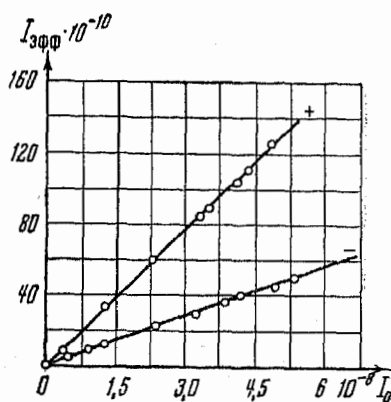


Рис. 9

этих рисунков, вплоть до давлений  $3,5 \cdot 10^{-4}$  мм рт. ст. и токов пучка до  $0,5 \mu\text{А}$  графики зависимости положительного и отрицательного токов на измерительный электрод от давления газа и тока протонного пучка являются линейными, откуда следует вывод о том, что образующиеся в газе медленные частицы возникают в результате однократных процессов.

Убедившись в результате проведенных нами предварительных измерений, что нами устранены возможные источники систематических погрешностей, мы приступили к измерениям эффективных сечений.

Измерение положительных и отрицательных токов производилось для IV электрода, электроды III и V играли роль охранных, а электроды I и II были заземлены.

При измерениях подавались следующие потенциалы: на входную диафрагму + 70 В, на диафрагму фарадеева цилиндра + 10 В, между электродами А и В фарадеева цилиндра 400 В и на верхние электроды III, IV, V  $\pm 25$  В.

При постоянной энергии протонного пучка сначала производилось измерение положительных и отрицательных токов при остаточном давлении газа в камере столкновений ( $6-8 \cdot 10^{-6}$  мм рт. ст.). Затем, нагревая палладиевый фильтр, мы доводили поток водорода в камеру до такой величины, при которой в ней устанавливалось давление порядка  $3-4 \cdot 10^{-4}$  мм рт. ст. При этом давлении измерялись положительные и отрицательные токи. Давление в течение этого опыта измерялось не менее двух раз. Затем прекращался доступ водорода в камеру, и снова производилось измерение положительных и отрицательных токов при остаточном давлении. Значения положительных и отрицательных токов при остаточном давлении до и после опыта с напуском водорода усреднялись, и полученные средние значения («фон») вычитались из соответствующих значений, полученных в опыте с напуском водорода.

Величины положительных и отрицательных токов вычислялись как средние из 10 измерений. Измерение тока пучка производилось одновременно с измерением тока на каждый измерительный электрод, благодаря чему исключалось влияние колебаний тока пучка на производимые измерения.

Измерение положительных и отрицательных токов как при напуске водорода в камеру столкновений, так и при остаточном давлении в ней производилось в отсутствие и при наличии магнитного поля в измерительном объеме. Пользуясь формулами (11), по измеренным значениям положительных и отрицательных токов определялись токи  $i_1$  и  $i_2$ , при помощи которых вычислялись эффективные сечения захвата одного электрона и ионизации  $\sigma_{10}$  и  $\sigma_n$ .

При вычислении эффективных сечений  $\sigma_{10}$  и  $\sigma_n$  нами вводилась поправка, учитывающая уменьшение числа протонов в пучке вследствие их нейтрализации на пути от измерительного конденсатора до фарадеева цилиндра.

Вычисление эффективных сечений  $\sigma_{10}$  и  $\sigma_n$  с учетом этой поправки производилось по следующим формулам:

$$\sigma_{10} = \left( \frac{i_+}{I_0} - \frac{i_-}{I_0} \right) T \left[ 9,65 \cdot 10^{18} p L \left\{ 1 + \frac{l_{\text{эфф}}}{L} \left( \frac{i_+}{I_0} - \frac{i_-}{I_0} \right) \right\} \right]^{-1}; \quad (12a)$$

$$\sigma_n = \left\{ \frac{i_+^H}{I_0} - \left( \frac{i_+}{I_0} - \frac{i_-}{I_0} \right) \right\} T \left[ 9,65 \cdot 10^{18} p L \left\{ 1 + \frac{l_{\text{эфф}}}{L} \left( \frac{i_+}{I_0} - \frac{i_-}{I_0} \right) \right\} \right]^{-1}, \quad (12b)$$

где  $l_{\text{эфф}}$  — эффективная длина камеры столкновений,  $L$  — длина измерительного электрода,  $p$  выражено в мм рт. ст. и  $T$  — в абсолютных градусах, а  $I_0$  — сила тока первичного пучка.

Ошибка единичного измерения при определении сечений  $\sigma_{10}$  и  $\sigma_n$  равна 12 и 18%, соответственно. Значительная часть этой ошибки возникает от неточности измерения давления водорода манометром Мак-Леода (около 8%). Ошибки при определении энергии протонов составляют около 3%.

Мы не стремились к существенному уменьшению случайных ошибок измерений, так как нашей целью являлась разработка методики, устраняющей систематические погрешности, которые иногда приводят к искажению результатов в два-три раза (см. критику измерений Шервина [5] в статье Бредова и Федоренко [6]).

### Результаты измерений

Применяя методику, описанную в предыдущем разделе, мы измерили эффективные сечения захвата одного электрона и ионизации протонами в водороде. Энергия протонов изменялась в интервале от 12,3 до 36,7 keV.

Таблица 1

| Энергия протонов<br>в keV | $\sigma_{10} \cdot 10^{18}$<br>в см <sup>2</sup> | $\sigma_n \cdot 10^{18}$ в см <sup>2</sup> |
|---------------------------|--------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| 12,3                      | 8,1                                              | 1,4                                        |
| 16,6                      | 6,5                                              | 1,5                                        |
| 20,8                      | 5,2                                              | 1,6                                        |
| 25,4                      | 4,5                                              | 1,7                                        |
| 29,7                      | 3,6                                              | 1,8                                        |
| 33,0                      | 3,1                                              | 2,0                                        |
| 36,7                      | 2,6                                              | 2,2                                        |

Данные наших измерений приведены в табл. 1.

Для сопоставления полученных нами результатов с результатами других авторов на рис. 10, наряду с данными наших измерений эффективного сечения  $\sigma_{10}$  в зависимости от энергии протонов, приведены данные измерений Бартельса [2], Мейера [3], Кина [4] и Райба [8].

Как видно из этого рисунка, данные измерений различных авторов очень плохо согласуются. Даже результаты, полученные одним и тем же методом измерения, значительно отличаются друг от друга. Так, например, точки, полученные Мейером,

не лежат на продолжении кривой Бартельса в область больших энергий, несмотря на то, что оба автора производили измерения одним и тем же методом. Бартельс и Кин установили наличие максимума эффективного сечения  $\sigma_{10}$  при энергии протонов 7 keV, однако значения  $\sigma_{10}$  почти во всей области исследованных энергий у Бартельса значительно больше, чем у Кина. Значения  $\sigma_{10}$ , полученные в работе [8], значительно меньше, чем у остальных авторов, что, повидимому, объясняется искажающим влиянием двукратных столкновений протонов с молекулами водорода.

Наши результаты лучше всего согласуются с результатами Кина, также производившего измерения по методу собирания медленных частиц. Однако полученные нами значения  $\sigma_{10}$  почти во всей области исследованных энергий протонов остаются меньшими, чем в работе [4].

Теоретическое вычисление эффективного сечения захвата электрона протонами в водороде<sup>2</sup> производилось в работах [9] и [10].

Результаты обеих работ, в которых учитывался захват электрона не только на основной уровень 1s, но и на уровни возбуждения 2s, 2p и т. д., оказались одинаковыми. Ввиду того, что в указанных работах при вычислении эффективных сечений захвата использовалось приближение Борна, результаты могут быть правильными лишь для энергий  $E \gg 25$  keV (при  $E = 25$  keV скорость протона равна скорости электрона в атоме водорода).

Тем не менее авторы работы [9], произведя сопоставление своих результатов с экспериментальными результатами [8], пришли к выводу, что хорошее совпадение эксперимента с теорией имеет место вплоть до энергии 33 keV (наименьшая энергия протонов в работе [8]). Рассмотрение рис. 10, где теоретическая кривая работы [9] нанесена пунктиром, показывает, что результаты всех измерений, за исключением измерений Райба, не согласуются с результатами теоретических вычислений. Учитывая, что в теоретических вычислениях эффективного сечения захвата не учитывалось влияние молекулярной связи при взаимодействии протона с молекулой водорода, а также неприменимость приближения Борна при энергиях порядка 25 keV, следует считать расхождение наших результатов и результатов [4] с теоретическими данными более удовлетворительным обстоятельством, чем совпадение с ними результатов работы [8].

Наши результаты измерений эффективного сечения ионизации протонами в водороде могут быть сравнены только с результатами [1], так как другие измерения в данной области энергий нам неизвестны.

На рис. 11 сопоставлены кривые зависимости величины  $\sigma_n$  от энергии протонов, полученные нами и в [4]. Как видно из этого рисунка, существует систематическое расхождение между обеими кривыми, а именно во всей области энергий значения  $\sigma_n$ , полученные нами, больше значений, полученных в [4]. Это расхождение может быть объяснено наличием в опытах [4] продольной разности потенциалов между фарадеевым цилиндром

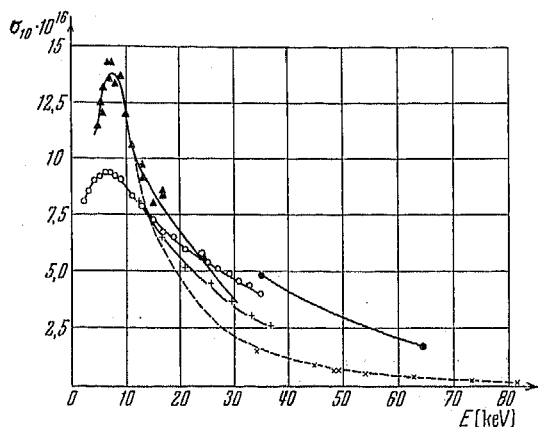


Рис. 10. Зависимость  $\sigma_{10}$  от энергии протонов по измерениям:  $\blacktriangle$  — Бартельса [2];  $\circ$  — Кина [4];  $\bullet$  — Майера [3];  $+$  — настоящей работы;  $\times$  — Райба [8]; пунктир — теоретическая кривая Джексона и Шифа [9].

<sup>2</sup> В этих работах вычислялось эффективное сечение захвата электрона при столкновении протонов с атомами водорода.

ром и измерительным объемом, создававшей силу, благодаря которой электроны вытягивались из измерительного объема. Вытягивание электронов из измерительного объема должно было приводить к уменьшению значений эффективного сечения ионизации, по сравнению с истинными их значениями. Если наше предположение правильно, то в отношении эффективных сечений  $\sigma_{10}$  наши результаты и результаты [4] должны расходиться в противоположном направлении, причем относительная величина расхождения должна увеличиваться с увеличением энергии протонов. Как

видно из рис. 10, этот вывод подтверждается экспериментом.

Теоретическое вычисление эффективного сечения ионизации протонами атомов водорода было произведено в [14]. В этих вычислениях, так же как и в вычислениях сечения захвата электрона, использовалось приближение Борна. Данные теоретических вычислений изображены на рис. 11 пунктирной кривой. Рассмотрение этого рисунка показывает, что существует значительное расхождение между экспериментальными и теоретическими значениями  $\sigma_n$ . Теоретические значения почти во всей области исследованных энергий больше экспериментальных значений; кроме того, как следует из наших измерений и данных работы [4], сечение  $\sigma_n$  монотонно растет с энергией в интервале 2—36 keV, в то время как теоретическая кривая проходит в этой области энергий через макси-

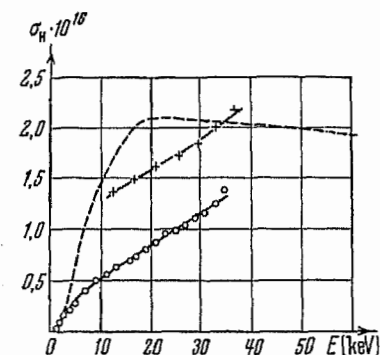


Рис. 11. Зависимость  $\sigma_n$  от энергии протонов по измерениям:  $\circ$  — Кина,  $+$  — настоящей работы; пунктир — теоретическая кривая Бейтса и Гриффинга [14]

мум. Расхождение между теорией и экспериментом в данном случае обуславливается теми же причинами, как и расхождение экспериментальных и теоретических значений эффективного сечения захвата электрона.

### Результаты изучения процесса захвата двух электронов протонами в водороде

Вследствие стабильности отрицательного иона водорода, возможен захват протоном двух электронов при его столкновении с молекулой водорода, т. е. процесс типа (6).

При учете возможности образования отрицательных ионов водорода состав пучка, прошедшего через вещество, описывается дифференциальными уравнениями:

$$dN_+/d(nx) = -(\sigma_{10} + \sigma_{1-1})N_+ + \sigma_{01}N_0 + \sigma_{-11}N_-; \quad (13a)$$

$$dN_0/d(nx) = \sigma_{10}N_+ - (\sigma_{01} + \sigma_{0-1})N_0 + \sigma_{-10}N_-; \quad (13б)$$

$$dN_-/d(nx) = \sigma_{1-1}N_+ + \sigma_{0-1}N_0 - (\sigma_{-11} + \sigma_{-10})N_-; \quad (13в)$$

где  $N_+$ ,  $N_0$ ,  $N_-$  — число протонов, атомов водорода и отрицательных ионов водорода в пучке, а  $\sigma_{ih}$  — сечения перехода одних частиц в другие [так, например,  $\sigma_{1-1}$  — сечение интересующего нас процесса (6), а  $\sigma_{10}$  — сечение процесса (5) и т. д.].

Для определения сечения захвата протоном двух электронов  $\sigma_{1-1}$ , мы можем использовать дифференциальное уравнение (13в), которое при начальных условиях  $N_+ = N_+^*$ ,  $N_0 = 0$ ,  $N_- = 0$ , означающих, что падающий пучок состоит только из протонов, принимает вид

$$\left[ \frac{dN_-}{d(nx)} \right]_{nx=0} = \sigma_{1-1}N_+^*,$$

откуда

$$\sigma_{1-1} = \frac{1}{N_+^*} \left[ \frac{dN_-}{d(nx)} \right]_{n,x=0}. \quad (14)$$

Заменяв в выражении (14) числа частиц соответствующими токами, а  $n$  выразив через давление газа  $p$ , мы получим формулу для вычисления сечения  $\sigma_{1-1}$  в следующем виде:

$$\sigma_{1-1} = 1,08 \cdot 10^{-19} \frac{T}{L} \left[ d \left( \frac{I_-}{I_+^*} \right) / dp \right]_{p=0}, \quad (15)$$

где  $L$  — длина газового промежутка,  $I_-$  — ток отрицательных ионов,  $I_+^*$  — ток протонов на входе в газовый промежуток.

В принципе метод определения сечения  $\sigma_{1-1}$ , вытекающий из формулы (15), заключается в том, что изучается зависимость отношения  $I_-/I_+^*$  от давления газа и определяется величина производной  $d(I_-/I_+^*)/dp$  по линейному участку этой зависимости, наличие которого обусловливается образованием отрицательных ионов водорода при однократных столкновениях типа (6).

Наличие в нашей установке магнитного анализатора, находящегося за камерой столкновений, дало нам возможность анализировать состав пучка, прошедшего через газовый промежуток, и, следовательно, определить сечение  $\sigma_{1-1}$ .

Мы применяли следующую методику измерений величины  $\sigma_{1-1}$ . Пучок протонов проходил от входной диафрагмы камеры столкновений до входа в магнитное поле анализатора и, будучи отклонен магнитным полем на  $60^\circ$ , попадал в фарадеев цилиндр 26 (рис. 1). Отрицательные ионы водорода в пучке, возникшие благодаря захвату электронов протонами, поворачивались магнитным полем анализатора на  $60^\circ$  в противоположном направлении и попадали в фарадеев цилиндр 27. Таким образом, мы могли измерять отношение  $I_-/I_+^*$  — тока отрицательных ионов водорода к току протонов, приходящих на фарадеевы цилиндры анализатора.

Несложный подсчет показывает, что отношение  $(I_-/I_+^*)_0$  между отрицательной и положительной компонентой пучка на входе в анализатор отличается от измеренного отношения  $I_-/I_+^*$  не более чем на 3%.

В формулу (15) для вычисления  $\sigma_{1-1}$  входит отношение  $I_-/I_+^*$ , где  $I_+^*$  — сила тока протонного пучка на входе в газовый промежуток.

Вследствие нейтрализации протонов на пути от входной диафрагмы и до входа в магнитный анализатор величина  $I_-/I_+^*$  будет несколько отличаться от отношения  $I_-/I_+^*$ . При самом большом давлении на линейном участке зависимости  $I_-/I_+^*$  от давления это отличие не превосходит 10%. Так как ошибки при измерении давления на этом участке значительно больше, то поправку на нейтрализацию протонов мы не вводили.

На рис. 12 представлен график зависимости отношения  $I_-/I_+^*$  от давления водорода для протонов с энергией 21 keV. При построении этого графика брались значения  $I_-/I_+^*$ , уменьшенные на значения  $(I_-/I_+^*)_{\text{фон}}$ , т. е. на величину этого отношения при остаточном давлении газа, которое было порядка  $6 \div 8 \cdot 10^{-6}$  мм рт. ст.

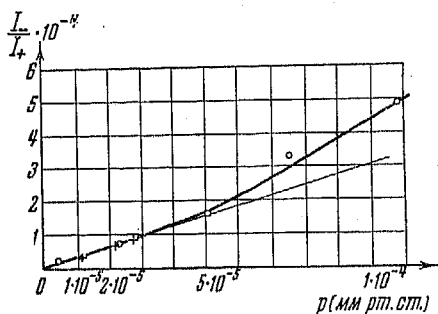


Рис. 12

Как видно из графика на рис. 12, при малых давлениях зависимость величины  $I_-/I_+$  от давления является линейной, при больших давлениях наблюдается отклонение от линейности, связанное с возрастающей ролью двух последовательных столкновений частиц пучка с молекулами газа.

Величину производной  $d(I_-/I_+)/dp$  можно определить из линейной части графика и при помощи формулы (15) вычислить эффективное сечение  $\sigma_{1-1}$ .

Этим методом нами были определены эффективные сечения при трех энергиях протонов. Результаты этих измерений приведены в табл. 2.

Ошибка единичного измерения эффективного сечения — порядка 50% и, в основном, обуславливается малой точностью измерения давления в линейной части графика  $I_-/I_+ = f(p)$ .

Данные, приведенные в табл. 2, показывают, что эффективное сечение захвата протоном двух электронов значительно меньше, чем эффективное сечение захвата одного электрона. Отсюда можно сделать заключение, что измерения эффективного сечения  $\sigma_{10}$  методом собирания медленных частиц не могут быть существенно искажены наличием процесса захвата протоном двух электронов.

Обнаруженный нами процесс образования отрицательных ионов водорода в результате обмена двумя электронами при столкновении протонов с молекулами водорода ранее никем не изучался. Мы приняли ориентировочное изучение этого процесса с целью установить его влияние на результаты измерения эффективного сечения захвата протоном одного электрона, однако исследование процессов обмена двумя электронами, сопровождающееся образованием отрицательных ионов, представляет самостоятельный интерес. Мы предполагаем, усовершенствовав методику, продолжить изучение процессов захвата двух электронов с образованием отрицательных ионов для ряда положительных ионов, атомы которых обладают положительным электронным сродством.

В заключение считаем своим приятным долгом выразить благодарность проф. А. К. Вальтеру за постоянный интерес и внимание к работе.

Физико-технический институт  
Академии наук Украинской ССР

Поступила в редакцию  
3 апреля 1954 г.

### Литература

- [1] H. S. W. Massèy a. E. H. S. Burhop. Electronic and Ionic Impact Phenomena, Ch. VIII, Oxford University Press, 1952.— [2] H. Bartels. Ann. d. Phys., **13**, 373, 1932.— [3] H. Meyer. Ann. d. Phys., **30**, 635, 1937.— [4] J. P. Keen. Phil. Mag., **40**, 369, 1949.— [5] W. Sherwin. Phys. Rev., **57**, 814, 1940.— [6] М. М. Бредов и Н. В. Федоренко. Журн. техн. физ., **20**, 1464, 1950.— [7] P. S. Tonemann, J. Moffatt, D. Roaf a. J. H. Sanders. Proc. Phys. Soc., **61**, 483, 1948.— [8] F. L. Ribe. Phys. Rev., **83**, 1217, 1951.— [9] J. D. Jackson a. H. Shiff. Phys. Rev., **89**, 359, 1953.— [10] D. R. Bates a. A. Dalgarno. Proc. Phys. Soc., A **65**, 919, 1952; A **66**, 972, 1953.— [11] D. R. Bates a. S. Grif-fing. Proc. Phys. Soc., A **66**, 961, 1953.

1955

## ПРЯМОУГОЛЬНАЯ КАМЕРА ВИЛЬСОНА С ДВУХСТОРОННИМ РАСШИРЕНИЕМ

*В. Г. Кириллов-Угрюмов, В. М. Федоров и Б. Н. Дерягин*

Дано описание прямоугольной камеры Вильсона с двухсторонним расширением, удобной для использования в сочетании с масс-спектрометром.

В последние годы при исследовании состава космических лучей получают все большее распространение камеры Вильсона прямоугольной формы. Нами была сконструирована и изготовлена прямоугольная камера Вильсона с двухсторонним расширением, предназначенная для исследования характера остановок частиц космического излучения, прошедших через магнитное поле большого масс-спектрометра Лаборатории космических лучей на г. Алагез [1].

В сочетании с магнитным спектрометром использование прямоугольных камер значительно выгоднее цилиндрических тех же объемов, так как позволяет увеличить светосилу установки. Увеличение светосилы прибора особенно существенно при регистрации редких явлений, например, связанных с ядерными взаимодействиями при больших энергиях.

Для торможения и остановок частиц в объеме камеры горизонтально укреплялись пластины из различного вещества. Поэтому при выбранной системе освещения «на просвет» единственно возможным направлением расширения остается направление вдоль наибольшей стороны камеры, т. е. в бок. Боковое расположение расширительного устройства выгодно также в том отношении, что сечение отсека между пластинами постоянно по направлению расширения, даже в том случае, когда пластины наклонены к центру объективов. Постоянство сечения уменьшает завихрения газа при расширении.

Для уменьшения завихрений в объеме камеры, вызванных отходом диафрагмы на большое расстояние, мы применили одновременное расширение с двух противоположных сторон. Двухстороннее расширение уменьшает ход диафрагмы вдвое. Кроме того, расположение клапанов сбоку позволяет легко регулировать их и экранировать от влияния внешнего магнитного поля.

Разрез камеры схематически представлен на рис. 1. Объем камеры около 10 дм<sup>3</sup>. Размеры переднего окна 230 × 380 мм, глубина 120 мм. Корпус представляет собой дюралюминиевый параллелепипед с двумя сквозными проемами для крепления стекол и расширительных устройств, изготовленный из целого куска для более надежной герметичности. Внутри, для предохранения от коррозии, корпус покрывался тонким слоем бакелита. Стекла толщиной 35 мм прижимались к корпусу рамками. Герметичность соединения обеспечивалась резиновыми прокладками сечением 4 × 6 мм, проложенными между стеклом и металлом.

Подвижная 8 и неподвижная 10 решетки ограничивали перемещение диафрагмы 9 резинового листа толщиной 2 мм, зажатого между корпусом камеры и корпусом расширительного устройства. Положение подвижной решетки, определяющее степень расширения, регулировалось вращением

опорных втулок 17, а симметричность расположения решеток достигалась путем жесткой связи через вал 20 и зубчатые передачи 2. Толщина диафрагмы выбиралась так, чтобы ее инерционность не сказывалась заметно на времени расширения. Диаметры отверстий в решетках были таковы, что прогиб резины в отверстия при колебаниях избыточного давления в расширительных устройствах существенно не отражался

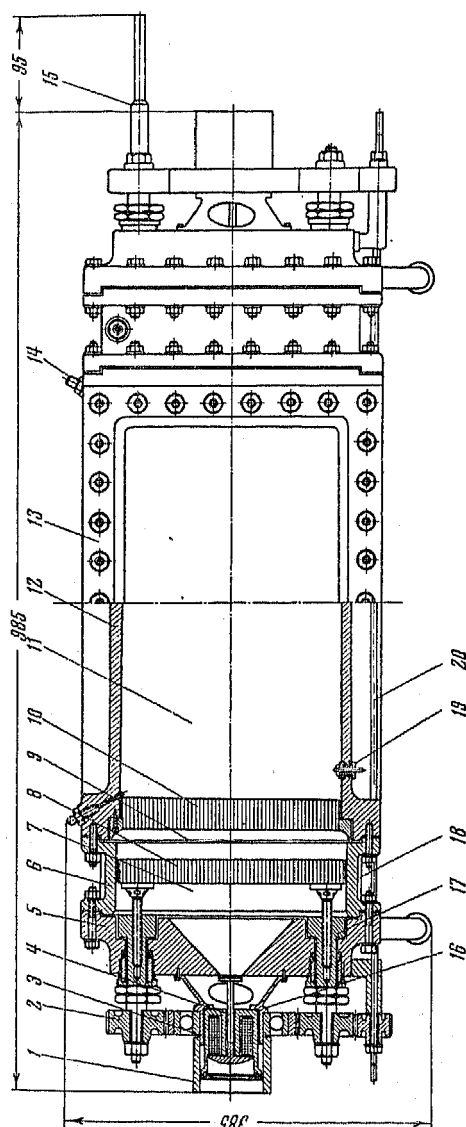


Рис. 1. Схема камеры. 1 — магнитный экран, 2 — шестерни, 3 — латунный цилиндр, 4 — клапан, 5 — крышка расширительной головки, 6 — корпус расширительной головки, 7 — расширительное устройство, 8 — подвижная решетка, 9 — резиновая диафрагма, 10 — неподвижная решетка, 11 — стекло, 12 — корпус камеры, 13 — фланец, 14 — шпунер для наполнения рабочего объема, 15 — нониус, 16 — втулка крепления клапана, 17 — механизм для перемещения подвижной решетки, 18 — вводяная рубашка, 19 — ввод «очищающего» поля, 20 — тяга, соединяющая системы шестерен

на степени расширения. Расширение осуществлялось выпуском сжатого воздуха из расширительных объемов двумя клапанами электромагнитного типа. В камеру вводилась смесь из 65% этилового спирта и 35% воды (по объему). В качестве неконденсирующегося газа употреблялся аргон, нагнетаемый в камеру до избыточного давления в две атмосферы.

Ограниченное пространство под полюсами электромагнита вынуждало фотографировать объемы камеры с малых расстояний. Вследствие этого, для обеспечения глубины резкости по всему объему, необходимо ограничиваться малыми апертурами. Обычные приемы фотографирова-

ния под прямым углом к направлению освещения при малой апертуре требуют увеличения мощности источников света. В описываемой камере освещение осуществлялось «на просвет», так что оптическая ось объектива составляла угол  $\sim 50^\circ$  по отношению к падающему лучу. Согласно [2] интенсивность рассеянного света от капли заметно увеличивается с уменьшением угла и для выбранного угла в 3—4 раза превышает интенсивность рассеянного света под углом в  $90^\circ$ . Фотографирование производилось стереофотоаппаратом с расстояния 650 мм при базе 135 мм

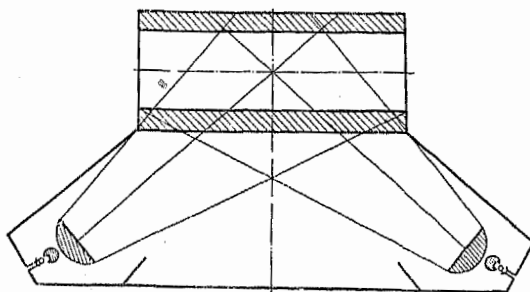


Рис. 2. Осветительная коробка

с объективами типа «Юпитер 12»,  $f = 35$  мм. Рабочий размер диафрагмы был равен 11, угол между осями объективов  $6,5^\circ$ . Освещение камеры осуществлялось двумя импульсными лампами типа ИПК-400. На каждую лампу разряжался конденсатор емкостью 48  $\mu\text{F}$ , заряженный до 3,5 кВ. Для фокусировки света употреблялась система линз, предложенная в работе [3]. Сфокусированный пучок направлялся на камеру таким образом, чтобы прямой свет не попадал в объективы фотоаппарата (рис. 2).

Большое внимание было уделено стабилизации температуры. Через металлические кожухи, напаянные на каждое расширительное устройство, прокачивалась вода из термостата ТС-15. Кроме того, через светонепроницаемые коробки продувался воздух той же температуры. Схема терморегулирования (с точностью регулирования до  $1^\circ$ ) приведена на рис. 3. Контроль осуществлялся при помощи логометра. Использование нескольких датчиков позволяет легко контролировать температуры в различных частях камеры.

Управление камерой осуществлялось радиотехнической схемой типа схемы Аллена [4]. Временные задержки осуществлялись дифференцированием прямоугольных импульсов, сформированных на запертых мультивибраторах с катодной связью. В схему управления входил также блок, управляющий медленными расширениями. Клапан медленных расширений включался в магистраль сжатого воздуха, подходящую к камере. Через 65 сек. после основного расширения клапан перекрывал подачу сжатого воздуха и соединял расширительный объем с атмосферой. В течение 5 сек. сжатый воздух вытекал через отверстия малого диаметра, позволяя диафрагме отойти к задней, подвижной решетке. В результате медленного расширения капли, не испарившиеся после рабочего расширения, увеличивали свои размеры и оседали на дно. Посторонний фон тумана при последующем рабочем расширении после такого процесса был значительно меньше.

Исследование фотографий показало, что следы проникающих частиц получаются по всему объему камеры без заметных искажений. Как видно из рис. 3, области, прилегающие к решеткам, освещены хуже центра камеры, отчего плотность следов проникающих частиц на фотографиях в различных частях камеры различна. При обработке

это обстоятельство легко учитывается. Снимки, выполненные при разновременности в срабатывании клапанов до  $4 \div 6$  мсек., не отличались от снимков с меньшей разновременностью, что соответствует измере-

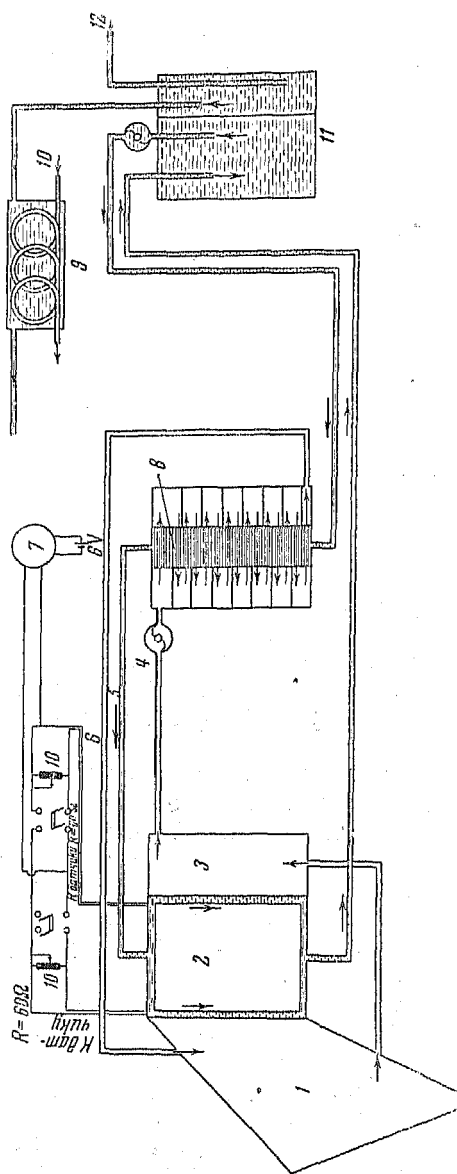


Рис. 3. Схема терморегулировки. 1 — коробка фотоаппарата, 2 — головки камеры, 3 — коробка освещения, 4 — воздушная подушка, 5 — термостатированный воздух, 6 — термостатированная вода, 7 — логотермометр, 8 — радиатор, 9 — холодильник, 10 — водопроводная вода, 11 — термостат, 12 — датчик температуры. Сопротивления даны в  $k\Omega$ .

ниям, проведенным в работе [5], степени пересыщения как функции времени расширения.

Для увеличения интенсивности наблюдаемых случаев остановок частиц желательно поместить в камеру возможно большее число пластин. Однако большое число пластин ухудшает освещенность следов. Для данной камеры наилучшие показатели получились при девяти пластинах. Время чувствительности камеры, оцененное по числу космических частиц, регистрируемых при свободных расширениях и постоянном освещении, составляло 0,2 сек. Для удаления ионов, образованных посторонними частицами, прошедшими через камеру до

К статье В. Г. Кириллова-Угрюмова, В. М. Федорова и Б. Н. Дерягина, „Прямоугольная камера Вильсона с двухсторонним расширением“

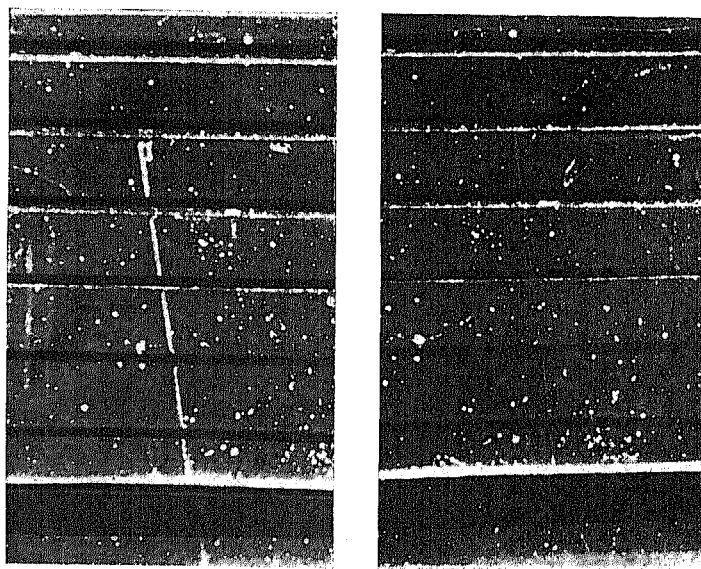


Рис. 4. Фотографии следов космических частиц, зарегистрированных в камере с двухсторонним расширением



рабочего расширения, между пластинами прикладывалось электростатическое поле напряженностью 30 V/см. Блок управления обеспечивал снятие поля за  $10^{-5}$  сек.

Наиболее четкие снимки с хорошей проработкой как тонких, так и жирных следов без заметной вуали получались при использовании киноплёнки типа 10—400 или «Панхром» высшей чувствительности при обработке ее амидоловым проявителем.

Для примера на рис. 4 (вклейка) приведены фотографии траекторий релятивистской частицы и протона, ионизационно останавливающегося в шестой пластине.

Настоящая работа проводилась под руководством проф. А. И. Алиханяна, которому мы считаем своим приятным долгом выразить глубокую благодарность. За помощь в работе благодарим также М. М. Веремеева, В. А. Николаева, Г. Д. Давимуса, С. Г. Рюмина и Н. А. Голубчикова.

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
Академии наук СССР

Поступила в редакцию  
27 апреля 1954 г.

#### Литература

- [1] А. А. Алиханян, В. Г. Кириллов-Угрюмов, Н. В. Шостакович и В. М. Федоров. ДАН СССР, 92, 255, 1953. — [2] C. Webb. Phil. Mag., 19, 927, 1935. — [3] E. Lofgren, E. Ney and F. Oppenheimer. Rev. Sci. Inst., 19, 271, 1948. — [4] F. Allen. Rev. Sci. Inst., 19, 918, 1948. — [5] W. Hazen. Rev. Sci. Inst., 13, 247, 1942.

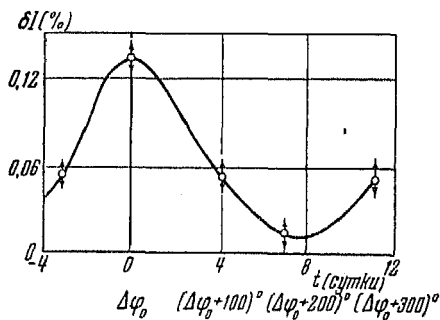
## ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

## О ВЛИЯНИИ ЛУННО-ПРИЛИВНЫХ КОЛЕБАНИЙ АТМОСФЕРЫ НА ИНТЕНСИВНОСТЬ ЖЕСТКОЙ КОМПОНЕНТЫ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ

А. И. Кузьмин и Г. В. Скрипин

1. Рассмотрение влияния лунно-приливных колебаний атмосферы на интенсивность жесткой компоненты космических лучей  $\delta I$  представляет интерес как для изучения природы полусуточных вариаций интенсивности космических лучей [1], так и природы суточных колебаний температуры в верхних слоях атмосферы [2]. В связи с тем, что период главного лунно-приливного колебания атмосферы равен половине лунных суток [3], можно ожидать проявления эффекта этих колебаний в регулярных полусуточных вариациях интенсивности космических лучей. Однако регулярные полусуточные вариации могут маскироваться статистическими флуктуациями частиц космических лучей. Поэтому исследование лунно-приливной составляющей может быть выполнено только статистическим методом.

Если наблюдаемая полусуточная волна в  $\delta I$  является суммой двух волн: волны  $S$  с периодом  $T_S = 12$  час. и волны  $M$  с периодом, составляющим половину лунных суток  $T_M = 12$  ч. 25 м. 14 с., и если в момент времени  $t_0 = 0$  сдвиг фаз волн  $S$  и  $M$  равен  $\Delta\varphi_0$  градусов, то через период  $T_S$  сдвиг фаз увеличится на  $360(T_M - T_S)/T_S$  градусов. Следовательно, через некоторое число  $n$  периодов  $T_S$  увеличение начальной разности фаз достигнет  $360^\circ$ . Отсюда  $n = T_S/(T_M - T_S) = 28,6$  периодов  $T_S$  или 14,3 солнечных суток. Таким образом волны  $S$  и  $M$  имеют один и тот же сдвиг фаз  $\Delta\varphi_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) в моменты времени  $t_i, t_i + n, t_i + 2n, \dots, t_i + kn$ . Поэтому, усредняя полусуточный ход  $\delta I$  по указанным моментам времени, можно определить



средние параметры этого хода при определенном сдвиге фаз  $\Delta\varphi_i$  волн  $S$  и  $M$ . Определив средние значения параметров полусуточной волны  $\delta I$  для различных начал усреднения  $t_0, t_1, t_2, \dots$  (в интервале 14,3 солнечных суток), можно построить, например, кривую зависимости амплитуды полусуточной волны  $\delta I$  от сдвига фаз  $\Delta\varphi_i$  волн  $S$  и  $M$ . Ход этой кривой покажет эффект лунно-приливной составляющей  $M$  в полусуточных вариациях  $\delta I$ .

2. По изложенной схеме были обработаны экспериментальные данные измерений  $\delta I$ , полученные с точностью до нескольких десятых процента за час наблюдений. Параметры полусуточной волны вычислялись для следующих сдвигов фаз:  $\Delta\varphi_0^0$ ,  $(\Delta\varphi_0 + 100)^\circ$ ,  $(\Delta\varphi_0 + 175)^\circ$ ,  $(\Delta\varphi_0 + 275)^\circ$ . При этом для каждого сдвига фаз отбиралось по 70 солнечных суток. Полученные результаты представлены на рисунке. Можно видеть, что амплитуда полусуточной волны  $\delta I$  сильно зависит от сдвига фаз волн  $S$  и  $M$ , т. е. от выбора начала усреднения  $t_i$ , и укладывается в правильную синусо-

идальную кривую с периодом 14,3 суток. Такая зависимость должна существовать только в случае наличия в полусуточных вариациях  $\delta I$  компоненты с периодом в 12 ч. 25 м. 14 с.

Реальность волны  $M$  подтверждается таблицей, где приведены параметры полусуточной волны  $\delta I$ , найденные из двухмесячных почасовых непрерывных данных.

| Амплитуда                    |                   | Время максимума |
|------------------------------|-------------------|-----------------|
| 1951 г.                      |                   |                 |
| Март — апрель . . . . .      | $0,069 \pm 0,008$ | 1 ч. 40 м.      |
| Май — июнь . . . . .         | $0,078 \pm 0,008$ | 2 ч. 40 м.      |
| Июль — август . . . . .      | $0,036 \pm 0,008$ | 1 ч. 30 м.      |
| Сентябрь — октябрь . . . . . | $0,070 \pm 0,008$ | 2 ч. 40 м.      |
| Ноябрь — декабрь . . . . .   | $0,063 \pm 0,008$ | 1 ч. 16 м.      |

Из таблицы видно, что флуктуации амплитуды волны в среднем не превышают 0,008%, в то время как при суммировании через 14,3 суток по такому же числу суток они достигают 0,04%. Считая, что максимум кривой рисунка соответствует случаю совпадения фаз волн  $S$  и  $M$ , а минимум — сдвигу фаз между ними на  $\pi$ , и пользуясь данными таблицы, получаем, что средняя амплитуда волны  $M$  равна 0,05%. Зная параметры волн  $S$  и  $M$ , можно рассчитать фазу результирующей волны для каждого из начал усреднения. Расчет показал, что фаза результирующей кривой должна колебаться в пределах 3 час. (90°). Фактически найденные фазы результирующей кривой, соответствующие началам усреднения, показанным на рисунке, практически укладываются в этот интервал, а ход изменения фазы соответствует представлениям, принятым при расчете.

Амплитуда и фаза  $M$ , вычисленные путем непрерывного суммирования данных  $\delta I$  за 1951—1952 гг. по времени главной лунной волны с периодом 24 ч. 50 м. 14 с., совпали с приведенными выше характеристиками.

3. Лунно-приливная волна в атмосфере, надежно установленная в работах [1,5], имеет амплитуду в изменении наземного давления порядка 0,08 мб. Изменение барометрического давления с такой амплитудой может обусловить 20% амплитуды волн  $M$  в интенсивности космических лучей. Поэтому для объяснения остальных 0,04% амплитуды  $M$  необходимо допустить, что приливные колебания атмосферы главным образом проявляются в нераспределении массы воздуха по вертикали. Такие перемещения масс воздуха по вертикали должны привести к полусуточным колебаниям температуры в верхних слоях, что действительно наблюдается, как это показано Селезневой [2] еще в 1945 г. Анализ [2] большого статистического материала показал, что, начиная с 3 км, суточные колебания имеют несколько максимумов. Основной максимум характеризует суточные, другие максимумы — полусуточные изменения, причем амплитуды полусуточных колебаний растут с высотой.

Мы полагаем, что кроме факторов, указанных Селезневой [2] для объяснения подобных максимумов в суточном ходе температуры в тропосфере, видимо, значительное место принадлежит приливным колебаниям.

В заключение приносим благодарность проф. Е. Л. Фейнбергу за ряд ценных замечаний.

Якутский филиал  
Академии наук СССР

Поступило в редакцию  
19 января 1954 г.

### Литература

- [1] P. Nicolson a. V. Sarabhai. Proc. 'Phys. Soc. 64, 609, 1948. — [2] Е. С. Селезнева. Изв. АН СССР, сер. геогр., 9, 82, 1945. — [3] Н. Е. Кочин. Собрание сочинений, 1, Изд-во АН СССР, М. — Л., 1949. — [4] J. Bartels. Gezeitenschwingungen der Atmosphäre, Handb. d. Experimental Physik, 25, ч. 1, стр. 161, 1929. — [5] S. R. Chapman. Met. Soc., 50, 165, 1924.

# ВАРИАЦИИ ГЛОБАЛЬНОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ ЖЕСТКОЙ КОМПОНЕНТЫ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ ФРОНТОВ ВОЗДУШНЫХ МАСС

Д. Д. Красильников

1. Рассмотрение вариаций интенсивности космических лучей при определенных типичных случаях изменения состояния атмосферы (в смысле распределения плотности воздуха по высоте) интересно тем, что оно может помочь в случаях недостатка данных температурного зондирования атмосферы (когда нет возможности взять соответствующий интеграл, см. [1,2]) оценить приблизительную величину и знак метеорологического эффекта, без знания которого затрудняется рассмотрение внеатмосферных вариаций космических лучей. Кроме того, такое рассмотрение могло бы выяснению вопроса о возможности привлечения наблюдаемых вариаций интенсивности космических лучей в метеорологических исследованиях [3]. В качестве таких типичных случаев изменения состояния атмосферы можно попытаться рассмотреть известные из метеорологии различные типы воздушных фронтов [4,5].

До настоящего времени имелась единственная работа такого рода [6].

В данной статье сообщается о средних вариациях интенсивности жесткой компоненты космических лучей при прохождении воздушных фронтов четырех типов и в периоды без фронтов. При этом, в отличие от работы [6], 1) измерения интенсивности космических лучей производились в стационарной установке на суше вблизи уровня моря; 2) случаи фронтов и периодов без фронтов рассматривались в магнитно-покойные дни; 3) из данных для вариаций интенсивности космических лучей исключался ее суточный ход; 4) учитывалось различие в скорости перемещения фронтов; 5) периоды без фронтов подразделялись по типу изменения наземного давления.

2. Средняя часовая глобальная интенсивность жесткой компоненты космических лучей измерялась с точностью до нескольких десятых процента. Кроме того, в пункте наблюдения получались данные ежечасного наблюдения наземного давления и магнитного поля Земли, данные синоптической ситуации через каждые 3 часа и, наконец, данные ежечасного наблюдения (визуального) облачности.

Фронты брались в рассмотрение, если они: 1) не сопровождался магнитными бурями и изменения горизонтальной составляющей магнитного поля Земли  $\delta H$  не превышали 100  $\gamma$ -единиц за весь период рассмотрения данного фронта; 2) могли быть распознаны по типу (по определению синоптиков); 3) являлись тропосферными и динамически значимыми (в случаях теплых и холодных фронтов) и проходили через пункт наблюдения, имея движение, близкое к перпендикулярному к наземной линии фронта; 4) не сопровождался повторными вторжениями за рассматриваемый период; 5) являлись достаточно устойчивыми, т. е. не размывались в пределах всего интервала времени наблюдения (с 1500 км до пункта наблюдения и до 400—500 км после прохождения его), прослеживались на всех синоптических картах промежуточных сроков.

Всего было отобрано 107 индивидуальных случаев прохождения фронтов четырех типов: теплых фронтов — 32, холодных — 48, окклюзий типа теплого фронта — 14, окклюзий типа холодного фронта — 13. Для каждого отдельного случая прохождения фронтов фиксировались сроки начала и конца трех интервалов времени нахождения пункта наблюдения: первого и третьего — в зоне «чистых» воздушных масс (соответственно холодной и теплой — в случае теплых фронтов, а для холодных фронтов, наоборот) и второго — в зоне проекции фронтальной поверхности (рис. 1). Для фронтов окклюзий приняты два периода, соответствующие расстоянию примерно в 600 км до и 400 км после прохождения наземной линии фронта. Из этих фиксирований наиболее твердыми являлись фиксирования моментов прохождения наземных линий фронта, а верхние границы отмечались, исходя из литературных данных [4,5,7] и косвенной аэрологии (характер облачности). Считалось, что в среднем верхняя граница теплого фронта на высоте имеется, когда его наземная линия еще находится на расстоянии 800 км до пункта наблюдения, холодного фронта — на расстоянии 400 км позади его наземной линии.

В выборку периодов без фронтов входили такие периоды, когда: 1) судя по синоптическим картам в пределах 1000 км от пункта наблюдения нигде не обнаруживались ни основные, ни вторичные фронты; 2) не наблюдались магнитные бури и изменения горизонтальной составляющей магнитного поля Земли не превышали 100  $\gamma$ -единиц за данный период.

Таковыми периодами в подавляющем большинстве случаев являлись области антициклонов. Эти периоды, подразделялись на две группы, судя по типу изменений наземного давления: периоды повышения (54 индивидуальных случая) и периоды понижения наземного давления (42 случая). Средний размах изменения атмосферного давления в указанных группах (5—6 мб) был больше, чем таковой же по типам фронтов.

В соответствии с указанными выборками для каждого типа фронта и периодов без фронтов раздельно определялись средние кривые вариаций интенсивности же-

стойкой компоненты как наблюдаемой  $\delta \bar{I}$ , так и исправленной на барометрический эффект  $\delta I_h$ . При этом:

1) Для определения  $\delta I_h$  применялся барометрический коэффициент, весьма близкий к примененному в работе [°], а именно:  $k_B = -0,14\%$  от  $I_0$  на 1 миллибар изменения атмосферного давления в пункте наблюдения ( $I_0$  — средняя величина интенсивности).

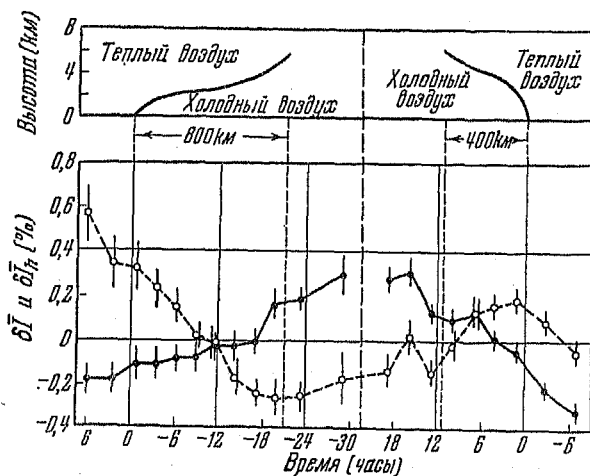


Рис. 1. Вверху — профиль тёплого (слева) и холодного (справа) фронтов. Внизу — средний ход вариации интенсивности космических лучей наблюдаемой  $\delta \bar{I}$  (белые кружки) и исправленной на барометрический эффект  $\delta I_h$  (черные кружки) при прохождении теплых фронтов (из 32 случаев, слева) и холодных фронтов (из 48 случаев, справа)

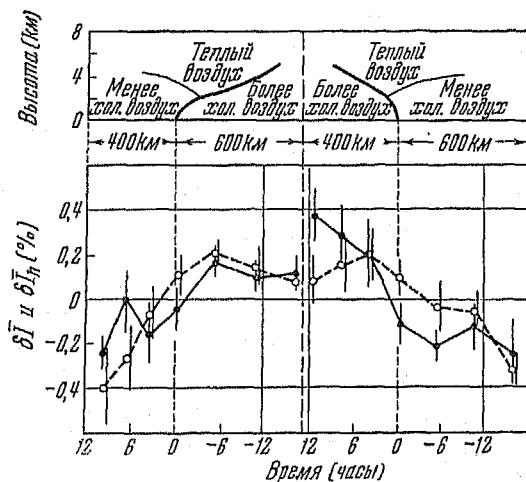


Рис. 2. Вверху — профиль окклюзии типа теплого фронта (слева) и окклюзии типа холодного фронта (справа). Внизу — средний ход вариации интенсивности наблюдаемой  $\delta \bar{I}$  (белые кружки) и исправленной на барометрический эффект  $\delta I_h$  (черные кружки) при прохождении окклюзии типа теплого фронта (из 14 случаев, слева) и окклюзии типа холодного фронта (из 13 случаев, справа)

2) Из данных  $\delta I$  и  $\delta I_h$  исключался их суточный ход, так как суточный эффект в  $\delta I$  и  $\delta I_h$ , будучи равным  $0,3\%$  от  $I_0$ , сравним с искомым вариацией, и дополнительным рассмотрением было получено указание, что наблюдаемый вблизи уровня моря суточный эффект жесткой компоненты интенсивности не зависит от синоптической ситуации.

3) При выводе средних кривых  $\delta\bar{I}$  и  $\delta\bar{I}_h$  совмещались средние значения индивидуальных кривых, и каждая точка средних кривых определялась усреднением средних

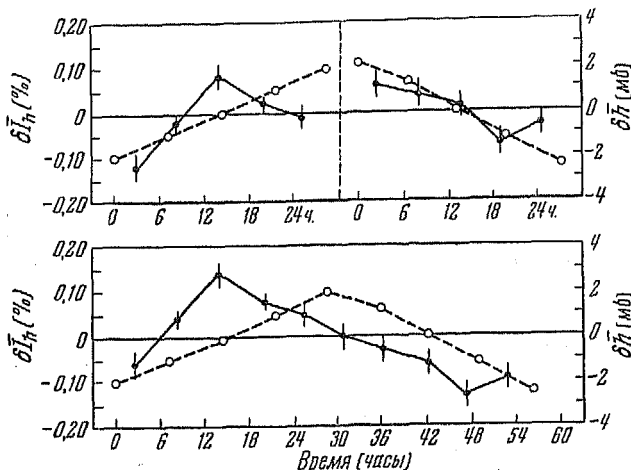


Рис. 3. Средний ход вариаций наземного давления  $\delta\bar{h}$  и интенсивности космических лучей  $\delta\bar{I}_h$  в периоды без фронтов. Вверху —  $\delta\bar{I}_h$  при повышении (слева из 54 случаев) и при понижении (справа из 42 случаев) наземного давления  $\delta\bar{h}$ . Внизу — ход  $\delta\bar{I}_h$  при тех же случаях, когда  $\delta\bar{I}_h$  оценивается от общего для обоих типов вариаций среднего уровня интенсивности космических лучей

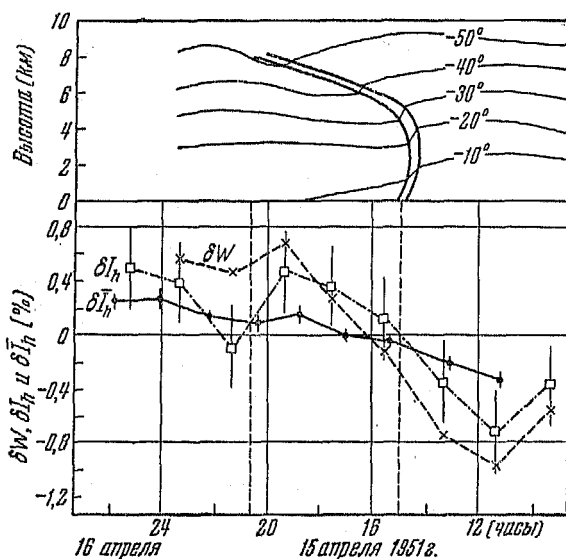


Рис. 4. Вариация интенсивности космических лучей при прохождении мощного холодного фронта 15 апреля 1951 г. Внизу:  $\delta I_h$  — наблюдаемая вариация интенсивности космических лучей после введения барометрических поправок;  $\delta W$  — ожидаемая вариация космических лучей [1,2], интеграл взят в пределах от уровня с давлением 300 мб до уровня с давлением 1000 мб;  $\delta\bar{I}_h$  — средняя вариация космических лучей при прохождении холодных фронтов (представлена для сравнения). Вверху — температурный разрез атмосферы и профиль фронта ( $T^\circ\text{C}$ )

величин (за период от 2 до 9 час. в зависимости от скорости фронта) вариаций интенсивности космических лучей  $\delta I$  ( $\delta I_h$ ) в индивидуальных случаях, которые наблюдались за отрезки времени, соответствующие одинаковым положениям пункта

наблюдения относительно фронтальной поверхности (в случае фронтов) или хода наземного давления (в случае периодов без фронтов).

Результаты усреднения представлены на рис. 1—3. На них шкала времени показывает лишь средние интервалы времени рассмотрения (о самой методике усреднения индивидуальных случаев для вывода кривых  $\delta\bar{I}$  и  $\delta\bar{I}_h$  см. выше). Указанные на рис. 1—2 среднеквадратичные ошибки, повидимому, не выражают ошибки в обычном смысле, так как они включают и индивидуальные (не случайные) различия фронтов. Кроме того, в одном случае прохождения резко выраженного холодного фронта удалось рассчитать предсказываемый теорией метеорологического эффекта [1,2] ход вариаций интенсивности  $\delta W$  (рис. 4). При этом расчет  $\delta W$  был выполнен с учетом распределения температуры лишь до высоты уровня с давлением  $h = 300$  мб.

3. Из полученных результатов видно:

1) Интенсивность жесткой компоненты космических лучей при прохождении фронтов испытывает характерные вариации. Эти вариации различны по типу, соответственно различным типам фронтов. В основном, интенсивность  $\delta\bar{I}_h$  падает при переходе от холодной воздушной массы к теплой. Минимум интенсивности наблюдается в зоне «чистой» теплой, а максимум — в зоне «чистой» холодной воздушной массы. Эффект в  $\delta\bar{I}_h$  в среднем колеблется между 0,4 и 0,6% от  $I_0$ .

2) Данные вариации  $\delta\bar{I}_h$  не могут быть объяснены ошибками в применении, например, завышенного, барометрического коэффициента. Это видно из сравнения вариаций  $\delta\bar{I}_h$  на рис. 1—3. Причина указанных вариаций  $\delta\bar{I}_h$ , повидимому, кроется в соответствующих изменениях в температурном разрезе атмосферы (рис. 4), как это следует из теории метеорологического эффекта в космических лучах [1,2]. Последняя утверждает, что метеорологический эффект вызывается суммарным влиянием изменения плотности воздуха во всех слоях ниже уровня генерации мезонов, а не только вариаций высоты слоя генерации, как это считалось раньше [6].

3) Величина и ход вариаций интенсивности космических лучей в каждом индивидуальном случае фронтов одинакового типа не являются строго определенными и совпадающими, а обнаруживают значительные колебания (рис. 4), что находится в соответствии с различной мощностью и профилем фронтов одного и того же типа [4,7]. Имеющееся различие в ходе  $\delta W$  и  $\delta\bar{I}_h$ , повидимому, отражает вклад верхних слоев (выше уровня с  $h = 300$  мб).

4) В отличие от результатов работы [6], вариации  $\delta\bar{I}_h$  в периоды без фронтов сглаживаются не полностью, а обнаруживают определенную тенденцию (рис. 3). Действительно, если определять вариации  $\delta\bar{I}_h$  для обоих типов изменения наземного давления от общего среднего уровня интенсивности космических лучей, то получается волна вариаций  $\delta\bar{I}_h$ , опережающая волну наземного давления  $\delta\bar{h}$  примерно на  $1/4$  длины. Объяснение этой картины, исходя из теории [1,2], очевидно, следует искать в связи изменений давления на Земле и по высотам, относительно которой в метеорологии существуют известные взгляды [4,8] (см., например, кривые Шедлера [4]).

5) Обнаруженные вариации интенсивности  $\delta\bar{I}_h$  (в работе [6] они отсутствовали), связанные с верхней границей фронтов (рис. 1), с точкой окклюзии (рис. 2) и с областями повышения и понижения наземного давления (рис. 3), весьма интересны как с точки зрения метеорологии, так и в смысле изучения вариаций интенсивности космических лучей.

4. Из вышеизложенного следует:

1) Для надежного исключения метеорологического эффекта в каждом отдельном случае отсутствия точных данных для температурного разреза атмосферы желательна дальнейшая, более детальная типизация метеорологических процессов.

2) Вопрос о возможности использования наблюдаемых вариаций интенсивности космических лучей в метеорологических исследованиях требует дальнейшего выяснения. Нам представляется, что при наличии данных аэрологии о среднем температурном разрезе тропосферы в случаях известных типичных метеорологических процессов имеется возможность вычислить ожидаемый вклад тропосферы  $\delta W_{\text{троп}}$  [1,2]. Допуская, что в указанных случаях наблюдаемые вариации интенсивности космических лучей  $\delta\bar{I}_h$  вызываются в основном изменениями температурного разреза атмосферы, т. е.  $\delta\bar{I}_h \approx \delta\bar{W}$ , можно найти средний ожидаемый вклад слоев атмосферы, лежащих выше тропосферы,  $\delta\bar{W}_{\text{выш}} \approx \delta\bar{I}_h - \delta\bar{W}_{\text{троп}}$  соответственно для каждого определенного типа метеорологического процесса в тропосфере. При этом  $\delta\bar{W}_{\text{выш}}$  можно привлечь в качестве хотя и косвенного, но объективного фактора (наряду с другими метеорологическими данными и дополнительно к ним) для суждения о ха-

рактуре связей тропосферных процессов с процессами в вышележащих слоях. Как известно, в метеорологии в вопросе об указанной связи существует много неясностей ([4,5] и др.).

В заключение выражаю благодарность проф. Е. Л. Фейнбергу, Ю. Г. Шаферу и Г. А. Толстоборовой за советы и помощь в работе.

Якутский филиал  
Академии наук СССР

Поступило в редакцию  
19 января 1954 г.

### Литература

- [1] Е. Л. Фейнберг. ДАН СССР, 53, 421, 1946.— [2] Л. И. Дорман. ДАН СССР, 94, 433, 1954.— [3] Д. Д. Странатан. Частицы в современной физике, ИИЛ, 1948.— [4] С. П. Хромов. Основы синоптической метеорологии. Гидрометеоздат, Л., 1948.— [5] Курс метеорологии, под ред. проф. П. Н. Тверского, Гидрометеоздат, Л., 1951.— [6] D. H. Loughridge and P. Gast. Phys. Rev., 58, 583, 1940.— [7] А. А. Бачурина и З. Л. Туркетти. Условия образования атмосферных фронтов, Гидрометеоздат, Л., 1950.— [8] Ж. Д. Зубян. Возникновение и развитие циклонов и антициклонов, Гидрометеоздат, Л., 1949.

## О ВКЛАДЕ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ИЗМЕНЕНИЙ ЗЕМНОЙ АТМОСФЕРЫ В СУТОЧНЫЙ ЭФФЕКТ ВАРИАЦИЙ ИНТЕНСИВНОСТИ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ

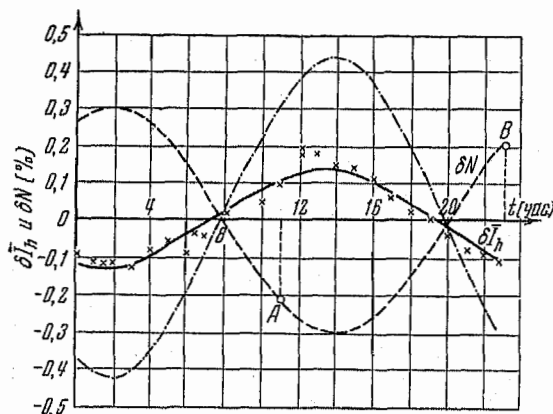
А. И. Кузьмин

1. При исследовании суточного эффекта, как и при изучении природы других регулярных и нерегулярных вариаций интенсивности космических лучей, важно выделить вариации, связанные с метеорологическими изменениями в земной атмосфере.

Вопрос о вкладе суточных колебаний метеорологических факторов в суточный эффект вариаций интенсивности космических лучей рассматривался в работах [1-3] и др.

Однако во всех этих работах не учитывался эффект перераспределения масс в атмосфере [4], который столь же существен, как и эффекты простого поглощения мезонов, за счет роста массы воздуха над установкой и сдвига уровня генерации мезонов при изменении температуры атмосферы. Кроме того, в работе [2] некорректно учитывается так называемый положительный температурный эффект [5].

В настоящем сообщении приводятся данные обработки измерений глобальной интенсивности жесткой компоненты космических лучей  $\delta I$ , полученных с большой точностью (до нескольких десятых процента за один час наблюдений)



на высоте 100 м над уровнем моря. Обработка проводилась по теоретической схеме, предложенной Фейнбергом [4], обобщенной Дорманом [6] на двухмезонную схему, учитывающую генерацию  $\mu$ -мезонов по всей толще атмосферы через распад  $\pi$ -мезонов, генерируемых первичной компонентой.

2. На рисунке приведен суточный ход интенсивности жесткой компоненты космических лучей  $\delta I_h$ , исправленный на изменение барометрического давления  $h$  (барометрический коэффициент  $k = -0.14\%$  на 1 мб), полученный усреднением данных непрерывных измерений за период июль 1949 г.—май 1952 г. Жирной линией показана первая гармоника. Вокруг нее расположены экспериментальные точки (крестики). На этом же рисунке кружками показаны предвычисленные по усредненным метеоданным две точки (A, B) для  $\delta N$  (теоретически ожидаемая интенсивность жесткой компоненты космических лучей с учетом метеорологического эффекта). Для вычисления этих точек нами привлекались метеорологические данные радиозондирования атмосферы лишь за те сутки, когда высота радиозонда за оба срока составляла не менее 12 км. Такой отбор обеспечивал исключение ошибок в вычислениях, обусловленных неравномерным распределением удачных подъемов за дневные и ночные сроки зондирования в течение года. Всего было использовано 72 парных полета, из которых зимних 17, летних 20, весенних 14, осенних 21.

Результаты вычисления метеорологического эффекта  $\delta N$  «день — ночь» вместе с наблюдаемыми отклонениями интенсивности жесткой компоненты космических лучей (в которых уже учтены изменения барометрического давления)  $\delta I_h$  приведены в табл. 1.

Таблица 1

|                  | Зима             | Весна            | Лето             | Осень            | Среднее          |
|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| $\delta N$ в %   | $-0,08 \pm 0,02$ | $-0,40 \pm 0,03$ | $-0,83 \pm 0,02$ | $-0,73 \pm 0,02$ | $-0,35 \pm 0,01$ |
| $\delta I_h$ в % | $0,34 \pm 0,09$  | $0,46 \pm 0,1$   | $0,14 \pm 0,08$  | $0,28 \pm 0,08$  | $0,21 \pm 0,05$  |

Из рисунка и таблицы видно, что, во-первых, предвычисленный эффект  $\delta N$  «день — ночь» и наблюдаемое отклонение  $\delta I_h$  находятся в противофазе, вопреки результатам [2], во-вторых, введение поправки на метеорологический эффект примерно удваивает эффект «день — ночь» в интенсивности жесткой компоненты космических лучей. Абсолютные величины результатов вычислений, приведенные в табл. 1, могут быть только завышены за счет систематической ошибки в измерении температуры атмосферы, обусловленной влиянием солнечной радиации на приемник температуры радиозонда [6]. Вклад от этого источника систематической ошибки на высоких широтах должен быть значительным лишь летом, когда солнце имеет максимальную высоту над горизонтом. С другой стороны, известно [6], что завышение температуры на северной широте  $60-62^\circ$  достигает  $2^\circ \text{C}$ , на высоте 13 км. Отсюда из закона экспоненциального уменьшения массы вещества атмосферы с высотой можно показать, что радиационная ошибка на высоте 6 км не может существенно превышать десятых долей, а на уровне наших метеонаблюдений — сотых долей градуса. Поэтому абсолютная величина ожидаемого метеорологического эффекта «день — ночь» в летний сезон не должна быть завышена существенно больше 0,2%. Таким образом метеорологический эффект «день — ночь» противоположен наблюдаемому и имеет величину порядка 0,4%. Правильность такого заключения еще подтверждается тем, что средняя высота, на которой давление равно 300 мб, полученная из трехлетних данных зондирования, в дневные сроки выше ночных. Это следует из табл. 2.

Таблица 2

|                                                                                           | Зима | Весна | Лето | Осень |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|------|-------|------|-------|
| Средняя разность «день — ночь» высоты, на которой давление равно 300 мб, в метрах . . . . | 46   | 38    | 37   | 30    |

Кроме того, из табл. 2 видно, что положительная разность «день — ночь» высоты уровня, на котором давление равно 300 мб, мало изменяется от сезона к сезону. Сравнение табл. 1 и 2 показывает значительную роль перераспределения массы атмосферы ниже уровня с давлением 300 мб в изменении суточного эффекта от сезона к сезону.

3. Для того чтобы оценить полный вклад метеорологических изменений земной атмосферы в суточный эффект космических лучей, требуется круглосуточное многоразовое зондирование атмосферы, более частое, чем это пока производится метеорологами. Тем не менее из тщательного анализа Селезневой [7] многолетних аэрологических наблюдений в СССР известно, что суточный ход температуры выше 3 км имеет самостоятельный характер и растет с высотой. При этом основной максимум в ходе температуры наблюдается в 13—14 час. местного среднесолнечного времени. Поэтому, считая, что максимальная температура в среднем для всей тропосферы достигается в 14 час., можно предположить, что приведенные результаты вычисления метеорологического эффекта «день — ночь» отражают лишь около 70% этого эффекта, так как эти результаты относятся к моментам, отодвинутым на 3 часа от экстремальных значений температуры. Следовательно, величина возможного метеорологического эффекта должна быть в среднем равна около 0,6%. (предполагаемый суточный ход метеорологического эффекта  $\delta N$  показан пунктирной линией на рисунке). Отсюда, пользуясь наблюдаемым суточным ходом  $\delta I_h$ , получаем, что суточный эффект вариаций интенсивности жесткой компоненты космических лучей имеет неметеорологическое происхождение и характеризуется величиной порядка 1% (рисунок, кривая показана штрих-пунктиром).

4. В связи с указанным отметим, что изменение суточных колебаний метеорологических факторов по сезонам года может объяснить сезонное изменение суточного эффекта космических лучей. Известно [7], что наибольшие суточные колебания температуры тропосферы происходят летом, наименьшие — зимой.

Таким образом, если суточный ход метеорологического эффекта интенсивности космических лучей противоположен наблюдаемому, то следует ожидать, что наблюдаемый летом суточный эффект в интенсивности космических лучей будет наименьшим, а зимой — наибольшим. Это действительно имеет место, как видно из табл. 3, в которой приведены параметры первой гармоники, вычисленные из сезонных усреднений суточного хода интенсивности жесткой компоненты космических лучей  $\delta I_h$ .

Таблица 3

|                                   | Зима             | Весна            | Лето             | Осень            | Многолетнее      |
|-----------------------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| Амплитуда в % . . .               | $0,18 \pm 0,004$ | $0,15 \pm 0,004$ | $0,09 \pm 0,004$ | $0,12 \pm 0,005$ | $0,13 \pm 0,002$ |
| Время максимума в часах . . . . . | 13,9             | 13,9             | 13,4             | 13,3             | 13,4             |

Из этой таблицы видно, что наблюдаемый летом суточный эффект в два раза меньше зимнего, и это согласуется с возрастанием метеорологического суточного эффекта (табл. 1). Однако приведенные в табл. 3 данные противостоят работам Дюперье [1], который, регистрируя полную интенсивность космических лучей методом совпадений, обнаружил увеличение эффекта в летние месяцы и уменьшение в зимний период. Это противоречие, повидимому, объясняется тем, что в измерениях Дюперье вклад суточных колебаний метеорологических факторов в суточный эффект космических лучей был значительно больше, чем в наших, так как в работе [1] в среднем наблюдались более «мягкие» частицы. Поэтому наблюдаемые в [1] сезонные изменения величины суточного эффекта, возможно, являются прямым отражением изменения метеорологической части суточного эффекта космических лучей.

В заключение автор приносит благодарность проф. Е. Л. Фейнбергу и Ю. Г. Шаферу за ряд ценных указаний и советов. Автор также благодарен Г. В. Скрипину за помощь в вычислениях и обработке измерений.

Якутский филиал  
Академии наук СССР

Поступила в редакцию  
19 января 1954 г.

### Литература

- [1] A. Duperier. *Nature*, 158, 196, 1946. — [2] D. W. N. Dolbear a. H. El-Isot. *Journ. Atm. Terr. Phys.*, 1, 205, 1951. — [3] A. R. Hogg. *Memoirs of the Commonwealth Observatory, Canberra*, 10, 1, 1949. — [4] Е. Л. Фейнберг. *ДАН СССР*, 53, 421, 1946. — [5] Л. И. Дорман. *ДАН СССР*, 94, 433, 1954. — [6] А. Б. Калининский и Н. З. Пинус. *Аэрология, Гидрометеоздат, Л.*, 1951. — [7] Е. З. Селезнева. *Изв. АН СССР, сер. географ.*, 9, 82, 1945.

## ЯДЕРНЫЕ РАСЩЕПЛЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С ТЯЖЕЛЫМИ НЕСТАБИЛЬНЫМИ ЧАСТИЦАМИ

И. М. Граменицкий, Е. А. Замчалова, М. И. Подгорецкий,  
М. И. Третьякова и М. Н. Шербакова

1. При помощи метода толстослойных фотоэмульсий в настоящее время найдено свыше ста ядерных расщеплений, в которых образуются гипероны (заряженные гипероны  $Y^\pm$  и  $\Lambda^0$ -частицы) и тяжелые мезоны с массой  $\sim 1000 m_e$  ( $K$ - и  $\tau$ -мезоны). Обнаружено также около трех десятков вторичных ядерных расщеплений, вызванных ядерным захватом остановившихся отрицательных тяжелых мезонов.

В настоящей заметке дано краткое изложение некоторых результатов статистического анализа этих расщеплений. Полученные выводы следует пока рассматривать как вероятные гипотезы, нуждающиеся в дальнейшей проверке и более полном обосновании.

2. В таблице приведено среднее число серых и черных лучей  $N_h$  для звезд, содержащих заряженные гипероны,  $\Lambda^0$ -частицы (точнее возбужденные осколки [2]),  $K$ -мезоны и  $\tau$ -мезоны. Для сравнения приведены также данные по обычным звездам космических лучей, наблюдаемым в стратосфере [2].

| Тип звезды        | $Y^{\pm}$      | $\Lambda^0$    | $Y^{\pm} + \Lambda^0$ | $K$            | $\tau$         | Звезды набл. в стратосфере |
|-------------------|----------------|----------------|-----------------------|----------------|----------------|----------------------------|
| $\bar{N}_h \dots$ | $19,3 \pm 2,5$ | $18,8 \pm 1,9$ | $19,0 \pm 1,7$        | $18,0 \pm 1,8$ | $11,2 \pm 1,9$ | $12,3 \pm 0,9$             |

Для того чтобы обеспечить примерно одинаковое выделение энергии, во всех случаях были выбраны только те звезды, в которых число релятивистских частиц  $n_s$  удовлетворяло условию  $5 \leq n_s \leq 10$ .

Из таблицы видно, что в отношении величины  $\bar{N}_h$  условия генерации  $Y^{\pm}$  и  $\Lambda^0$ -частиц очень близки. Это согласуется с естественным предположением, что заряженные и нейтральные гипероны являются частицами одного типа. Точно так же совпадение  $\bar{N}_h$  для звезд, содержащих гипероны и  $K$ -мезоны, согласуется с гипотезой о парной генерации частиц [3,4]. С другой стороны, известны также случаи парной генерации гиперонов и  $\tau$ -мезонов [5,6]. Из табл. 1 следует, однако, что в данном случае механизм парной генерации не является определяющим. Действительно, если бы гипероны и  $\tau$ -мезоны возникали только парами, то звезды, содержащие эти частицы, должны были бы характеризоваться одинаковыми значениями  $\bar{N}_h$ .

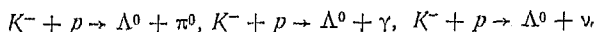
В настоящее время интенсивно обсуждается гипотеза, согласно которой  $K$ - и  $\tau$ -мезоны являются не различными частицами, а разными типами распада одной и той же частицы [3,7]. Если это так, то величины  $\bar{N}_h$  для звезд, содержащих  $K$ -мезоны и  $\tau$ -мезоны, должны быть одинаковыми. Резкое расхождение этого вывода с экспериментальными данными позволяет заключить, что  $K$ - и  $\tau$ -мезоны являются различными частицами.

3. Величина  $\bar{N}_h$  для обычных звезд совпадает с  $\bar{N}_h$  для звезд, содержащих  $\tau$ -мезоны, и резко отличается от  $\bar{N}_h$  для звезд, содержащих  $K$ -мезоны и гипероны. Это означает, что при ядерном расщеплении, осуществившемся на легком ядре фотоэмульсии, вероятность образования  $\tau$ -мезона примерно такая же, как и при расщеплении тяжелого ядра. Напротив,  $K$ -мезоны и гипероны образуются в основном на тяжелых ядрах эмульсии. В настоящее время нельзя еще дать однозначную интерпретацию этого факта. Интересно отметить, что качественно он вполне согласуется с гипотезой Поуэлла [3,4], предполагающего, что гипероны и  $K$ -мезоны образуются при ядерных взаимодействиях нуклонов в два этапа. Первый из них состоит в генерации ливня  $\pi$ -мезонов, взаимодействие которых с нуклонами того же ядра приводит на втором этапе к парному образованию гиперонов и  $K$ -мезонов.

4. При изучении звезд, образованных в результате захвата остановившихся отрицательных мезонов с массой  $\sim 1000m_e$ , которые мы условно называем  $K^-$ -мезонами, обращают на себя внимание следующие две особенности:

- а) образование  $\pi$ -мезонов с энергией  $\sim 30-40$  MeV;
- б) очень малое выделение энергии в значительной доле случаев.

Детальный анализ этих и некоторых других фактов приводит к заключению, что ядерный захват  $K^-$ -мезонов происходит с образованием  $\Lambda^0$ -частиц по следующим схемам:



При этом  $\Lambda^0$ -частица остается, как правило, связанной внутри ядра, образуя систему, подобную неподвижному возбужденному осколку. Далее явления протекают так же, как и в случае распада возбужденных осколков.

Не исключено также, что при захвате  $K^-$ -мезона образуется связанный заряженный гиперон, переходящий затем внутри ядра в  $\Lambda^0$ -частицу.

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
Академии наук СССР

Поступило в редакцию  
8 февраля 1955 г.

### Литература

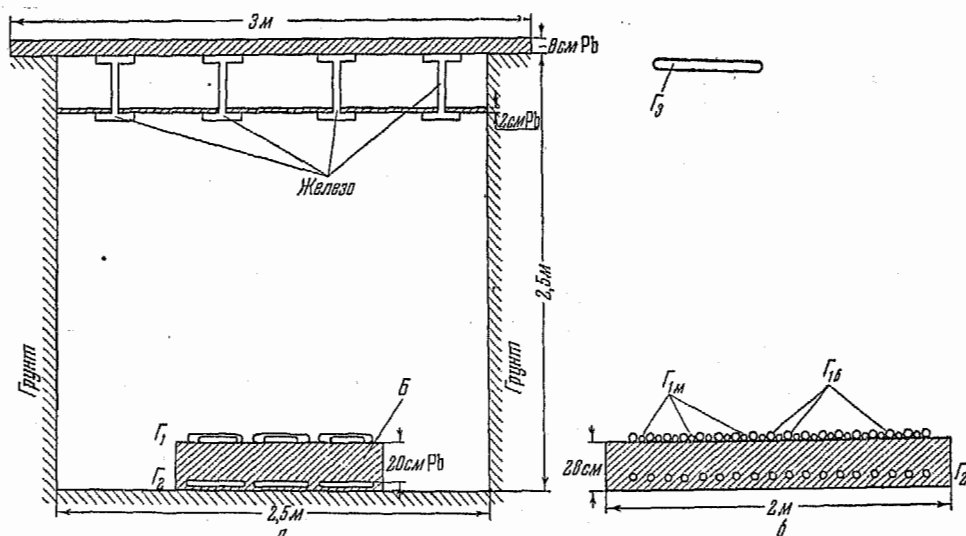
- [1] К. Ф. Поуэлл. Усп. физ. наук, 53, 449, 1954. — [2] К. Ф. Поуэлл, У. Камерпи и др. Усп. физ. наук, 40, 76, 1950. — [3] C. F. Powell. Nuovo Cim. Suppl., 11, 165, 1954. — [4] C. Castagnoli, G. Cortini, A. Manfredini. Nuovo Cim., 12, 464, 1954. — [5] D. Lal, J. Pal a. B. Peters. Phys. Rev., 92, 438, 1953. — [6] A. De Benedetti, C. M. Garelli, L. Tallone, C. M. Vigore. Nuovo Cim., 12, 466, 1954. — [7] L. Leprince-Ringuet a. B. Rossi. Phys. Rev., 92, 722, 1953.

# ИЗМЕРЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПОГЛОЩЕНИЯ ЯДЕРНО-АКТИВНЫХ ЧАСТИЦ ВЫСОКОЙ ЭНЕРГИИ

К. П. Рыжкова и Л. И. Сарычева

В настоящее время вопрос о механизме столкновения ядерно-активных частиц высокой энергии ( $10^{11}$ — $10^{12}$  eV) представляет существенный интерес. Данные об элементарном акте соударения частиц высоких энергий можно получить на основании изучения зависимости коэффициента поглощения таких частиц от их энергии [1]. Соответствующие измерения были проведены нами осенью 1952 г. на двух высотах — 3860 м (Памир) и на уровне моря (Москва) с одинаковыми годоскопическими установками.

Чтобы получить достаточный статистический материал для регистрации ядерно-



активных частиц высокой энергии, был использован детектор большой площади. Разрез его приведен на рисунке. Над прямоугольной ямой с площадью дна  $2,5 \times 2,5$  м<sup>2</sup> и глубиной 2,5 м, на досчатом настиле и железном перекрытии (общая толща материала  $\sim 7$  г/см<sup>2</sup>) располагался слой свинца, покрывавший площадь  $3 \times 2,5$  м<sup>2</sup> и имевший толщину 8 см. Под этим слоем свинца, на расстоянии 30 см от его нижней поверхности размещался еще один слой в 2 см свинца. Эти свинцовые фильтры поглощали электронно-фотонную компоненту космического излучения, падавшую на установку из атмосферы; в них ядерно-активными частицами образовывались электронно-ядерные ливни. На дне в середине ямы располагался свинцовый блок Б (см. на рисунке б) с площадью основания  $2 \times 1,2$  м<sup>2</sup>, на котором укладывались равномерно по всей площади три ряда счетчиков с площадью каждого счетчика 100 см<sup>2</sup> (54 счетчика, обозначенные  $G_{16}$ ) и 24 см<sup>2</sup> (54 счетчика, обозначенные  $G_{1M}$ ). Внутри этого свинцового блока в узких цилиндрических каналах располагались счетчики  $G_2$  с площадью 100 см<sup>2</sup>; их расположение было подобно расположению счетчиков  $G_{16}$ . Толщина слоя свинца между двумя соседними счетчиками была 4 см, над счетчиками 20 см, снизу — 4 см. На поверхности земли, на расстоянии 1 м от края свинца располагалась коробка  $G_3$  с 10 счетчиками, площадью 330 см<sup>2</sup> каждый. Все указанные счетчики были включены в годоскоп, собранный по схеме Кораблева [2].

Таким образом мы имели три существенно различные группы счетчиков  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$ . Счетчики группы  $G_1$  ( $G_{16}$  и  $G_{1M}$ ) служили для регистрации плотности электронной компоненты ливней, генерированных ядерно-активными частицами в свинце над ямой. Счетчики  $G_2$  регистрировали проникающие частицы в ливнях, а  $G_3$  давали сведения о прохождении широкого атмосферного ливня. Управление годоскопом производилось при срабатывании не менее трех счетчиков группы  $G_{16}$  и двух счетчиков группы  $G_2$ . Таким образом регистрировался ливень, состоящий, по крайней мере, из трех частиц, две из которых должны были быть проникающего типа.

Все зарегистрированные ливни разбивались на различные энергетические группы по числу проникающих и сильно поглощаемых частиц. В табл. 1 приведены результаты, относящиеся к отбору ливней по числу проникающих частиц. Ливни с большим числом проникающих частиц имели и большую плотность сильно поглощаемых частиц. Поэтому разбивка ливней по числу сильно поглощаемых частиц дала те же результаты, что и разбивка по числу проникающих частиц.

Если взять для показателя энергетического спектра ядерно-активных частиц, образующих регистрируемые ливни, значение  $\gamma = 1,6$ , то из данных табл. 1 следует, что

Таблица 1

| № энергетич. группы | Число сраб. счетчиков в группе $I_2$                | На уровне моря      |                     |                     | 3860 м              |                     |                     |
|---------------------|-----------------------------------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
|                     |                                                     | Время работы (часы) | Общее число случаев | Число случаев в час | Время работы (часы) | Общее число случаев | Число случаев в час |
| I                   | 2; 3                                                | 217,8               | 389                 | $1,79 \pm 0,09$     | 156,6               | 6823                | $43,57 \pm 0,53$    |
| II                  | 4; 5                                                |                     | 171                 | $0,79 \pm 0,06$     |                     | 3169                | $20,24 \pm 0,36$    |
| III                 | 6; 7                                                |                     | 102                 | $0,26 \pm 0,03$     |                     | 1061                | $6,78 \pm 0,21$     |
| IV                  | 8; 9                                                | 389,6               | 26                  | $0,067 \pm 0,013$   |                     | 327                 | $2,09 \pm 0,12$     |
| V                   | $\geq 10$                                           |                     | 18                  | $0,049 \pm 0,011$   |                     | 289                 | $1,72 \pm 0,11$     |
| VI                  | $\geq 10 +$<br>$+ \geq 20 \text{ в } I_{1\text{м}}$ |                     | 10                  | $0,026 \pm 0,009$   |                     | 153                 | $0,977 \pm 0,08$    |

отношение числа зарегистрированных случаев, относящихся к крайним энергетическим группам, соответствует, по крайней мере, десятикратной разнице в энергии частиц, генерировавших эти ливни.

Абсолютное значение энергий частиц, генерировавших ливни, оценивалось двумя независимыми способами: 1) по экстраполяции числа ядерно-активных частиц от высоты 3860 м к границе атмосферы и сравнению с интенсивностью первичной компоненты космического излучения и 2) по числу сильно-поглощаемых частиц, повидимому, электронов, в электронно-ядерных ливнях. Оба способа дали одинаковое по порядку величины значение энергии генерирующих частиц. Так мы получили, что ядерно-активные частицы, генерирующие электронно-ядерные ливни, отнесенные нами к крайним энергетическим группам, имеют энергию  $E_I \sim 10^{11}$  эВ и  $E_V \sim 10^{12}$  эВ соответственно.

Предполагая, что поток ядерно-активных частиц поглощается с глубиной  $x$  в атмосфере по закону  $I_2 = I_1 \exp\{-x/\lambda_{\text{эксп}}\}$ , по данным табл. 1 мы определили средний пробег для поглощения этих частиц  $\lambda_{\text{эксп}} = x/\ln(I_1/I_2)$ , где  $I_1$  — интенсивность на высоте 3860 м,  $I_2$  — на уровне моря, а  $x$  — толщина слоя воздуха в г/см<sup>2</sup> между этими высотами. Результаты приведены в табл. 2.

Таблица 2

| № энерг. группы               | I           | II          | III         | IV          | V           | VI           |
|-------------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|--------------|
| $\lambda_{\text{эксп}}$ . . . | $115 \pm 2$ | $113 \pm 3$ | $113 \pm 3$ | $107 \pm 6$ | $109 \pm 7$ | $100 \pm 9$  |
| $\lambda_1$ . . .             | $131 \pm 3$ | $128 \pm 4$ | $128 \pm 4$ | $120 \pm 7$ | $116 \pm 9$ | $112 \pm 11$ |

Во второй строке табл. 2 приведены значения среднего свободного пробега для поглощения ядерно-активных частиц, идущих по вертикали, с учетом неглобальности установки. Полученные нами значения среднего свободного пробега поглощения в воздухе ядерно-активных частиц энергии  $10^{12}$  эВ хорошо согласуются с данными работы [3], в которой для частиц такой же энергии в верхней половине атмосферы было получено  $\lambda \sim 120$  г/см<sup>2</sup>.

Из совокупности наших данных и данных других авторов видно, что средний пробег поглощения для потока ядерно-активных частиц в интервале энергий  $10^{10}$ — $10^{12}$  эВ изменяется незначительно, примерно в два раза превышая величину пробега взаимодействия, соответствующую геометрическому сечению ядра для частиц этих энергий. Используя полученное в работе [4] соотношение  $\lambda_0 = \lambda(1 - \Delta)$ , где  $\lambda_0$  — средний свободный пробег для взаимодействия ядерно-активных частиц, а  $\Delta$  — эффективное число вторичных ядерно-активных частиц, можно сделать вывод о том, что при столкновении нуклонов с атомными ядрами легких элементов энергия налетающего нуклона распределяется неравномерно между вторичными нуклонами. Механизм столкновения таков, что, повидимому, более половины всей энергии концентрируется на одной из частиц.

Авторы выражают благодарность Г. Т. Зацепину, предложившему провести описанные измерения, Н. А. Добротину, внесшему ряд ценных замечаний, и С. А. Азимову за проявленный интерес к работе.

В работе принимали участие студенты-дипломники В. Гужавин, В. Гусынин, Р. Каримов, Р. Надыршин, М. Овсянкин и А. Прокошев.

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
Академии наук СССР

Поступило в редакцию  
5 февраля 1955 г.

#### Литература

- [1] Г. Т. Зацепин. ЖЭТФ, 49, 1104, 1949. — [2] Л. Н. Кораблев. ДАН СССР, 69, 643, 1949. — [3] M. F. Kaplan, J. Z. Kioze, D. M. Ritson a. W. D. Walker. Phys. Rev., 91, 1573, 1953.

К ВОПРОСУ О РАСПАДЕ МЕДЛЕННЫХ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ  $\pi$ -МЕЗОНОВ

В. И. Гольданский и М. И. Подгорецкий

1. В работе [1] сообщается, что при облучении фотоэмульсии медленными отрицательными  $\pi$ -мезонами на 40000 окончаний следов  $\pi^-$ -мезонов наблюдалось 18 случаев  $\pi\mu$ -распада. Приводятся убедительные аргументы, свидетельствующие о том, что речь идет о распаде  $\pi^-$ -мезонов, а не о каком-либо сопутствующем фоновом явлении. Характерной чертой наблюдавшегося в [1] явления было наличие заметного разброса энергий  $\mu$ -мезонов от  $\pi\mu$ -распада ( $\delta E_\mu \approx 0,5$  MeV), доказывающее движение  $\pi$ -мезонов в момент их  $\pi\mu$ -распада. Оценка кинетической энергии  $\pi$ -мезонов, произведенная в [1], дает величину в несколько десятков keV. В силу крайней малости времени замедления таких  $\pi$ -мезонов ( $\sim 10^{-13}$  сек.) автор [1] заключает, что наблюдавшиеся акты  $\pi\mu$ -распада происходили не «на лету», а после образования мезоатомов. Если это заключение правильно, то из него следуют весьма интересные выводы, на которые мы хотим обратить внимание в настоящей заметке.

2. Энергетическое распределение  $\mu$ -мезонов, образующихся при распаде  $\pi^-$ -мезонов, входящих в состав мезоатомов, может быть с достаточной точностью вычислено методом, аналогичным использованному в [2]. Это распределение для  $K$ -оболочек легких ядер, входящих в состав эмульсии (C, N, O), в пределах статистических ошибок, согласуется с результатами эксперимента. Нельзя исключить вместе с тем, что  $\pi$ -мезон распадается, находясь на  $L$ - или  $M$ -оболочках этих ядер. Однако, находясь на этих оболочках,  $\pi$ -мезон должен был бы переходить радиационным образом на  $K$ -оболочку. Длительность радиационного перехода на  $K$ -оболочку даже для  $N$ -оболочки C, N, O не превышает  $\sim 10^{-13}$  сек. Вероятность  $\pi\mu$ -распада за это время составляет всего  $5 \cdot 10^{-6}$ . Если считать, что распад  $\pi$ -мезонов происходит из мезоатомов тяжелых компонент эмульсии (Ag, Br), то наблюдаемый разброс энергий  $\mu$ -мезонов отвечает распаду  $\mu$ -мезонов на оболочках с главным квантовым числом  $n = 10 - 15$ . Простые оценки показывают, что и в этом случае длительность радиационных переходов на  $K$ -оболочку не превышает  $\sim 10^{-13}$  сек. Следует заключить, что  $\pi\mu$ -распад отрицательных  $\pi$ -мезонов, наблюдаемый в [1], происходил на  $K$ -оболочке, причем, как это явствует из отмеченного разброса энергии  $\mu$ -мезонов, на  $K$ -оболочке мезоатомов легких ядер (C, N, O).

3. Такой вывод резко противоречит современным представлениям о свойствах  $\pi$ -мезонов. Поскольку из числа  $\pi$ -мезонов, останавливающихся в фотоэмульсии, около половины захватывается кулоновским полем легких ядер, то из [1] следует, что вероятность распада  $\pi$ -мезона составляет  $\sim 10^{-3}$ . Исходя из общепринятого значения времени жизни  $\pi$ -мезона ( $\sim 10^{-8}$  сек.), получаем отсюда для времени жизни по отношению к ядерному захвату  $\pi$ -мезона с  $K$ -оболочки легких ядер величину  $\tau \sim 10^{-11}$  сек. Между тем теоретические оценки  $\tau$  даже для водорода и дейтерия дают  $\sim 10^{-15} - 10^{-16}$  сек. (см., например, [3]), а для C, N, O можно ожидать уменьшения  $\tau$  еще на несколько порядков [4,5].

Таким образом представляется весьма интересной задача проверки и уточнения результатов [1], с тем чтобы выяснить, не объясняется ли констатированное выше противоречие некорректностью опытных данных.

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
Академии наук СССР

Поступило в редакцию  
22 января 1955 г.

*Примечание при корректуре.* В самое последнее время появились работы (M. Steaggs и др., Phys. Rev., 96, 804, 1954 и 97, 240, 1955), в которых обнаружен сдвиг  $K$ -уровней  $\pi$ -мезонов в легких мезоатомах, свидетельствующий о наличии некоторого эффективного отталкивания  $\pi$ -мезонов ядрами. Не исключена связь между этим фактом и результатами работы [1].

## Литература

- [1] W. Fry and R. George, Phys. Rev., 93, 1427, 1954. — [2] М. И. Подгорецкий и И. Л. Розенталь, ЖЭТФ, 27, 129, 1954. — [3] R. F. Marshak, Rev. Mod. Phys., 23, 137, 1951. — [4] K. Aidzu, Y. Fujimoto, H. Fukuda, S. Hayakawa, K. Takayanagi, G. Takeda, Y. Yamaguchi, Progr. Theor. Phys., 5, 931, 1950. — [5] J. Wheeler, Rev. Mod. Phys., 21, 133, 1949.

# СЦИНТИЛЛЯЦИОННЫЙ ВЫСОКОПОРОГОВЫЙ ДЕТЕКТОР НЕЙТРОНОВ

П. С. Баранов и В. И. Гольданский

Большинство существующих в настоящее время способов регистрации нейтронов высокой энергии (пороговые детекторы, активирующиеся такими нейтронами, ионизационные осколочные камеры деления, наблюдение протонов отдачи) характеризуется весьма малой эффективностью — порядка  $10^{-4}$  —  $10^{-3}$ . Лишь в последние годы начали применяться жидкостные сцинтилляционные счетчики большого объема, позволяющие регистрировать нейтроны по протонам отдачи с эффективностью до 10%. Однако такие счетчики обладают достаточно высокой чувствительностью к постороннему фону (например, фону  $\gamma$ -квантов), методика их использования и, особенно, обработка получаемых результатов довольно сложны. В связи с этим представляется интересной задача осуществления простого и достаточно эффективного детектора нейтронов высокой энергии. В основу работы такого детектора может быть положена реакция  $C^{12}(n, 2n)C^{11}$  с порогом 20,2 MeV, в результате которой образуется позитронно-актив-

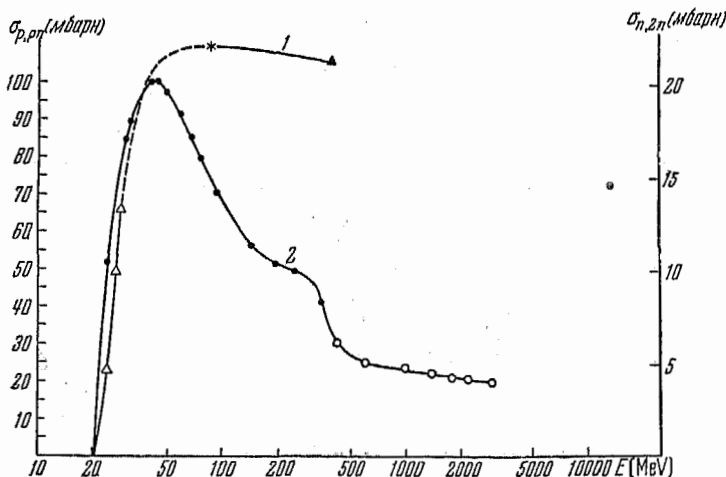


Рис. 1. 1 —  $C^{12}(n, 2n)C^{11}$ ; 2 —  $C^{12}(p, pn)C^{11}$ ; по данным: ★ — [1], ▲ — [2], △ — [3], ● — [4], ○ — [5]

ный изотоп  $C^{11}$ , с периодом полураспада 20,5 мин. и максимальной энергией  $\beta^+$ -спектра около 1 MeV. При использовании для наблюдения этой реакции обычных графитовых детекторов, активация которых регистрируется при помощи счетчиков Гейгера, эффективно работающая толщина детектора ограничивается пробегом позитронов распада  $C^{11}$  в графите, близком к 300  $\mu$ . Если же активировать нейтронами высокой энергии углерод, находящийся в составе органических люминофоров, и регистрировать распад  $C^{11}$  по последующим световым вспышкам в люминофоре, то оказывается возможным увеличить эффективно работающую толщину детектора в десятки и сотни раз. Реакцию  $C^{12}(n, 2n)C^{11}$  целесообразно положить в основу работы детектора нейтронов высокой энергии еще и по той причине, что сечение этой реакции остается практически постоянным в интервале энергии нейтронов от 90 MeV ( $22 \cdot 10^{-27}$  см<sup>2</sup> [1]) до 380 MeV ( $21,4 \cdot 10^{-27}$  см<sup>2</sup> [2]). На рис. 1 представлена функция возбуждения реакции  $C^{12}(n, 2n)C^{11}$  (по данным работ [1–5]) и близкой ей по механизму реакции  $C^{12}(p, pn)C^{11}$  — до энергии протонов 3 BeV (по данным работ [4, 5]). Из рис. 1 очевидно, что при помощи детекторов, регистрирующих позитроны распада  $C^{11}$ , можно с почти одинаковой эффективностью исследовать нейтроны или протоны в чрезвычайно широком интервале энергии.

В литературе имелось указание [6] на использование сцинтилляционного детектора (антрацена), в котором регистрировались вспышки от позитронов распада  $C^{11}$ , однако никаких конкретных описаний методики не приводилось. Между тем, применимость органических кристаллов для наблюдений распада  $C^{11}$  сама по себе очевидна, и главная трудность практического ее осуществления связана с необходимостью сведения к минимуму всякого постороннего фона. Поскольку большая часть позитронов распада  $C^{11}$  обладает энергиями порядка сотен keV, существенная помеха возникает от шумов фотоэлектронного умножителя (ФЭУ). Из двух наиболее распространенных способов уменьшения шумов ФЭУ — сильного охлаждения умножителя или использования схем совпадений, регистрирующих шумы только как случайные совпадения, — мы выбрали последний как более простой и действенный.

Блок-схема использованной установки изображена на рис. 2. Кристаллы люминофора (стильбена или толана) в виде цилиндров диаметром 35 мм и толщиной 17–20 мм (весом 18–24 г) располагались между двумя фотоумножителями системы ФЭУ-19, вплотную к их фотокатодам. Импульсы с выхода фотоумножителей ( $RC \approx 6 \cdot 10^{-8}$  сек.) проходили через катодный повторитель, формировались короткозамкнутой линией и подавались на элемент отбора совпадений. Разрешающее время схемы совпадений  $\tau \approx 1,6 \cdot 10^{-8}$  сек. в условиях, когда эффективность регистрации позитронов распада  $C^{11}$  для толана составляла  $\sim 50\%$ . Абсолютная эффективность регистрации распада  $C^{11}$  определялась сравнением активности кристалла с активностью облученного в одинаковых условиях стандартного графитового детектора, для которого в независимых опытах было определено отношение эффективно работающей и полной массы, т. е. счетность.

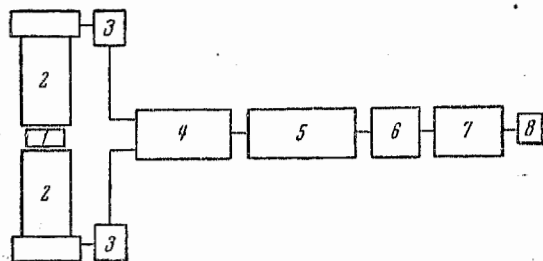


Рис. 2. Блок-схема установки. 1 — кристалл; 2 — ФЭУ-19; 3 — катодный повторитель; 4 — элемент отбора совпадений; 5 — усилитель; 6 — дискриминатор; 7 — пересчетный блок; 8 — механический счетчик

энергии, равному  $\Pi = 20$  нейтрон./см<sup>2</sup> сек., отвечает при 20-минутном облучении активность толанового кристалла, равная  $\sim 0,1$  сек.<sup>-1</sup>. Вопрос о точности регистрации столь малых потоков нейтронов высокой энергии, примерно отвечающих толрантной дозе таких нейтронов, решается в зависимости от величины фона. Фон от случайных совпадений шумовых импульсов в условиях наших опытов был пренебрежимо мал ( $\sim 0,005$  сек.<sup>-1</sup>) и предполагалось, что главный вклад в фон дают космическое излучение и радиоактивные загрязнения ( $\sim 0,7$  сек.<sup>-1</sup>). Фон, связанный с космическим излучением, по крайней мере частично, может быть устранен при расположении над сцинтилляционным детектором крыши из гейгеровских трубок, включаемых на анти-совпадения. Опыты показали, однако, наличие фона и другого происхождения, примерно равного тоже  $0,7$  сек.<sup>-1</sup> при напряжениях питания на ФЭУ  $\sim 1500$  В и резко возраставшего при увеличении напряжения питания. В то время как фон космического и радиоактивного происхождения устранялся при удалении сцинтиллятора, добавочный фон при этом, наоборот, возрастал.

Этот добавочный фон полностью устранялся при размещении между фотокатодами двух ФЭУ любого тонкого непрозрачного экрана (алюминиевой фольги, черной бумаги). Таким образом было установлено наличие фона совпадений от «оптической связи» между двумя ФЭУ. При использовании фотоумножителей системы ФЭУ-19-П (с «перетяжкой») эффект «оптической связи» проявлялся лишь в очень незначительной степени даже при напряжениях питания умножителей, обеспечивавших почти 100% эффективность регистрации позитронов распада  $C^{11}$ .

В приведенных выше условиях опытов, при потоке нейтронов  $\Pi = 20$  нейтрон./см<sup>2</sup>сек., эффективным количестве работающего в люминофоре углерода 10 г и при фоновой скорости счета  $\sim 1,4$  сек.<sup>-1</sup> (т. е. без усовершенствований, направленных на устранение космического фона и «оптической связи» ФЭУ) указанное выше значение потока нейтронов высокой энергии может быть определено (при 20-минутной экспозиции кристалла и оптимальном времени наблюдения распада  $C^{11}$ , равном в этом случае  $\sim 38$  мин.) с точностью до 45%. Таким образом, даже без дополнительных усовершенствований описанный детектор может быть использован как дозиметр нейтронов высокой энергии. Мы применили этот детектор для наблюдений выхода и углового распределения фотонейтронов высокой энергии из различных ядер. В общем случае точность измерения потока нейтронов высокой энергии  $\Pi$  при помощи кристалла, в котором эффективно работает  $N_{\text{эфф}}$  ядер углерода, определяется соотношением

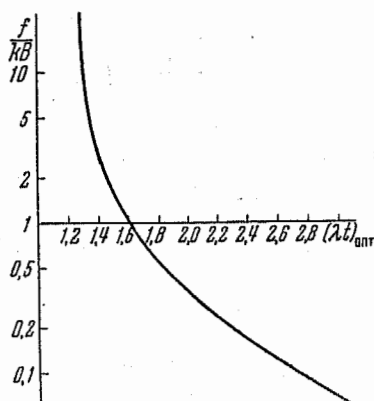


Рис. 3. Кривая для определения оптимальной длительности наблюдения распада  $C^{11}$

$$\delta = \sqrt{ft + A(1 - e^{-\lambda t})} / A(1 - e^{-\lambda t}),$$

где  $f(\text{сек}^{-1})$  — фоновая скорость счета,  $\lambda$  — константа распада  $C^{11}$ ,  $t$  — длительность измерения этого распада,

$$A = \frac{k}{\lambda} B = \frac{k}{\lambda} (1 - e^{-\lambda t}), \quad k = \pi N_{\text{эф}} \sigma_{n,2n} e^{-\lambda t},$$

причем  $\tau$  — длительность экспозиции, а  $T$  — интервал времени от окончания экспозиции до начала регистрации распада  $C^{11}$ . При каждом данном соотношении  $f/kB$  существует оптимальная длительность наблюдения распада  $C^{11}$ , для определения которой приведена кривая на рис. 3.

Детектор нейтронов высокой энергии по реакции  $C^{12}(n,2n)C^{11}$  чувствителен к фону  $\gamma$ -квантов лишь в сравнительно узкой области дипольного «резонанса» (вблизи 22 MeV) фотоядерной реакции  $C^{12}(\gamma n)C^{11}$ , интегральное сечение которой по всей резонансной области (шириной около 10 MeV) составляет около 0,05 MeV барн [7].

Авторы выражают искреннюю благодарность А. В. Куценко и Т. И. Ковалевой за ценную помощь в изготовлении аппаратуры для настоящей работы.

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
Академии наук СССР

Поступило в редакцию  
25 января 1955 г.

### Литература

- [1] E. McMillan and H. York. Phys. Rev., 73, 262, 1948.— [2] К. О. Оганесян. Отчет Ин-та ядерн. проблем АН СССР, 1953.— [3] J. Broilley, J. Fowler and L. Schlacks. Phys. Rev., 88, 618, 1952.— [4] R. Aamodt, V. Petersen and P. Phillips. Phys. Rev., 88, 739, 1952.— [5] R. Wolfgang and G. Friedlander. Phys. Rev., 96, 190, 1954.— [6] J. Sharpe and G. Stafford. Proc. Phys. Soc., A 64, 241, 1951.— [7] A. Cameron. Phys. Rev., 82, 270, 1951.

## МАКСИМАЛЬНЫЙ ВЫХОД ФОТОНЕЙТРОНОВ И НОВЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СЕЧЕНИЙ $\gamma n$ -РЕАКЦИЙ ДЛЯ ФОТОНОВ ВЫСОКОЙ ЭНЕРГИИ

В. И. Гольданский и В. А. Шкода-Ульянов

Благодаря использованию новых систем электронных ускорителей — бетатронов и синхротронов — за последние годы удалось исследовать широкий круг фотоядерных реакций, происходящих под действием жесткого тормозного излучения. При этом было установлено, что зависимость сечений ряда фотоядерных процессов от энергии фотонов характеризуется наличием максимума при энергии 10—25 MeV и быстрым спадом по обеим сторонам этого максимума.

Своеобразный резонансный характер функций возбуждения фотоядерных реакций связан с возбуждением в резонансной области дипольных ядерных колебаний, теория которых была впервые дана Мигдалом [1].

Среди фотоядерных реакций, обладающих дипольным резонансом, широко исследовались реакции образования фотонейтронов. На опыте определялись следующие характеристики фотоядерных реакций: пороговая энергия  $\gamma$ -квантов  $E_n$ , резонансная энергия, отвечающая максимальному сечению  $E_p$ , полуширина резонансного пика

$\Delta E$ , максимальное сечение реакции  $\sigma_p$  и интегральное сечение  $\int \sigma(E) dE = \sigma_{\text{инт}}$ . В большинстве работ, посвященных образованию фотонейтронов, все эти характеристики определялись для отдельных реакций типа  $(\gamma n)$ ,  $(\gamma, pn)$ ,  $(\gamma, 2n)$ , идентифицировавшихся по образованию тех или иных радиоактивных изотопов. Гораздо меньше было таких работ, в которых при помощи нейтронных детекторов, например ВФ<sub>3</sub>-счетчика или Rh-фольги в парафине, регистрировались все нейтроны, испускавшиеся исследуемыми элементами (рефераты или переводы работ по образованию фотонейтронов см. в [2] и [3]). При этом выходы фотонейтронов в отдельных  $\gamma n$ -реакциях оказались близки к общему выходу фотонейтронов для данного изотопа, из чего можно заключить, что основным источником образования фотонейтронов даже при высокой максимальной энергии тормозного излучения (320 MeV) служат простые  $\gamma n$ -реакции.

Как правило, в фотонейтронных исследованиях в качестве источников фотонейтронов применялись тонкие образцы, в которых отсутствовало электронно-фотонное размножение исходных  $\gamma$ -квантов. В нашей работе была поставлена другая цель — определение выхода фотонейтронов в условиях целиком развившегося электронно-фотонного каскада, т. е. определение максимального коэффициента преобразования фотонов в нейтроны. Такие измерения дают одновременно возможность определения интегральных сечений реакций образования фотонейтронов, ибо из каскадной теории [4] известен вид равновесного, т. е. проинтегрированного по глу-

бине спектра фотонов каскада, образованного первичным  $\gamma$ -квантом с безразмерной энергией  $\epsilon_0$  (где  $\epsilon_0 = 2,29 E/\beta$ , а  $\beta$  — критическая энергия для данного вещества):

$$\Gamma_{\Gamma}(\epsilon_0, \epsilon) = (1/\beta\mu(\epsilon)) [\chi(\epsilon_0, \epsilon) \epsilon_0/\epsilon + 2,29\delta(\epsilon_0 - \epsilon)].$$

Здесь

$$\chi(\epsilon_0, \epsilon) = \epsilon e^{\epsilon} \int_{\epsilon}^{\epsilon_0} e^{-x} \frac{dx}{x^2} - \frac{\epsilon}{\epsilon_0^2} [1 - e^{-(\epsilon_0 - \epsilon)}],$$

а безразмерное сечение поглощения  $\gamma$ -квантов

$$\mu(\epsilon) = \sigma(E) Nt,$$

где  $N$  — плотность вещества (в числе ядер в  $1 \text{ см}^3$ ), а  $t$  — длина лавинной единицы (в сантиметрах).

Очевидно, что максимальный выход фотонейтронов из бесконечной массы вещества

$$Q_{\text{макс}} = \int_{E_1}^{E_2} \frac{\sigma_{\gamma n}(E) dE}{Nt} \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_m} \Gamma_{\Gamma} \frac{d\epsilon_0}{\epsilon_0},$$

где  $E_1$  и  $E_2$  — нижняя и верхняя границы резонансной области,  $\sigma_{\gamma n}$  — сечение фотоядерной реакции с образованием фотонейтрона, а исходный спектр тормозного излучения принимается вида  $f(\epsilon) = a/\epsilon$  (заметим, что при пересчете на равновесный спектр это приближение дает меньшую неточность, чем при прямом определении сечений в расчете на спектр такого вида).

Первое интегрирование приводит к результату:

$$Q_{\text{макс}} = a \int_{E_1}^{E_2} \frac{\sigma_{\gamma n}(E) dE}{\sigma_{\text{полг}}(E) E} \left[ 1 + \frac{I(\epsilon)}{2,29} \right],$$

где

$$I(\epsilon) = \epsilon_m + \frac{\epsilon}{\epsilon_m} - \epsilon \left( 1 + \frac{1}{\epsilon_m} \right) \exp[-(\epsilon_m - \epsilon)] + \epsilon e^{\epsilon} (\epsilon_m + 2) [\text{Ei}(-\epsilon) - \text{Ei}(-\epsilon_m)].$$

Считая резонансную область узкой, мы выносим за интеграл знаменатель  $\bar{\sigma}_{\text{полг}}(E)E_p$  и множитель  $1 + [I(\epsilon_p)/2,29]$ , причем в случае  $\epsilon_p \ll \epsilon_m$ :

$$I(\epsilon_p) \approx \epsilon_m + \epsilon_p e^{\epsilon_p} (\epsilon_m + 2) \text{Ei}(-\epsilon_p).$$

Тогда

$$Q_{\text{макс}} \approx \frac{a}{\bar{\sigma}_{\text{полг}} E_p} \left[ 1 + \frac{I(\epsilon_p)}{2,29} \right] \int_{E_1}^{E_2} \sigma_{\gamma n}(E) dE = \frac{a \sigma_{\text{итт}}}{E_p \bar{\sigma}_{\text{полг}}} \left[ 1 + \frac{I(\epsilon_p)}{2,29} \right].$$

Опыты по определению максимального выхода фотонейтронов и интегральных  $\gamma$ -сечений производились в июне — июле 1951 г. Пучок фотонов тормозного излучения с максимальной энергией 250 MeV пропусклся сквозь канал  $10,5 \times 10,5$  см в парафиновом блоке размером  $70 \times 70 \times 70$  см. В центре блока размещались источники фотонейтронов — кубики из Fe и Cu размером  $10 \times 10 \times 10$  см и образцы Pb и U с площадью  $10 \times 10 \text{ см}^2$  и различной толщины. Поток  $\gamma$ -квантов определялся при помощи камеры-интегратора, все данные приводились к стандартному потоку, соответствующему  $a = 6,5 \cdot 10^9 \text{ сек}^{-1}$ . Выход фотонейтронов определялся при помощи индиевых детекторов, обернутых в кадмий и регистрировавших нейтроны вблизи резонансной для реакции  $\text{In}^{115}(\gamma\gamma)\text{In}^{116}$  энергии (1,44 eV). Градуировка выхода нейтронов производилась по сопоставлению площади под кривой замедления с результатами для стандартного Ra — Be источника ( $Q = 1,2 \cdot 10^7 \text{ сек}^{-1}$ ), помещавшегося в тех же условиях.

Исследование кривой замедления позволило определить также возраст замедленных до резонансной для In энергии фотонейтронов и сравнить его с возрастом замедленных до этой энергии Ra — Be-нейтронов, определенных в тех же условиях при наличии сквозного канала в парафиновом блоке и свинцовой обкладки вокруг)

Ra — Be источника, так что размеры и материалы нейтронных источников были одинаковыми). Зная возраст нейтронов, мы могли оценить и среднюю энергию фотонейтронов  $\bar{E}_n$ . Кроме основных опытов, проводились измерения фона активации индия при отсутствии блоков — источников фотонейтронов. Вплоть до расстояний в 30—40 см от оси пучка фон составлял величину порядка 5% от активации фотонейтронами из свинца при  $(Q_n)_{\text{макс}}$  и не превышал 20% (опыты с Fe). Точность определения  $Q_n$  мы оцениваем в  $\pm 10\%$  (для Pb и U) и  $\pm 20\%$  (для Fe и Cu). Точность определения интегральных сечений зависит еще от точности определения абсолютной интенсивности пучка фотонов, оцениваемой в  $\pm 10\%$ . Для проверки того, не регистрируются ли наряду с фотонейтронами еще и рассеянные посторонние нейтроны, сопоставлялся выход нейтронов от чистого углерода и углерода в парафине. Выход оказался одинаковым в пределах ошибок измерений, что демонстрирует отсутствие рассеяния посторонних нейтронов. Результаты опытов приводятся в таблице.

| Источник нейтронов            | $Q_n \text{ сек}^{-1}$             | $\tau_n \text{ (см}^2\text{)}$ | $E_p \text{ MeV}$ | $\bar{\sigma}_{\text{погл}} \text{ (барн)}$ | $\sigma_{\text{инт}} \text{ (MeV} \cdot \text{барн)}$ | $\bar{E}_n \text{ (MeV)}$ |
|-------------------------------|------------------------------------|--------------------------------|-------------------|---------------------------------------------|-------------------------------------------------------|---------------------------|
| Ra — Be . . . . .             | $1,2 \cdot 10^7$                   | $\sim 64$                      |                   |                                             |                                                       | $\sim 4$                  |
| Fe . . . . .                  | $2,4 \cdot 10^8$                   | $\sim 40$                      | 18,4              | 3,0                                         | (1,3)                                                 | $\sim 2,1$                |
| Cu . . . . .                  | $4,4 \cdot 10^8$                   | $\sim 40$                      | 18                | 3,5                                         | (2,1)                                                 | $\sim 2,1$                |
| Pb (толщина в 1 см) . . . . . | $2,10^8$                           | $\sim 35$                      | 12,2              | 18,3                                        |                                                       | $\sim 1,9$                |
| Pb (2 см) . . . . .           | $3,3 \cdot 10^8$                   |                                |                   |                                             |                                                       |                           |
| Pb (6 ») . . . . .            | $7,3 \cdot 10^8$                   |                                |                   |                                             |                                                       |                           |
| Pb (8 ») . . . . .            | $8,7 \cdot 10^8$                   |                                |                   |                                             |                                                       |                           |
| Pb (10 ») . . . . .           | $10^9$                             |                                |                   |                                             |                                                       |                           |
| Pb (19 ») . . . . .           | $10^9 = Q_{\text{макс}}$           |                                |                   |                                             | 5,2                                                   |                           |
| U* (2 см) . . . . .           | $7,3 \cdot 10^8$                   | $\sim 30$                      | 11,3              | 21,4                                        |                                                       | $\sim 1,7$                |
| U (4 ») . . . . .             | $1,1 \cdot 10^9$                   |                                |                   |                                             |                                                       |                           |
| U (8 ») . . . . .             | $1,5 \cdot 10^9$                   |                                |                   |                                             |                                                       |                           |
| U (12 ») . . . . .            | $1,6 \cdot 10^9 = Q_{\text{макс}}$ |                                |                   |                                             | 8,2                                                   |                           |

\* Выходы нейтронов из U исправлены на вторичное деление фотонейтронами.

По максимальному выходу фотонейтронов из свинца и урана определены интегральные сечения для этих элементов, согласующиеся с другими литературными данными [2,3].

Такое согласие свидетельствует о применимости предлагаемого метода определения интегральных сечений. Полагая для урана  $(\sigma_{\gamma n})_{\text{инт}} = 92/82(\sigma_{\gamma n_{\text{Pb}}})_{\text{инт}}$ , находим для фотodelения урана при  $\nu_n = 2,5$  величину  $(\sigma_{\text{дел}})_{\text{инт}} = \frac{8,2-5,8}{2,5} \approx 1 \text{ MeV} \cdot \text{барн}$ .

Максимальный коэффициент преобразования фотонов тормозного излучения с энергией от порога  $\gamma n$ -реакции для свинца ( $\sim 6 \text{ MeV}$ ) до  $250 \text{ MeV}$  в фотонейтроны называется равным

$$\alpha_{\gamma n} = Q_{\text{макс}} / \int_{E_1}^{250 \text{ MeV}} \frac{a}{E} dE \approx 0,04.$$

Для Fe и Cu максимальные выходы фотонейтронов не были определены, ибо в геометрических условиях наших опытов требовалось приближение источника к точечному, а при размерах блоков  $10 \times 10 \times 10 \text{ см}$  только в случае самых тяжелых ядер электронно-фотонный каскад полностью развивался, и выход нейтронов достигал предельных значений. Приближенная оценка максимального выхода фотонейтронов для Fe и Cu, для которых резонансная энергия  $\gamma n$ -реакций, как и для Pb и U, лежит не ниже критической энергии, может быть сделана в предположении, что отношение  $Q_n/Q_{\text{макс}}$  одинаково зависит для всех перечисленных элементов от толщины блока в  $t$ -единицах. Такая оценка дает интегральные сечения  $1,3 \text{ MeV} \cdot \text{барн}$  для железа и  $2,1 \text{ MeV} \cdot \text{барн}$  для меди.

Измерения выхода фотонейтронов проводились также и для легких ядер (C, Al), однако в кубиках толщиной 10 см в случае этих веществ электронно-фотонный каскад еще не успевал развиться в полной мере, и для обработки данных поэтому требуется привлечение более сложных расчетов каскадной теории, изложение которых выходит за рамки настоящего сообщения.

Метод определения интегральных  $\gamma$ -сечений и максимальных выходов фотонейтронов при помощи простых расчетов для равновесного лавинного спектра пригоден, конечно, и для легких ядер, но в этом случае следует использовать блоки больших размеров, определяя число фотонейтронов уже не по кривым замедления, а путем прямой регистрации фотонейтронов, испускаемых под разными углами, при помощи всеволнового борного счетчика нейтронов или камеры деления  $U^{235}$ .

Заметим в заключение, что определение максимального выхода фотонейтронов при развитии лавны от фотонов высокой энергии представляет интерес для учета возможного преобразования электронно-фотонной компоненты космических лучей в нуклоны.

Физический институт им. П. Н. Лебедева  
Академии наук СССР  
Институт химической физики  
Академии наук СССР

Поступило в редакцию  
25 января 1955 г.

### Литература

[1] А. Б. Мигдал. ЖЭТФ, 15, 81, 1945.— [2] Проблемы современной физики. 8, Фотоны большой энергии и фотоядерные реакции, 1952.— [3] «Фотоядерные реакции», Сб. статей, ИИЛ, М., 1953.— [4] С. З. Беленький. Лавинные процессы в космических лучах. Гостехиздат, М. 1948.

## ПЕРСПЕКТИВЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ИМПУЛЬСНЫХ МНОГОСЕТОЧНЫХ ЭЛЕКТРОННО-ОПТИЧЕСКИХ ТРУБОК ДЛЯ РЕГИСТРАЦИИ СЛЕДОВ ИОНИЗУЮЩИХ ЧАСТИЦ В ЛЮМИНЕСЦИРУЮЩИХ СРЕДАХ<sup>1</sup>

Г. А. Аскарьян

Успехи применения люминесцентных счетчиков в экспериментальной ядерной физике подтверждают целесообразность разработки электронно-оптического регистратора элементарного акта взаимодействия. Для оценки возможностей и специфики метода рассмотрим один из наиболее перспективных возможных вариантов осуществления регистратора данного типа.

Основной частью регистратора является снабженная магнитной фокусировкой импульсная электронно-оптическая трубка специальной конструкции, предназначенная для усиления яркости светового изображения следов частиц в люминофоре, имеющая полупрозрачный фотокатод, несколько ( $\sim 10$ ) сближенных мелкосеточных умножающих эмиттеров, дополнительную сетку для управления трубкой, ускоряющий анод и флуоресцирующий экран, расположенный за анодом. Управление трубкой осуществляется модулятором — радиотехническим устройством, повышающим напряжение на управляющей сетке для пропускания лавины электронного изображения. Модулятор срабатывает от импульса счетчика, регистрирующего факт прохождения частицы через люминофор (автоматический режим работы) или вскрывает трубку синхронно с циклами пульсирующего пучка частиц (полуавтоматический режим работы).

Флуоресцирующий след ионизирующей частицы в быстро гаснущем люминофоре (большой люминесцирующий кристалл, слой люминесцирующей жидкости или пластмассы) проектируется при помощи оптической системы на фотокатод электронно-оптической трубки и, путем фотоэффекта «напросвет», создает электронное изображение проекции следа. Это изображение движется вдоль трубки, умножается при прохождении через систему сквозных умножающих эмиттеров (сетки или перфорированные фольги) с малыми ( $\lesssim 10^{-2}$  см) размерами ячеек решетки и пропускается управляющей сеткой, потенциал которой повышен сработавшим модулятором, в зону ускорения. Ускоренная до напряжений порядка нескольких десятков киловольт, лавина электронного изображения проходит через ускоряющий анод (изготовленный в виде сетки или пробиваемого металlosлоя) и, попадая на флуоресцирующий экран, вызывает интенсивное свечение, воспроизводящее изображение проекции следа, которое регистрируется фотографически или визуально.

<sup>1</sup> Статья является авторефератом дипломной работы, защищенной автором в 1951 г. на физическом факультете МГУ.

Возможность фоторегистрации видна из следующего подсчета: проекционная плотность заряда умноженного электронного изображения следа  $q = \nu \alpha_1 \alpha_2 K \frac{1}{\Delta}$ , где  $\nu$  — число квантов флуоресценции с единицы длины следа релятивистской однозарядной частицы в люминофоре ( $\nu \approx 3 \cdot 10^4$  для хороших люминофоров);  $\alpha_1$  — эффективность оптической системы, проектирующей свет флуоресценции на фотокатод трубки (примем  $\alpha_1 \approx 1\%$ , полагая при этом для простоты масштаб изображения равным единице);  $\alpha_2$  — квантовая эффективность полупрозрачного фотокатода (примем  $\alpha_2 \sim 10\%$ );  $K$  — коэффициент умножения электронной лавины. Примем  $K \sim 10^6$ , считая, что фокусирующее магнитное поле не снижает эффективности умножения на сеточных эмиттерах. При фокусирующих полях порядка сотен гаусс это предположение справедливо для сеток с малыми размерами ячеек, например  $\sim 10^{-2}$  см. (В обычных сеточных умножителях применяются сетки, имеющие до 40 тыс. ячеек на  $1 \text{ см}^2$ ).  $\Delta$  — ширина электронного изображения следа после умножения. Для случая покаскадной магнитной фокусировки  $\Delta \approx 2lN(u/U)$ , где  $l$  и  $U$  — расстояние и разность потенциалов между соседними умножающими сетками,  $N$  — число сеток, и  $u$  — потенциал, соответствующий энергии эффективного спада кривой энергетического распределения вторичных электронов. При  $lN \sim 3 \text{ см}$ ,  $U \approx 150 \text{ В}$  и  $u \approx 5 \text{ В}$ ,  $\Delta \approx 0,2 \text{ см}$ .

Для принятых значений получаем  $q \approx 1,5 \cdot 10^8$  электронов/ $\text{см}^2$  или  $24 \text{ мк кул/см}^2$ . Такая плотность заряда вполне достаточна для контактной фотографии при потенциале ускорения электронов, бомбардирующих флуоресцирующий экран, близком к  $15 \text{ кВ}$  (например, для пленки Агфа-изохром и флуоресцирующего экрана  $\text{ZnS} - \text{Ag}$ , почернения пленки  $S \approx 0,2$  при указанных значениях плотности заряда и потенциала ускорения [4]). Возможное увеличение коэффициентов трансформации позволит сравнительно легко перейти к неконтактной фотографии.

Возможность автоматического управления трубкой определяется из сопоставления инерционности модулятора с необходимым временем пропускания и временем пролета электронов от фотокатода до зоны действия управляющей сетки. При удачном расположении электродов трубки можно получить, например, минимальное время пропуска  $\sim 10^{-8}$  сек. при необходимом времени срабатывания модулятора  $\sim 3 \cdot 10^{-8}$  сек.

Эти цифры отчетливо показывают преимущества использования электронно-оптической трубки с локализованными сеточными эмиттерами, обеспечивающей сочетание скорости накопления электронного изображения на аноде с легко варьируемой разрешающей способностью на выходе и практически полным устранением шумовых мерцаний выходного флуоресцирующего экрана при больших коэффициентах умножения (вплоть до  $K \sim 10^6$ ). Эти качества дадут возможность ведения сверхскоростной фоторегистрации (во время растянутого до нескольких миллисекунд импульса ускорителя), выявления редких процессов в условиях больших шумовых и радиационных нагрузок и оправдают некоторые технологические трудности изготовления мелкосеточных эмиттеров больших размеров (с площадью  $\sim 300 \text{ см}^2$ ). Сеточные трубки имеют преимущества в скорости действия, простоте управления и отсечки шумов перед трубками с многократной трансформацией (например, с последовательно соединенными каскадами Холста [2]), в которых происходит растягивание электронного изображения за счет большой (для применимых в вакуумных приборах люминофоров) суммарной инерции высвечивания промежуточных флуоресцирующих экранов.

К общим недостаткам электронно-оптических регистраторов следует отнести: наличие искажений, связанных с электронно-оптической трансформацией, разброс локальных параметров трансформации, необходимость хронической локальной калибровки прибора для ведения сравнительных измерений, трудность получения стереоскопического изображения следов — все это значительно затруднит восстановление точной картины процесса взаимодействия. Однако специфические положительные свойства люминесцентно-электронного регистратора элементарного акта — большая эффективность регистрации, высокая разрешающая способность, безинерционность работы, малое мертвое время регистрации, сравнительная простота осуществления телепередачи электронных изображений следов, удобство синхронизации работы с импульсными источниками ионизирующей радиации — могут сделать прибор мощным оружием в руках экспериментаторов в случае необходимости восстановления качественной картины элементарных процессов, при поиске новых типов реакций.

*Примечание при корректуре.* В появившейся недавно статье [3] сообщается об успешной реализации идеи использования электронно-оптических трубок для регистрации следов ионизирующих частиц, однако не приводится никаких данных об использованных электронно-оптических трубках.

Москва

Поступило в редакцию  
24 декабря 1954 г.

#### Литература

- [1] И. С. Стекольников. Электронный осциллограф, ГЭИ, 1949, стр. 112 и 115. — [2] Брюхе и Рекпагель. Электронные приборы, ГЭИ, 1949, стр. 447 и 458. — [3] Е. К. Завойский и др. ДАН СССР, 100, 241, 1955.

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ АБСОЛЮТНЫХ КОНЦЕНТРАЦИЙ АТОМОВ МНОГОКОМПОНЕНТНОГО ДУГОВОГО ГАЗА

В. С. Мельченко

Метод Прилежаевой [1] позволяет определять абсолютные концентрации атомов в положительном столбе дуги постоянного тока [2, 3]. Считается, что при помощи этого метода можно определять абсолютные концентрации только в том случае, если дуговой газ можно рассматривать как двухкомпонентный (трудно ионизируемая компонента — воздух и углерод — и легко ионизируемая — пары исследуемого элемента). Однако метод Прилежаевой применим и при более сложном составе дугового газа.

Пусть в дуговом газе содержится  $k$  искоемых элементов с концентрациями соответственно  $N_1, N_2, \dots, N_k$ . Концентрацию остального газа, состоящего в основном из воздуха и рассматриваемого как однородный, обозначим через  $N_0$ . Общая идея определения абсолютных концентраций атомов состоит в том, что степень ионизации смеси различных газов при заданной температуре зависит от состава газа. Определяя экспериментально степень ионизации газа, можно определить концентрации отдельных компонентов смеси.

Результирующая (средняя) степень ионизации  $\bar{x}$  газа в целом, т. е. смеси, связана с концентрациями компонентов следующим образом:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=0}^k x_i N_i}{\sum_{i=0}^k N_i}, \quad (1)$$

где  $x_i$  — степень ионизации  $i$ -го компонента. Следовательно, для определения  $N_i$  необходимо знать среднюю степень ионизации газа, а также всех компонентов. Для определения этих величин достаточно экспериментально измерить температуру газа и степень ионизации всего одного компонента. Действительно, для каждого компонента можно записать уравнение Саха

$$\lg \frac{x_i}{1-x_i} \frac{\bar{x}}{1+\bar{x}} = 2,5 \lg T - \frac{5040}{T} V_i - 6,5, \quad (2)$$

где  $T$  — температура,  $V_i$  — потенциал ионизации каждого компонента в электрон-вольтах. Из уравнения (2), записанного для того компонента, для которого измерена степень ионизации, можно определить  $\bar{x}$ , а затем из того же уравнения, записанного для всех остальных компонентов, можно определить все  $x_i$ . Однако знания  $\bar{x}$  и  $x_i$  еще недостаточно, чтобы из (1) определить  $N_i$ . Необходимо иметь дополнительные соотношения между концентрациями  $N_i$ . Такие соотношения мы будем иметь, если измерим  $k-1$  отношение интенсивностей пар спектральных линий (безразлично, атомных или ионных) для исследуемых элементов. Например возьмем отношение двух атомных линий  $i$ -го и  $n$ -го компонентов

$$\frac{I_i}{I_n} = \frac{N_i}{N_n} \frac{A_i g_i g_{n0}}{A_n g_{i0} g_n} e^{-(E_i - E_n)/kT} \frac{v_i}{v_n}, \quad (3)$$

где  $A$  — вероятности перехода,  $g$  — статистические веса,  $E$  — потенциал возбуждения линий.

Из (3) можно определить отношение  $N_i/N_n$ . Осложняющим обстоятельством здесь является то, что для этого необходимо знать вероятности перехода используемых линий. Чтобы из  $k-1$  соотношения вида (3) и соотношения (1) можно было определить  $k$  величин  $N_i$ , остается избавиться в (1) от последней неизвестной величины  $N_0$ . В знаменатель  $N_0$  входит вместе с другими  $N_i$  в виде суммы. Эту сумму мы очень просто можем определить из газокинетических соображений, так как известно давление (атмосферное)  $p$  и температура газа  $T$ , по формуле

$$N = \sum_{i=0}^k N_i = \frac{9,7 \cdot 10^{18}}{T} p, \quad (4)$$

где  $p$  — в мм рт. ст.

В числителе членом, содержащим  $N_0$ , обычно можно пренебречь, т. е. в большинстве случаев

$$\sum_{i=1}^k x_i N_i \gg x_0 N_0. \quad (5)$$

Это справедливо всегда, когда потенциал ионизации  $V_i$  хотя бы одного из компонентов, содержащегося в не слишком малой концентрации, намного (достаточно на 1–3 eV) меньше потенциала ионизации  $V_0$ . Вследствие экспоненциальной зависимости степени ионизации от ионизационного потенциала в этом случае  $x_0$  настолько мало, что обеспечивает неравенство (5). Таким образом (1) теперь переписывается в виде:

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i N_i / N. \quad (6)$$

Пользуясь (3) и (6), можно определить все искомые концентрации  $N_i$ . Температуру  $T$  и степень ионизации одного из компонентов  $x_i$  можно определить обычным способом [2].

Эксперимент был проделан для простейшего случая, когда  $i = 2$ , т. е. для трех-компонентного дугового газа<sup>1</sup>. В качестве искомых элементов были взяты магний и цинк. Температура определялась по отношению интенсивностей атомных линий цинка  $\lambda = 3072 \text{ \AA}$  и  $\lambda = 3076 \text{ \AA}$ , относительные вероятности которых известны [4]. Степень ионизации экспериментально определялась для магния по линиям  $\text{Mg I } \lambda = 2779 \text{ \AA}$  и  $\text{Mg II } \lambda = 2795 \text{ \AA}$  (как и в работе [3]). Среди линий  $\text{Zn}$  и  $\text{Mg}$  оказалось возможным найти линии с известными вероятностями переходов [4, 5], по которым можно было определить отношение концентраций атомов  $\text{Zn}$  и  $\text{Mg}$  по (3). Мы выбрали линии  $\text{Mg I } \lambda = 2779 \text{ \AA}$  и  $\text{Zn I } \lambda = 2741 \text{ \AA}$ .

Все измерения производились методом фотографической фотометрии. Цинк вводился в пробу в виде соли  $\text{ZnSO}_4$ , магний в виде соли  $\text{MgCO}_3$ , основу пробы представлял угольный порошок. Весовое содержание веществ в пробе было:  $\text{ZnSO}_4$  — 10%;  $\text{MgCO}_3$  — 3%; С — 87%.

Температура дугового газа оказалась равной  $6300^\circ \text{K}$ . Измерения степени ионизации атомов магния показали, что  $x_{\text{Mg}} = 0,43$ . Расчет по формуле Саха при этих значениях  $T$  и  $x_{\text{Mg}}$  дает  $x_{\text{Zn}} = 3,6 \cdot 10^{-2}$  и  $\bar{x} = 4 \cdot 10^{-3}$ . Соответствующим образом рассчитанные концентрации магния и цинка оказались равными  $N_{\text{Mg}} = 7,2 \times 10^{15} \text{ см}^{-3}$ ;  $N_{\text{Zn}} = 4,3 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$ .

Таким образом число атомов цинка больше числа атомов магния в пробе в 1,5 раза, в разрядном же промежутке — в 6 раз. Следовательно, поступление атомов цинка из пробы в разряд идет в 4 раза интенсивнее, чем поступление атомов магния, что находится в соответствии с данными Русанова о летучести элементов [6].

Сибирский физико-технический  
институт

Поступило в редакцию  
6 декабря 1954 г.

#### Литература

- [1] Н. А. Прилежаева. Тр. СФТИ, 28, 83, 1949.— [2] В. Н. Горячев. Тр. СФТИ, 30, 61, 1950.— [3] М. А. Алексеев. Тр. СФТИ, 32, 24, 1953.— [4] J. W. Schuttevaer a. J. A. Smit. Physica, 10, 502, 1943.— [5] J. A. H. Kersten a. L. S. Ornstein. Physica, 8, 1124, 1941.— [6] А. К. Русанов. Спектральный анализ руд и минералов, Госгеолиздат, 1948.

### СВЕРХТОНКАЯ СТРУКТУРА ПАРАМАГНИТНОГО РЕЗОНАНСА ТУТТОНОВОЙ СОЛИ МЕДИ В ПРОМЕЖУТОЧНЫХ ПОЛЯХ

Н. С. Гарифьянов и М. М. Зарипов<sup>1</sup>

До сих пор сверхтонкая структура парамагнитного резонанса соединений элементов группы железа исследовалась на высоких частотах порядка  $10^{10}$  гц. В области этих частот резонансные условия для элементов группы железа выполняются в сильных магнитных полях. Такие поля вызывают расщепления, по крайней мере, на порядок большие расщеплений, обусловленных взаимодействиями моментов ядра с электронами.

На более низких частотах, в дециметровом и метровом диапазонах создаются условия, соответствующие эффекту Зеемана в промежуточных и слабых полях [1–3]. Исследования на низких частотах могут быть использованы не только для проверки общей теории парамагнитного резонансного поглощения в кристаллах [4] в области промежуточных и слабых полей, но также и для более точного определения констант

<sup>1</sup> Эксперимент был проведен студентом А. Э. Конторович.

<sup>2</sup> Экспериментальная часть работы выполнена Н. С. Гарифьяновым.

сверхтонкой структуры, ибо в этих условиях энергетические расщепления, создаваемые моментами ядра, становятся равными или большими расщеплений, вызываемых постоянным магнитным полем.

Нами было проведено изучение парамагнитного резонанса в монокристалле  $\text{SiK}_2(\text{SO})_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ , разбавленном в отношении 1:200 изоморфной солью цинка, на частоте  $526,74 \cdot 10^6$  гц при температуре жидкого воздуха. Парамагнитное поглощение измерялось методом сеточного тока [5] с применением модуляции постоянного магнитного поля. Магнитное поле градуировалось при помощи свободного радикала  $\alpha\alpha$ -дифенил- $\beta$ -тринитрофенилгидразила. Точность определения резонансных значений поля определялась шириной линии поглощения и поэтому не превышала 2%.

Известно [6], что в единичной ячейке кристалла туттоновой соли находятся два иона меди и что тетрагональные оси симметрии электрических полей вокруг этих ионов образуют угол  $96^\circ$  между собой. Спектр парамагнитного резонанса изучен нами в случае, когда постоянное магнитное поле было направлено вдоль одной из тетрагональных осей симметрии электрического поля. Обнаружено шесть линий поглощения. Резонансные значения постоянного магнитного поля в эрстедах указаны в таблице.

Резонансные значения постоянного магнитного поля в эрстедах

|                  |       |       |     |       |     |       |
|------------------|-------|-------|-----|-------|-----|-------|
| Эксперимент. . . | 36    | 96    | 143 | 168   | 216 | 250   |
| Расчет . .       | 36,11 | 95,85 | 140 | 168,5 | 221 | 252,5 |

Интерпретация парамагнитного резонансного спектра исследованной соли в сильных полях была проведена в [7] на основе следующего «спинового» гамильтониана:

$$\mathcal{H} = g_{\parallel} \beta H_z S_z + g_{\perp} \beta (H_x S_x + H_y S_y) + A S_z I_z + B (S_x I_x + S_y I_y) + Q \left[ I_z^2 - \frac{1}{3} I(I+1) \right], \quad (1)$$

где  $g_{\parallel}$ ,  $g_{\perp}$  — факторы спектроскопического расщепления вдоль и перпендикулярно тетрагональной оси симметрии электрического поля соответственно;  $A$ ,  $B$  и  $Q$  — константы сверхтонкой структуры, причем первые две зависят от магнитного момента ядра, а последняя обусловлена электрическим квадрупольным моментом ядра.

На использованной нами частоте переменного поля осуществляется случай промежуточных полей. Вследствие этого расчет наблюдаемого спектра заключается в решении двух алгебраических уравнений восьмой степени (для  $\text{Cu}^{++}$   $S = 1/2$ ,  $I = 3/2$ ), относящихся к двум ионам в единичной ячейке кристалла. Решение уравнения в случае, когда постоянное магнитное поле направлено вдоль тетрагональной оси электрического поля, находится легко [7]. Для этого случая были вычислены также вероятности магнитных дипольных переходов. Решения уравнения для второго иона были найдены приближенным методом. Резонансные значения магнитного поля, приведенные в таблице, получены со следующими значениями констант, входящих в уравнение (1):  $A = -8,3 \cdot 10^{-3}$  см $^{-1}$ ,  $B = 4,5 \cdot 10^{-3}$  см $^{-1}$ ,  $Q = 1 \cdot 10^{-3}$  см $^{-1}$ ,  $g_{\parallel} = 2,47$ ,  $g_{\perp} = 2,08$ .

Полученные нами значения констант отличаются от приведенных в работе [8]:  $A = -10,3 \cdot 10^{-3}$  см $^{-1}$ ,  $B = 3,5 \cdot 10^{-3}$  см $^{-1}$ ,  $Q = 1,1 \cdot 10^{-3}$  см $^{-1}$ ,  $g_{\parallel} = 2,45$  и  $g_{\perp} = 2,12$ . Это, вероятно, объясняется тем, что в указанной работе эксперименты велись при  $T = 20^\circ \text{K}$ . Учитывая, что с повышением температуры величина тетрагональной компоненты электрического поля должна увеличиваться, качественно можно объяснить соответствующее изменение констант.

Физико-технический институт  
Казанского филиала Академии наук СССР  
Казанский государственный университет

Поступило в редакцию  
30 ноября 1954 г.

#### Литература

- [1] С. А. Альтшулер, Б. М. Козырев и С. Г. Салихов. ДАН СССР, 71, 885, 1950. — [2] Б. М. Козырев. Изв. АН СССР, серия физич., 16, 533, 1952. [3] B. Bleaney, H. E. D. Scovil, R. S. Trenam. Proc. Roy. Soc., A 223, 15, 1954. — [4] A. Abragam, M. H. L. Pryce. Proc. Roy. Soc., A 205, 135, 1951. — [5] Е. К. Завойский. Диссертация, Москва, ФИАН, 1944. — [6] B. Bleaney, R. P. Penrose, B. I. Plimpton. Proc. Roy. Soc., A 198, 406, 1949. — [7] A. Abragam, M. H. L. Pryce. Proc. Roy. Soc., A 206, 164, 1951. — [8] B. Bleaney, K. D. Bowers, D. J. E. Ingram. Proc. Phys. Soc., A 64, 758, 1951.

# РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

Н. С. Калицин

Основы перелятивистской механики тела переменной массы заложены работами И. В. Мещерского. Уравнения Мещерского используются для определения движения ракет, небесных тел переменной массы и для решения ряда других задач механики. Однако уравнения Мещерского, выведенные на основании зависимостей пытоновой механики, имеют место лишь для области скоростей, малых по сравнению со скоростью света  $c$ .

Вполне допустимо, что в будущем будут представлять интерес скорости, близкие к скорости света. Существуют также радиоактивные частицы, движущиеся со скоростями, близкими к  $c$ . Эти частицы имеют переменную массу.

Для этих случаев необходимо применять релятивистскую механику материальной точки переменной массы.

Чтобы исследовать движение одной материальной частицы переменной массы, мы используем четырехмерное пространство Минковского. Пусть  $x_1, x_2, x_3$  — обыкновенные координаты нашего физического мира. Четвертая координата  $x_4 = ict$ , где  $c$  — скорость света в вакууме, а  $t$  — время. Пространство  $x_i$  Минковского будем обозначать через  $R_4$ , пространство  $(x_1, x_2, x_3)$  — через  $R_3$ .

Каждая материальная частица описывает одну мировую линию в  $R_4$ . Интервал между двумя бесконечно близкими событиями по некоторой мировой линии определяется выражением

$$ds^2 = -dx_i dx_i. \quad (1)$$

Четырехмерной скоростью частицы является вектор

$$u_i = dx_i/ds. \quad (2)$$

Для нахождения его компонент замечаем, что, согласно (1),

$$ds = c dt \sqrt{1 - (v^2/c^2)}, \quad (3)$$

где  $v$  — обычная трехмерная скорость частицы в  $R_3$ . Таким образом

$$u_\alpha = v_\alpha / \sqrt{1 - (v^2/c^2)}, \quad \alpha = 1, 2, 3, \\ u_4 = i / \sqrt{1 - (v^2/c^2)}.$$

Компоненты 4-скорости не независимы. Замечая, что  $dx_i^2 = -ds^2$ , имеем

$$u_i^2 = -1. \quad (4)$$

В некоторой координатной системе, которую считаем покоящейся, в данный момент времени  $t$  рассматриваем две материальные точки: одну с массой  $m$ , имеющую скорость  $u_i$  по отношению к данной координатной системе, другую с массой  $dm$ , имеющую скорость  $a_i$ . В момент времени  $t + dt$  эти две точки образуют одну точку (присоединение массы) массы  $m + dm$ , скорость которой равна  $u_i + du_i$ . Вместо времени  $t$  как параметр можем ввести длину дуги  $s$ , описанной точкой массы  $m$ .

Применим теорему количества движения релятивистской механики. В момент  $s$  количество движения системы равно

$$cmu_i + cdm a_i,$$

а в момент  $s + ds$

$$c(m + dm)(u_i + du_i).$$

Приращение количества движения будет

$$dp_i = cm du_i + cdm (u_i - a_i). \quad (5)$$

Вводим 4-вектор силы, определяемый производной

$$f_i = \frac{dp_i}{ds} = cm \frac{du_i}{ds} + c \frac{dm}{ds} (u_i - a_i). \quad (6)$$

Напишем уравнение (6) в пространстве  $R_3$ . Мы определим вектор силы в  $R_3$  выражением:

$$F = c(f_1, f_2, f_3) \sqrt{1 - (v^2/c^2)}.$$

Первые три компонента уравнения (6) дают нам

$$\frac{d}{dt} \frac{mv}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} - \frac{a}{\sqrt{1-(a^2/c^2)}} \frac{dm}{dt} = F. \quad (7)$$

Для скоростей  $v$  и  $a$ , малых по сравнению со скоростью света  $c$ , уравнение (7) переходит в нерелятивистское уравнение Мещерского

$$m \frac{dv}{dt} + \frac{dm}{dt} (v - a) = F. \quad (8)$$

Уравнение (6) или (7) представляет релятивистское обобщение основного уравнения (8) Мещерского для материальной точки переменной массы.

Если скорость присоединяющейся массы релятивистская, а скорость массы  $m$  нерелятивистская, то уравнение (7) принимает вид

$$\frac{d}{dt} (mv) - \frac{a}{\sqrt{1-(a^2/c^2)}} \frac{dm}{dt} = F. \quad (9)$$

Если скорость присоединяющейся массы равна нулю ( $a=0$ ), то уравнение (7) получает форму

$$\frac{d}{dt} \frac{mv}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} = F. \quad (10)$$

При  $a=v$  (относительная скорость присоединяющейся массы равна нулю) уравнение (7) принимает вид

$$m \frac{d}{dt} \frac{v}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} = F. \quad (11)$$

Образует скалярное произведение

$$f_i u_i = cm \frac{du_i}{ds} u_i + c \frac{dm}{ds} (u_i u_i - a_i u_i).$$

Так как  $u_i u_i = -1$  и, следовательно  $(du_i/ds) u_i = 0$ , то

$$f_i u_i = -c \frac{dm}{ds} (1 + a_i u_i). \quad (12)$$

Уравнение (12) принимает в  $R_3$  следующий вид

$$Fv = \frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v^2/c^2)}} - \frac{dm}{dt} \left( c^2 \sqrt{1-(v^2/c^2)} + \frac{av}{\sqrt{1-(a^2/c^2)}} \right), \quad (13)$$

Надо иметь в виду, что во всех этих уравнениях  $m$  — зависящая от времени величина. Она может зависеть от времени как явно, так и неявно, через посредство величин, определяющих положение или движение точки. Если, например,  $m = f(x_\alpha, \dot{x}_\alpha, t)$ , то

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\partial m}{\partial x_\alpha} \dot{x}_\alpha + \frac{\partial m}{\partial \dot{x}_\alpha} \ddot{x}_\alpha + \frac{\partial m}{\partial t} \quad (\alpha = 1, 2, 3).$$

Выражаю благодарность проф. Хр. Христову за ценную критику, высказанную при проверке моей работы.

Государственный университет  
Болгария, г. Сталин

Поступило в редакцию  
29 июля 1954 г.

### Литература

- [1] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. Теория поля, ОГИЗ. М.—Л., 1948.—
- [2] Л. Лойцянский и А. Лурье. Курс теоретической механики, II, ОГИЗ. М.—Л., 1948.

# ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ГРИНА В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ В ФОРМЕ КONTИНУАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

И. М. Халатников

В квантовой электродинамике функции Грина для той или иной задачи могут быть записаны в виде матричных элементов некоторых  $T$ -упорядоченных произведений операторов электронного и фотонного полей, взятых между состояниями невозмущенного вакуума. Так, например, функция Грина для одноэлектронной задачи имеет следующий вид:

$$G_{\alpha\beta}(x, x') = \langle T(\psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x')) S / S_{\text{вак}} \rangle. \quad (1)$$

Здесь  $S_{\text{вак}}$  есть среднее вакуумное значение  $S$ -матрицы

$$S = \exp \left\{ -i \int H(x) dx \right\}. \quad (2)$$

Знак  $T$  означает операцию релятивистско-инвариантной хронологизации, введенную Виком [1]. Плотность функции Гамильтона  $H(x)$  в случае электродинамики равна

$$H(x) = -i \bar{\psi}(x) \gamma_\mu A_\mu(x) \psi(x). \quad (3)$$

Аналогичным образом записываются функции Грина для других задач.

Цель настоящей заметки состоит в представлении выражений для функции Грина в форме континуальных интегралов в пространстве  $\psi$  и  $A$  функций<sup>1</sup>.

Согласно [2] (см. также [4]) операция  $T$ -упорядочения, производимая над выражениями указанного типа, сводится к умножению этих выражений на операторы упорядочения для электронного поля:

$$e^\Sigma, \quad \Sigma = \frac{1}{4} \int dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' S_{F_{\alpha\beta}}(x-x') \frac{\delta^2}{\delta \psi_\alpha(x) \delta \bar{\psi}_\beta(x')} \quad (4)$$

и для фотонного поля

$$e^\Delta, \quad \Delta = \frac{1}{4} \int dx \int_{-\infty}^{\infty} dx' D_{F_{\mu\nu}}(x-x') \frac{\delta^2}{\delta A_\mu(x) \delta A_\nu(x')}, \quad (5)$$

$S_{F_{\alpha\beta}}$  и  $D_{F_{\mu\nu}}$  — функции Грина для свободных (невзаимодействующих) полей соответственно электрона и фотона.

В формуле (4) спинорные функции  $\psi_\alpha$  и  $\bar{\psi}_\beta$  антикоммутируют друг с другом.

Операторы упорядочения действуют на произведение операторов электронного и фотонного полей, взятых в смысле  $T$ -произведения, т. е. в рассматриваемых произведениях в каждой функции Гамильтона операторы  $\bar{\psi}(x)$  всегда стоят левее операторов  $\psi(x)$ .

Введем в четырехмерном пространстве координатную решетку, объем элементарной ячейки которой пусть будет равен  $\omega$ . Узлы решетки (их полное число равно  $N$ ) отмечаем латинскими буквами и пользуемся следующей сокращенной формой записи

$$S_{F_{\alpha\beta}}(x_i - x_h) = S_{\alpha\beta}(ik), \quad D_{F_{\mu\nu}}(x_i - x_h) = D_{\mu\nu}(ik), \\ A_\mu(x_i) = A_\mu(i), \quad \psi_\alpha(x_i) = \psi_\alpha(i). \quad (6)$$

Введение решетки позволяет перейти от интегралов к суммам и от функциональных производных к частным производным. В дальнейшем мы в качестве иллюстрации метода подробно остановимся на представлении в форме континуального интеграла среднего вакуумного значения  $S$ -матрицы. Формулы для функций Грина после этого уже могут быть записаны по аналогии. Переходя от интегралов к сумме в формуле (4), получаем

$$S_{\text{вак}} = \langle \exp \left\{ \frac{1}{4} S_{\alpha\beta}(ik) \frac{\partial^2}{\partial \psi_\alpha(i) \partial \bar{\psi}_\beta(k)} \right\} \exp \left\{ \frac{1}{4} D_{\mu\nu}(ik) \frac{\partial^2}{\partial A_\mu(i) \partial A_\nu(k)} \right\} \times \\ \times \exp \left( -\omega \bar{\psi}_\alpha(i) \gamma_\mu^{\alpha\beta} A_\mu(i) \psi_\beta(i) \right) \rangle. \quad (7)$$

<sup>1</sup> Для случая поля Бозе такое представление было получено впервые Гельфандом и Минлосом [2].

Полученное выражение можно переписать в форме  $3N$ -кратного интеграла. Для этого воспользуемся тем обстоятельством, что выражение (7) является не чем иным, как решением уравнений типа уравнений диффузии

$$\frac{\partial S_{\text{вак}}}{\partial t_1} = \frac{1}{4} S_{\alpha\beta}(ik) \frac{\partial^2}{\partial \psi_{\alpha}(i) \partial \bar{\psi}_{\beta}(k)} S_{\text{вак}}; \quad (8)$$

$$\frac{\partial S_{\text{вак}}}{\partial t_2} = \frac{1}{4} D_{\mu\nu}(ik) \frac{\partial^2}{\partial A_{\mu}(i) \partial A_{\nu}(k)} S_{\text{вак}}, \quad (9)$$

для значений временноподобной переменной  $t_1 = 1$  и  $t_2 = 1$  и значений  $\psi_{\alpha}$  и  $A_{\mu}$ , равных нулю (нет свободных электронов и фотонов), с начальным значением  $S_{\text{вак}}$  при  $t_1 = t_2 = 0$ , равным

$$\exp(-\omega \bar{\psi}_{\alpha}(i) \gamma_{\mu}^{\alpha\beta} A_{\mu}(i) \psi_{\beta}(i)).$$

Уравнение (8) содержит производные по некоммутирующим между собой спинорным функциям  $\psi_{\alpha}$  и  $\bar{\psi}_{\beta}$ . Это обстоятельство затрудняет нахождение решения полученных уравнений. Чтобы обойти эту трудность, мы перенесем операторные свойства  $\psi$  на матричные элементы  $S_{\alpha\beta}(ik)$ . Оператор  $\Sigma$  (4) перепишем в виде:

$$\Sigma = \check{S}_{\alpha\beta}(ik) \frac{\delta^2}{\delta \psi_{\alpha}(i) \delta \bar{\psi}_{\beta}(k)}, \quad (10)$$

где  $\psi_{\alpha}$  и  $\bar{\psi}_{\beta}$  — теперь уже обычные функции, коммутирующие друг с другом. Матричные же элементы  $\check{S}(ik)$  выражаются через оператор  $\eta_{ik}$ <sup>2</sup>

$$\check{S}(ik) = S(ik) \eta_{ik}. \quad (11)$$

Операторы  $\eta_{ik}$  коммутируют друг с другом<sup>3</sup>. Если в некотором произведении операторов  $\eta_{ik}$  какой-либо индекс повторяется больше двух раз, то такое произведение равно нулю. Имеет место следующее правило умножения

$$\eta_{ik} \times \eta_{il} = \eta_{il}. \quad (12)$$

Операторы  $\eta_{ii}$  — просто числа

$$\eta_{ii} = -1. \quad (13)$$

Аналогичным образом определяются элементы обратной матрицы  $\check{S}^{-1}(ik)$ :

$$\check{S}^{-1}(ik) = -S^{-1}(ik) \eta_{ik}. \quad (14)$$

Из указанных выше свойств  $\eta_{ik}$  следует правило умножения матричных элементов  $\check{S}(ik)$

$$\check{S}(1i_1) \dots \check{S}(ni_n) = S(1i_1) \dots S(ni_n) (-1)^P. \quad (15)$$

Вторые индексы  $i_{\alpha}$  пробегает значения от 1 до  $n$ ,  $P$  — четность перестановки вторых индексов.

Нам остается определить величину интеграла

$$I = \int \exp \{ -\bar{\psi}(i) \check{S}^{-1}(ik) \psi(k) \} \delta \psi \delta \bar{\psi}, \quad \delta \psi = \Pi \alpha \psi(i), \quad (16)$$

Такого типа интегралы встретятся в дальнейшем. Интеграл  $I$  определяем как предел  $I(\alpha)$  при  $\alpha \rightarrow 0$

$$I(\alpha) = \int \exp \{ -\alpha \bar{\psi}(i) \psi(i) \} \exp \{ -\bar{\psi}(i) \check{S}^{-1}(ik) \psi(k) \} \delta \psi \delta \bar{\psi}. \quad (17)$$

<sup>2</sup> Для упрощения записи спинорные индексы опускаем и включаем их в индексы  $i$  и  $k$ .

<sup>3</sup> Исключение составляет случай, когда индексы в двух  $\eta_{ik}$ , стоящие на одинаковых местах, совпадают; такие  $\eta_{ik}$  антикоммутируют между собой. Однако, как будет видно из дальнейшего, это обстоятельство можно не учитывать, так как члены, содержащие комбинации подобных операторов, выпадают при интегрировании.

Вычислим  $I(\alpha)$ . Для этого разложим в интеграле (17)  $\exp(-\bar{\psi}(i) S^{-1}(ik) \psi(k))$  в ряд; имеем

$$I(\alpha) = \int \exp\{-\alpha \bar{\psi}(i) \psi(i)\} \sum \frac{1}{n!} (\bar{\psi}(i) \check{S}^{-1}(ik) \psi(k))^n \delta\psi \delta\bar{\psi}. \quad (18)$$

Далее, после несложного интегрирования с учетом (14) и (15), получаем

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \frac{\pi^N}{\alpha^N} \sum (-1)^{n+P} \frac{1}{\alpha^N} S^{-1}(1i_1) \dots S^{-1}(ni_n) = \\ &= \frac{\pi^N}{\alpha^N} \text{Det} \left| \delta_{ih} + \frac{S^{-1}(ik)}{\alpha} \right|. \end{aligned} \quad (19)$$

Решение системы уравнений (10), (11), удовлетворяющее начальным условиям (12), может быть записано в виде

$$\begin{aligned} S_{\text{вак}} &= \frac{1}{\pi^{N/2} \sqrt{\text{Det } D_{\mu\nu}}} \int \exp\{-\bar{\psi}(i) \check{S}^{-1}(ik) \psi(k) - A(i) D^{-1}(ik) A(k) - \\ &- \omega \bar{\psi}(i) \check{A}(ik) \psi(k)\} \delta\psi \delta\bar{\psi} \delta A \left( \int \exp\{-\psi(i) S^{-1}(ik) \psi(k)\} \delta\psi \delta\bar{\psi} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$A_{\alpha\beta}(ik) = \gamma_{\mu}^{\alpha\beta} A_{\mu}(i) \delta_{ih} \eta_{\alpha\beta}.$$

Формула (20) представляет собой выражение для  $S_{\text{вак}}$  в квантовой электродинамике в форме континуального интеграла. Формуле (20) можно придать также вид

$$S_{\text{вак}} = \left\{ \exp \left[ i \int L(x, \psi, A) dx \right] \delta\psi \delta\bar{\psi} \delta A \right\} / \left\{ \exp \left[ i \int L_0(x, \psi, A) dx \right] \delta\psi \delta\bar{\psi} \delta A \right\} \quad (21)$$

$L$  — функция Лагранжа, зависящая от спинорных функций поля  $\psi$  и функций фотонного поля  $A$ ;  $L_0$  — функция Лагранжа без члена взаимодействия полей<sup>4</sup>.

В формуле (20) можно выполнить интегрирование по функциям одного из полей. Интегрирование по функциям электронного поля производим следующим образом:

$$\begin{aligned} S_{\text{вак}} &= \frac{1}{\pi^{N/2} \sqrt{\text{Det } D_{\mu\nu}}} \frac{\alpha^N}{\text{Det} \left| \delta_{ih} + \frac{1}{\alpha} S^{-1}(ik) \right|} \int \text{Det} \left| \delta_{ih} + \frac{1}{\alpha} S^{-1}(ik) + \frac{1}{\alpha} A(ik) \omega \right| \times \\ &\times \frac{1}{\alpha^N} \exp(-A(i) D^{-1}(ik) A(k)) \delta A. \end{aligned} \quad (22)$$

Отсюда окончательно получаем [5]

$$\begin{aligned} S_{\text{вак}} &= \frac{1}{\pi^{N/2} \sqrt{\text{Det } D_{\mu\nu}}} \exp \{ \text{Sp } \lg | \delta_{ih} + \omega S(ik) \gamma_{\mu} A_{\mu}(k) | \} \times \\ &\times (-A(i) D(ik) A(k)) \delta A. \end{aligned} \quad (23)$$

В формуле (20) можно также произвести интегрирование по функциям фотонного поля. Формулы, аналогичные (20), легко получаются для функций Грина любой задачи. Так, для одноэлектронной задачи, согласно (1),

$$\begin{aligned} G(l, m) &= \frac{1}{\pi^{N/2} \sqrt{\text{Det } D_{\mu\nu}}} \int \bar{\psi}(l) \psi(m) \eta_{lm} \exp\{-\bar{\psi}(i) \check{S}^{-1}(ik) \psi(k) - A(i) D^{-1}(ik) A(k) - \\ &- \psi(i) \check{A}(ik) \psi(k) \omega\} \delta\psi \delta\bar{\psi} \delta A \left( \int \exp\{-\psi(i) \check{S}^{-1}(ik) \psi(k)\} \delta\psi \delta\bar{\psi} \right)^{-1} S_{\text{вак}}^{-1}. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь  $S_{\text{вак}}$  определяется функцией (20). Прямым дифференцированием формулы (20) можно убедиться в справедливости следующего соотношения

$$G(ik) = S(ik) - \frac{\delta}{\delta S^{-1}(ik)} \lg S_{\text{вак}}. \quad (25)$$

<sup>4</sup> Формула, подобная (21), обсуждалась в работе [2] по аналогии с соответствующей формулой для поля Бозе. Такого рода аналогию в данном случае, ввиду антикоммутирования спиноров, проводить нельзя.

При взятии функциональной производной по  $S^{-1}(ik)$  следует  $S_{\text{вак}}$  понимать как функционал  $S^{-1}(ik)$ , после же дифференцирования величины  $S^{-1}(ik)$  принимают заданные значения (см. [4]).

В заключение выражаю глубокую благодарность акад. Л. Д. Ландау и Б. Л. Иоффе за участие в обсуждении рассмотренного вопроса.

Институт физических проблем  
Академии наук СССР

Поступило в редакцию  
25 декабря 1954 г.

### Литература

- [1] G. Wick. Phys. Rev., 80, 268, 1950.— [2] И. Гельфанд и Р. Минлос. ДАН СССР, 97, 209, 1954.— [3] S. Hori. Progr. Theor. Phys., 7, 578, 1952.— [4] J. Anderson. Phys. Rev., 94, 703, 1954.— [5] M. Neuman. Phys. Rev., 83, 1258, 1951.

## ГАЗОВАЯ ПУЗЫРЬКОВАЯ КАМЕРА — ВОЗМОЖНЫЙ РЕГИСТРАТОР ЭЛЕМЕНТАРНОГО АКТА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ИОНИЗУЮЩЕГО ИЗЛУЧЕНИЯ С ВЕЩЕСТВОМ<sup>1</sup>

Г. А. Аскарьян

Экспериментально осуществленная [1–2] попытка регистрации следов ионизирующих частиц в перегретой жидкости не исчерпывает всех возможностей выявления следов в жидкости по образованию пузырьков вдоль следа. Например, для регистрации следов ионизирующих частиц может быть использован пересыщенный раствор газа в жидкости: мгновенное пересыщение, создаваемое быстрым падением давления газа над поверхностью жидкости, делает жидкость с растворенным в ней газом внутренне неустойчивой по отношению к образованию зародышей новой фазы — пузырьков газа. Прохождение ионизирующей частицы, приводящее к скоплению ионных центров вдоль следа, локальному нагреву жидкости и дроблению молекул, будет способствовать образованию зародышевых полостей внутри жидкости (в начальной стадии развития полости, повидимому, существенную роль играет инициирующий рывок отталкивания близко расположенных одинаково заряженных молекулярных комплексов, собранных ионами, созданными ионизирующей частицей) и превращению их в пузырьки газа, создающие картину следа. Мертвое время работы и диффузионная инерция роста пузырька в «газовой» пузырьковой камере, связанные с локальным обеднением раствора, могут быть, повидимому, в значительной мере уменьшены подбором режима работы и применением компонентов смеси с большой взаимной растворимостью (физический или химический раствор газа в жидкости).

Термодинамические условия работы «газовой» пузырьковой камеры выгоднее термодинамических условий работы «паровой» пузырьковой камеры: «газовый» режим работы не требует нагрева жидкости для повышения упругости ее паров, его применение будет, повидимому, целесообразно для жидкостей с малым поверхностным натяжением а области температур, в которой жидкость имеет недостаточное для разрыва определенных зародышевых полостей давление насыщенных паров.

Температурная маневренность «газового» режима работы пузырьковой камеры и возможность независимого варьирования компонентов рабочей смеси, повидимому, облегчат переход к большим эффективным рабочим объемам и оптимальной рабочей смеси.

Техническая реализация идеи «газовой» пузырьковой камеры может способствовать созданию универсального, стабильного и простого прибора для регистрации элементарного акта взаимодействия сильнопроникающего излучения с веществом.

Москва

Поступило в редакцию  
6 октября 1954 г.

### Литература

- [1] D. Glaser. Phys. Rev., 91, 762, 1953.— [2] D. Glaser. Nuovo Cim., Suppl., 11, сер. 9, 2, 1954.

<sup>1</sup> Статья является авторефератом отчета, выполненного в 1953 г. в Институте химической физики АН СССР.

## К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция ЖЭТФ просит авторов при направлении статей в печать руководствоваться изложенными ниже правилами. СТАТЬИ, ПРИСЛАННЫЕ БЕЗ СОБЛЮЖДЕНИЯ ПЕРЕЧИСЛЕННЫХ ПРАВИЛ, К РАССМОТРЕНИЮ РЕДАКЦИЕЙ ПРИНИМАТЬСЯ НЕ БУДУТ.

1. Статьи, являющиеся результатами работ, проведенных в институтах, должны обязательно иметь направление от соответствующего института.

2. Редакция в особенности обращает внимание авторов на то, что статьи должны быть изложены с предельной краткостью, совместимой с ясностью изложения, и окончательно обработаны. Следует избегать повторения данных таблиц или графиков в тексте статьи, а также представления численных результатов в виде таблиц и графиков одновременно.

Статьи объемом свыше 1 печ. листа (т. е. 21—22 стр. текста на пишущей машинке) вообще не допускаются. Как текст, так и графический материал должны представляться обязательно в двух экземплярах.

3. Статья должна иметь краткую аннотацию, указывающую цель и результаты работы. Аннотация и раздел «Выводы» (если таковой имеется в статье) не должны, однако, дублировать друг друга.

4. Статьи должны быть напечатаны на пишущей машинке с одной стороны листа; рукописные вставки не допускаются. Формулы должны быть вписаны четко чернилами. Все страницы рукописи должны быть пронумерованы. Таблицы должны быть напечатаны на отдельных от текста страницах.

СТАТЬИ ДОЛЖНЫ БЫТЬ ОБЯЗАТЕЛЬНО ПОДПИСАНЫ АВТОРОМ, А ПРИ НАЛИЧИИ НЕСКОЛЬКИХ АВТОРОВ ВСЕМИ СОАВТОРАМИ.

5. Во избежание недоразумений и ошибок следует делать ясное различие между заглавными и строчными буквами в формулах. В тех случаях, когда заглавные и строчные буквы одинаковы по начертанию и отличаются только своим размером (*V* и *v*, *U* и *u*, *W* и *w*, *O* и *o*, *K* и *k*, *S* и *s*, *I* и *i*, *C* и *c*, *P* и *p*), — необходимо заглавные буквы подчеркивать снизу двумя черточками (например, S), а строчные помечать двумя черточками сверху (например, s). Необходимо делать различие между буквой *O* (большой), *o* (малой) и *0* (нулем), для чего буквы *O* и *o* подчеркивать двумя черточками. O и o, а ноль оставлять без подчеркивания. Необходимо также различать буквы *I* и *J*, для чего в рукописи букву *I* писать, как римскую единицу, с точкой сверху. Греческие буквы должны подчеркиваться красным карандашом. Векторы подчеркивать синим или черным карандашом.

6. Подстрочные примечания должны иметь сплошную нумерацию по всей статье. Цитируемая литература должна даваться не в виде подстрочных примечаний, а общим списком в конце статьи, с указанием в тексте статьи ссылки порядковой цифрой на строкой, в прямых скобках (например, [1]). Цитируемая литература должна быть оформлена в следующем порядке: а) для журнальных статей указываются инициалы и фамилии авторов, название журнала, номер тома (подчеркнуто снизу), страница и год; б) для книг надо указывать инициалы и фамилии авторов, полное название книги, год и место издания (для книг иностранного происхождения указывать данные русского перевода, если таковой имеется).

7. Все рисунки и чертежи должны быть представлены отдельно от рукописи и ни в коем случае не должны приклеиваться к оригиналу. Рисунки желательно снабжать разъясняющими подписями, которые должны быть собраны на отдельном листе. На обороте рисунков должна быть указана фамилия автора, название статьи и номер рисунка. Надписи на рисунках следует по возможности заменять цифрами или буквенными обозначениями в подписи к рисунку или в тексте.

Редакция просит авторов ограничиваться минимальным числом рисунков к статьям.

8. Редакция просит авторов отмечать на полях рукописи места, которые могут быть набраны петитом.

9. Редакция посылает автору одну корректуру. Изменения и дополнения в тексте не допускаются. Корректура с подписью автора должна быть выслана обратно в редакцию в течение суток с момента ее получения.

10. К рукописи должен быть приложен точный адрес, фамилия, имя и отчество автора, а также номер телефона, служебного или домашнего (для авторов, проживающих в Москве).

11. РУКОПИСИ, НЕ ПРИНЯТЫЕ РЕДАКЦИЕЙ, АВТОРУ НЕ ВОЗВРАЩАЮТСЯ.

Адрес редакции, Москва, Подсосенский пер., д. 21, Изд-во АН СССР.

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

*Контора „Академкнига“*

ОТКРЫТА ПОДПИСКА НА НОВЫЙ ЖУРНАЛ

АКАДЕМИИ НАУК СССР

**„ФИЗИКА МЕТАЛЛОВ И МЕТАЛЛОВЕДЕНИЕ“**

Журнал начнет выходить с 1 июля 1955 года

В журнале „Физика металлов и металловедение“ будут освещаться вопросы по следующим разделам физики:

а) общие теоретические представления о природе твердого тела, с особым вниманием к металлам и металлическим сплавам, и

б) теоретические представления об основах и о сущности практически важных явлений, происходящих в металлах и сплавах при их технологической обработке и при эксплуатации изделий, изготовляемых из этих материалов

Журнал будет выходить 6 раз в год

В 1955 г. выйдет 3 номера

Подписная цена на 2-е полугодие 45 руб.

Цена одного номера — 15 руб.

*Подписка принимается городскими и районными отделами „Союзпечати“, отделениями и агентствами связи, магазинами „Академкнига“, а также конторой „Академкнига“ по адресу Москва, Пушкинская ул., дом 23.*