

12.17.5
А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р

ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 28

Вып. 3

МАРТ 1955 г.

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

Академия наук СССР
Физический Институт
БИБЛИОТЕКА

СОДЕРЖАНИЕ

Кирил Попов. Математические основы теории необратимых термодинамических процессов	257
✓ Христо Караниколов. О феноменологических соотношениях Онзагера	283
А. С. Мартынов. Рассеяние мезонов на нуклонах в теории радиационного затухания	287
Д. Иваненко и В. Н. Цытович. К теории потерь энергии заряженных частиц при прохождении ферромагнетика	291
Ф. И. Клигман. Статистическая теория тяжелых ядер и ядерные силы	297
А. С. Компанец. Краткое рассеяние в кулоновском поле в весьма тонких слоях вещества	308
Ф. Г. Басс и И. М. Цидильковский. К теории эффектов Холла и Нернста — Эттингсгаузена в полупроводниках со смешанной проводимостью	312
А. В. Соколов и С. М. Ципис. О плотности состояний электронов проводимости в ферромагнетиках	321
А. В. Соколов. О поглощении и испускании рентгеновских лучей ферромагнитными металлами	326
А. В. Соколов, В. И. Черепанов и И. Б. Штейнберг. Дисперсионные формулы квантовой оптики металлов в многоэлектронной теории с учетом электронного затухания	330
Е. Андреев и Б. М. Исаев. О некоторых свойствах искрового счетчика для регистрации α -частиц	335
✓ Х. А. Джерпетов и Г. М. Патеюк. Исследование высокочастотного разряда методом зондов	343
Ф. И. Вергунас и Н. Л. Гастинг. Закономерности затухания послесвечения цинксulfидных фосфоров в области температурного тушения	352
А. В. Савич. Об отсутствии стабильных изотопов Тс и Рт и других аномалиях в распространении β -стабильных ядер	361

Письма в редакцию

В. В. Чавчанидзе и О. Д. Чейшвили. Нахождение функции распределения нейтронов по энергиям методом Маркова	369
Г. Р. Хуцишвили. Об угловом распределении β -излучения. II.	370
Н. Ф. Отпущенников. Поглощение ультразвуковых волн в железе-Армко и флексигласе	371
В. Н. Цытович. О каузальном развитии связанной системы в относительном времени	372
П. С. Исаев. «Равновесный» энергетический спектр лавинных фотонов	374
М. А. Еремеев. По поводу статьи У. А. Арифова, А. Х. Аюханова и С. В. Старолубцева	376
А. А. Боргардт. О гравитационной собственной энергии частицы в классической теории поля	377
В. Л. Грановский и Г. Г. Тимофеева. Сжатие и изгиб дуги в разреженном газе при большой силе тока	378
Г. Ф. Парчевский и Н. П. Пенкин. Отношение сил осцилляторов для составляющих резонансных дублетов алюминия и меди	379
Н. Е. Алексеевский и Н. Б. Брандт. Влияние всестороннего сжатия на гальваномагнитные эффекты вясмута и его сплавов. I.	379
Н. М. Нестерова и А. Е. Чулаков. О наблюдении черенковского излучения, сопровождающего широкие атмосферные ливни космических лучей	384

Главный редактор *Н. Н. АНДРЕЕВ*

Зам. главного редактора *М. М. СУЩИНСКИЙ*

Редколлегия

Н. А. КАПЦОВ, В. П. ПЕШКОВ, Д. В. СКОБЕЛЬЦЫН,
Н. Н. СОБОЛЕВ, М. М. СУЩИНСКИЙ, И. Е. ТАММ,
Я. П. ТЕРЛЕЦКИЙ, Е. Л. ФЕЙНБЕРГ

Подписано к печати 15. III. 1955 г. Т-02414 Формат бумаги 70×108¹/₁₆. Бум. 1
Поч. л. 10,00+2 вклейки Уч.-изд. л. 12,4 Тираж 3675 экз. Зак.

2-я типография Издательства Академии наук СССР Москва Шибинский

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ НЕОБРАТИМЫХ
ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Кирил Попов

Показано, что соотношения Онзагера:

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^n L_{ik} X_k \quad (i = 1, 2, \dots, n), L_{ik} = L_{ki},$$

при ограничении членами второй степени по x , являются первыми интегралами более общей системы дифференциальных уравнений

$$d^2 x_i / dt^2 = X_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

В самом общем случае, при сохранении всех членов в разложении ΔS , получено $L_{ik} = L_{ki}$ с точностью до членов второго порядка. Развиваемая теория применяется к изучению явлений теплопроводности и теории фаз в адиабатически замкнутых системах.

Введение

Рассмотрим адиабатически изолированную систему, состояние которой полностью определяется переменными $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$. Пусть $\xi_1^0, \xi_2^0, \dots, \xi_n^0$ — значения этих переменных при термическом равновесии системы. Обозначив через $S(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ энтропию системы, будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta S &= S(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) - S(\xi_1^0, \xi_2^0, \dots, \xi_n^0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x_1^2} x_1^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\partial^2 S}{\partial x_1 \partial x_2} x_1 x_2 + \dots + \frac{\partial^2 S}{\partial x_n^2} x_n^2 \right) + \dots = \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n g_{ik} x_i x_k + \dots \quad (i = 1, 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (1)$$

где $g_{ik} = g_{ki}$, $x_i = \xi_i - \xi_i^0$ и где производные взяты при $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Здесь $\sum g_{ik} x_i x_k$ — положительно определенная квадратичная форма.

Мы ставим себе задачу определить дифференциальные уравнения для необратимых термодинамических адиабатических процессов.

Еще В. Томсон, изучая термоэлектрические явления, пришел к заключению, что можно написать дифференциальные уравнения, дающие взаимодействие между электрическим и тепловым потоками $\dot{x}_1, \dot{x}_2$ в виде

$$\dot{x}_1 = L_{11} X_1 + L_{12} X_2, \quad \dot{x}_2 = L_{21} X_1 + L_{22} X_2,$$

где X_1 и X_2 — силы, зависящие от электрических и тепловых явлений в системе. Позже Рэлей, формулируя «принцип минимальной диссипации энергии», доказал возможность рассматривать ΔS как потенциальную функцию.

Онзагер, изучая гипотетические мономолекулярные химические процессы в веществе, могущем существовать в данной гомогенной фазе в трех формах A, B, C , переходящих спонтанно одна в другую («треугольные» процессы), а также явления теплопроводности в анизотропных кристаллах, пришел к заключению о симметричности тензора L_{ih} . Исходя, по примеру Больцмана, из положений статистической механики о «микроскопической обратимости» элементарных процессов и из теории флуктуаций, Онзагер [1] установил феноменологические соотношения

$$\dot{x}_i = \sum_{h=1}^n L_{ih} X_h \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2)$$

где $L_{ih} = L_{hi}$, $\dot{x}_i$ — поток x_i , а X_h — силы, которые являются частными производными от потенциальной функции ($-\Delta S$) по x_h , т. е.

$$X_h = \partial(-\Delta S) / \partial x_h. \quad (3)$$

Позже Казимир [2] указал на пробелы в доказательствах Онзагера, показав, что Онзагер допускает, что флуктуации в среднем следуют обыкновенным феноменологическим макроскопическим законам. Ландау и Лифшиц [3] установили, что $-L_{ih}$ должны быть коэффициентами существенно положительной квадратичной формы. Однако, как мы уже указывали [4], этого еще недостаточно для доказательства соотношений Онзагера. Де-Гроот [5] предложил принять соотношения Онзагера (в тех случаях, когда основной интерес представляют только их приложения), как выражение нового принципа термодинамики.

Ниже мы рассматриваем вопрос о необратимых термодинамических процессах с математической точки зрения и получаем некоторые следствия из второго принципа термодинамики в связи с необратимыми процессами в адиабатически изолированных системах. При этом, следуя установившимся традициям, мы удерживаем в разложении ΔS по степеням $x_1, x_2, \dots, x_n$ только квадратичные члены. После этого мы показываем, следуя методам интегрирования, развитым Пуанкаре, что рассмотрение всех членов в разложении ΔS не приводит к существенным изменениям в результатах.

1. Анализ феноменологических соотношений Онзагера

Заметим, прежде всего, что при каждой системе начальных значений $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ в адиабатически изолированных системах необходимо, чтобы $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_i(t) = 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Таким образом точка $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ является критической точкой интеграла системы дифференциальных уравнений:

$$dx_i / dt = L_{i1} X_1 + L_{i2} X_2 + \dots + L_{in} X_n \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n), \quad (4)$$

где $L_{ih} = L_{hi}$. Так как

$$X_i = g_{i1} x_1 + g_{i2} x_2 + \dots + g_{in} x_n,$$

то интеграл системы (4) линейных дифференциальных уравнений n -го порядка содержит n постоянных интегрирования, позволяющих произвольно выбрать начальные значения $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ независимых переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Этого, однако, недостаточно, чтобы интегралы данной системы имели физическое значение. Надо еще, чтобы $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_i(t) = 0$ при $t \rightarrow +\infty$ или, другими словами, чтобы точка $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ являлась общей точкой семейства интегральных кривых, т. е. чтобы в этой точке сходились все интегральные

Здесь $A, B, \dots, N$ — функции только от g_{ih} и не зависящие от $C_1, C_2, \dots, C_n$. Далее имеем

$$x'_i(t) = C_1 \eta_1 r_1 e^{r_1 t} + C_2 \eta_2 r_2 e^{r_2 t} + \dots + C_n \eta_n r_n e^{r_n t} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (14)$$

Исключая $C_1 e^{r_1 t}, C_2 e^{r_2 t}, \dots, C_n e^{r_n t}$ из уравнений (13) и (14), получаем

$$\begin{vmatrix} x'_i & \eta_1 r_1 & \eta_2 r_2 & \dots & \eta_n r_n \\ X_1 & A_1 & A_2 & \dots & A_n \\ X_2 & B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_n & N_1 & N_2 & \dots & N_n \end{vmatrix} = 0,$$

т. е.

$$x'_i = L_{i1} X_1 + L_{i2} X_2 + \dots + L_{in} X_n \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (15)$$

Таким образом феноменологические соотношения являются первыми интегралами системы (10). Здесь L_{ih} — постоянные величины, вполне определенные только коэффициентами g_{ih} .

Для $n = 2$, когда

$$X_1 = g_{11} x_1 + g_{12} x_2, \quad X_2 = g_{21} x_1 + g_{22} x_2,$$

имеем

$$d^2 x_1 / dt^2 = g_{11} x_1 + g_{12} x_2, \quad d^2 x_2 / dt^2 = g_{21} x_1 + g_{22} x_2. \quad (16)$$

Полагая

$$x_1 = e^{rt}, \quad x_2 = \beta e^{rt},$$

получаем

$$\begin{aligned} g_{11} - r^2 + g_{12} \beta &= 0, \\ g_{21} + (g_{22} - r^2) \beta &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Условие совместимости здесь имеет вид

$$\Delta(r^2) = \begin{vmatrix} g_{11} - r^2 & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} - r^2 \end{vmatrix} = 0$$

и, следовательно,

$$r_{1,2}^2 = \frac{g_{11} + g_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{g_{11} + g_{22}}{2}\right)^2 - (g_{11} g_{22} - g_{12}^2)}. \quad (18)$$

Так как $\sum g_{ih} x_i x_h$ ($i = 1, 2$) — положительно определенная квадратичная форма, то имеем

$$g_{11} > 0, \quad g_{22} > 0, \quad g_{11} g_{22} - g_{12}^2 > 0$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{g_{11} + g_{22}}{2}\right)^2 - (g_{11} g_{22} - g_{12}^2) < \left(\frac{g_{11} + g_{22}}{2}\right)^2.$$

С другой стороны,

$$\left(\frac{g_{11} + g_{22}}{2}\right)^2 - (g_{11} g_{22} - g_{12}^2) = \left(\frac{g_{11} - g_{22}}{2}\right)^2 + g_{12}^2 > 0,$$

так что

$$r_1^2 > 0, \quad r_2^2 > 0.$$

Следовательно, все корни уравнения $\Delta(r^2) = 0$ вещественны и

$$r_1 = -\sqrt{\left(\frac{g_{11} + g_{22}}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{g_{11} + g_{22}}{2}\right)^2 - (g_{11}g_{22} - g_{12}^2)} < 0, \quad r_3 = -r_1 > 0,$$

$$r_2 = -\sqrt{\left(\frac{g_{11} + g_{22}}{2}\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{g_{11} + g_{22}}{2}\right)^2 - (g_{11}g_{22} - g_{12}^2)} < 0, \quad r_4 = -r_2 > 0.$$

Полагая $C_3 = C_4 = 0$, имеем

$$x_1 = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, \quad x_2 = C_1 \beta_1 e^{r_1 t} + C_2 \beta_2 e^{r_2 t},$$

где β_1 и β_2 соответствуют корням r_1 и r_2 и определяются уравнениями (17).

Беря полученные значения x_1, x_2 и имея в виду (17), получаем

$$X_1 = C_1 e^{r_1 t} r_1^2 + C_2 e^{r_2 t} r_2^2,$$

$$X_2 = C_1 e^{r_1 t} \beta_1 r_1^2 + C_2 e^{r_2 t} \beta_2 r_2^2.$$

С другой стороны,

$$x_1' = C_1 e^{r_1 t} r_1 + C_2 e^{r_2 t} r_2,$$

$$x_2' = C_1 e^{r_1 t} \beta_1 r_1 + C_2 e^{r_2 t} \beta_2 r_2.$$

Исключая $C_1 e^{r_1 t}$ и $C_2 e^{r_2 t}$ из последних четырех уравнений, получаем

$$x_1' = L_{11} X_1 + L_{12} X_2, \quad x_2' = L_{21} X_1 + L_{22} X_2,$$

где

$$L_{12} = -\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2 (\beta_2 - \beta_1)}, \quad L_{21} = \frac{\beta_1 \beta_2 (r_2 - r_1)}{r_1 r_2 (\beta_2 - \beta_1)}.$$

Из уравнений (17) имеем

$$\beta_1 = -\frac{g_{11} - r_1^2}{g_{12}}, \quad \beta_2 = -\frac{g_{21}}{g_{22} - r_2^2};$$

следовательно,

$$\beta_1 \beta_2 = \frac{g_{11} - r_1^2}{g_{22} - r_2^2}.$$

С другой стороны, имея в виду (18), получаем

$$g_{11} - r_1^2 = \frac{g_{11} - g_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{g_{11} + g_{22}}{2}\right)^2 - (g_{11}g_{22} - g_{12}^2)},$$

$$g_{22} - r_2^2 = -\frac{g_{11} - g_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{g_{11} + g_{22}}{2}\right)^2 - (g_{11}g_{22} - g_{12}^2)}.$$

Следовательно,

$$\beta_1 \beta_2 = -1,$$

$$L_{12} = L_{21}.$$

Рассмотрим численный пример для $n = 3$, полагая

$$g_{11} = 5, \quad g_{12} = 1, \quad g_{13} = 3,$$

$$g_{21} = 1, \quad g_{22} = 4, \quad g_{23} = 2,$$

$$g_{31} = 3, \quad g_{32} = 2, \quad g_{33} = 6.$$

Соответственная квадратичная форма является положительно определенной, так как

$$g_{11} > 0, g_{22} > 0, g_{33} > 0, \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} g_{11} & g_{13} \\ g_{31} & g_{33} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} > 0, \\ \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} > 0.$$

Корнями алгебраического уравнения

$$\begin{vmatrix} g_{11} - r^2 & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} - r^2 & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} - r^2 \end{vmatrix} = 0,$$

как легко проверить, являются

$$r_1^2 = 9,4189, r_2^2 = 2,1944, r_3^2 = 3,3868,$$

так что

$$r_1 = -\sqrt{9,4189}, r_2 = -\sqrt{2,1944}, r_3 = -\sqrt{3,3868}.$$

Полагая $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$, получаем

$$\begin{aligned} \lg \beta_1 &= \bar{1},81185; & \lg \gamma_1 &= 0,09931; \\ \lg \beta_2 &= \bar{1},98156; & \lg \gamma_2 &= 0,07554 n; \\ \lg \beta_3 &= 0,14968 n; & \lg \gamma_3 &= \bar{2},82822 n; \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} L_{12} &= -\frac{r_1^2 r_2^2 r_3^2}{\Delta} 0,070; & L_{21} &= -\frac{r_1^2 r_2^2 r_3^2}{\Delta} 0,071; \\ L_{13} &= -\frac{r_1^2 r_2^2 r_3^2}{\Delta} 0,744; & L_{31} &= -\frac{r_1^2 r_2^2 r_3^2}{\Delta} 0,741; \\ L_{23} &= -\frac{r_1^2 r_2^2 r_3^2}{\Delta} 0,515; & L_{32} &= -\frac{r_1^2 r_2^2 r_3^2}{\Delta} 0,520; \end{aligned}$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 \\ r_1^2 \beta_1 & r_2^2 \beta_2 & r_3^2 \beta_3 \\ r_1^2 \gamma_1 & r_2^2 \gamma_2 & r_3^2 \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Симметрия тензора L_{ih} . Метод итерации

Симметрия тензора L_{ih} в интегралах рассматриваемой нами системы дифференциальных уравнений имеет место при меньших ограничительных условиях, чем ранее рассмотренные. Этим можно объяснить результаты, полученные некоторыми исследователями, которые исходили из феноменологических соотношений Онзагера, в которых не учитывается, что необходимо иметь $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_i(t) = 0$.

Еще Пьер Кюри [6], исходя из симметрии в структуре кристаллов, пришел к заключению, что «когда некоторые причины производят данное действие, то элементы симметрии причин встречаются и в произведенном этими причинами действии» и что «когда некоторые

эффекты обнаруживают известную асимметрию, то подобную асимметрию надо искать и в причинах, производящих эти эффекты».

В данном случае симметрия матрицы g_{ik} обуславливает симметрию матрицы L_{ik} .

Рассматривая систему (18), мы установили существование системы интегралов, удовлетворяющих условиям $\lim x_i(t) = 0$, $\lim x'_i(t) = 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Это является достаточным для установления феноменологических соотношений и симметрии матрицы L_{ik} , независимо от алгебраического рассмотрения.

Возьмем для простоты систему

$$d^2x/dt^2 = ax + by = X, \quad d^2y/dt^2 = bx + cy = Y, \quad (19)$$

где a, b, c — произвольные постоянные. Найдем интегралы этой системы, удовлетворяющие начальным условиям $t = 0$, $x' = 0$, $y' = 0$.

Метод итерации, которому мы следовали, является общим: он приложим для каждого n .

Интегрируя обе части первого из этих уравнений в пределах от 0 до t , полагая $x'(0) = 0$, $y'(0) = 0$, получаем

$$x'(t) = \int_0^t X dt = Xt - \int_0^t t \dot{X} dt = Xt - \frac{1}{2} \dot{X} t^2 + \frac{1}{2} \int_0^t t^2 \ddot{X} dt.$$

Но

$$\ddot{X} = a\ddot{x} + b\ddot{y} = aX + bY, \quad \ddot{Y} = b\ddot{x} + c\ddot{y} = bX + cY, \quad (20)$$

так что

$$\begin{aligned} x'(t) &= Xt - \frac{t^2}{2!} \dot{X} + \frac{1}{3!} \int_0^t (aX + bY) dt^3 = \\ &= Xt - \frac{t^2}{2!} \dot{X} + \frac{t^3}{3!} (aX + bY) - \frac{1}{3!} \int_0^t (a\dot{X} + b\dot{Y}) t^3 dt = \\ &= Xt - \frac{t^2}{2!} \dot{X} + \frac{t^3}{3!} (aX + bY) - \frac{t^4}{4!} (a\ddot{X} + b\ddot{Y}) + \frac{1}{4!} \int_0^t t^4 (a\ddot{X} + b\ddot{Y}) dt. \end{aligned}$$

Подставляя значения $\ddot{X}$ и $\ddot{Y}$ из (20) в последний интеграл и интегрируя по частям, после некоторых упрощений, имея в виду, что $\dot{X} = ax + by$, $\dot{Y} = bx + cy$, получаем

$$\begin{aligned} &\left(1 + \frac{a}{2!} t^2 + \frac{a^2 + b^2}{4!} t^4\right) \frac{dx}{dt} + \left(\frac{b}{2!} t^2 + \frac{b(a+c)}{4!} t^4\right) \frac{dy}{dt} = \\ &= \left(t + \frac{a}{3!} t^3 + \frac{a^2 + b^2}{5!} t^5\right) X + \left(\frac{b}{3!} t^3 + \frac{b(a+c)}{5!} t^5\right) Y - \\ &\quad - \frac{a^2 + b^2}{5!} \int_0^t t^5 \dot{X} dt - \frac{b(a+c)}{5!} \int_0^t t^5 \dot{Y} dt. \end{aligned} \quad (21a)$$

Процесс итерации надо продолжать до бесконечности.

Таким же образом из второго уравнения получаем

$$\begin{aligned} &\left(\frac{b}{2!} t^2 + \frac{b(a+c)}{4!} t^4\right) \frac{dx}{dt} + \left(1 + \frac{c}{2!} t^2 + \frac{b^2 + c^2}{4!} t^4\right) \frac{dy}{dt} = \\ &= \left(\frac{b}{3!} t^3 + \frac{b(a+c)}{5!} t^5\right) X + \left(t + \frac{c}{3!} t^3 + \frac{b^2 + c^2}{5!} t^5\right) Y - \\ &\quad - \frac{b(a+c)}{5!} \int_0^t t^5 \dot{X} dt - \frac{b^2 + c^2}{5!} \int_0^t t^5 \dot{Y} dt. \end{aligned} \quad (21b)$$

Исследование сходимости рядов

Для установления сходимости полученных рядов рассмотрим мажорантную систему дифференциальных уравнений:

$$d^2x/dt^2 = p(x+y) = X, \quad d^2y/dt^2 = p(x+y) = Y, \quad (A)$$

где p — самое большое из чисел $|a|$, $|b|$, $|c|$.

Поступая с системой (A) таким же образом, как мы поступили с системой (19), получаем

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{p}{2!}t^2 + \frac{2p^2}{4!}t^4 + \frac{2^2p^3}{6!}t^6 + \dots + \frac{2^{n-1}p^n}{(2n)!}t^{2n}\right) \frac{dx}{dt} + \\ & + \left(\frac{p}{2!}t^2 + \frac{2p^2}{4!}t^4 + \frac{2^2p^3}{6!}t^6 + \dots + \frac{2^{n-1}p^n}{(2n)!}t^{2n}\right) \frac{dy}{dt} = \\ & = \left(t + \frac{p}{3!}t^3 + \frac{2p^2}{5!}t^5 + \dots + \frac{2^{n-2}}{(2n-1)!}p^{n-1}t^{2n-1}\right) X + \\ & + \left(\frac{p}{3!}t^3 + \frac{2p^2}{5!}t^5 + \dots + \frac{2^{n-2}}{(2n-1)!}p^{n-1}t^{2n-1}\right) Y + \frac{2^{n-1}}{(2n)!}p^n \int_0^t t^{2n}(X+Y) dt. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь для каждого конечного значения t

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}p^n}{(2n)!} \int_0^t t^{2n}(X+Y) dt = 0.$$

Так как отношение $(n+1)$ -го к n -му члену в каждом ряду стремится к нулю как $1/n$, то ряды, встречающиеся в коэффициентах в наших уравнениях, быстро сходятся для каждого конечного значения t ; следовательно, коэффициенты в формулах (21) тоже сходятся. Напишем эти формулы в виде

$$A \frac{dx}{dt} + B \frac{dy}{dt} = \alpha X + \beta Y, \quad B \frac{dx}{dt} + C \frac{dy}{dt} = \beta X + \gamma Y, \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} A &= 1 + \frac{a}{2!}t^2 + \frac{a^2 + b^2}{4!}t^4 + \dots, \quad \alpha = t + \frac{a}{3!}t^3 + \frac{a^2 + b^2}{5!}t^5 + \dots, \\ B &= \frac{b}{2!}t^2 + \frac{b(a+c)}{4!}t^4 + \dots, \quad \beta = \frac{b}{3!}t^3 + \frac{b(a+c)}{5!}t^5 + \dots, \\ C &= 1 + \frac{c}{2!}t^2 + \frac{b^2 + c^2}{4!}t^4 + \dots, \quad \gamma = t + \frac{c}{3!}t^3 + \frac{b^2 + c^2}{5!}t^5 + \dots \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь

$$AC - B^2 = 1 + \frac{a+c}{2!}t^2 + \dots \neq 0$$

и, следовательно,

$$dx/dt = L_{11}X + L_{12}Y, \quad dy/dt = L_{21}X + L_{22}Y, \quad (25)$$

где

$$L_{11} = \frac{C\alpha + B\beta}{AC - B^2}, \quad L_{12} = \frac{C\beta - B\gamma}{AC - B^2}, \quad L_{21} = \frac{A\beta - B\alpha}{AC - B^2}, \quad L_{22} = \frac{A\gamma - B\beta}{AC - B^2}. \quad (26)$$

Простые вычисления показывают, что

$$C\beta - B\gamma = A\beta - B\alpha \quad (27)$$

При помощи линейной подстановки можно переписать эту систему в виде

$$\frac{du_1}{r_1 u_1 + \dots} = \frac{du_2}{r_2 u_2 + \dots} = \dots = \frac{du_n}{r_n u_n + \dots} = \dots = \frac{du_{2n}}{r_{2n} u_{2n} + \dots} = dt, \quad (2.4)$$

где точки стоят на месте членов второй и высших степеней u_i и где $r_1, r_2, \dots, r_n, r_{n+1}, \dots, r_{2n}$ — корни уже рассмотренного алгебраического уравнения степени $2n$

$$\begin{vmatrix} g_{11} - r_1^2 & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn} - r^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.5)$$

Как мы уже видели, n корней $r_1, r_2, \dots, r_n$ этого уравнения отрицательные и n корней $r_{n+1}, r_{n+2}, \dots, r_{2n}$ — положительные.

Пуанкаре [7] показал, что такая система дифференциальных уравнений обладает совокупностью голоморфных интегралов от $e^{r_1 t}, e^{r_2 t}, \dots, e^{r_{2n} t}$

$$u_i(t) = \psi_i(e^{r_1 t}, e^{r_2 t}, \dots, e^{r_{2n} t}) \quad (i = 1, 2, \dots, 2n), \quad (2.6)$$

стремящихся к нулю при $t \rightarrow +\infty$ и содержащих n постоянных интегрирования. Этой системе соответствуют, следовательно, интегралы

$$x_i(t) = \psi_i(e^{r_1 t}, e^{r_2 t}, \dots, e^{r_{2n} t}), \quad (2.7)$$

$$\xi_i(t) = \omega_i(e^{r_1 t}, e^{r_2 t}, \dots, e^{r_{2n} t}) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где $\omega_i = d\psi_i/dt$, а ψ_i и ω_i — голоморфные функции $e^{r_1 t}, e^{r_2 t}, \dots, e^{r_{2n} t}$, стремящиеся к нулю при $t \rightarrow +\infty$ и содержащие n постоянных интегрирования, позволяющих выбрать произвольно начальные значения $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$.

В нашем случае все необходимые для этого условия выполнены.

Рассмотрим для простоты случай $n = 2$. Полагая $x_1 = x, x_2 = y$, $g_{11} = a, g_{12} = g_{21} = b, g_{22} = c$ и имея в виду, что $F_{xy}^2 = F_{yx}^2$, будем иметь

$$\begin{aligned} d^2x/dt^2 &= ax + by + ex^2 + 2fxy + gy^2 + \dots = X, \\ d^2y/dt^2 &= bx + cy + fx^2 + 2gxy + hy^2 + \dots = Y. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Так как $ax^2 + 2bxy + cy^2$ — положительно определенная квадратичная форма, то

$$a > 0, c > 0, ac - b^2 > 0.$$

Этой системе соответствует система:

$$\frac{dx}{dt} = \xi = \Xi; \quad \frac{dy}{dt} = \eta = \Pi; \quad \frac{d\xi}{dt} = X; \quad \frac{d\eta}{dt} = Y, \quad (2.8')$$

и эквивалентное дифференциальное уравнение в частных производных:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \Xi + \frac{\partial F}{\partial \xi} X + \frac{\partial F}{\partial y} \Pi + \frac{\partial F}{\partial \eta} Y = 0. \quad (2.9)$$

Линейная подстановка

$$\begin{aligned} u &= \alpha_{11}\xi + \alpha_{12}x + \alpha_{13}\eta + \alpha_{14}y; \quad w = \alpha_{31}\xi + \alpha_{32}x + \alpha_{33}\eta + \alpha_{34}y, \\ v &= \alpha_{21}\xi + \alpha_{22}x + \alpha_{23}\eta + \alpha_{24}y; \quad z = \alpha_{41}\xi + \alpha_{42}x + \alpha_{43}\eta + \alpha_{44}y \end{aligned} \quad (2.10)$$

приводит к системе:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \xi} &= \frac{\partial F}{\partial u} \alpha_{11} + \frac{\partial F}{\partial v} \alpha_{21} + \frac{\partial F}{\partial w} \alpha_{31} + \frac{\partial F}{\partial z} \alpha_{41}, \\ \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial u} \alpha_{12} + \frac{\partial F}{\partial v} \alpha_{22} + \frac{\partial F}{\partial w} \alpha_{32} + \frac{\partial F}{\partial z} \alpha_{42}, \\ \frac{\partial F}{\partial \eta} &= \frac{\partial F}{\partial u} \alpha_{13} + \frac{\partial F}{\partial v} \alpha_{23} + \frac{\partial F}{\partial w} \alpha_{33} + \frac{\partial F}{\partial z} \alpha_{43}, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial F}{\partial u} \alpha_{14} + \frac{\partial F}{\partial v} \alpha_{24} + \frac{\partial F}{\partial w} \alpha_{34} + \frac{\partial F}{\partial z} \alpha_{44}, \end{aligned}$$

и к уравнению

$$\begin{aligned} &\frac{\partial F}{\partial u} (\alpha_{11}X + \alpha_{12}\Xi + \alpha_{13}Y + \alpha_{14}H) + \\ &+ \frac{\partial F}{\partial v} (\alpha_{21}X + \alpha_{22}\Xi + \alpha_{23}Y + \alpha_{24}H) + \\ &+ \frac{\partial F}{\partial w} (\alpha_{31}X + \alpha_{32}\Xi + \alpha_{33}Y + \alpha_{34}H) + \\ &+ \frac{\partial F}{\partial z} (\alpha_{41}X + \alpha_{42}\Xi + \alpha_{43}Y + \alpha_{44}H) = 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Выбираем α_{ih} так, чтобы после приведения получить

$$\frac{\partial F}{\partial u} (r_1 u_1 + \dots) + \frac{\partial F}{\partial v} (r_2 v + \dots) + \frac{\partial F}{\partial w} (r_3 w + \dots) + \frac{\partial F}{\partial z} (r_4 z + \dots) = 0, \quad (2.12)$$

где точки означают члены высшего порядка малости; для этого надо иметь

$$\begin{aligned} \alpha_{11}X_1 + \alpha_{12}\Xi + \alpha_{13}Y_1 + \alpha_{14}H &= r_1 u = r_1 (\alpha_{11}\xi + \alpha_{12}x + \alpha_{13}\eta + \alpha_{14}y), \\ \alpha_{21}X_1 + \alpha_{22}\Xi + \alpha_{23}Y_1 + \alpha_{24}H &= r_2 v = r_2 (\alpha_{21}\xi + \alpha_{22}x + \alpha_{23}\eta + \alpha_{24}y), \\ \alpha_{31}X_1 + \alpha_{32}\Xi + \alpha_{33}Y_1 + \alpha_{34}H &= r_3 w = r_3 (\alpha_{31}\xi + \alpha_{32}x + \alpha_{33}\eta + \alpha_{34}y), \\ \alpha_{41}X_1 + \alpha_{42}\Xi + \alpha_{43}Y_1 + \alpha_{44}H &= r_4 z = r_4 (\alpha_{41}\xi + \alpha_{42}x + \alpha_{43}\eta + \alpha_{44}y), \end{aligned} \quad (2.13)$$

где X_1 и Y_1 — величины X и Y , в которых учтены члены первой степени. Таким образом получаем

$$\begin{aligned} \alpha_{i1}a - \alpha_{i2}r_i + \alpha_{i3}b + \alpha_{i4}0 &= 0, \\ -\alpha_{i1}r_i + \alpha_{i2}1 + \alpha_{i3}0 + \alpha_{i4}0 &= 0, \\ \alpha_{i1}b + \alpha_{i2}0 + \alpha_{i3}c - \alpha_{i4}r_i &= 0, \\ \alpha_{i1}0 + \alpha_{i2}0 - \alpha_{i3}r_i + \alpha_{i4}1 &= 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Для совместности этой однородной системы по α_{ih} надо иметь

$$\begin{vmatrix} a & -r_i & b & 0 \\ -r_i & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & c - r_i & \\ 0 & 0 & -r_i & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a - r_i^2 & b \\ b & c - r_i^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.15)$$

Мы видели в (18), что корни этого уравнения четвертой степени действительные, причем

$$r_1 < r_2 < 0, \quad r_3 = -r_1, \quad r_4 = -r_2. \quad (2.16)$$

Этим корням соответствуют коэффициенты α_{ih} , которые, полагая $\alpha_{ij} = 1$, имеют следующие значения:

$$\alpha_{i2} = r_i = \beta_i, \quad \alpha_{i3} = (r_i^2 - a) / b = \alpha_i, \quad \alpha_{i4} = r_i \alpha_i = \gamma_i.$$

Как мы уже сказали, стремящиеся к нулю при $t \rightarrow +\infty$ интегралы уравнений (2.11) являются голоморфными функциями от $k_1 e^{r_1 t}$ и $k_2 e^{r_2 t}$, где постоянные k_1 и k_2 достаточно малы. Эти интегралы можно разложить в ряды по степеням $k_1 e^{r_1 t}$ и $k_2 e^{r_2 t}$. Сходимость этих рядов при $t \rightarrow \infty$ исследовали Пуанкаре [7] и позже Пикард [8].

Перейдем к рассмотрению уравнения (2.9) и подстановок (2.10). Так как детерминант из коэффициентов x, y, ξ, η в (2.10) отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} 1 & r_1 & \alpha_1 & \gamma_1 \\ 1 & r_2 & \alpha_2 & \gamma_2 \\ 1 & r_3 & \alpha_3 & \gamma_3 \\ 1 & r_4 & \alpha_4 & \gamma_4 \end{vmatrix} = -4r_1 r_2 (\alpha_1 - \alpha_2)^2 \neq 0, \quad (2.18)$$

то подстановки (2.10) определяют x, y, ξ, η как линейные функции от u, v, w, z , стремящиеся к нулю вместе с ними. Следовательно, интегралы $x, y, \xi = x', \eta = y'$ уравнений (2.8), стремящиеся к нулю при $t = +\infty$, можно представить рядами по степеням $e^{r_1 t}, e^{r_2 t}$, сходящимися для $t = +\infty$. Таким образом имеем

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 k_1 e^{r_1 t} + C_2 k_2 e^{r_2 t} + C_3 k_1^2 e^{2r_1 t} + C_4 k_1 k_2 e^{(r_1+r_2)t} + C_5 k_2^2 e^{2r_2 t} + \dots, \\ y(t) &= G_1 k_1 e^{r_1 t} + G_2 k_2 e^{r_2 t} + G_3 k_1^2 e^{2r_1 t} + G_4 k_1 k_2 e^{(r_1+r_2)t} + G_5 k_2^2 e^{2r_2 t} + \dots, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= C_1 k_1 r_1^2 e^{r_1 t} + C_2 k_2 r_2^2 e^{r_2 t} + C_3 k_1^2 4r_1^2 e^{2r_1 t} + \\ &+ C_4 k_1 k_2 (r_1 + r_2)^2 e^{(r_1+r_2)t} + C_5 k_2^2 4r_2^2 e^{2r_2 t} + \dots, \end{aligned}$$

и аналогичное выражение для $y''(t)$, где вместо коэффициентов C стоят коэффициенты G .

Значения этих коэффициентов можно найти методом неопределенных коэффициентов, подставляя в X и Y данные выше выражения для x и y .

Таким образом получаем

$$\begin{aligned} X &= ax + by + ex^2 + 2fxy + gy^2 + \dots = \\ &= k_1 (aC_1 + bG_1) e^{r_1 t} + k_2 (aC_2 + bG_2) e^{r_2 t} + \\ &+ k_1^2 (aC_3 + bG_3 + eC_1^2 + 2fC_1G_1 + gG_1^2) e^{2r_1 t} + \\ &+ k_1 k_2 [aC_4 + bG_4 + 2eC_1C_3 + 2f(C_1G_2 + C_2G_1) + 2gG_1G_2] e^{(r_1+r_2)t} + \\ &+ k_2^2 (aC_5 + bG_5 + eC_2^2 + 2fC_2G_2 + gG_2^2) e^{2r_2 t} + \dots; \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} Y &= k_1 (bC_1 + cG_1) e^{r_1 t} + k_2 (bC_2 + cG_2) e^{r_2 t} + \\ &+ k_1^2 (bC_3 + cG_3 + fC_1^2 + 2gC_1G_1 + hG_1^2) e^{2r_1 t} + \\ &+ k_1 k_2 [bC_4 + cG_4 + 2fC_1C_2 + 2g(C_1G_2 + C_2G_1) + 2hG_1G_2] e^{(r_1+r_2)t} + \\ &+ k_2^2 (bC_5 + cG_5 + fC_2^2 + 2gC_2G_2 + hG_2^2) e^{2r_2 t} + \dots \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $e^{r_1 t}$ и $e^{r_2 t}$ в выражениях X и $d^2 X/dt^2$, а также в выражениях Y и $d^2 y/dt^2$, получаем, прежде всего,

$$\begin{aligned} C_1(r_1^2 - a) - bG_1 &= 0, & -bC_1 + (r_1^2 - c)G_1 &= 0, \\ C_2(r_2^2 - a) - bG_2 &= 0, & -bC_2 + (r_2^2 - c)G_2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Первые два из этих уравнений дают два значения для G_1 :

$$G_1 = C_1 \frac{r_1^2 - a}{b} \quad \text{и} \quad G_1 = C_1 \frac{b}{r_1^2 - c}, \quad (2.22)$$

которые равны между собою, так как $(r_1^2 - a)(r_1^2 - c) = b^2$. С другой стороны

$$(r_1^2 - a)/b = \alpha_1,$$

и, следовательно, $G_1 = C_1 \alpha_1$. Таким же образом из последних двух уравнений (2.21) получаем

$$G_2 = C_2 \alpha_2.$$

Сравнение коэффициентов перед $e^{2r_1 t}$, $e^{(r_1+r_2)t}$, $e^{2r_2 t}$ приводит к следующим уравнениям для определения C_i , G_i :

$$\begin{aligned} C_3(4r_1^2 - a) - G_3b &= eC_1^2 + 2fC_1G_1 + gG_1^2, \\ -C_3b + G_3(4r_1^2 - c) &= fC_1^2 + 2gC_1G_1 + hG_1^2, \\ C_4[(r_1 + r_2)^2 - a] - G_4b &= 2eC_1C_2 + 2f(C_1G_2 + C_2G_1) + 2gG_1G_2, \\ -C_4b + [(r_1 + r_2)^2 - c]G_4 &= 2fC_1C_2 + 2g(C_1G_2 + C_2G_1) + 2hG_1G_2, \\ C_5(4r_2^2 - a) - G_5b &= eC_2^2 + 2fC_2G_2 + gG_2^2, \\ -C_5b + G_5(4r_2^2 - c) &= fC_2^2 + 2gC_2G_2 + hG_2^2. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Сходимость полученных таким образом рядов дается самим методом Пуанкаре [7], изложенным также в [8].

Феноменологические соотношения в общем случае

Чтобы показать, что феноменологические соотношения и в общем случае следуют из уравнений:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = X = \frac{\partial(-\Delta S)}{\partial x}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = Y = \frac{\partial(-\Delta S)}{\partial y}, \quad (2.8'')$$

напишем интегралы (2.19), сохраняя члены до второй степени по k_1 и k_2 в виде

$$\begin{aligned} x &= e^{r_1 t} k_1 C_1 \left(1 + C'_3 k_1 e^{r_1 t} + \frac{1}{2} C'_4 k_2 e^{r_2 t} \right) + \\ &+ e^{r_2 t} k_2 C_2 \left(1 + \frac{1}{2} C''_4 k_1 e^{r_1 t} + C''_5 k_2 e^{r_2 t} \right), \\ y &= e^{r_1 t} k_1 G_1 \left(1 + G'_3 k_1 e^{r_1 t} + \frac{1}{2} G'_4 k_2 e^{r_2 t} \right) + \\ &+ e^{r_2 t} k_2 G_2 \left(1 + \frac{1}{2} G''_4 k_1 e^{r_1 t} + G''_5 k_2 e^{r_2 t} \right), \end{aligned} \quad (2.24)$$

где

$$C'_i = \frac{C_i}{C_1}, \quad C''_i = \frac{C_i}{C_2}, \quad G'_i = \frac{G_i}{G_1}, \quad G''_i = \frac{G_i}{G_2}. \quad (2.25)$$

Так как

$$G_1 = C_1 \alpha_1, \quad G_2 = C_2 \alpha_2,$$

то можно написать

$$x = e^{r_1 t} k_1 C_1 (1 + \lambda) + e^{r_2 t} k_2 C_2 (1 + \mu),$$

$$y = e^{r_1 t} k_1 C_1 \alpha_1 (1 + \rho) + e^{r_2 t} k_2 C_2 \alpha_2 (1 + \pi); \quad (2.26)$$

$$x' = e^{r_1 t} k_1 C_1 r_1 (1 + \lambda_1) + e^{r_2 t} k_2 C_2 r_2 (1 + \mu_1), \quad (2.27)$$

$$y' = e^{r_1 t} k_1 C_1 r_1 \alpha_1 (1 + \rho_1) + e^{r_2 t} k_2 C_2 r_2 \alpha_2 (1 + \pi_1),$$

где $\lambda, \mu, \rho, \pi, \lambda_1, \mu_1, \rho_1, \pi_1$ содержат k_1 и k_2 в качестве множителей первой степени.

Подставляя в (2.27) вместо $e^{r_1 t}, e^{r_2 t}$ их значения из (2.26), получаем

$$x' \delta = x [r_1 \alpha_2 (1 + \pi) (1 + \lambda_1) - r_2 \alpha_1 (1 + \rho) (1 + \mu_1)] + \\ + y [r_2 (1 + \lambda) (1 + \mu_1) - r_1 (1 + \mu) (1 + \lambda_1)], \quad (2.28)$$

$$y' \delta = x [r_1 \alpha_1 \alpha_2 (1 + \pi) (1 + \rho_1) - r_2 \alpha_1 \alpha_2 (1 + \rho) (1 + \pi_1)] + \\ + y [r_2 \alpha_2 (1 + \lambda) (1 + \pi_1) - r_1 \alpha_1 (1 + \mu) (1 + \rho_1)],$$

где

$$\delta = (1 + \lambda) (1 + \pi) \alpha_2 - (1 + \mu) (1 + \rho) \alpha_1. \quad (2.29)$$

Феноменологические соотношения получим непосредственно из (2.28), выражая x и y через X и Y .

Так как

$$X = xL + yM, \quad Y = xM + yN, \quad (2.30)$$

где

$$L = a + ex + fy, \quad M = b + fx + gy, \quad N = c + gx + hy,$$

получаем

$$x\Delta = XN - YM, \quad y\Delta = -XM + YL; \quad (2.31)$$

здесь

$$\Delta = LN - M^2.$$

При этих значениях x и y соотношения (2.28) можно написать в виде

$$x' \delta \Delta = X \{N [r_1 \alpha_2 (1 + \pi) (1 + \lambda_1) - r_2 \alpha_1 (1 + \rho) (1 + \mu_1)] - \\ - M [r_2 (1 + \lambda) (1 + \mu_1) - r_1 (1 + \mu) (1 + \lambda_1)]\} + \\ + Y \{L [r_2 (1 + \lambda) (1 + \mu_1) - r_1 (1 + \mu) (1 + \lambda_1)] - \\ - M [r_1 \alpha_2 (1 + \pi) (1 + \rho_1) - r_2 \alpha_1 (1 + \rho) (1 + \pi_1)]\} = AX + BY; \\ y' \delta \Delta = X \{N [r_1 \alpha_1 \alpha_2 (1 + \pi) (1 + \rho_1) - r_2 \alpha_1 \alpha_2 (1 + \rho) (1 + \pi_1)] - \\ - M [r_2 \alpha_2 (1 + \lambda) (1 + \pi_1) - r_1 \alpha_1 (1 + \mu) (1 + \rho_1)]\} + \\ + Y \{L [r_2 \alpha_2 (1 + \lambda) (1 + \pi_1) - r_1 \alpha_1 (1 + \mu) (1 + \rho_1)] - \\ - M [r_1 \alpha_1 \alpha_2 (1 + \pi) (1 + \rho_1) - r_2 \alpha_1 \alpha_2 (1 + \rho) (1 + \pi_1)]\} = DX + CY. \quad (2.32)$$

Покажем теперь, что для рассматриваемого нами общего случая мы имеем почти симметричный тензор L_{ik} , т. е. что D и B различаются только членами, содержащими $k_1 e^{r_1 t}, k_2 e^{r_2 t}$ (иными словами, членами, стремящимися к нулю при $t = +\infty$). Действительно, сохраняя в выражениях для B и D только члены, не содержащие k_1 и k_2 в явном

или в неявном виде, мы имели бы

$$L = a, \quad M = b, \quad N = c$$

и, следовательно, имея в виду значения α_1, α_2 ,

$$\begin{aligned} B &= a(r_2 - r_1) - b(r_1\alpha_2 - r_2\alpha_1) = \\ &= a(r_2 - r_1) - [r_1(r_2^2 - a) - r_2(r_1^2 - a)] = r_1r_2(r_1 - r_2) \end{aligned} \quad (2.33)$$

и

$$D = c(r_1\alpha_1\alpha_2 - r_2\alpha_1\alpha_2) - b(r_2\alpha_2 - r_1\alpha_1). \quad (2.34)$$

Но $c\alpha_1 = \alpha_1r_1^2 - b$, $c\alpha_2 = \alpha_2r_2^2 - b$, так что

$$D = \alpha_1\alpha_2(r_2 - r_1)r_1r_2.$$

С другой стороны,

$$\alpha_1\alpha_2 = \frac{(r_1^2 - a)(r_2^2 - a)}{b^2} = \frac{r_1^2r_2^2 - a(r_1^2 + r_2^2) + a^2}{b^2} = -1$$

и, следовательно,

$$D = r_1r_2(r_1 - r_2) = B, \quad (2.35)$$

т. е. $L_{12} = L_{21}$ с точностью до членов, содержащих k_1 и k_2 в первой степени и стремящихся к нулю с возрастанием t .

Общие свойства интегралов системы уравнений (2.2)

Рассмотрим систему

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{\partial(-\Delta S)}{\partial x_i} = X_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2.2')$$

где ΔS взято в самом общем виде. Так как

$$\delta(-\Delta S) = \sum_i \frac{\partial(-\Delta S)}{\partial x_i} \delta x_i = \sum_i X_i \delta x_i,$$

имеем

$$\frac{d}{dt}(-\Delta S) = \sum_i X_i x'_i. \quad (2.36)$$

С другой стороны, из (2.2') и (2.36) получаем

$$\sum_i x'_i \frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_i (x'_i)^2 = \sum_i X_i x'_i = \frac{d}{dt}(-\Delta S);$$

следовательно,

$$\frac{x_1'^2 + x_2'^2 + \dots + x_n'^2}{2} + \Delta S = \text{const.} \quad (2.37)$$

При необратимых термодинамических процессах $\lim x'_i(t) = 0$ и $\lim x_i(t) = 0$ при $t \rightarrow +\infty$ и, следовательно, при этих процессах

$$\frac{1}{2}(x_1'^2 + x_2'^2 + \dots + x_n'^2) + \Delta S = 0. \quad (2.38)$$

Так как $|r_i| = +\sqrt{\lambda_i}$, получаем

$$0 < |r_1| < |r_2| < \dots < |r_n|.$$

Следовательно, можно написать интегралы системы (12) в виде:

$$x_i = C_1 \eta_1 e^{r_i t} \left[1 + \frac{C_2 \eta_2}{C_1 \eta_1} e^{(r_2 - r_1)t} + \dots + \frac{C_n \eta_n}{C_1 \eta_1} e^{(r_n - r_1)t} \right] \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

и интегралы системы (2.42) в виде:

$$x_i = C_1 \eta_1 e^{-\lambda_i t} \left[1 + \frac{C_2 \eta_2}{C_1 \eta_1} e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)t} + \dots + \frac{C_n \eta_n}{C_1 \eta_1} e^{-(\lambda_n - \lambda_1)t} \right].$$

Но так как $r_j - r_1 < 0$ и $-(\lambda_j - \lambda_1) < 0$ при $(j = 2, 3, \dots, n)$ то $e^{(r_j - r_1)t}$ и $e^{-(\lambda_j - \lambda_1)t}$ при $t > 0$ очень малы и стремятся к нулю с возрастанием t . Поэтому главные значения интегралов первой системы $x_i(t) = C_1 \eta_1 e^{r_i t}$ и второй системы $x_i(t) = C_1 \eta_1 e^{-\lambda_i t}$, т. е. интегральные кривые обеих систем почти совпадают, но движение точки $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по этим кривым происходит с различной скоростью. В первом случае имеем приблизительно $x'_i = C_1 \eta_1 r_i e^{r_i t}$, а во втором случае $x'_i = -C_1 \eta_1 \lambda_i e^{-\lambda_i t}$.

3. Приложение общей теории к конкретным проблемам

Передача тепла от одной системы к другой

Мы покажем, что гипотеза Фурье, относящаяся к передаче тепла от одной системы к другой, следует из нашей общей теории о необратимых термодинамических процессах.

Рассмотрим систему, состоящую из двух планок, представляющих собой две плоские тонкие круглые пластинки, которые находятся в термическом контакте своими основаниями и адиабатически изолированы от остального мира. При этом в дальнейшем изложении будем пренебрегать работой термического расширения. Обозначим через m_1 массу, относящуюся к единице плоскости контакта, T_1 — абсолютную температуру, c_1 — удельную теплоемкость первой пластинки; m_2 , T_2 , c_2 — соответствующие величины второй пластинки, T_0 — общую температуру системы после установления термического равновесия. Мы допускаем, что эти пластинки не толстые, чтобы можно было считать в любой момент температуру во всех точках каждой из двух пластинок одинаковой.

Обозначим через Q_1 количество тепла, отнесенное к единице плоскости контакта, которое должна получить первая пластинка от второй, чтобы система пришла в состояние термического равновесия ($T_1 = T_0$), и через Q_2 — соответственное количество тепла, которое нужно получить второй пластинке от первой.

Здесь

$$Q_1 = m_1 c_1 (T_1 - T_0) = m_1 c_1 \Delta T_1, \quad Q_2 = m_2 c_2 (T_2 - T_0) = m_2 c_2 \Delta T_2, \quad (3.1)$$

$$Q_1 + Q_2 = 0. \quad (3.2)$$

Следовательно,

$$m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2 = T_0 (m_1 c_1 + m_2 c_2), \quad (3.3)$$

$$Q_1 = \frac{m_1 c_1 m_2 c_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2} (T_1 - T_2). \quad (3.4)$$

Таким образом в данный момент t для энтропии ΔS , отнесенной к единице плоскости термического контакта, удерживая только члены второй степени, получаем

$$\Delta S = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = -\frac{T_1 - T_2}{T_0^2} Q_1 = -\frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 c_1 m_2 c_2} \frac{Q_1^2}{T_0^2}. \quad (3.5)$$

Здесь

$$\frac{\partial(-\Delta S)}{\partial Q_1} = \frac{2}{T_0^2} \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 c_1 m_2 c_2} Q_1 = a Q_1, \quad (3.6)$$

где $a \geq 0$.

Таким образом мы имеем одно единственное уравнение

$$d^2 Q_1 / dt^2 = a Q_1, \quad (3.7)$$

интеграл которого $Q_1 = C a^{rt}$.

Подставляя это значение Q_1 в (3.7) и имея в виду, что $a \geq 0$, получаем

$$r^2 = a, \quad r_{1,2} = \pm \sqrt{a}.$$

Здесь только $-\sqrt{a}$ относится к физической проблеме, так как $\lim Q_1 = 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Следовательно,

$$Q_1 = C e^{-\sqrt{a} t}, \quad (3.8)$$

$$\dot{Q}_1 = -\sqrt{a} C e^{-\sqrt{a} t} = -\sqrt{a} Q_1,$$

где $C = Q_1^0$ — значение Q_1 для начального момента $t = 0$. Имея в виду значения Q_1 из (3.4) и значения a , получаем для «потока тепла» $\dot{Q}_1$ формулу Фурье:

$$\dot{Q}_1 = -\frac{1}{T_0} \sqrt{\frac{2 m_1 c_1 m_2 c_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}} (T_1 - T_2). \quad (3.9)$$

До сих пор мы допускали, что в каждый момент температура каждой из двух планок всюду одна и та же. Но даже при очень малой толщине температура каждой планки, являющаяся непрерывной функцией расстояния вдоль оси, должна иметь различные значения на обоих основаниях каждой из планок. Таким образом для энтропии получаются различные значения, когда в формуле (3.5) берется одна или другая температура. Эта разница, впрочем, весьма невелика, так как разница температур на основаниях планок ничтожна. Энтропия каждой планки будет соответствовать одной средней температуре, зависящей от теплопроводности планки. Обозначая через T_1 и T_2 экстремальные температуры в данный момент для каждой планки и через T_0 температуру при термическом равновесии, полагаем

$$\Delta T_1 = T_1 - T_0, \quad \Delta T_2 = T_2 - T_0;$$

при этом надо положить для средней температуры в момент t в каждой из двух планок

$$T_0 + \lambda_1 \Delta T_1, \quad T_0 + \lambda_2 \Delta T_2,$$

где λ_1 и λ_2 зависят от теплопроводности планок и очень мало отличаются от единицы. Таким образом имеем

$$Q_1 = m_1 c_1 \lambda_1 \Delta T_1, \quad Q_2 = m_2 c_2 \lambda_2 \Delta T_2, \quad Q_1 + Q_2 = 0,$$

что дает

$$Q_1 = \frac{m_1 c_1 \lambda_1 m_2 c_2 \lambda_2}{m_1 c_1 \lambda_1 + m_2 c_2 \lambda_2} (T_1 - T_2), \quad (3.11)$$

$$\frac{Q_1}{m_1 c_1} = \lambda_1 \Delta T_1, \quad \frac{Q_2}{m_2 c_2} = \frac{-Q_1}{m_2 c_2} = \lambda_2 \Delta T_2,$$

$$\lambda_2 \Delta T_2 - \lambda_1 \Delta T_1 = -Q_1 \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 c_1 m_2 c_2}, \quad \Delta S = \frac{Q_1}{T_0 + \lambda_1 \Delta T_1} + \frac{Q_2}{T_0 + \lambda_2 \Delta T_2}. \quad (3.12)$$

Ограничиваясь только членами второй степени, получаем

$$\Delta S = \frac{\lambda_2 \Delta T_2 - \lambda_1 \Delta T_1}{T_0^2} Q_1 = - \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 c_1 m_2 c_2} \frac{Q_1^2}{T_0^2},$$

$$\frac{d(-\Delta S)}{dQ_1} = 2 \frac{(m_1 c_1 + m_2 c_2)}{m_1 c_1 m_2 c_2} \frac{Q_1}{T_0^2} = a Q_1.$$

Следуя методу вычисления, изложенному выше, получаем окончательно

$$\dot{Q}_1 = - \sqrt{\frac{2(m_1 c_1 + m_2 c_2)}{m_1 c_1 m_2 c_2}} \frac{m_1 c_1 \lambda_1 m_2 c_2 \lambda_2}{m_1 c_1 \lambda_1 + m_2 c_2 \lambda_2} \frac{T_1 - T_2}{T_0}.$$

Распространение тепла в однородном стержне

Рассмотрим распространение тепла в цилиндрическом стержне с плотностью ρ и с удельной теплоемкостью c , вся боковая поверхность которого окружена изолирующей теплоту оболочкой. Мы примем, что температура стержня является непрерывной функцией, имеющей производные вдоль оси стержня, взятой в качестве оси абсцисс. Возьмем три сечения стержня, соответствующие $x - dx$, x и $x + dx$, обозначив через f площадь этих сечений. Мы получим, таким образом, два граничащих друг с другом слоя объема $f dx$ и массы $f \rho dx$.

Рассмотрим теперь систему, составленную из этих двух слоев. Обозначим через $\dot{Q}(x - dx)$ поток тепла, отнесенный к единице площади, проникающий в систему со стороны сечения $x - dx$, а через $\dot{Q}(x + dx)$ — поток тепла, выходящий из сечения $x + dx$.

Пусть dS — приращение энтропии единицы массы системы из двух слоев в интервале времени dt . Приращение энтропии этой системы за единицу времени будет $2\rho f dx \frac{dS}{dt}$. Обозначим через du приращение на единицу массы внутренней энергии системы в интервале времени dt . Приращение за единицу времени внутренней энергии системы будет

$$2\rho f dx \frac{du}{dt} = f [\dot{Q}(x - dx) - \dot{Q}(x + dx)] = - 2f dx \frac{d\dot{Q}}{dx}.$$

Итак, пренебрегая работой термического расширения, будем иметь

$$T \rho \frac{dS}{dt} = - \frac{d\dot{Q}}{dx}$$

или

$$\rho \frac{dS}{dt} = - \frac{1}{T} \frac{d\dot{Q}}{dx} = - \frac{d(\dot{Q}/T)}{dx} - \frac{\dot{Q}}{T^2} \frac{dT(x)}{dx}. \quad (13.13)$$

С другой стороны, имеем

$$T(x + dx) - T(x - dx) = 2 \frac{dT(x)}{dx} dx. \quad (3.14)$$

Но эта величина, имея в виду формулу (3.4), пропорциональна количеству тепла Q в адиабатическом процессе. Полагая

$$dT/dx = \mu Q, \quad (3.15)$$

где μ — коэффициент пропорциональности, из формулы (3.13) получаем

$$\rho \frac{dS}{dt} = - \frac{d(\dot{Q}/T)}{dx} - \frac{\mu}{T^2} Q \dot{Q}. \quad (3.16)$$

Таким образом приращение энтропии разлагается на две части (принцип суперпозиции): во-первых, на дивергенцию энтропии

$$\left[-\frac{d(\dot{Q}/T)}{dx} \right]$$

и, во-вторых, на величину

$$\Delta \dot{\sigma} = -\frac{\mu}{T^2} Q \dot{Q}$$

— поток энтропии, который по (3.5) соответствует энтропии

$$\Delta \sigma = -\frac{1}{2} \frac{\mu}{T^2} Q^2, \quad (3.17)$$

появляющейся при необратимом адиабатическом процессе, рассмотренном в предыдущем разделе. Следовательно, можно написать

$$d^2 Q / dt^2 = b Q, \quad b > 0, \quad (3.18)$$

что приводит к соотношению:

$$\dot{Q} = -\sqrt{b} Q = -\sqrt{1/b} dT/dx, \quad (3.19)$$

являющемуся формулой потока тепла в теории Фурье.

В цитированной монографии [5] воспроизведены аналогичные результаты, полученные Пригожиным при помощи непосредственного приложения феноменологических соотношений Онзагера, где коэффициенты L_{ik} , как мы показали, должны удовлетворять определенным условиям для того, чтобы иметь $\lim Q = 0$ при $t = +\infty$.

Приложения к теории фаз

Пусть в некотором замкнутом резервуаре с непроницаемыми для тепла стенками находится жидкость (I) и ее пар (II) при температурах T_1 и T_2 . Пусть M , V , U — соответственно полные масса, объем и энергия этой системы, M_i ($i = 1, 2$) — массы компонентов, p_i — упругость, а v_i , u_i , s_i — их объем, энергия и энтропия, отнесенные к единице массы, так что

$$\begin{aligned} M_1 + M_2 &= M, & M_1 v_1 + M_2 v_2 &= V, \\ M_1 u_1 + M_2 u_2 &= U, \\ S &= M_1 s_1 + M_2 s_2. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Выбрав массу M_1 , энергию u_1 и объем v_1 за независимые переменные, определяющие состояние компонентов, получаем, что соотношения (3.20) определяют M_2 , v_2 , u_2 как функции M_1 , v_1 , u_1 . Поскольку s_i , T_i являются функциями от u_i , v_i , то они также являются функциями M_1 , v_1 , u_1 . Поэтому и полная энтропия S данной системы тоже является функцией этих последних переменных.

Обозначив через M_1^0 , v_1^0 , u_1^0 значения переменных M_1 , v_1 , u_1 для состояния термодинамического равновесия, будем иметь, ограничиваясь членами первой и второй степени,

$$\begin{aligned} \Delta S &= S(v_1, u_1, M_1) - S(v_1^0, u_1^0, M_1^0) = \\ &= \left(\frac{\partial S}{\partial v_1} \right)_0 v + \left(\frac{\partial S}{\partial u_1} \right)_0 u + \left(\frac{\partial S}{\partial M_1} \right)_0 m + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 S}{\partial v_1^2} \right)_0 v^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 S}{\partial v_1 \partial u_1} \right)_0 v u + \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\frac{\partial^2 S}{\partial v_1 \partial M_1} \right)_0 v m + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial u_1^2} \right)_0 u^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 S}{\partial u_1 \partial M_1} \right)_0 u m + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial M_1^2} \right)_0 m^2 \right], \end{aligned}$$

где

$$v_1 - v_1^0 = v, \quad u_1 - u_1^0 = u, \quad M_1 - M_1^0 = m.$$

Так как производные взяты для v_1^0 , u_1^0 , M_1^0 , которые соответствуют максимальному значению энтропии S , то

$$\left(\frac{\partial S}{\partial u_1}\right)_0 = \left(\frac{\partial S}{\partial v_1}\right)_0 = \left(\frac{\partial S}{\partial M_1}\right)_0 = 0 \quad (3.21)$$

и, следовательно,

$$\Delta S = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^2 S}{\partial v_1^2}\right)_0 v^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 S}{\partial v_1 \partial u_1}\right)_0 vu + 2 \left(\frac{\partial^2 S}{\partial v_1 \partial M_1}\right)_0 vm + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial u_1^2}\right)_0 u^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 S}{\partial u_1 \partial M_1}\right)_0 um + \left(\frac{\partial^2 S}{\partial M_1^2}\right)_0 m^2 \right].$$

Для вычисления вторых производных S воспользуемся формулой второго дифференциала:

$$d^2 S = \frac{\partial^2 S}{\partial v^2} dv^2 + 2 \frac{\partial^2 S}{\partial v \partial u} dv du + 2 \frac{\partial^2 S}{\partial v \partial m} dv dm + \\ + \frac{\partial^2 S}{\partial u^2} du^2 + 2 \frac{\partial^2 S}{\partial u \partial m} du dm + \frac{\partial^2 S}{\partial m^2} dm^2.$$

Дифференциальные уравнения рассматриваемого процесса имеют вид

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial v_1^2}\right)_0 v - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial v_1 \partial u_1}\right)_0 u - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial v_1 \partial M_1}\right)_0 m, \\ \frac{d^2 u}{dt^2} = - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial u_1 \partial v_1}\right)_0 v - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial u_1^2}\right)_0 u - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial u_1 \partial M_1}\right)_0 m, \\ \frac{d^2 m}{dt^2} = - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial M_1 \partial v_1}\right)_0 v - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial M_1 \partial u_1}\right)_0 u - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial M_1^2}\right)_0 m. \quad (3.22)$$

Интересующие нас интегралы этой системы зависят от отрицательных корней алгебраического уравнения

$$\begin{vmatrix} -\left(\frac{\partial^2 S}{\partial v_1^2}\right)_0 - r^2 & -\left(\frac{\partial^2 S}{\partial v_1 \partial u_1}\right)_0 & -\left(\frac{\partial^2 S}{\partial v_1 \partial M_1}\right)_0 \\ -\left(\frac{\partial^2 S}{\partial u_1 \partial v_1}\right)_0 & -\left(\frac{\partial^2 S}{\partial u_1^2}\right)_0 - r^2 & -\left(\frac{\partial^2 S}{\partial u_1 \partial M_1}\right)_0 \\ -\left(\frac{\partial^2 S}{\partial M_1 \partial v_1}\right)_0 & -\left(\frac{\partial^2 S}{\partial M_1 \partial u_1}\right)_0 & -\left(\frac{\partial^2 S}{\partial M_1^2}\right)_0 - r^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как $(-\Delta S)$ — положительно определенная квадратичная форма, то три из корней этого уравнения отрицательны, а другие три — положительны. Полученные результаты относятся к физической проблеме только в том случае, если обе массы при термодинамическом равновесии получаются положительными.

Для определения значений независимых переменных, относящихся к стабильному равновесию, будем следовать методу Гиббса, как он излагается в курсе термодинамики Планка [9].

Из уравнений (3.20) получаем:

$$\begin{aligned} dM_2 &= -dM_1, & M_2 dv_2 &= -M_1 dv_1 - (v_1 - v_2) dM_1, \\ M_2 du_2 &= -M_1 du_1 - (u_1 - u_2) dM_1 \end{aligned} \quad (3.24)$$

и

$$\begin{aligned} dS &= M_1 ds_1 + M_2 ds_2 + s_1 dM_1 + s_2 dM_2 = \\ &= M_1 \frac{du_1 + p_1 dv_1}{T_1} + M_2 \frac{du_2 + p_2 dv_2}{T_2} + (s_1 - s_2) dM_1 = \\ &= M_1 \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) du_1 + M_1 \left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2} \right) dv_1 + \\ &\quad + \left[s_1 - s_2 - \frac{(u_1 - u_2) + p_2 (v_1 - v_2)}{T_2} \right] dM_1. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Таким образом уравнения (3.21), определяющие состояние термодинамического равновесия, где в данном случае

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial u_1} &= M_1 \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) = 0, & \frac{\partial S}{\partial v_1} &= M_1 \left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2} \right) = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial M_1} &= \left[s_1 - s_2 - \frac{(u_1 - u_2) + p_2 (v_1 - v_2)}{T_2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

приводят к условиям Гиббса

$$T_1 = T_2 = T_0, \quad p_1 = p_2 = p_0. \quad (3.27)$$

Выбрав M_1 , v_1 , u_1 за независимые переменные, имеем

$$\begin{aligned} T_1 &= f_1(u_1, v_1), & T_2 &= f_2(u_2, v_2) = f(u_1, v_1, M_1), \\ s_1 &= \psi_1(u_1, v_1), & s_2 &= \psi_2(u_2, v_2) = \psi(u_1, v_1, M_1), \\ p_1 &= \varphi_1(u_1, v_1), & p_2 &= \varphi_2(u_2, v_2) = \varphi(u_1, v_1, M_1). \end{aligned}$$

Подставляя эти значения T_1 , T_2 , s_1 , s_2 , p_1 , p_2 в уравнения (3.26), получаем из них v_1^0 , u_1^0 , M_1^0 , определяющие состояние термодинамического равновесия. Заметим здесь, что уравнения (3.26) содержат s и u как $(s_1 - s_2)$ и $(u_1 - u_2)$.

Следуя Планку, можно придать другую форму последнему из уравнений (3.26). Так как разность $(s_1 - s_2)$ при термодинамическом равновесии зависит только от состояния I и состояния II, а не от пути перехода от I к II, то можно найти эту разность для перехода из I в II по изотерме T_0 . Но так как s_1 и s_2 относятся к единице массы одного и того же вещества при температуре T_0 , то имеем

$$s_1 - s_2 = \int_{(2)}^{(1)} ds = \frac{1}{T_0} \int_{(2)}^{(1)} (du + pdv) = \frac{u_1 - u_2}{T_0} + \frac{1}{T_0} \int_{(2)}^{(1)} pdv.$$

Теперь, полагая $T_2 = T_0$, найдем из второго уравнения (3.26)

$$\frac{1}{T_0} \int_{(2)}^{(1)} pdv - \frac{p_2 (v_1 - v_2)}{T_0} = 0, \quad \int_{(2)}^{(1)} pdv = p_2 (v_1 - v_2).$$

Остается найти при помощи d^2S вторые производные, фигурирующие в уравнении (3.22) и относящиеся к состоянию равновесия, вводя только такие величины, которые можно получить из лабораторных измерений.

Из (3.25), имея в виду соотношения (3.26), получаем

$$\begin{aligned}
 d^2S = & \frac{M_1}{T_0^2} (-dT_1 + dT_2) du_1 + \frac{M_1 p_0}{T_0^2} (-dT_1 + dT_2) dv_1 + \\
 & + \frac{M_1}{T_0} (dp_1 - dp_2) dv_1 + \left[ds_1 - ds_2 - \frac{du_1 - du_2 + p_0 (dv_1 - dv_2)}{T_0} - \right. \\
 & - \frac{(v_1 - v_2) dp_2}{T_0} + \left. \frac{(u_1 - u_2) + p_0 (v_1 - v_2)}{T_0^2} dT_2 \right] dM_1 = \frac{M_1}{T_0^2} (-dT_1 + dT_2) du_1 + \\
 & + \frac{M_1 p_0}{T_0^2} (-dT_1 + dT_2) dv_1 + \frac{M_1}{T_0} (dp_1 - dp_2) dv_1 + \\
 & + \left[\frac{u_1 - u_2 + p_0 (v_1 - v_2)}{T_0^2} dT_2 - \frac{v_1 - v_2}{T_0} dp_2 \right] dM_1. \quad (3.28)
 \end{aligned}$$

Величины u_1 , v_1 , u_2 , v_2 и M_1 , фигурирующие здесь, относятся к состоянию равновесия. Дифференциалы dT_1 , dT_2 , du_2 , dv_2 , dp_1 , dp_2 надо выразить как функции du_1 , dv_1 и $dM_1 = dm$. Для этого используем сперва

$$M_2 dv_2 = -M_1 dv_1 - (v_1 - v_2) dm, \quad M_2 = M - M_1.$$

Но поскольку мы выбрали M_1 , u_1 , v_1 как независимые переменные, то $T = T(u, v)$; обратно, $u = u(v, T)$ как функция v и T удовлетворяет тождественно уравнению

$$T \equiv T[u(v, T), v].$$

Из этого тождества, дифференцируя по T , получаем

$$\frac{\partial T(u, v)}{\partial u} \frac{\partial u(v, T)}{\partial T} = 1, \quad \frac{\partial T(u, v)}{\partial u} = \frac{1}{\partial u(v, T)/\partial T} = \frac{1}{c_v},$$

дифференцируя по v , будем иметь

$$\frac{\partial T(u, v)}{\partial v} = - \frac{\partial T(u, v)}{\partial u} \frac{\partial u(v, T)}{\partial v} = - \frac{1}{c_v} \frac{\partial u(v, T)}{\partial v}.$$

Из первого принципа термодинамики следует

$$\begin{aligned}
 dq = du(v, T) + p(v, T) dv &= \frac{du(v, T)}{\partial T} dT + \\
 + \left[\frac{\partial u(v, T)}{\partial v} + p(v, T) \right] dv &= c_v dT + a dv,
 \end{aligned}$$

так что

$$\partial u(v, T) / \partial v = a - p,$$

и поэтому

$$\frac{\partial T(u, v)}{\partial v} = - \frac{1}{c_v} (a - p).$$

Окончательно получаем

$$dT = \frac{\partial T(u, v)}{\partial u} du + \frac{\partial T(u, v)}{\partial v} dv = - \frac{a - p}{c_v} dv + \frac{1}{c_v} du.$$

Следовательно,

$$dT_1 = -\frac{a_1 - p_0}{c_{v1}} dv_1 + \frac{1}{c_{v1}} du_1,$$

$$dT_2 = -\frac{a_2 - p_0}{c_{v2}} dv_2 + \frac{1}{c_{v2}} du_2 = \frac{a_2 - p_0}{c_{v2}} \frac{M_1}{M_2} du_1 - \frac{1}{c_{v2}} \frac{M_1}{M_2} du_1 +$$

$$+ [(a_2 - p_0)(v_1 - v_2) - (u_1 - u_2)] \frac{dm}{c_{v2} M_2}.$$

Представим теперь dp как функцию du, dv . Имеем

$$dp(u, v) = \frac{\partial p(u, v)}{\partial u} du + \frac{\partial p(u, v)}{\partial v} dv.$$

Из первого принципа термодинамики получаем

$$dq = du(p, T) + pdv(p, T) = \left[\frac{\partial u(p, T)}{\partial p} + p \frac{\partial v(p, T)}{\partial p} \right] dp +$$

$$+ \left[\frac{\partial u(p, T)}{\partial T} + p \frac{\partial v(p, T)}{\partial T} \right] dT = kdp + c_p dT.$$

С другой стороны, полагая в выражении для p через u, v значения u, v функциями p и T , получаем тождество

$$p = p(u, v) = p[u(p, T), v(p, T)],$$

и дифференцируя по p и T , найдем

$$\frac{\partial p(u, v)}{\partial u} \frac{\partial u(p, T)}{\partial p} + \frac{\partial p(u, v)}{\partial v} \frac{\partial v(p, T)}{\partial p} = 1,$$

$$\frac{\partial p(u, v)}{\partial u} \frac{\partial u(p, T)}{\partial T} + \frac{\partial p(u, v)}{\partial v} \frac{\partial v(p, T)}{\partial T} = 0.$$

Имея в виду приведенные выше выражения для k и c_p и полагая

$$\Delta = k \frac{\partial v(p, T)}{\partial T} - c_p \frac{\partial v(p, T)}{\partial p},$$

получаем

$$\Delta \frac{\partial p(u, v)}{\partial v} = -\frac{\partial u(p, T)}{\partial T} = -c_p + p \frac{\partial v(p, T)}{\partial T},$$

$$\Delta \frac{\partial p(u, v)}{\partial u} = \frac{\partial v(p, T)}{\partial T}$$

и, следовательно,

$$dp = \frac{\partial p(u, v)}{\partial u} du + \frac{\partial p(u, v)}{\partial v} dv = \frac{\partial v(p, T) / \partial T}{\Delta} du - \frac{c_p - p [\partial v(p, T) / \partial T]}{\Delta} dv.$$

Таким образом имеем

$$dp_1 = \left[\frac{\partial v(p, T) / \partial T}{\Delta} \right]_1 du_1 - \left[\frac{c_p - p [\partial v(p, T) / \partial T]}{\Delta} \right]_1 dv_1,$$

$$dp_2 = -\frac{M_1}{M_2} \left[\frac{\partial v(p, T) / \partial T}{\Delta} \right]_2 du_1 + \frac{M_1}{M_2} \left[\frac{c_p - p [\partial v(p, T) / \partial T]}{\Delta} \right]_2 dv_1 -$$

$$- \frac{1}{\Delta_2 M_2} \left[[u_1 - u_2 + p_0(v_1 - v_2)] \left(\frac{\partial v(p, T)}{\partial T} \right)_2 - c_{p1}(v_1 - v_2) \right] dm,$$

где выражения в квадратных скобках относятся к фазам I и II при термодинамическом равновесии.

Из $dq = du + pdv$ получаем для количества тепла, необходимого для испарения единицы массы при температуре T_0 и давлении p_0 , следующее выражение

$$q_1 - q_2 = (u_1 - u_2) + p_0(v_1 - v_2).$$

Пользуясь им, а также ранее полученными выражениями для dT и dp , из (3.28), после некоторых упрощений, получаем

$$d^2S = Adu_1^2 + 2Bdu_1dv_1 + 2Cdu_1dm + Ddv_1^2 + 2Edv_1dm + Fdm^2,$$

где коэффициенты $A, B, \dots, F$ совпадают со вторыми производными, фигурирующими в системе уравнений (3.20).

Таким образом мы получаем систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} d^2u/dt^2 &= -Au - Bv - Cm, \\ d^2v/dt^2 &= -Bu - Dv - Em, \\ d^2m/dt^2 &= -Cu - Ev - Fm, \end{aligned} \quad (3.22')$$

описывающую развитие процесса во времени.

При подготовке рукописи к набору на русском языке большую помощь мне оказал К. Шапошников, которому приношу сердечную благодарность.

Болгарская академия наук
София

Поступила в редакцию
8 января 1954 г.

Литература

- [1] L. Onsager. Phys. Rev., 37, 405, 1931; 38, 2265, 1931. — [2] Н. В. С. Casimir. Rev. Mod. Phys., 17, 343, 1945; Philips Res. Rep., 1, 185, 1946. — [3] Л. Ландау и Е. Лифшиц. Статистическая физика, ГИТТЛ, 1951. — [4] Kyrille Poroff. C. R., 238, 648, 1952; Journ. de Mathém. et de Phys. Appl., 3, 42, 440, 1952; 5, 67, 1954; C. R. 236, 785, 1640, 1953; Ann. de Phys., 9, 261, 1954. — [5] S. R. de Groot. Thermodynamics of Irreversible Processes, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1951. — [6] P. Curie. Journ. de Phys., 393, 1894. — [7] H. Poincaré. Sur les propriétés des fonctions définies par les equations aux différences partielles, These de doctorat, Paris, 1879. — [8] E. Picard. Traité d'Analyse, Paris, 1908. — M. Planck. Thermodynamik, Berlin u. Leipzig, 1930.

О ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИХ СООТНОШЕНИЯХ ОНЗАГЕРА

Христо Караниколов

В работе [1] Попов устанавливает, что феноменологические соотношения (в термодинамике необратимых процессов)

$$x'_i = \sum_{h=1}^n L_{ih} X_h, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (x'_i = dx_i/dt)$$

получаются непосредственно как первые интегралы системы дифференциальных уравнений

$$d^2 x_i / dt^2 = X_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

удовлетворяющие условиям $x_i = x_i^0$ при $t = t_0$ и $x_i = 0$ при $t = +\infty$ ($i = 1, 2, \dots, n$), где

$$X_i = \partial(-\Delta S) / \partial x_i \quad (2)$$

и

$$\Delta S = -1/2 \sum_i g_{ih} x_i x_h \quad (g_{ih} = g_{hi})$$

— положительно определенная квадратичная форма.

Интегралы этой системы, удовлетворяющие указанным выше условиям, имеют вид:

$$x'_i(t) = C_1 \eta_{i1} e^{r_1 t} + C_2 \eta_{i2} e^{r_2 t} + \dots + C_n \eta_{in} e^{r_n t} \quad (C_h, \eta_{ih} — \text{постоянные}),$$

где r_i^2 — положительные корни алгебраического уравнения $2n$ -й степени

$$\gamma(r) = \begin{vmatrix} g_{11} - r^2 & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} - r^2 & \dots & g_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn} - r^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

Исключая $C_1 e^{r_1 t}, C_2 e^{r_2 t}, \dots, C_n e^{r_n t}$ из выражений $x'_i(t)$ и $X_1, X_2, \dots, X_n^1$, Попов получает

$$\begin{vmatrix} x'_i & \eta_{i1} & \eta_{i2} & \dots & \eta_{in} \\ X_1 & \eta_{11} r_1 & \eta_{12} r_2 & \dots & \eta_{1n} r_n \\ X_2 & \eta_{21} r_1 & \eta_{22} r_2 & \dots & \eta_{2n} r_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_n & \eta_{n1} r_1 & \eta_{n2} r_2 & \dots & \eta_{nn} r_n \end{vmatrix} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$^1 X_i = \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum_{h=1}^n C_h \eta_{ih} r_h e^{r_h t} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

что можно записать в виде:

$$x'_i = \sum_{k=1}^n L_{ik} x_k \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где $L_{i1}, L_{i2}, \dots, L_{in}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) являются функциями g_{ik} , не зависящими от констант интегрирования $C_1, C_2, \dots, C_n$.

При помощи итерационного процесса, который приводит к необходимости анализировать бесконечные ряды, Попов устанавливает симметрию матрицы

$$\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1n} \\ L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} \end{vmatrix}$$

Для частного случая $n = 2$ он устанавливает это свойство также и алгебраическим путем.

Так как случай $n = 3$ является очень важным для приложения теории к конкретным вопросам, мы ниже продемонстрируем симметрию матриц в этом случае.

При $n = 3$ уравнение

$$\gamma(r) = \begin{vmatrix} g_{11} - r^2 & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} - r^2 & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} - r^2 \end{vmatrix} = 0$$

имеет три положительных корня: r_1^2, r_2^2, r_3^2 .

Допустим, что эти корни — однократные и что ²

$$g_{32}\gamma_{31}(0) - g_{31}\gamma_{32}(0) \neq 0.$$

Интегралы системы (1) при данных условиях, характеризующих физические процессы, имеют вид:

$$x_i = \sum_{\lambda=1}^3 C_{\lambda} \gamma_{3i}(r_{\lambda}) e^{r_{\lambda} t}, \quad (4)$$

где $\gamma_{3i}(r)$ — алгебраическое дополнение соответствующего элемента определителя $\gamma(r)$.

Отсюда получаем

$$X_i = \sum_{\lambda=1}^3 C_{\lambda} \gamma_{3i}(r_{\lambda}) r_{\lambda}^2 e^{r_{\lambda} t} \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{\lambda=1}^3 C_{\lambda} \gamma_{3i}(r_{\lambda}) r_{\lambda} e^{r_{\lambda} t}; \quad (5)$$

² Посредством соответствующего граничного перехода возможно показать, что эти условия не являются ограничительными. Здесь

$$\gamma_{31}(0) = \begin{vmatrix} g_{12} & g_{13} \\ g_{22} & g_{23} \end{vmatrix}, \quad \gamma_{32}(0) = - \begin{vmatrix} g_{11} & g_{13} \\ g_{21} & g_{23} \end{vmatrix}.$$

$$X_i = \sum_{\lambda=1}^3 C_{\lambda} \gamma_{3i}(r_{\lambda}) r_{\lambda}^2 e^{r_{\lambda} t} \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \sum_{\lambda=1}^3 C_{\lambda} \gamma_{32}(r_{\lambda}) r_{\lambda} e^{r_{\lambda} t}. \quad (6)$$

Исключая $C_1 e^{r_1 t}$, $C_2 e^{r_2 t}$, $C_3 e^{r_3 t}$ из (5) и соответственно из (6), получаем

$$\begin{vmatrix} X_1 & \gamma_{31}(r_1) & \gamma_{31}(r_2) & \gamma_{31}(r_3) \\ X_2 & \gamma_{32}(r_1) & \gamma_{32}(r_2) & \gamma_{32}(r_3) \\ X_3 & \gamma_{33}(r_1) & \gamma_{33}(r_2) & \gamma_{33}(r_3) \\ x'_1 & \frac{1}{r_1} \gamma_{31}(r_1) & \frac{1}{r_2} \gamma_{31}(r_2) & \frac{1}{r_3} \gamma_{31}(r_3) \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} X_1 & \gamma_{31}(r_1) & \gamma_{31}(r_2) & \gamma_{31}(r_3) \\ X_2 & \gamma_{32}(r_1) & \gamma_{32}(r_2) & \gamma_{32}(r_3) \\ X_3 & \gamma_{33}(r_1) & \gamma_{33}(r_2) & \gamma_{33}(r_3) \\ x'_2 & \frac{1}{r_1} \gamma_{32}(r_1) & \frac{1}{r_2} \gamma_{32}(r_2) & \frac{1}{r_3} \gamma_{32}(r_3) \end{vmatrix} = 0;$$

так что

$$\Delta L_{12} = - \begin{vmatrix} \gamma_{31}(r_1) & \gamma_{31}(r_2) & \gamma_{31}(r_3) \\ \gamma_{33}(r_1) & \gamma_{33}(r_2) & \gamma_{33}(r_3) \\ \frac{1}{r_1} \gamma_{31}(r_1) & \frac{1}{r_2} \gamma_{31}(r_2) & \frac{1}{r_3} \gamma_{31}(r_3) \end{vmatrix};$$

$$\Delta L_{21} = \begin{vmatrix} \gamma_{32}(r_1) & \gamma_{32}(r_2) & \gamma_{32}(r_3) \\ \gamma_{33}(r_1) & \gamma_{33}(r_2) & \gamma_{33}(r_3) \\ \frac{1}{r_1} \gamma_{32}(r_1) & \frac{1}{r_2} \gamma_{32}(r_2) & \frac{1}{r_3} \gamma_{32}(r_3) \end{vmatrix}; \quad (7)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \gamma_{31}(r_1) & \gamma_{31}(r_2) & \gamma_{31}(r_3) \\ \gamma_{32}(r_1) & \gamma_{32}(r_2) & \gamma_{32}(r_3) \\ \gamma_{33}(r_1) & \gamma_{33}(r_2) & \gamma_{33}(r_3) \end{vmatrix},$$

где определитель Δ при нашем допущении однократности корней отличен от нуля.

Следовательно,

$$\Delta(L_{21} - L_{12}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ F(r_1, r_2, r_3) & F(r_2, r_3, r_1) & F(r_3, r_1, r_2) \\ \frac{1}{r_1} & \frac{1}{r_2} & \frac{1}{r_3} \end{vmatrix}, \quad (8)$$

где

$$F(u, v, w) = \gamma_{33}(u) [\gamma_{31}(v) \gamma_{31}(w) + \gamma_{32}(v) \gamma_{32}(w)].$$

Определитель в правой части уравнения (8) равен нулю. Действительно, легко видеть, что

$$F(r_1, r_2, r_3) = [G_{33} - (g_{11} + g_{22}) \rho_1 + \rho_1^2] [(G_{31} + g_{31} \rho_2) (G_{31} + \rho_3 g_{31}) + (G_{32} + g_{32} \rho_2) (G_{32} + \rho_3 g_{32})]$$

является симметричной функцией корней: $\rho_1 (=r_1^2)$, $\rho_2 (=r_2^2)$, $\rho_3 (=r_3^2)$. Здесь G_{ih} означает алгебраическое дополнение элемента g_{ih} в определителе, полученном из $\gamma(r)$ при $r=0$.

Используя элементарные зависимости корней от коэффициентов характеристического уравнения $\gamma(r)=0$, а именно:

$$[\gamma(r) \equiv \rho^3 - (g_{11} + g_{22} + g_{33})\rho^2 + (G_{11} + G_{22} + G_{33})\rho - g = 0],$$

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = g_{11} + g_{22} + g_{33},$$

$$\rho_1(\rho_2 + \rho_3) + \rho_2\rho_3 = G_{11} + G_{22} + G_{33};$$

$$\rho_1\rho_2\rho_3 = g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix},$$

после некоторых преобразований получаем

$$\begin{aligned} F(r_1, r_2, r_3) = & A + [G_{33}(g_{31}^2 + g_{32}^2) + (g_{11} + g_{22})(g_{31}G_{31} + g_{32}G_{32}) + \\ & + G_{31}^2 + G_{32}^2]\rho_2\rho_3 - [(g_{31}G_{31} + g_{32}G_{32})(b + G_{33}) - \\ & - g_{33}(G_{31}^2 + G_{32}^2) - g(g_{31}^2 + g_{32}^2)]\rho_1, \end{aligned}$$

где A не зависит от ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 и $b = G_{11} + G_{22} + G_{33}$.

Непосредственное вычисление коэффициентов $\rho_2\rho_3$ и ρ_1 в выражении $F(r_1, r_2, r_3)$ показывает, что они равны нулю и что

$$F(r_1, r_2, r_3) = F(r_2, r_3, r_1) = F(r_3, r_1, r_2) = A.$$

Следовательно, определитель в правой части (8) равен нулю, а так как $\Delta \neq 0$, то $L_{12} = L_{21}$. Аналогичным путем доказывается, что $L_{13} = L_{31}$.

София, Болгария

Поступила в редакцию
8 января 1954 г.

Литература

- [1] К. А. Попов. ЖЭТФ, этот выпуск, стр. 257.

РАССЕЯНИЕ МЕЗОНОВ НА НУКЛОНАХ В ТЕОРИИ РАДИАЦИОННОГО ЗАТУХАНИЯ

А. С. Мартынов

Показано, что учет радиационного затухания качественно улучшает картину, даваемую теорией возмущений в первом исчезающем приближении (появление характерных максимумов в энергетическом ходе полных сечений и др.), но все же не объясняет количественно экспериментальных данных.

Экспериментально рассеяние мезонов на нуклонах изучалось различными методами в работах [1-3] (см. также обзор [4]). Интервал энергии падающего мезона охватывает 35—230 MeV. Мы не касаемся известных данных этих работ, укажем только на два характерных обстоятельства, а именно, что при малых энергиях ($E_\mu = 35$ MeV) имеется следующее отношение сечений:

$$\sigma(\alpha) : \sigma(\gamma) : \sigma(\beta) \approx 2 : 1 : 1; \quad \sigma(\gamma) \approx \sigma(\beta),$$

в то время как при более высоких энергиях ($E_\mu = 120$ MeV) это отношение получается в виде:

$$\sigma(\alpha) : \sigma(\gamma) : \sigma(\beta) \approx 9 : 2 : 1.$$

Здесь $\sigma(\alpha)$, $\sigma(\beta)$, $\sigma(\gamma)$ — соответственно полные сечения для процессов

$$\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p, \quad (\alpha)$$

$$\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p, \quad (\beta)$$

$$\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n. \quad (\gamma)$$

В литературе известны различные попытки теоретического объяснения данных о рассеянии мезонов на нуклонах [4]. В работе [5] делается вывод, что учет радиационного затухания дает близкую к эксперименту картину рассеяния мезонов на протонах. Ниже показано, что этот вывод ошибочен. Результаты работы [5] существенно опираются на выводы работ [6, 7], где при проведении усреднения по спиновым состояниям (при получении дифференциального сечения) были допущены ошибки, в результате которых псевдоскалярная связь давала рост полного сечения с ростом энергии падающего мезона E_μ . Это противоречит результатам многих других работ.

В данной работе используется теория радиационного затухания в ковариантной форме. Все расчеты проводятся по усовершенствованной методике теории возмущений [8-11], причем выбираются псевдоскалярное мезонное поле и линейная комбинация псевдоскалярной и псевдовекторной связей мезонного поля с нуклоном.

Для учета радиационного затухания (что является целью работы) необходимо решить интегральное уравнение, которое определяет матрицу рассеяния R :

$$R = K - (i/2)KR. \quad (1)$$

Уравнение (1) вытекает из соотношений:

$$S = 1 - iR, S = \left(1 - \frac{i}{2} K\right) / \left(1 + \frac{i}{2} K\right),$$

где $S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n$ — унитарная матрица столкновений, $K = \sum_{n=0}^{\infty} K_n$ — эрмитов оператор (см. [12]).

Мы решаем уравнение (1) в первом исчезающем приближении для процессов второго порядка (процессы рассеяния), т. е. уравнение

$$R_2 = K_2 - (i/2) K_2 R_2, \quad (2)$$

где K_2 — первый исчезающий член в разложении для K . Во втором члене правой части (2) проводится суммирование по всем промежуточным состояниям с одними и теми же энергией и зарядом.

Для получения амплитуды рассеяния необходимо иметь явный вид K_2 . Известно [8], что $K_2 = iS_2$; таким образом, непосредственно из матричного элемента для S_2 находим матричный элемент для K_2 .

Как известно, получающиеся из (2) интегральные уравнения содержат невырожденное ядро, и поэтому нахождение соответствующих решений представляет известные трудности. Однако, используя малость некоторых величин [например, для $x_1 = 2l^2/(2E\varepsilon - \mu^2)$; при $E_\mu \leq 180$ MeV, имеем $x_1 \leq 1/8$], можно получить, в частности, для процесса (α) приближенное интегральное уравнение с вырожденным ядром

$$\begin{aligned} X_{fi}(\theta) = & \frac{f^2}{\mu^2} M \left\{ (G'_1 - x_1 \cos \theta) \left(\frac{W}{M} \gamma_4 - 1 \right) - \right. \\ & - 2(\Gamma y + 1)(1 + x_1 \cos \theta) \left. \right\} (1 - x_1 \cos \theta) - \\ & - i\omega \int_0^\pi \left[(G'_1 - x_1 \cos \theta \cos \theta') \left(\frac{W}{M} \gamma_4 - 1 \right) - \right. \\ & \left. - 2(\Gamma y + 1)(1 + x_1 \cos \theta \cos \theta') \right] (E\gamma_4 + M) X_{fi}(\theta') \sin \theta' d\theta'. \quad (3) \end{aligned}$$

Здесь l — импульс мезона или нуклона в системе центра тяжести; μ , M — массы мезона и нуклона; ε , E — полные энергии мезона и нуклона; g , f — константы псевдоскалярной и псевдовекторной связи, соответственно,

$$h = c = 1; G'_1 = f(E, \varepsilon, l); \Gamma = \frac{\mu}{M}; y = -\frac{g}{f}; W = E + \varepsilon; \omega = \frac{l}{8\pi W}.$$

Уравнение (3) сводится обычными методами к системе двух алгебраических уравнений. Матрицы γ_μ принимаются за числа, близкие к единице. Решение уравнения (3) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} X_{fi}(\theta) = & \frac{f^2}{\mu^2} M \left\{ \left[f_1(\theta) + \frac{A + iB}{L + iM} + \frac{A_1 + iB_1}{L_1 + iM_1} \cos \theta \right] + \right. \\ & \left. + \left[f_2(\theta) + \frac{C + iD}{L + iM} + \frac{C_1 + iD_1}{L_1 + iM_1} \cos \theta \right] \gamma_4 \right\}, \quad (4) \end{aligned}$$

где $f_1(\theta) = \alpha_3 + \beta_3 \cos \theta + \bar{\gamma}_3 \cos^2 \theta$; $f_2(\theta) = \alpha_4 + \beta_4 \cos \theta + \bar{\gamma}_4 \cos \theta$, а A ,

$B, \dots, \bar{\gamma}_3, \bar{\gamma}_4$ — выражения, зависящие от $E, \varepsilon, l, y, \omega, f^2$.

Система интегральных уравнений для процессов (β) и (γ) сводится к системе четырех алгебраических уравнений; решения имеют вид, подобный (4). Дифференциальное сечение, например, для процесса (α) получается в системе центра тяжести в виде

$$\frac{d\sigma^{(\alpha)}}{d\Omega} = \frac{1}{2} \frac{M^2}{W^2} |X_H(0)|^2.$$

Явный вид дифференциальных сечений ввиду их громоздкости мы не выписываем.

Для проведения численных расчетов представляем дифференциальные сечения в виде:

$$\begin{aligned} d\sigma^{(\alpha)}/d\Omega &= \kappa (\bar{A}_1 + \bar{B}_1 \cos \theta + \bar{C}_1 \cos^2 \theta + \bar{D}_1 \cos^3 \theta + \bar{E}_1 \cos^4 \theta + \bar{F}_1 \cos^5 \theta); \\ d\sigma^{(\beta)}/d\Omega &= \kappa (\bar{A}_2 + \bar{B}_2 \cos \theta); \\ d\sigma^{(\gamma)}/d\Omega &= \kappa (\bar{A}_3 + \bar{B}_3 \cos \theta + \bar{C}_3 \cos^2 \theta + \bar{D}_3 \cos^3 \theta + \bar{E}_3 \cos^4 \theta + \bar{F}_3 \cos^5 \theta), \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\kappa = 2\pi f^4 \left(\frac{h}{\mu c} \right)^2 \frac{M^2}{W^2} \frac{x\gamma}{2}; \quad x = \frac{E}{\mu}; \quad \gamma = \frac{M}{\mu},$$

причем $\bar{A}_1 = A_1 + A'_1, \dots; \bar{F}_3 = F_3 + F'_3$.

Здесь первое слагаемое определяется в пренебрежении радиационным затуханием, а второе есть поправка от учета затухания.

Дифференциальные сечения вычислялись для двух значений энергии падающего мезона E_μ в лабораторной системе координат: $E_\mu = 42$ и $E_\mu = 112$ MeV. При численных оценках оказалось, что коэффициенты $C_1, D_1, E_1, F_1, B_2, E_3, F_3$ малы по сравнению с $A_1, B_1, A_2, A_3, B_3, C_3$. Далее, принимая, что при малых энергиях ($E_\mu = 42$ MeV) влияние радиационного затухания мало, и сопоставляя численные данные с данными работ [1-3], определяем однозначным образом константы u и f^2 .

Численные данные указывают на то, что значения $u < 0$ не приемлемы, ибо в этом случае не получается то отношение сечений $\sigma^{(\alpha)}/\sigma^{(\beta)}$, которое найдено на опыте [2,3]. Расчет дает $\sigma^{(\alpha)}/\sigma^{(\beta)} > 1$ при $E_\mu = 42$ MeV, тогда как экспериментальное отношение — порядка 1/2; к тому же $d\sigma^{(\alpha)}/d\Omega$ дает резкую направленность вперед при $u < 0$. Из численных данных вытекает также, что значения $u = 10$ и 3 не приемлемы: при этих значениях u полные сечения рассеяния мезонов растут с энергией падающего мезона медленнее, чем это обнаружено на опыте [1-3]. При наиболее подходящем значении $u = 1,5$ имеем удовлетворительное согласие с экспериментальным значением отношения $\sigma^{(\alpha)}/(\sigma^{(\beta)} + \sigma^{(\gamma)})$ [2,3], именно: $\sigma^{(\alpha)}/(\sigma^{(\beta)} + \sigma^{(\gamma)}) \approx 1$; $\sigma^{(\beta)} \gg \sigma^{(\gamma)}$.

Для угловых распределений следует отметить, что при $u = 1,5$, $E_\mu = 42$ MeV, $d\sigma^{(\alpha)}/d\Omega$ определяет направленность рассеянных мезонов преимущественно назад, $d\sigma^{(\alpha)}/d\Omega$ определяет изотропию рассеяния, а $d\sigma^{(\gamma)}/d\Omega$ — направленность рассеянных мезонов назад в системе центра тяжести. Угловые распределения при малых энергиях непосредственно не измерялись, так что неясно, противоречат ли данные теории возмущений по угловым распределениям опыту, или нет. Однако немногочисленные данные работ [2,3] (см. обзор [4]) свидетельствуют о том, что в области энергии $E_\mu = 30$ MeV и в области малых углов существенную роль играет интерференция ядерного взаимодействия с электромагнитным.

Результаты, полученные для угловых распределений при $E_\mu = 42$ MeV, качественно справедливы и для угловых распределений при $E_\mu = 112$ MeV (без учета затухания). В этом случае коэффициент C_1 в $d\sigma^{(\alpha)}/d\Omega$ относительно мал, хотя угловое распределение характеризует направленность рассеянных мезонов преимущественно назад.

Отметим, что соотношение коэффициентов A_3, B_3, C_3 в (5) у $d\sigma^{(\gamma)}/d\Omega$ ($A_3 < B_3 < C_3$) — обратное по сравнению с $d\sigma^{(\alpha)}/d\Omega$, т. е. более близко к экспериментальным соотношениям [1]. Далее, рассчитанное

$d\sigma^{(\beta)}/d\Omega$ не согласуется с угловым распределением π^- -мезонов, найденным из опыта: π^- -мезоны рассеиваются преимущественно вперед. Вычисленное отношение $\sigma^{(\alpha)}/(\sigma^{(\beta)} + \sigma^{(\gamma)})$ не соответствует экспериментальному отношению этих величин.

При наиболее приемлемых константах: $y = 1,5$, $f^2 = 0,51$ можно вычислить коэффициенты $A_1^r, \dots, F_3^r$, учитывающие затухание. Поправки от учета затухания оказываются порядка нескольких процентов; ясно, что такие поправки не могут изменить найденное нами значение отношения $\sigma^{(\alpha)}/(\sigma^{(\beta)} + \sigma^{(\gamma)}) < 1$ при $E_\mu = 112$ MeV и $y = 1,5$ и, стало быть, не могут объяснить экспериментальное отношение сечений $\sigma^{(\alpha)}/(\sigma^{(\beta)} + \sigma^{(\gamma)}) \approx 3$ при $E_\mu = 120$ MeV. Отсюда следует вывод, что квантовая теория радиационного затухания в рамках рассмотренного приближения не дает количественного согласия с опытом, хотя некоторую качественную картину она в состоянии предсказать (прохождение полных сечений через максимум и др.).

В заключение выражаю глубокую благодарность проф. М. А. Маркову и А. М. Балдину за постоянную помощь и внимание к работе, а также И. А. Лебедевой и Л. Я. Жильцовой за проведение численных расчетов.

Примечание при корректуре: В недавно опубликованной работе [13] автор рассматривает ту же задачу другим математическим методом и приходит к аналогичным результатам.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
9 марта 1954 г.

Литература

- [1] H. L. Anderson, E. Fermi, R. Martin, a. D. E. Nagle. Phys. Rev., 1, 155, 1953. — [2] C. E. Angell a. J. P. Perry. Phys. Rev., 90, 724, 1953. — [3] A. Roberts a. J. Tinlot. Phys. Rev., 90, 951, 1953. — [4] В. П. Силин и В. Я. Файнберг. Усп. физич. наук, 50, 325, 1953. — [5] S. N. Biswas. Ind. Journ. Phys., 26, 617, 1953. — [6] E. Corinaldesi a. G. Field. Phil. Mag., 40, 1159, 1949. — [7] E. Corinaldesi a. G. Field. Phil. Mag., 41, 364, 1949. — [8] J. Pirene. Phys. Rev., 86, 395, 1952. — [9] N. Fukuda a. T. Mijazima. Prog. Theor. Phys., 5, 849, 1950. — [10] F. Dyson. Phys. Rev., 75, 1736, 1949. — [11] R. P. Feynman. Phys. Rev., 76, 749, 1949. — [12] J. Schwinger. Phys. Rev., 74, 439, 1948. — [13] Г. Ф. Жарков, ЖЭТФ, 27, 296, 1954.

К ТЕОРИИ ПОТЕРЬ ЭНЕРГИИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ ФЕРРОМАГНЕТИКА

Д. Иваненко и В. Н. Цытович

Произведено исследование эффекта насыщения потерь энергии при прохождении заряженной частицы через ферромагнетик (см. [1-3]) и дан анализ разделения потерь на ионизационные и черенковские.

Потери энергии заряженной частицы при прохождении ферромагнетика исследовались в ряде работ [1-3].

Известно [4,5], что при больших скоростях заряженной частицы, проходящей через диэлектрик, наступает насыщение потерь энергии. Эти потери не растут неограниченно с энергией заряженной частицы и бывают больше в том веществе, электронная плотность которого меньше. При этом при больших скоростях особую роль играют потери на черенковское излучение [6-8].

Для случая прохождения заряженной частицы через диэлектрик анализ разделения потерь на ионизационные и черенковские [8,9] показал существенную зависимость такого разделения от значений коэффициентов затухания в формулах дисперсии, которые нельзя полагать равными нулю.

Аналогичное положение вещей имеет место при анализе разделения потерь на ионизационные и черенковские при прохождении заряженной частицы через ферромагнетик. Более того, в ферромагнетике, в отличие от диэлектрика [9], вопрос об указанном разделении вообще нельзя решить правильно, если не учитывать конечности эффекта затухания.

При больших скоростях движения заряженной частицы потери ее энергии при прохождении через вещество существенно зависят от взаимодействия между атомами вещества. В ферромагнетике магнитные свойства определяются, во-первых, обменным взаимодействием электронов вещества (обменная энергия) и, во-вторых, магнитным взаимодействием элементарных магнитных моментов (энергия магнитной анизотропии, см., например, [10]). Ниже, однако, будет показано, что обменное взаимодействие не существенно для потерь энергии заряженной частицы, проходящей через ферромагнетик, если только скорость частицы достаточно велика. Относительно малая энергия магнитной анизотропии хотя и дает вклад в потери энергии, но он пренебрежимо мал по сравнению с ионизационными потерями и потерями на черенковское излучение, связанными с диэлектрической постоянной ϵ ферромагнетика. В этом и заключается несколько неожиданный результат анализа потерь энергии в ферромагнетике, вызванный игрой различных взаимодействий. Отметим также, что эффект насыщения потерь в ферромагнетике аналогичен эффекту насыщения потерь в диэлектрике, когда потери в ультрарелятивистском пределе зависят лишь от числа электронов, но не от характера их связей в веществе.

Если движение точечной заряженной частицы в среде, характеризующейся значениями проницаемостей ϵ, μ , кинематически задано через

$\mathbf{r}_\xi(t)$ и $\mathbf{v}_\xi(t)$ (положение и скорость частицы), то потенциалы поля подчиняются уравнениям:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c} e \mathbf{v}_\xi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\xi), \quad (1)$$

$$\nabla^2 \varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{\varepsilon} e \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\xi). \quad (2)$$

Поскольку нас интересуют наряду с черенковским излучением также и ионизационные потери, мы считаем величины ε и μ комплексными.

Хорошо известно, что при вычислении функции Грина уравнений поля для прозрачных сред (см. [11,12]) получается неоднозначное выражение вследствие наличия полюсов на действительной оси в подинтегральном выражении. В зависимости от задаваемых правил обхода этих полюсов можно получить либо запаздывающие, либо опережающие функции, либо каузальные, либо антикаузальные функции и т. д. [13,14]. В рассматриваемом случае, вследствие комплексности величин ε и μ , полюсы подинтегральной функции Грина не лежат на действительной оси. Принцип излучения будет выполняться в том случае, если коэффициенты при мнимых частях ε и μ будут положительными ($\varphi = e^{-i\omega t} \varphi_0$). Последнее обстоятельство соответствует диссипации энергии при движении элементарных зарядов и токов, обуславливающих данные значения ε и μ . Условие положительности коэффициентов при мнимых частях ε и μ при стремлении затухания к нулю непосредственно приводит к запаздывающим потенциалам для прозрачных сред.

Итак, для функции Грина уравнений (1) и (2) получаем выражение:

$$G = \frac{1}{16\pi^4} \int \frac{1}{k^2 - (\varepsilon\mu\omega^2/c^2)} \exp\{ik\mathbf{R} - i\omega T\} d\omega d^3k, \quad (3)$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$, $T = t - t'$. Отсюда для потенциалов φ и $\mathbf{A}$ имеем

$$\varphi = \frac{e}{4\pi^3} \int \frac{\exp\{ikR_\xi - i\omega T\}}{\varepsilon(\omega) [k^2 - (\omega^2\varepsilon\mu/c^2)]} d\omega d^3k dt', \quad (4)$$

$$\mathbf{A} = \frac{e}{4\pi^3} \int \frac{\exp\{ikR_\xi - i\omega T\}}{c [k^2 - (\omega^2\varepsilon\mu/c^2)]} \mu(\omega) \mathbf{v}_\xi d\omega d^3k dt'. \quad (5)$$

Здесь

$$\mathbf{R}_\xi = \mathbf{r} - \mathbf{r}_\xi(t').$$

Потенциалы из (4) и (5) позволяют найти потери энергии при любых заданных движениях частицы $\mathbf{r}_\xi(t)$, $\mathbf{v}_\xi(t)$. Благодаря этому мы получаем возможность развить, в частности, теорию, посвященную анализу потерь энергии заряженных частиц в условиях релятивистского движения в магнитном поле в некоторой прозрачной среде (комбинация явлений «светящегося» электрона и «сверхсветового», т. е. черенковского излучения) [12].

В случае равномерного движения вдоль оси z имеем

$$\varphi = \frac{e}{\pi} \int \frac{dx}{\varepsilon} \exp\{ix(z - vt)\} K_0(\zeta r), \quad (6)$$

где

$$K_0(\zeta r) = \frac{\pi i}{2} H_0^{(1)}(i\zeta r), \quad \zeta = \frac{\omega}{v}. \quad (7)$$

При этом

$$\zeta = \kappa \sqrt{1 - \varepsilon \mu \beta^2} \operatorname{Sign} \operatorname{Re} \kappa \sqrt{1 - \varepsilon \mu \beta^2}, \quad (8)$$

а $H_0^{(1)}$ — цилиндрическая функция.

Для определения потерь энергии на соударения с параметром удара, большим b , подсчитываем поток вектора Умова—Пойнтинга через поверхность цилиндра радиуса b , окружающего траекторию частицы

$$W_b = \frac{c}{4\pi v} \int_b [\mathbf{E}\mathbf{H}] dS = \frac{2e^2}{\pi v^2} \operatorname{Re} \int_0^\infty i\omega d\omega \left(\frac{1}{\varepsilon} - \mu \beta^2 \right) \zeta^* b K_0(\zeta b) K_1(\zeta^* b). \quad (9)$$

Здесь $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — значения напряженностей электромагнитного поля, создаваемого заряженной частицей, dS — элемент поверхности цилиндра. При выводе (9) мы воспользовались соотношениями (см. [11]):

$$\begin{aligned} A_x = A_y = 0, \quad A_z = \varepsilon \mu \beta \varphi; \\ E_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} (\varepsilon \mu \beta^2 - 1), \quad E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad H_z = 0; \\ H_x = \varepsilon \beta \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad H_y = -\varepsilon \beta \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \end{aligned}$$

и использовали для φ выражение (6), а также формулы:

$$K_1(z) = -\frac{\partial}{\partial z} K_0(z); \quad \varepsilon(-\omega) = \varepsilon^*(\omega); \quad \mu(-\omega) = \mu^*(\omega).$$

В дальнейшем мы будем рассматривать малые значения параметра соударений b , ограничившись в (9) первыми членами разложения функций Бесселя $K_0(\zeta b)$ и $K_1(\zeta^* b)$:

$$K_1(\zeta^* b) = \frac{1}{\zeta^* b}, \quad K_0(\zeta b) = \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3.17 \zeta^2 b^2}. \quad (10)$$

Соотношение (10) можно применять в том случае, если $|\zeta| b \ll 1$. Для ферромагнетика с $\varepsilon = 1$ и μ , определяемым формулой дисперсии [15], обобщающей классическое соотношение Аркадьева (см. ниже формулу (19)), это условие означает для ультрарелятивистского движения, что

$$\frac{\omega}{c} |\sqrt{1 - \beta^2 \mu_{\max}}| b \ll 1, \quad (11)$$

где $\mu_{\max}$ — максимальное значение магнитной проницаемости, достигаемое в области, близкой к резонансной частоте ω_0 . Если мы пренебрежем затуханием, то условие (11) нарушится, поэтому для дальнейшего весьма существенна конечность величины затухания. Однако в окончательном результате после сложения черенковских и ионизационных потерь затуханием можно пренебречь. Положение здесь несколько сложнее, чем в случае диэлектриков [16], вследствие того, что области интегрирования по частотам для черенковского излучения и для ионизационных потерь частично перекрываются.

Итак, для малых прицельных параметров имеем

$$W_b = \frac{e^2}{\pi v^2} \operatorname{Re} \int_0^\infty i\omega d\omega \left(\frac{1}{\varepsilon} - \mu \beta^2 \right) \ln \frac{4}{3.17 \zeta^2 b^2}. \quad (12)$$

Полагая $\varepsilon = 1$, $\mu = \operatorname{Re} \mu + i \operatorname{Im} \mu$, $\gamma = \sqrt{3.17}$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\beta^2 \operatorname{Im} \mu}{1 - \beta^2 \operatorname{Re} \mu}, \quad (13)$$

имеем

$$W_b = \frac{2e^2}{\pi v^2} \int_0^\infty \omega d\omega \left\{ \operatorname{Im} \mu \beta^2 \ln \frac{2v}{\gamma \omega |V 1 - \beta^2 \mu| b} + \frac{\varphi}{2} (1 - \operatorname{Re} \mu \beta^2) \right\}. \quad (14)$$

При малых значениях коэффициента затухания вместо (13) можно написать

$$\varphi = \frac{\beta^2 \operatorname{Im} \mu}{\beta^2 \operatorname{Re} \mu - 1} - \pi \quad \text{при } \beta^2 \operatorname{Re} \mu > 1; \quad (15)$$

$$\varphi = -\frac{\beta^2 \operatorname{Im} \mu}{1 - \beta^2 \operatorname{Re} \mu} \quad \text{при } \beta^2 \operatorname{Re} \mu < 1. \quad (16)$$

Соотношение (15) соответствует черенковским частотам, а (16) — боровским частотам.

Подставляя (15) и (16) в (14), получим формулы для ионизационных и черенковских потерь в ферромагнетике с $\varepsilon = 1$

$$W^{\text{чер}} = \frac{e^2}{v^2} \int_{\operatorname{Re} \mu \beta^2 > 1} (1 - \operatorname{Re} \mu \beta^2) \omega d\omega, \quad (17)$$

$$W_b^{\text{ион}} = \frac{e^2}{\pi c^2} \int_0^\infty \omega d\omega \operatorname{Im} \mu \left\{ \ln \frac{4v^2}{3,17 \omega^2 b^2 |1 - \mu \beta^2|} - 1 \right\}. \quad (18)$$

В дальнейшем мы воспользуемся конкретной дисперсионной формулой для магнитной восприимчивости¹

$$\mu = 1 + \frac{4\pi}{\beta} \frac{1 - i\gamma x}{1 - x^2 - 2i\gamma x}, \quad (19)$$

где

$$x = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \omega_0 = \frac{e}{mc} \beta I_s, \quad \gamma = \frac{e}{mc} \beta \varepsilon, \quad \beta = \frac{2k}{I_s^2},$$

I_s — спонтанная намагниченность, k — коэффициент магнитной анизотропии, m — масса электрона.

Остановимся теперь на анализе ионизационных потерь (18). Полагая значение μ под знаком логарифма равным единице, мы получим формулы ионизационных потерь, не учитывающие поляризационного эффекта [9]. При подсчете ионизационных потерь существенно значение μ вблизи резонанса [9], поэтому мы положим

$$\mu = 1 + \frac{\mu_0 - 1}{1 - x^2 - 2i\gamma x} \quad (20)$$

и получим аналог формулы Блоха [18, 19] (см. также [9]) для ионизационных потерь в ферромагнетике с $\varepsilon = 1$

$$W_b^{\text{ион}} = \frac{e^2 \omega_0^2 (\mu_0 - 1)}{2c^2} \left\{ \ln \frac{4v^2}{3,17 \omega_0^2 b^2 (1 - \beta^2)} - 1 \right\}. \quad (21)$$

При выводе (21) мы воспользовались соотношением

$$\int x \operatorname{Im} \mu dx = \frac{\pi}{2} (\mu_0 - 1). \quad (22)$$

¹ Подчеркнем, что в работе [1], как и в монографии [10], была допущена ошибка в выражении зависимости μ от частоты. Мы пользуемся случаем указать здесь на статью Ситенко [17], на которую было обращено наше внимание после направления в печать данной работы, посвященную близким вопросам. Однако окончательные результаты указанной работы не совпадают с приведенными ниже формулами (23) и (24), повидимому, в результате пренебрежений, сделанных при подсчетах в [17].

Из формулы (21) следует логарифмический рост ионизационных потерь [фактор $\ln(1 - \beta^2)$].

Учитывая эффект поляризации и складывая общие ионизационные потери с черенковскими, мы в окончательном результате можем пренебречь затуханием. Тогда имеем

$$W_b = \frac{e^2 \omega_0^2}{2c^2} (\mu_0 - 1) \left\{ \ln \frac{4v^2}{3,17 b^2 \omega_0^2} - \ln(1 - \beta^2) - 1 \right\}, \quad \beta < \frac{1}{\sqrt{\mu_0}}, \quad (23)$$

$$W_b = \frac{e^2 \omega_0^2}{2c^2} (\mu_0 - 1) \left\{ \ln \frac{4v^2}{3,17 b^2 \omega_0^2} - \ln \beta^2 (\mu_0 - 1) - \frac{1 - \beta^2}{\beta^2 (\mu_0 - 1)} \right\}, \quad \beta > \frac{1}{\sqrt{\mu_0}}, \quad (24)$$

Для общих потерь, как легко видеть из (23) и (24), в отличие от (21), при больших скоростях наступает насыщение потерь, причем в предельном случае ультрарелятивистского движения потери зависят от значения коэффициента магнитной анизотропии. Действительно, в ультрарелятивистском случае формула (13) дает

$$W_b(v \sim c) = \frac{2\pi n e^4}{m v^2} \left(\frac{2k^0}{mc^2} \right) \ln \frac{mc^2}{3,17 \pi b^2 e^2 n} \left(\frac{mc^2}{2k^0} \right). \quad (25)$$

Здесь n — электронная плотность среды, а через $k^0 = k/n$ обозначена величина, которая имеет порядок энергии взаимодействия двух элементарных магнитных диполей на расстоянии постоянной решетки и по сравнению с энергией покоя электрона является пренебрежимо малой величиной $\sim 10^{-9}$.

В выражение (14) совершенно не входит величина спонтанной поляризации I_s ферромагнетика. Для потерь энергии при $v/c \sim 1$ существенную роль играет лишь энергия магнитной анизотропии, связанная с магнитным взаимодействием элементарных магнитных диполей (см. выше).

Сравнивая (25) с формулой, полученной в [4] для потерь энергии в диэлектриках,

$$W_b(v \sim c) = \frac{2\pi n e^4}{m v^2} \ln \frac{mc^2}{3,17 \pi b^2 e^2 n}, \quad (26)$$

мы видим, что потерями энергии, связанными с магнитной восприимчивостью, в ультрарелятивистском случае можно пренебречь. Это особенно ясно в том случае, если наряду с (11) при вычислении потерь по (12) использовать конкретную дисперсионную формулу для ε :

$$\varepsilon = 1 + \frac{4\pi n e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2t'\omega}. \quad (27)$$

Тогда

$$W_b(v \sim c) = \frac{4\pi n e^4}{mc^2} \left(1 + \frac{2k^0}{mc^2} \right) \ln \frac{mc^2}{3,17 \pi b^2 e^2 n \left(1 + \frac{2k^0}{mc^2} \right)}. \quad (28)$$

Поскольку ферромагнетик обычно является металлом, целесообразно подсчитывать потери энергии заряженной частицы при прохождении через ферромагнетик как потери в проводящей среде.

Отметим в заключение, что при помощи (12) аналогичным методом получаются формулы для ионизационных и черенковских потерь как при прохождении заряженной частицы через ферроэлектрик, так и при прохождении намагниченной частицы через ферромагнетик.

Литература

- [1] Д. Иваненко и В. С. Гургенидзе. ДАН СССР, **67**, 997, 1949. —
[2] Д. Иваненко и В. С. Гургенидзе. Вестн. МГУ, **2**, 69, 1950. —
[3] Ch. Weizsäcker. Ann. d. Phys., **17**, 869, 1933. — [4] E. Fermi. Phys. Rev., **53**,
485, 1940. — [5] Н. Бор. Прохождение атомных частиц через вещество, ИИЛ, М.,
1950. — [6] П. А. Черенков. ДАН СССР, **2**, 451, 1934. — [7] И. М. Франк и
И. Е. Тамм. ДАН СССР, **14**, 107, 1937. — [8] M. Schöenberg. Nuovo Cim., **8**,
159, 1951. — [9] P. Budini. Nuovo Cim., **10**, 236, 1953. — [10] С. В. Вонсовский
и Я. С. Шур. Ферромагнетизм. ГТТИ, М.—Л., 1948. — [11] Д. Иваненко и
А. Соколов. Классическая теория поля, ГТТИ, М.—Л., изд. 2, 1951. — [12] В. Н. Цы-
тович. Вестн. МГУ, **II**, 27, 1951. — [13] R. Feys. Phys. Rev., **76**, 749, 1949. —
[14] Сб. статей под ред. Д. Иваненко «Новейшее развитие квантовой электроди-
намики», ИИЛ, 1954. — [15] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. Sov. Phys., **8**, 157, 1935. —
[16] П. Куни. Сб. «Мезон» под ред. И. Тамма, ГИТТЛ, М.—Л., 1947. — [17]
А. Г. Ситенко. Журн. техн. физ., **23**, 2200, 1953. — [18] F. Bloch. Ann. d.
Phys., **16**, 285, 1933. — [19] F. Bloch. ZS. f. Phys., **81**, 363, 1933.
-

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ТЯЖЕЛЫХ ЯДЕР И ЯДЕРНЫЕ СИЛЫ

Ф. И. Клизман

Статистический метод, представляющий собой полуклассическое приближение метода самосогласованного поля, развит в применении к тяжелым ядрам с учетом ненасыщения спинов и зарядов при различных зарядово-симметричных функциях взаимодействия между нуклонами с функцией расстояния вида: $-g^2 e^{-\kappa r}/r$. Получены и исследованы уравнения для распределения как полной плотности нуклонов, так и «зарядовой» или «спиновой» плотности. Получены формулы для основного «изотопического» и дополнительного члена выражения энергии ядра. Обсуждается влияние различных свойств ядерных сил на поведение сложных ядер.

Введение

Исследование тяжелых ядер статистическим методом с учетом особенностей ядерных сил, предсказываемых теорией и качественно подтверждающихся для системы двух нуклонов, представляет интерес как для объяснения свойств тяжелых ядер, так и для изучения ядерных взаимодействий. В последнее время статистическому рассмотрению ядер посвящен ряд работ. В работах Иваненко и др. [1,2] применялся метод статистики Томаса—Ферми в связи с проблемой ядерных оболочек. Ядерные силы рассматривались как функции расстояния $f(r)$ типа потенциала Юкавы (безобменные и независимые от спинов силы). В работе Компанейца [3] применялся метод самосогласованного поля в приложении к ядру с насыщенными спинами и зарядами, с функцией взаимодействия, представляющей собой полусумму обычных и обменных сил, с той же координатной зависимостью $f(r)$.

В настоящей работе дается построение статистической теории ядра, позволяющей рассматривать как случай насыщения спинов и зарядов, так и ненасыщение того или иного вида, с различными зарядово-симметричными функциями взаимодействия между нуклонами (без учета тензорных сил). При этом задача решается в общем виде в том смысле, что в выведенных формулах содержатся коэффициенты, зависящие от вида оператора в функции взаимодействия, с последующей конкретизацией результатов. Получено выражение для энергии ядра, включающее кинетическую энергию нуклонов, энергию «прямого» и «обменного» взаимодействия, как функций двух плотностей ρ_1 и ρ_2 , представляющих собой соответственно плотности нейтронов и протонов при насыщении спинов и ненасыщении зарядов и плотности частиц со спинами, направленными «вверх» и «вниз», при насыщении зарядов и ненасыщении спинов. На основе вариационного метода и уравнений для ядерных потенциалов получена система уравнений, определяющих распределение полной плотности нуклонов $\rho_0 = \rho_1 + \rho_2$ и зарядовой или спиновой плотности $\rho = \rho_1 - \rho_2$. Ввиду малости ρ/ρ_0 для ρ_0 в первом приближении получены уравнения, независимые от ρ и имеющие такой же вид, как и в случае насыщения спинов и зарядов. При этом ρ определяется из линейного дифференциального уравнения с коэффициентами, зависящими от ρ_0 . Исследование уравнений для ρ_0 совместно с уравнениями для энергии приводит к отбору

функций взаимодействия, обеспечивающих насыщение ядерных сил; отношение «обменных» сил к «обычным» оказывается равным четырем. С использованием значения параметра g^2/κ , определяемого из условия существования дейтрона, доказывается возможность устойчивых состояний тяжелых ядер с энергиями связи, пропорциональными A , и радиусами $R = r_0 A^{1/3}$, где r_0 приближенно равно радиусу действия ядерных сил. На основе этих параметров, характеризующих функцию взаимодействия двух нуклонов, независимо от точной формы потенциальной ямы, выводятся также выражения для «изотопического» и дополнительного члена $\delta(A, Z)$ полуэмпирической формулы энергии ядра ([4], формула (1, 8)). При помощи дополнительного параметра — экспериментального значения r_0 — вычисляются коэффициенты при различных членах выражения энергии ядра и оценивается масса мезона. В теории фигурирует также параметр γ , учитывающий зависимость ядерных сил от спинов, однако мало влияющий на количественные результаты и используемый лишь для некоторых качественных выводов при исследовании распределения ρ .

1. Общая теория

Рассмотрим функцию взаимодействия между двумя нуклонами в виде

$$U_{1,2} = P(1, 2) f(r_{1,2}), \quad (1)$$

где

$$f(r_{1,2}) = -g^2 (e^{-\kappa r_{1,2}} / r_{1,2}); \quad (2)$$

P — оператор, который может принимать либо одно из значений:

$$P = P_0 = 1, \quad P = P_\sigma = \frac{1 + (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2)}{2} \quad (3)$$

$$P = P_\tau = \frac{1 + (\vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2)}{2}, \quad P = P_r = -\frac{1 + (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2)}{2} \frac{1 + (\vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2)}{2},$$

либо представляет собой линейную комбинацию этих величин. Операторы P_σ, P_τ, P_r соответствуют, как известно, перестановке спиновых, зарядовых и пространственных координат двух нуклонов.

Выражение для энергии ядра записываем в следующем виде:

$$E = \int [T_1(\rho_1) + T_2(\rho_2)] d\tau + \frac{\alpha}{2} \int [A_1(\rho_1) + A_2(\rho_2)] d\tau + \alpha_{1,2} \int A_{1,2}(\rho_1, \rho_2) d\tau +$$

$$+ \frac{\beta}{2} \iint [\rho_1(1) \rho_1(2) + \rho_2(1) \rho_2(2)] f(r_{1,2}) d\tau_1 d\tau_2 +$$

$$+ \beta_{1,2} \iint \rho_1(1) \rho_2(2) f(r_{1,2}) d\tau_1 d\tau_2, \quad (4)$$

где первый член представляет собой кинетическую энергию, причем

$$T_1(\rho_1) + T_2(\rho_2) = \frac{3}{10} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/2} \frac{\pi^2 \hbar^2}{M} (\rho_1^{5/3} + \rho_2^{5/3}); \quad (5)$$

второй и третий члены — «обменное» взаимодействие соответственно для «одинаковых» и «различных» частиц, четвертый и пятый — аналогичные виды «прямого» взаимодействия.

Коэффициенты $\alpha, \alpha_{1,2}, \beta, \beta_{1,2}$ зависят от вида оператора в (1) и вычисляются, так же как и функции $A_1, A_2, A_{1,2}$, при помощи волновой функции ядра Ψ в виде детерминанта из индивидуальных волновых функций $\varphi_i(X_i)$ всех N нуклонов (X_i — совокупность пространствен-

ных координат, спиновой и зарядовой координаты нуклона). При этом полагаем

$$\varphi_i(\mathbf{X}_i) = \psi_i(x_i, y_i, z_i) \eta_i(\vec{\sigma}_i) \zeta(\vec{\tau}_i), \quad (6)$$

где η и ζ — собственные функции операторов σ_z , τ_z соответственно. Энергия взаимодействия всех нуклонов принимает значение:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \iint \varphi_i^*(1) \varphi_j^*(2) U_{1,2} \varphi_i(1) \varphi_j(2) d\mathbf{X}_1 d\mathbf{X}_2 - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \iint \varphi_j^*(1) \varphi_i^*(2) U_{1,2} \varphi_i(1) \varphi_j(2) d\mathbf{X}_1 d\mathbf{X}_2 = \\ &= J + K = \frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{i,j} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} K_{i,j}. \end{aligned} \quad (7)$$

Суммируя по спиновым и зарядовым переменным в выражениях $J_{i,j}$ и $K_{i,j}$ из (7) с учетом (6), выражая прямое взаимодействие J в (7) через обычные плотности

$$\rho_1 = \sum_{i=1}^{N_1} |\psi_i|^2, \quad \rho_2 = \sum_{j=1}^{N_2} |\psi_j|^2,$$

обменное взаимодействие K через смешанные плотности

$$\rho_1(1,2) = \sum_{i=1}^{N_1} \psi_i(1) \psi_i^*(2), \quad \rho_2(1,2) = \sum_{j=1}^{N_2} \psi_j(1) \psi_j^*(2) \quad (8)$$

(N_1 , N_2 — числа частиц обоих «сортов» соответственно), и вводя обозначения:

$$\begin{aligned} \iint |\rho_1(1,2)|^2 f(r_{1,2}) d\tau_1 d\tau_2 &= \int A_1(\rho_1) d\tau, \\ \iint |\rho_2(1,2)|^2 f(r_{1,2}) d\tau_1 d\tau_2 &= \int A_2(\rho_2) d\tau, \\ \iint \rho_1(1,2) \rho_2^*(1,2) f(r_{1,2}) d\tau_1 d\tau_2 &= \int A_{1,2}(\rho_1, \rho_2) d\tau, \end{aligned} \quad (9)$$

получаем для четырех случаев (3) значения коэффициентов, представленные в табл. 1.

Таблица 1

Оператор	Вид насыщения	α	$\alpha_{1,2}$	β	$\beta_{1,2}$
$P_0=1$	a	$-1/2$	0	1	1
	б				
P_r	a	1	1	$-1/2$	0
	б				
P_σ	a	-1	0	$1/2$	$1/2$
	б	$-1/2$	$-1/2$	1	0
P_τ	a	$-1/2$	$-1/2$	1	0
	б	-1	0	$1/2$	$1/2$

В случае, если оператор $P(1, 2)$ в (1) является линейной комбинацией каких-либо операторов (3), что соответствует реально возможным видам взаимодействия, коэффициенты $\alpha, \alpha_{1,2}, \beta, \beta_{1,2}$ получаются путем соответствующих линейных комбинаций из коэффициентов табл. 1. В табл. 2 представлены значения коэффициентов и некоторых других величин для ряда случаев, рассматриваемых в следующих разделах. В обеих таблицах в столбце «вид насыщения» строка «а» соответствует насыщению спинов, строка «б» — насыщению зарядов.

Функции $A_1, A_2, A_{1,2}$ мы вычисляем на основании формул (2), (8), (9), предполагая ψ_i, ψ_j имеющими вид плоских волн и заменяя суммирование по i, j интегрированием по пространству импульсов p_1, p_2 ; при этом вес каждого состояния считается, как и в (5), равным двум (два спиновых или два зарядовых состояния нуклона). Это вычисление аналогично вычислению обменной энергии системы электронов ([5], § 2) с заменой кулоновских сил функцией (2), с учетом того обстоятельства, что максимальные импульсы $p_{\mu,1}, p_{\mu,2}$ для частиц двух «сортов» в нашей задаче различны. Используя затем соотношение

$$\rho_1 = 2(4/3 \pi p_{\mu,1}^3) / (2\pi\hbar)^3 \quad (10)$$

и аналогичное соотношение для ρ_2 , получаем величины $A_1, A_2, A_{1,2}$ как функции плотностей ρ_1 и ρ_2 :

$$\begin{aligned} A_{1,2} = & -\frac{g^2 x^4}{\pi^3} \left\{ \left[\frac{1}{24} + \frac{\varepsilon^4}{4} \left(\rho_1^{1/3} \rho_2^{2/3} - \frac{1}{2} \rho_1^{4/3} - \frac{1}{2} \rho_2^{4/3} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\varepsilon^2}{4} (\rho_1^{2/3} + \rho_2^{2/3}) \right] \ln \frac{1 + \varepsilon^2 (\rho_1^{1/3} + \rho_2^{1/3})^2}{1 + \varepsilon^2 (\rho_1^{1/3} - \rho_2^{1/3})^2} - \right. \\ & \left. - \frac{2}{3} \varepsilon^3 [(\rho_1 + \rho_2) \operatorname{arctg} \varepsilon (\rho_1^{1/3} + \rho_2^{1/3}) - (\rho_1 - \rho_2) \operatorname{arctg} \varepsilon (\rho_1^{1/3} - \rho_2^{1/3})] - \right. \\ & \left. - \frac{1}{6} \varepsilon^2 \rho_1^{1/3} \rho_2^{1/3} + \frac{1}{2} \varepsilon^4 (\rho_1^{1/3} \rho_2 + \rho_1 \rho_2^{1/3}) \right\}, \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 = & -\frac{g^2 x^4}{\pi^3} \left[\left(\frac{1}{24} + \frac{\varepsilon^2}{2} \rho_1^{1/3} \right) \ln (1 + 4\varepsilon^2 \rho_1^{1/3}) - \right. \\ & \left. - \frac{4}{3} \varepsilon^3 \rho_1 \operatorname{arctg} 2\varepsilon \rho_1^{1/3} + \varepsilon^4 \rho_1^{4/3} - \frac{1}{6} \varepsilon^2 \rho_1^{2/3} \right], \quad (12) \end{aligned}$$

$$\varepsilon = (3/\pi)^{1/3} (\pi/x); \quad (13)$$

A_2 имеет вид, аналогичный A_1 , с заменой ρ_1 на ρ_2 . В случае насыщения спинов и зарядов $\rho_1 = \rho_2$ и $A_1 = A_2 = A_{1,2}$. Вводя переменные $\rho_0 = \rho_1 + \rho_2$ и $\rho = \rho_1 - \rho_2$, разлагая при этом функции (5), (11) и (12) по степеням ρ/ρ_0 и пренебрегая степенями выше второй, получаем выражение для энергии ядра (4) в следующем виде:

$$E = E_0 + E_I, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} E_0 = & \frac{3}{10} c_0 \int \rho_0^{5/3} d\tau - a_0 (\alpha + \alpha_{1,2}) \int [(1 + 3x^2) \ln (1 + x^2) - \\ & - 4x^3 \operatorname{arctg} x + \frac{3}{2} x^4 - x^2] d\tau - (g/4) (\beta + \beta_{1,2}) \int \rho_0 V_0 d\tau, \quad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_I = & \int \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \left\{ \frac{1}{6} c_0 \rho_0^{5/3} - \frac{1}{3} a_0 [(\alpha + \alpha_{1,2}) (x^4 - x^2 \ln (1 + x^2)) - \right. \\ & \left. - \alpha_{1,2} x^4 \ln (1 + x^2)] \right\} d\tau - (g/4) (\beta - \beta_{1,2}) \int \rho V d\tau, \quad (16) \end{aligned}$$

Таблица 2

Знак п/п.	Оператор	Значение для различных состояний системы двух нуклонов				Вид насыщения	α	$\alpha_{1,2}$	β	$\beta_{1,2}$	$\alpha + \alpha_{1,2}$	$\beta + \beta_{1,2}$	$\beta - \beta_{1,2}$
		трипл. / четное	сингл. / четное	трипл. / нечетное	сингл. / нечетное								
1	$\frac{1+P_r}{2}$	1	1	0	0	a } б }	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$
2	$\frac{1+P_r}{2} (1+\gamma P_\sigma) =$ $= \frac{1+P_r}{2} + \frac{\gamma}{2} (P_\sigma - P_\tau)$	$1+\gamma$	$1-\gamma$	0	0	a б	$\frac{1}{4} - \frac{\gamma}{4}$	$\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{4}$	$\frac{1}{4} - \frac{\gamma}{4}$	$\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\left(\frac{1}{4} + \frac{\gamma}{2}\right)$
3	$\frac{1+4 P_r}{5}$	1	1	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$	a } б }	$\frac{7}{10}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$+\frac{1}{5}$	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{2}{5}$
4	$\frac{1+4 P_r}{5} + \frac{\gamma}{2} (P_\sigma - P_\tau)$	$1+\gamma$	$1-\gamma$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$	a б	$\frac{7}{10} - \frac{\gamma}{4}$	$\frac{4}{5} + \frac{\gamma}{4}$	$-\frac{1}{5} - \frac{\gamma}{4}$	$+\frac{1}{5} + \frac{\gamma}{4}$	$\frac{3}{2}$	0	$-\left(\frac{2}{5} + \frac{\gamma}{2}\right)$
							$\frac{7}{10} + \frac{\gamma}{4}$	$\frac{4}{5} - \frac{\gamma}{4}$	$-\frac{1}{5} + \frac{\gamma}{4}$	$+\frac{1}{5} - \frac{\gamma}{4}$	$\frac{3}{2}$	0	$-\left(\frac{2}{5} - \frac{\gamma}{2}\right)$

причем

$$x = 2\pi \left(\frac{3}{2\pi} \right)^{1/2} \frac{\rho_0^{1/2}}{x}, \quad (17)$$

$$c_0 = \left(\frac{3}{2\pi} \right)^{1/2} \frac{\pi^2 \hbar^2}{M}, \quad a_0 = \frac{g^2 x^4}{24 \pi^3}, \quad (18)$$

$$V_0(\mathbf{r}) = g \int \rho_0(\mathbf{r}') \frac{\exp \{-x |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau', \quad (19)$$

V аналогично V_0 с заменой $\rho_0(\mathbf{r}')$ на $\rho(\mathbf{r}')$.

Пользуясь вариационным методом, находим уравнения для ρ_0 и ρ из условия

$$\delta E(\rho_0, \rho) = 0 \quad (20)$$

с дополнительными условиями

$$\int \rho_0 d\tau = N = A = \text{const}, \quad (21a)$$

$$\int \rho d\tau = I = \text{const}, \quad (21b)$$

где I — изотопическое число $A - 2Z$, если ρ имеет смысл зарядовой плотности, и спиновое число $2s$ (s — результирующий спин в единицах $\hbar$), если ρ имеет значение спиновой плотности.

На основании (14) — (21) получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} c_0 \rho_0^{1/2} - (\alpha + \alpha_{1,2}) \frac{2a_0}{\rho_0} [x^4 + x^2 \ln(1 + x^2) - 2x^3 \operatorname{arctg} x] - \\ & - \frac{g}{2} (\beta + \beta_{1,2}) V_0 - \frac{1}{9} \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \left\{ \frac{1}{2} c_0 \rho_0^{1/2} - 2 \frac{a_0}{\rho_0} x^4 \left[\alpha \left(\frac{2 + x^2}{1 + x^2} - 2 \frac{\ln(1 + x^2)}{x^2} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \alpha_{1,2} \left(2 - 2 \frac{\ln(1 + x^2)}{x^2} - \ln(1 + x^2) \right) \right] \right\} = -\lambda_0, \end{aligned} \quad (22a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\rho}{\rho_0} \left\{ \frac{1}{3} c_0 \rho_0^{1/2} - \frac{2}{3} \frac{a_0}{\rho_0} x^4 \left[(\alpha + \alpha_{1,2}) \left(1 - \frac{\ln(1 + x^2)}{x^2} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \alpha_{1,2} \ln(1 + x^2) \right] \right\} - \frac{g}{2} (\beta - \beta_{1,2}) V = -\lambda, \end{aligned} \quad (22b)$$

которая должна решаться совместно с дифференциальными уравнениями для ядерных потенциалов V_0 и V . При этом λ_0 и λ представляют собой множители Лагранжа, соответствующие условиям (21a) и (21b).

2. Ядра с насыщенными спинами и зарядами

Распределение плотности нуклонов ρ_0 определяется в этом случае ($\rho = 0$) на основании (19) и (22a) следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} & c_0 \rho_0^{1/2} - \frac{4a_0}{\rho_0} (\alpha + \alpha_{1,2}) [x^4 + x^2 \ln(1 + x^2) - 2x^3 \operatorname{arctg} x] - \\ & - (\beta + \beta_{1,2}) g V_0 = -2\lambda_0, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\Delta V_0 - x^2 V_0 = -4 \pi g \rho_0, \quad (24)$$

причем V_0 должно удовлетворять условию конечности в центре ядра и условию

$$(d/dr)[\ln(rV_0)]_{r=R} = -\kappa$$

(R — радиус ядра). Решение этой системы существенно зависит от значений коэффициентов $\alpha + \alpha_{1,2}$ и $\beta + \beta_{1,2}$.

На основании (23), с учетом (21a) выражение (15) для энергии E_0 принимает следующий вид:

$$E_0 = \frac{1}{20} c_0 \int_0^1 c_0' d\tau - (\alpha + \alpha_{1,2}) a_0 \int_0^1 \varphi(x) d\tau - \frac{\lambda_0}{2} A, \quad (25a)$$

где

$$\varphi(x) = (1 + 2x^2) \ln(1 + x^2) - 2x^3 \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} x^4 - x^2. \quad (25b)$$

Множитель Лагранжа λ_0 связан с E_0 соотношением

$$\lambda_0 = -(\partial E / \partial A)_I = -(dE_0 / dA) \quad (26)$$

и представляет собой, таким образом, энергию связи одного нуклона. Если λ_0 не зависит от A , имеет место эффект насыщения: $E_0 = -\lambda_0 A$, и именно это обстоятельство ограничивает выбор функций взаимодействия. Легко видеть, что насыщение безусловно имеет место для сил, приводящих к исчезновению прямого взаимодействия в (15), т. е. в случае $\beta + \beta_{1,2} = 0$. Действительно, в этом случае исчезает также член с V_0 в уравнении (23), и ρ_0 , определяемое этим уравнением, постоянно в объеме ядра [граничные условия для V_0 , на основании (24), с постоянной плотностью ρ_0 внутри ядра радиуса R и с $\rho_0 = 0$ при $r > R$, выполняются при этом автоматически]. Из (25a) при помощи (26), при $\rho_0 = \text{const}$, получаем следующее уравнение:

$$\lambda_0 = -\frac{1}{10} c_0 \rho_0^{2/3} + 2(\alpha + \alpha_{1,2}) \frac{a_0}{\rho_0} \varphi(x), \quad (27)$$

причем, на основании (17)

$$x = 3(\pi/3)^{1/2} (1/\kappa r_0), \quad (28)$$

где r_0 — радиус объема, приходящегося на один нуклон. Из (23), при $\beta + \beta_{1,2} = 0$, и из (27), с учетом (28) и (18), определяются λ_0 и r_0 через константы $g, \kappa, \alpha + \alpha_{1,2}$; следовательно, λ_0 и r_0 не зависят в этом случае от A , что и характеризует эффект насыщения.

Исключая λ_0 из (23), (27) и учитывая (28), получаем следующее уравнение:

$$x^3 = \frac{10}{\pi} \frac{M g^2}{\hbar^2 \kappa} (\alpha + \alpha_{1,2}) f(x), \quad (29a)$$

где

$$f(x) = 1 + \frac{x^2}{2} - \ln(1 + x^2) - \frac{\ln(1 + x^2)}{x^2}. \quad (29b)$$

Корень этого уравнения x_0 , а следовательно, и величина $1/\kappa r_0$ зависят не от точного значения g и κ , а лишь от величины g^2/κ , на основании теории дейтрона являющейся приближенно константой.

При помощи соотношения $g^2/\kappa \approx \pi^2 \hbar^2 / 4M$ беря оператор 3 табл. 2, удовлетворяющий условию $\beta + \beta_{1,2} = 0$, находим $x_0 \approx 5$; взяв оператор 4, также удовлетворяющий этому условию, при $\gamma \approx 0,15$, $(1 + \gamma)(g^2/\kappa) = (g^2/\kappa)_{\text{тр}} \approx \pi^2 \hbar^2 / 4M$, получаем $x_0 \approx 4$. На основании (28) при этом получается приблизительное равенство радиуса действия ядерных сил $1/\kappa$ и радиуса объема, приходящегося на один нуклон, r_0 , что согласуется с опытом. Значения x_0 , найденные таким образом, обеспечивают положительное значение λ_0 , которое может быть вычислено на основании (27) — (29) по формуле

$$\lambda_0 = \frac{3\pi}{10} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\hbar^2}{M} \frac{1}{r_0^2} \left[\frac{\varphi(x_0)}{x_0^2 f(x_0)} - \frac{1}{4} \right]. \quad (30)$$

При $x_0 = 4$, $r_0 = 1,5 \cdot 10^{-13}$ см получаем для λ_0 значение около 3 MeV. При этом из (28) $1/\kappa \approx 2 \cdot 10^{-13}$ см, что соответствует массе мезона $\mu \approx 200 m_e$. Экспериментальное значение $\lambda_0 \approx 8$ MeV получается из (30) при $r_0 \approx 0,9 \cdot 10^{-13}$ см. Следует отметить, что найденное таким образом значение r_0 действительно должно быть несколько меньше экспериментального как вследствие пренебрежения кулоновскими силами, изотопическим и поверхностным эффектами, так и благодаря особенностям вариационного метода.

Укажем также, что в случае рассматриваемых нами сил, приводящих к насыщению [к исчезновению члена с V_0 в (15), (23)], автоматически выполняется условие $\partial E_0 / \partial R = 0$, обеспечивающее устойчивость поверхности ядра.

Рассмотрим теперь вопрос о возможности существования решения системы (23), (24) при $\beta + \beta_{1,2} \neq 0$, дающего приблизительно постоянное ρ_0 в большей части объема, т. е. решения, нулевое приближение которого внутри ядра (вдали от поверхности) имеет вид:

$$\rho_0 = \text{const} = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi r_0^3}, \quad V_0 = \frac{4\pi g \rho_0}{\kappa^2}. \quad (31)$$

Если такое решение возможно, то уравнение (27) остается приближенно верным, и с учетом (31) из (23), (27) получаем обобщение (29) в форме

$$x^3 = \frac{10M}{\pi} \frac{g^2}{\hbar^2 \kappa} \left[(\beta + \beta_{1,2}) \frac{x^4}{6} + (\alpha + \alpha_{1,2}) f(x) \right], \quad (32)$$

определяющей равновесное значение $x = x_0$.

В случае выбора операторов 1, 2 табл. 2 получаем решение (32) в виде: $x = x_0 \approx 0,6$. Отсюда (1/ κ): $r_0 \approx 0,2$. При этом λ оказывается отрицательным, т. е. найденное решение не соответствует устойчивому состоянию ядер. На основании общих соображений о роли отрицательного прямого взаимодействия, а также на основании исследования знака второй вариации E_0 , также приходим к выводу о невозможности устойчивых состояний ядер при силах, выражения для которых содержат операторы типа 1, 2, при одновременном выполнении насыщения. То же относится и к силам, рассматриваемым в [3], отличающимся от сил, соответствующих операторам типа 1 табл. 2, знаком при обменном операторе и приводящим поэтому к положительной обменной энергии и к исчезновению всего взаимодействия для состояний двух нуклонов с четным L .

3. Ядра с ненасыщенными спинами или ненасыщенными зарядами

Распределение спиновой или зарядовой плотности ρ на основании (226) определяется выражением:

$$\rho = \frac{(g'/2) (\beta - \beta_{1,2}) V - \lambda}{K(\rho_0)}, \quad (33)$$

где $K(\rho_0)$ — выражение в фигурной скобке из (226), деленное на ρ_0 ; кроме того, V , связано с ρ уравнением

$$\Delta V - \kappa^2 V = -4\pi g \rho. \quad (34)$$

Из (33), (34) получаем уравнение для потенциала V :

$$\Delta V - \mu^2 V = L, \quad (35)$$

где

$$\mu^2 = \kappa^2 - 2\pi g^2 \frac{\beta - \beta_{1,2}}{K(\rho_0)}, \quad (36a)$$

$$L = 4\pi g \lambda / K(\rho_0), \quad (36b)$$

причем на основании табл. 1, 2, K и μ^2 положительны как для обычных, так для обменных и «смешанных» сил.

Полагая далее ρ_0 приблизительно постоянным в объеме ядра, получим сферически-симметричное и регулярное в начале координат решение уравнения (34) в следующем виде:

$$V = C \frac{\text{sh } \mu r}{r} - \frac{L}{\mu^2}. \quad (37)$$

Отсюда на основании (33) и (36)

$$\rho = - \left(\frac{B \text{sh } \mu r}{r} + \frac{1}{K} \frac{\kappa^2}{\mu^2} \right) \lambda. \quad (38)$$

Постоянная C и связанная с ней постоянная B определяются из граничного условия

$$\left[\frac{d}{dr} \ln (rV) \right]_{r=R} = -\kappa. \quad (39)$$

При этом

$$B = \frac{-(\beta - \beta_{1,2}) 2\pi g^2}{K^2 \mu^2} \frac{\kappa R + 1}{\kappa \text{sh } \mu R + \mu \text{ch } \mu R}. \quad (40)$$

На основании (21a), (21б) а также (38), (40) получаем следующее выражение для λ :

$$\lambda = -\rho_0 K I / A \left[\left(1 - \frac{\kappa^2}{\mu^2} \right) F(R) + \frac{\kappa^2}{\mu^2} \right] = -b \frac{I}{A}, \quad (41)$$

где

$$F(R) = \frac{3}{(\mu R)^3} (1 + \kappa R) \frac{1 - (\text{th } \mu R / \mu R)}{1 + (\mu / \kappa) \text{th } \mu R}. \quad (42)$$

λ — отрицательно, так как для всех интересующих нас видов сил $\mu^2 \geq \kappa^2$, $\mu R \gg 1$.

Далее, учитывая, на основании табл. 1, 2, значения коэффициента $\beta - \beta_{1,2}$ для различных случаев, замечаем, что B положительно в случае обменных и «смешанных» сил и равно нулю в случае обычных сил; следовательно, выражение (38) для распределения ρ содержит член, возрастающий от центра ядра к периферии, обусловленный обменными силами (при $\rho_0 \approx \text{const}$). Это значит, что «избыточные» нейтроны в ядре с ненасыщенными зарядами и насыщенными спинами испытывают некоторое дополнительное взаимное отталкивание, и, аналогичным образом, имеет место взаимное отталкивание между «избыточными» нуклонами с параллельными спинами при насыщении зарядов и ненасыщении спинов.

Отметим также, что указанный эффект дополнительного отталкивания не исчезает и при наличии спиновой зависимости (например, в случае сил, соответствующих оператору вида 4 табл. 2), вследствие малости γ . Однако эффект ослабляется в случае ненасыщения спинов и насыщения зарядов и усиливается в случае ненасыщения зарядов и насыщения спинов благодаря «спиновым» членам. Это значит, что, например, для ядра типа $A = 4n + 2$ энергетически более выгодным (при пренебрежении кулоновскими силами и разностью масс протона и нейтрона) оказывается состояние с ненасыщенными спинами и насыщенными зарядами, что соответствует синглетному зарядовому и триплетному спиновому состоянию двух «лишних» нуклонов (протон и нейтрон с параллельными спинами) в модели оболочек.

Таким образом статистическая модель, так же как и модель независимых частиц, может объяснить, путем учета спинового взаимодействия, существование ядер типа « Z — нечетное, A — четное» со спином, равным единице.

Выражение E_I может быть подробнее исследовано на основе найденного распределения ρ .

На основании (16), (22б), (21б) получаем

$$E_I = -(\lambda/2) I, \quad (43)$$

откуда с учетом значения λ из (41)

$$E_I = + \frac{1}{2} \frac{\rho_0 K}{[1 - (\kappa^2/\mu^2)] F(R) + (\kappa^2/\mu^2) \bar{A}} \frac{I^2}{\bar{A}} = + \frac{b}{2} \frac{I^2}{\bar{A}}. \quad (44)$$

Величина $F(R)$ мала для тяжелых ядер и медленно изменяется с изменением $R = r_0 A^{1/3}$; поэтому величина b , определяющая λ и E_I , практически не зависит от A .

Из (41) и (44) следует

$$\lambda = -(\partial E_I / \partial I)_A = -(\partial E / \partial I)_A, \quad (45)$$

что согласуется с физическим смыслом множителя Лагранжа λ , соответствующего условию (21б) вариационной задачи.

В случае, когда ρ означает зарядовую плотность, $I = A - 2Z$, и формула (44) принимает вид

$$E_I = 2b \left(\frac{A}{2} - Z \right)^2 / A. \quad (46)$$

Мы получили, таким образом, «изотопический» член полуэмпирической формулы энергии ядра ([⁴], формула (1,8)) с коэффициентом $2b$, определяемым (44). В более развернутом виде этот коэффициент может быть представлен, с учетом значения $K\rho_0$, а также (18), (28) и связи между ρ_0 и r_0 , в следующем виде:

$$2b = \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{r_0^2} \frac{\frac{\pi}{2} \frac{\hbar^2}{M} + \frac{g^2}{\kappa} \frac{2}{x} \left[\alpha_{1,2} \ln(1+x^2) - (\alpha + \alpha_{1,2}) \left(1 - \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \right) \right]}{[1 - (\kappa^2/\mu^2)] F(R) + (\kappa^2/\mu^2)}. \quad (47)$$

При этом на основании (36а)

$$\kappa^2 / \mu^2 = \psi / [\psi - (\beta - \beta_{1,2}) (g^2 / \kappa) x], \quad (48)$$

где ψ — числитель дроби в (47).

На основании этих формул можно определить численное значение коэффициента $2b$ в (46) для различных видов сил, совместимых с условием $\rho_0 \approx \text{const}$.

Для взаимодействия, содержащего оператор типа 4 табл. 2 со значениями параметров r_0 , g^2/κ , γ , из предыдущего раздела получаем $2b \approx 100 \text{ MeV}$, что согласуется по порядку величины с экспериментальным значением $\sim 77,3 \text{ MeV}$.

В случае, когда ρ означает спиновую плотность при насыщении зарядов, в формулах (43) — (45) $I = 2S$, и мы получаем положительный член в выражении энергии ядра вида:

$$E_S = 2b S^2 / A \quad (49)$$

(S — результирующий спин ядра). Но ядра с насыщенными зарядами (число протонов равно числу нейтронов) и ненасыщенными спинами должны принадлежать к группе « A — четное, Z — нечетное», и именно для них дополнительный эмпирический член в выражении $\delta(A, Z)$ энергии ядра ([⁴], формулы (1,8), (1,9)) положителен.

Коэффициент $2b$ вычисляется по тем же формулам (47), (48), что и в случае изотопического члена, но с иными значениями коэффициентов $\alpha_{1,2}$, $\beta - \beta_{1,2}$ в соответствии с табл. 2 (случай «б» вместо случая «а»). Вычисленная величина $2b$ для этого случая с оператором и константами, фигурировавшими при вычислении $2b$ для изотопического члена, составляет $\approx 80 \text{ MeV}$.

Хотя формула (49) отличается по виду от соответствующего эмпирического члена ($\sim A^{-1/4}$), любопытно отметить, что для наиболее тя-

желого стабильного ядра рассматриваемого типа (N^{14}) теоретическое значение $E_s \approx 6 \text{ MeV}$, эмпирическое $\approx 4,7 \text{ MeV}$. Такое же совпадение получается и для других ядер этого типа.

Учитывая грубость наших приближений, в особенности для случая ненасыщения спинов (в связи с пренебрежением тензорными силами), совпадение по знаку и по порядку величины теоретических формул с эмпирическими показывает, что эффект «ненасыщения» спинов, так же как и изотопический эффект, правильно отражается статистической теорией.

В заключение отметим, что результаты настоящей работы показывают применимость для исследования свойств тяжелых ядер статистического метода, развитого здесь на основе ядерных сил, сохраняющих основные черты, предсказываемые мезонной теорией (вид функции расстояния, обменные и «спиновые» члены). Выбором параметров этих сил, согласующихся как с основными свойствами дейтрона и явлением рассеяния медленных нуклонов нуклонами, так и со свойством насыщения у сложных ядер, получены правильные по порядку величины и знаку значения различных членов в выражении энергии связи тяжелых ядер и правильное отношение радиуса действия ядерных сил к радиусу объема, приходящегося на один нуклон, а также объяснение поведения некоторых типов сложных ядер на основе анализа влияния обменных и спиновых членов.

Применяемый здесь метод можно обобщить для включения тензорных и кулоновских сил, что позволит уточнить результаты работ [6, 7] о квадрупольных моментах ядер. Отметим также, что в работе [8], появившейся после подготовки к печати настоящей работы, рассматривается статистический метод в применении к ядрам с насыщенными спинами. Эта работа отличается от нашей как рассматриваемыми видами ядерных взаимодействий (чисто обменные силы между протоном и нейтроном, а также зависящие, как и в [9], гл. 6, от спинов силы между одинаковыми частицами), так и методом построения теории, способом решения различных задач и кругом рассматриваемых вопросов. Взаимодействия, рассматриваемые в [8], эквивалентны по эффекту насыщения силам, в выражения для которых входят операторы типа 3 табл. 2 настоящей работы.

Учитывая трудности интерпретации опытов по рассеянию быстрых нуклонов нуклонами [10] на основе «полуэмпирических» ядерных сил, следует отметить полукачественный характер современной статистической теории ядра, дальнейшее уточнение которой будет связано, по видимому, с развитием мезонной теории ядерных сил.

Киевский технологический
институт
легкой промышленности

Поступила в редакцию
15 декабря 1953 г.

Литература

- [1] Д. Д. Иваненко и Д. Родичев. ДАН СССР, 70, 605, 1950. — [2] Д. Д. Иваненко и А. А. Соколов. ДАН СССР, 74, 33, 1950. — [3] А. С. Компанеиц. ДАН СССР, 85, 301, 1952. — [4] Э. Ферми. Ядерная физика, ИИЛ, 1951. — [5] П. Гомбаш. Статистическая теория атома и ее применения, ИИЛ, 1951. — [6] Ф. И. Клингман. ЖЭТФ, 14, 323, 1944. — [7] Ф. И. Клингман. ЖЭТФ, 18, 346, 1948. — [8] П. Гомбаш. Усп. физич. наук, 49, 385, 1953. — [9] Г. А. Бете и Р. Ф. Бечер. Физика ядра, ч. I, Харьков, 1938. — [10] В. И. Гольданский, А. Л. Любимов и Б. В. Междведев. Усп. физич. наук, 48, 531, 1952.

КРАТНОЕ РАССЕЯНИЕ В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ В ВЕСЬМА ТОНКИХ СЛОЯХ ВЕЩЕСТВА

А. С. Компанеев

Приводятся данные о кратном кулоновском рассеянии в слоях вещества с оптической толщиной, равной 1 и 3. Выяснена относительная роль единичного и кратного рассеяния при различных углах вылета. В Дополнении рассматривается оптическая модель кулоновского рассеяния на малые углы.

Во многих ядерных экспериментах бывает существенно учитывать кратное рассеяние заряженных частиц, прошедших через столь тонкие слои вещества, что полное число столкновений сравнимо с единицей. При этом обычная приближенная теория многократного рассеяния, в которой принимается, что число столкновений весьма велико, неприменима, так что необходимо пользоваться более точной теорией [1, 2]. Полученная в этой теории функция распределения для малых толщин изучалась Биберманом [3], но результаты этой работы не могут быть перенесены на углы, большие по сравнению с минимальным дифракционным углом отклонения (см. ниже). Даже если толщина рассеивающего слоя вещества составляет один пробег для упругого рассеяния, заметная доля частиц претерпевает при прохождении больше, чем одно столкновение. Определить долю таких частиц в интегральном эффекте рассеяния очень легко. При помощи точной теории многократного рассеяния можно определить и долю частиц, претерпевших кратное рассеяние и вылетевших из вещества под определенным углом к первоначальному направлению падения.

Общая формула для функции распределения частиц, прошедших через некоторую толщину вещества и отклонившихся на малый угол, была дана в [1] и [2]. Эту функцию можно записать так:

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} J_0(u\theta) \exp \left\{ -N \int d\sigma' (1 - J_0(u\theta')) \right\} u du, \quad (1)$$

где N — число рассеивающих атомов на 1 см², J_0 — функция Бесселя нулевого порядка, $d\sigma'$ — дифференциальное эффективное сечение.

Для легких элементов в (1) надо подставить дифференциальное эффективное сечение кулоновского рассеяния с учетом экранирования:

$$d\sigma = \frac{8\pi Z^2 e^4}{m^2 v^4} \frac{0d0}{[0^2 + (\hbar\alpha/mv)^2]^2}; \quad (2)$$

здесь Z — атомный номер, v — скорость частицы, α — параметр экранирования. Углы рассеяния считаются малыми, так как эти углы представляют основной интерес в задаче о кратном рассеянии. Формуле (2) отвечает потенциальное поле вида $V = (Ze/r)e^{-\alpha r}$.

Введем оптическую толщину рассеивателя (d — геометрическая толщина):

$$\tau \equiv 8\pi N Z^2 e^4 d / \hbar^2 \alpha^2 v^2 \quad (3)$$

и безразмерный параметр экранирования

$$\nu = \hbar\alpha/2m\nu. \quad (4)$$

Подставляя (2), (3) и (4) в общую формулу (1), получим формулу для многократного кулоновского рассеяния в легких элементах:

$$f(0) = \frac{e^{-\tau}}{8\pi\nu^2\tau} \int_0^\infty J_0\left(\xi \frac{0}{2\nu\sqrt{\tau}}\right) \exp\{\xi \sqrt{\tau} K_1(\xi/\sqrt{\tau})\} \xi d\xi; \quad (5)$$

здесь K_1 — функция Макдональда. При больших оптических толщинах эту функцию можно представить в виде

$$K_1\left(\frac{\xi}{\sqrt{\tau}}\right) \approx \frac{\sqrt{\tau}}{\xi} - \frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} \ln \frac{0,89\xi}{\sqrt{\tau}}, \quad (6)$$

поскольку при этом основной вклад в интеграл (5) дают значения ξ , гораздо меньшие, чем $\sqrt{\tau}$.

Подстановка (6) в (5) дает формулу, справедливую при больших τ — порядка нескольких десятков:

$$f(0) = \frac{1}{8\pi\nu^2\tau} \int_0^{\xi < 2\sqrt{\tau}} \exp\left\{\frac{\xi^2}{2} \ln \frac{0,89\xi}{\sqrt{\tau}}\right\} J_0\left(\xi \frac{0}{2\nu\sqrt{\tau}}\right) \xi d\xi. \quad (7)$$

Подобное выражение было получено в [4], где изучалось рассеяние в тяжелых элементах, причем оказалось, что $f(0)$ весьма напоминает гауссово распределение. Для $\tau = 100$ формула (5) табулирована в [5] без перехода к асимптотической форме (7).

Если $\tau = 1$ или 3, то формула (7), конечно, совершенно неприменима. Чтобы найти функцию распределения в этом случае, необходимо численно интегрировать выражение (5). Как уже говорилось, расчет $f(0)$ при малых τ производил Биберман. Он заменил элементарный закон рассеяния суммой гауссовых функций. Такая сумма может дать хорошее приближение для $f(0)$ при самых малых углах отклонения ($0 \sim 2\nu$), но заведомо неприменима в области $0 \gg 2\nu$, потому что средний квадрат угла отклонения, вычисленный по формуле (2), логарифмически расходится, а если пользоваться гауссовыми функциями вместо формулы (2), — сходится. Но поскольку характерная особенность кулоновского рассеяния как раз и состоит в том, что средний квадрат угла отклонения расходится со стороны больших углов, то чтобы проследить $f(0)$ до возможно больших 0 , не следует пользоваться гауссовым приближением.

Заметим, прежде всего, что непосредственное численное интегрирование по формуле (5) невозможно, потому что интеграл весьма медленно сходится на верхнем пределе. Поэтому из подинтегрального выражения следует выделить часть, приходящуюся на частицы, совсем не рассеявшиеся, и на частицы, рассеявшиеся однократно. Оставшаяся функция распределения имеет вид:

$$f_{>1}(0) = \frac{1}{8\pi\nu^2\tau} e^{-\tau} \int_0^\infty J_0\left(\xi \frac{0}{2\nu\sqrt{\tau}}\right) \left(\exp\left\{\xi \sqrt{\tau} K_1\left(\frac{\xi}{\sqrt{\tau}}\right)\right\} - 1 - \xi \sqrt{\tau} K_1\left(\frac{\xi}{\sqrt{\tau}}\right) \right) \xi d\xi. \quad (8)$$

Индекс >1 указывает, что учтено только кратное рассеяние. Легко проверить, что третий член в скобке под интегралом дает однократное рассеяние, потому что (см. [4])

$$\int_0^{\infty} K_1(ax) J_0(bx) x^2 dx = \frac{2a}{(a^2 + b^2)^2}.$$

Для случая $\tau = 3$ удобно было выделить и двукратное рассеяние, так как интеграл (8) сходиллся еще недостаточно хорошо. Распределение двукратно рассеявшихся частиц, записанное отдельно, имеет вид

$$f_2(\vartheta) = \frac{\tau^2 e^{-\tau} \vartheta^2}{2\pi(\vartheta^4 + 4\vartheta^2)^2} \left[\frac{2(\vartheta^2 + 1)}{(\vartheta^4 + 4\vartheta^2)^{1/2}} \ln \frac{\vartheta^2 + 2 + \sqrt{\vartheta^4 + 4\vartheta^2}}{\vartheta^2 + 2 - \sqrt{\vartheta^4 + 4\vartheta^2}} + \vartheta^2 - 2 \right], \quad (9)$$

где

$$\vartheta \equiv \theta/2\sqrt{V\tau}. \quad (10)$$

Можно убедиться, что

$$2\pi \int_0^{\infty} f_2(\vartheta) \vartheta d\vartheta = \frac{\tau^2 e^{-\tau}}{2},$$

как и должно быть.

Приводим результаты численных расчетов для $\tau = 1$ и для $\tau = 3$ (вычисления производились Т. Н. Шаталовой):

Таблица 1

Функция распределения частиц, прошедших слой вещества толщиной в один пробег ($\tau=1$)

$\vartheta = \frac{\theta}{2\sqrt{V\tau}}$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$2\pi f_{>1}$	0,149	0,130	0,091	0,057	0,0342	0,0204	0,0136	0,00735	0,00515	0,00386	0,0026
$2\pi f_1$	0,735		0,184		0,0394		0,00735		0,00254		0,0011

Здесь $f_{>1}(\vartheta)$ — функция распределения частиц, испытавших больше чем одно столкновение, f_1 — функция распределения частиц, испытавших одно столкновение. Оказывается, что число тех и других становится сравнимым при $\vartheta = 2$, а при больших углах преобладают частицы, претерпевшие кратное рассеяние.

Распределение, приведенное в табл. 1, нормировано на единицу:

$$e^{-1} + 2\pi \int_0^{\infty} (f_{>1} + f_1) \vartheta d\vartheta = 1.$$

Здесь e^{-1} — доля частиц, прошедших без единого акта рассеяния. Фактически табл. 1 охватывает 0,975 от числа всех прошедших частиц: остальные рассеиваются на угол ϑ , больший 5.

Таблица 2

Функция распределения частиц, прошедших через слой вещества толщиной в три пробега ($\tau = 3$)

$\vartheta = \frac{\theta}{2\sqrt{V\tau}}$	0	0,5	1,0	1,5	2,5	4	6	8
$2\pi f_{>1}(\vartheta)$	0,295	0,268	0,205	0,143	0,0645	0,0201	0,0043	0,0023
$2\pi f_1(\vartheta)$	0,298	0,191	0,746	0,028	0,0118	0,00103	0,0002	0,00007
$2\pi f_2(\vartheta)$	0,149	0,133	0,088	0,056	0,0162	0,030	0,0075	0,00024

Эта таблица охватывает 0,92 от числа всех прошедших частиц. Заметим, что теперь кратное рассеяние становится больше единичного уже при самых малых значениях β .

ДОПОЛНЕНИЕ

Функция распределения для кратного кулоновского рассеяния может быть изучена и экспериментально при помощи простой оптической модели.

Пусть составлена эмульсия из двух прозрачных сред с очень близкими показателями преломления. Будем считать, что одно вещество образует собственно среду, в которую вкраплено второе вещество в виде беспорядочно расположенных шариков одинакового радиуса R . Радиус будем считать большим по сравнению с длиной волны проходящего света, чтобы можно было пользоваться законами геометрической оптики. Таким образом рассматриваемое рассеяние в известном смысле противоположно релеевскому рассеянию, когда длина волны велика по сравнению с размерами препятствия.

Определим сначала отклонение светового луча в элементарном акте рассеяния. Согласно предположению, относительный показатель преломления двух сред есть ν , где ν — малое число. Пусть полярная ось проведена из центра шара в направлении падения луча. Полярный угол точки падения луча на шар назовем β . Тогда угол отклонения луча в шаре, как видно из элементарного построения, есть

$$\theta = 2\nu \operatorname{tg} \beta.$$

Угол θ считается малым, так как $\nu \ll 1$ и вклад больших углов незначителен. Отсюда легко получить дифференциальный эффективный поперечник рассеяния. По общим формулам классической теории рассеяния он оказывается равным¹

$$d\sigma = 2\pi R^2 \frac{4\nu^2 \theta d\theta}{(4\nu^2 + \theta^2)^2}.$$

Эта формула вполне подобна (2), причем обозначение ν соответствует прежнему, а

$$R = 2Ze^2 / \hbar \alpha \nu.$$

Формула для $d\sigma$ может быть получена и путем предельного перехода из дифракционной теории.

Московский инженерно-физический институт

Поступила в редакцию
17 марта 1954 г.

Литература

- [1] А. С. Компанеев. ЖЭТФ, 15, 236, 1945. — [2] А. С. Компанеев. ЖЭТФ, 17, 1059, 1947. — [3] Л. М. Биберман. Изв. АН СССР, сер. физич., 15, 424, 1951. — [4] Т. Ватсон. Бесселевы функции, ИИЛ, 1949. — [5] H. S. Snyder and V. T. Scott. Phys. Rev., 76, 220, 1949.

¹ Заметим, что формула (2) получена в борновском приближении из волнового уравнения, а последняя формула получена в приближении геометрической оптики. Волновая картина для частиц оказывается аналогичной лучевой картине для света. Следовательно, найденная аналогия отнюдь не является частным случаем оптико-механической аналогии. Усмотреть физическую причину для этой аналогии мы не смогли.

К ТЕОРИИ ЭФФЕКТОВ ХОЛЛА И НЕРНСТА—ЭТТИНГСГАУЗЕНА В ПОЛУПРОВОДНИКАХ СО СМЕШАННОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ

Ф. Г. Басс и И. М. Цидильковский

Рассчитываются э. д. с. Холла и Нернста — Эттингсгаузена, а также распределение концентраций носителей тока в полупроводнике со смешанной проводимостью, находящемся в неоднородном магнитном поле. Учитывается наличие уровней, обусловленных примесями, и рекомбинация носителей тока.

1. Введение

В последнее время было опубликовано несколько работ [1-3], в которых рассматривается влияние объемной и поверхностной рекомбинации на эффект Холла в полупроводниках. Во всех этих работах в основу расчета положен закон Ома в форме, справедливой лишь для полупроводников без примесей, у которых длина свободного пробега носителей тока не зависит от их скорости.

В настоящей работе наряду с эффектом Холла рассматривается термомагнитный эффект Нернста—Эттингсгаузена в предположении более общей зависимости длины свободного пробега носителей тока l от скорости v :

$$l = \Phi(T) v^n, \quad (1)$$

где $\Phi(T)$ — некоторая функция температуры T , n — любое число. Ниже будет показано, что такая общая форма зависимости l от v приводит как к существенным количественным изменениям концентрации носителей тока и э. д. с. в обоих эффектах, так и к качественным изменениям в случае эффекта Нернста — Эттингсгаузена. Исследование общего случая неоднородного магнитного поля позволяет выяснить степень влияния нарушения однородности магнитного поля вблизи краев полюсных наконечников на изучаемые явления.

В дальнейшем в работе принято, что

1. Величина показателя степени n в формуле (1) имеет для электронов и дырок одно и то же значение. Это равносильно предположению об одинаковом механизме рассеяния электронов и дырок на фоновых.

2. Первичный ток (электрический или тепловой) направлен вдоль оси x , а магнитное поле направлено вдоль оси z ($H = H_z$) и является функцией y . Отсюда следует, что электрические поля Холла и Нернста — Эттингсгаузена и изменения концентраций носителей тока являются функциями лишь y .

2. Исходные уравнения

Запишем обобщенный дифференциальный закон Ома для электронов и дырок в форме, полученной Толпыго [4]:

$$\begin{aligned} j_+ = -e n_+ N_+ \left\{ -E + \frac{kT}{e} \left[\nabla \ln N_+ + \frac{n+1}{2} \nabla \ln T \right] + \right. \\ \left. + \frac{a_n u_+}{c} \left[-E + \frac{kT}{e} \left(\nabla \ln N_+ + n \nabla \ln T \right) \right] \times \mathbf{H} \right\}; \end{aligned} \quad (2a)$$

$$\mathbf{j}_- = -e n_- N_- \left\{ -\mathbf{E} - \frac{kT}{e} \left[\nabla \ln N_- + \frac{n+1}{2} \nabla \ln T \right] - \right. \\ \left. - \frac{a_n u_-}{c} \left[-\mathbf{E} - \frac{kT}{e} (\nabla \ln N_- + n \nabla \ln T) \right] \times \mathbf{H} \right\}. \quad (26)$$

Плотность суммарного тока $\mathbf{j}$ равна

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_+ + \mathbf{j}_- = -e \left\{ -A_1 \mathbf{E} + \frac{kT}{e} (\nabla A_2 + A_3 \nabla \ln T) + \right. \\ \left. + \left[-A_4 \mathbf{E} + \frac{kT}{e} (\nabla A_5 + A_6 \nabla \ln T) \right] \times \frac{\mathbf{H}}{c} \right\}. \quad (2\text{в})$$

Здесь $\mathbf{j}_+$, $\mathbf{j}_-$ — плотности токов дырок и электронов, N_+ , N_- — концентрации дырок и электронов, e — абсолютное значение заряда электрона, $\mathbf{H}$ — напряженность магнитного поля, $u_{\pm} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \frac{e}{m_{\pm}} \Phi(T) \left(\frac{2kT}{m_{\pm}} \right)^{(n-1)/2} \times$ $\times \Gamma\left(\frac{n}{2} + 2\right)$ — подвижности дырок и электронов,

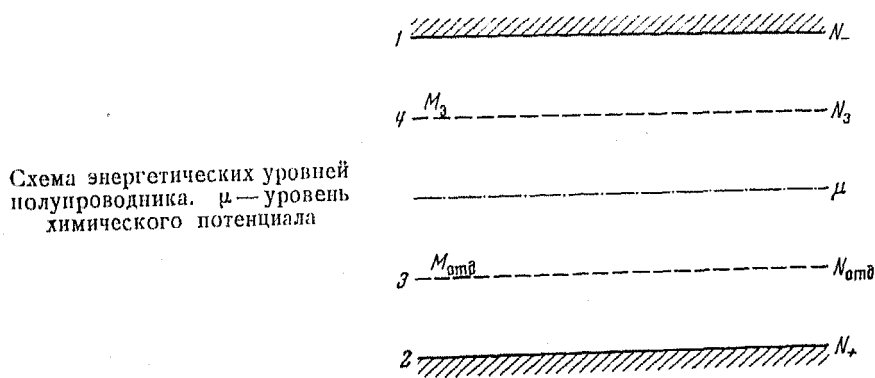
$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx,$$

$m_{\pm}$ — эффективные массы дырок и электронов,

$$a_n = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \frac{\Gamma(n + (3/2))}{\Gamma^2((n/2) + 2)};$$

$$A_1 = u_+ N_+ + u_- N_-, \quad A_2 = u_+ N_+ - u_- N_-, \quad A_3 = \frac{n+1}{2} A_2, \quad (3) \\ A_4 = a_n (u_+^2 N_+ - u_-^2 N_-), \quad A_5 = a_n (u_+^2 N_+ + u_-^2 N_-), \quad A_6 = n A_5.$$

Уравнения непрерывности для потоков дырок и электронов в полупроводнике, содержащем уровни, обусловленные примесями (см. рисунок), можно представить в виде



$$\frac{1}{e} \operatorname{div} \mathbf{j}_+ = \frac{1}{e} \operatorname{div} \mathbf{j}_- = k_{21} - k_{12} N_+ N_- + M_{\text{отд}} \frac{k_{31} k_{23} - k_{13} k_{32} N_+ N_-}{k_{31} + k_{23} + k_{13} N_- + k_{32} N_+} + \\ + M_3 \frac{k_{41} k_{24} - k_{14} k_{42} N_+ N_-}{k_{41} + k_{24} + k_{14} N_- + k_{42} N_+}, \quad (4)$$

где M_3 , $M_{\text{отд}}$ — концентрации уровней захвата (акцепторных) и отдачи (донорных), k_{ij} — кинетические коэффициенты; индексы i и j определяют тип перехода.

Кинетические коэффициенты связаны между собой следующими соотношениями [5]:

$$\frac{k_{21}}{k_{12}} = N_+^0 N_-^0; \quad \frac{k_{31}}{k_{13}} = \frac{N_-^0 (M_{отд} - N_{отд}^0)}{N_{отд}^0}; \quad \frac{k_{41}}{k_{14}} = \frac{N_-^0 N_3^0}{M_3 - N_3^0}; \quad \frac{k_{23}}{k_{32}} = \frac{N_+^0 N_{отд}^0}{M_{отд} - N_{отд}^0} \quad (5)$$

$$\frac{k_{21}}{k_{42}} = \frac{N_+^0 (M_3 - N_3^0)}{N_3^0}; \quad \frac{k_{31}}{k_{43}} = \frac{(M_{отд} - N_{отд}^0) (M_3 - N_3^0)}{N_{отд}^0 N_3^0}.$$

Здесь через N_+^0 и N_-^0 обозначены равновесные концентрации дырок и электронов в нижней и верхней зонах, через N_3^0 и $N_{отд}^0$ — равновесные концентрации дырок и электронов на уровнях захвата и отдачи.

В дальнейшем будем полагать, что внешние поля приводят к малым отклонениям концентраций носителей тока от равновесных и что эти отклонения для дырок и электронов равны между собой:

$$N_+ - N_+^0 = N_- - N_-^0 = \nu; \quad \nu/N_{\pm}^0 \ll 1. \quad (6)$$

В этих предположениях можно уравнения (4) с учетом (5) записать следующим образом:

$$\operatorname{div} \mathbf{j}_+ = \operatorname{div} \mathbf{j}_- = -e\alpha\nu (N_+^0 + N_-^0), \quad (4a)$$

где

$$\alpha = k_{12} + \frac{k_{13}k_{32}M_{отд}}{k_{31} + k_{23} + k_{13}N_-^0 + k_{32}N_+^0} + \frac{k_{14}k_{42}M_3}{k_{41} + k_{21} + k_{14}N_-^0 + k_{42}N_+^0}. \quad (7)$$

Первое слагаемое в (7), характеризующее рекомбинацию электронов и дырок верхней и нижней зон, преобладает над остальными членами в области высоких температур, где основную роль играет собственная проводимость. Это значение $\alpha = k_{12}$ использовано в работе Ансельма [2], рассматривавшего случай полупроводника без примесей. При низких температурах, когда проводимость обуславливается тепловыми переходами между уровнями примеси и зонами, в выражении для α преобладают вторые два члена. Этот случай на практике, повидимому, редко реализуется.

Изотермический эффект Холла

Как известно, изотермический эффект Холла ($\nabla T = 0$ в образце) заключается в том, что при помещении полупроводника, вдоль которого (по оси x) течет ток, в поперечное (вдоль оси z) магнитное поле, в полупроводнике возникает э. д. с. Холла (V^x) в направлении оси y . Значение поля Холла E^x найдем из условия, что ток вдоль оси y отсутствует ($j_y = 0$):

$$E^x = \frac{kT}{e} \frac{u_+ - u_-}{N_+^0 u_+ + N_-^0 u_-} \frac{d\nu}{d\eta} + \frac{a_n}{ec} \frac{N_+^0 u_+^2 + N_-^0 u_-^2}{(N_+^0 u_+ + N_-^0 u_-)^2} j_x H. \quad (8a)$$

Отсюда э. д. с. Холла

$$V^x = \int_0^a E^x dy = \frac{kT}{e} \frac{u_+ - u_-}{N_+^0 u_+ + N_-^0 u_-} [\nu(a) - \nu(0)] + \frac{a_n}{ec} \frac{N_+^0 u_+^2 - N_-^0 u_-^2}{(N_+^0 u_+ + N_-^0 u_-)^2} \times \\ \times j_x \int_0^a H dy, \quad (8b)$$

a — размер образца вдоль оси y .

Постоянная Холла в случае произвольного n равна

$$R = \frac{a_n}{ec} \frac{N_+ u_+^2 - N_- u_-^2}{(N_+ u_+ + N_- u_-)^2}. \quad (9)$$

Как видно из табл. 1, учет a_n может привести к изменению значения постоянной Холла в 1,5–2 раза.

Комбинируя (2), (5) и (8а) с (4а), можно уравнение для изменения концентраций носителей тока с точностью до членов порядка $\propto H/c$ записать следующим образом:

$$\frac{d^2 v}{dy^2} - \frac{1}{\lambda_0^2} v = -f^x \frac{dH}{dy}. \quad (10)$$

Здесь

$$f^x = \frac{a_n}{c} \frac{e}{kT} \frac{N_+^0 N_-^0 (u_+ + u_-)}{N_+^0 + N_-^0} E_0,$$

E_0 — напряженность электрического поля в направлении оси x , $\lambda_0 = \sqrt{\frac{kT}{e \alpha (N_+^0 u_+ + N_-^0 u_-)}}$ — средняя длина диффузионного смещения носителей тока за время их жизни.

При наличии в полупроводнике поверхностных уровней и поверхностной рекомбинации можно получить граничные условия задачи, если применить уравнение (10) к бесконечно тонкому слою толщины δ

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dy} - \frac{v}{\lambda_s} &= -f^x H & \text{при } y = 0, \\ \frac{dv}{dy} + \frac{v}{\lambda_s} &= -f^x H & \text{при } y = a. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь введена новая характеристическая длина $\lambda_s = \lim_{\delta \rightarrow 0} (\lambda_0^2 / \delta)$.

Изотермический эффект Нернста—Эттингсгаузена

Изотермический эффект Нернста—Эттингсгаузена [$\partial T / \partial y = 0$] состоит в том, что при помещении полупроводника, вдоль которого (по оси x) имеется температурный градиент, в поперечное (вдоль оси z) магнитное поле в полупроводнике возникает э. д. с., направленная по оси y .

Из условий $j_x = j_y = 0$ определяем поле Нернста—Эттингсгаузена E_H

$$\begin{aligned} E_H = \frac{kT}{e} \left\{ \frac{u_+ - u_-}{N_+^0 u_+ + N_-^0 u_-} \frac{dv}{dy} + \frac{a_n}{c} \left[\frac{1-n}{2} \frac{N_+^0 u_+^3 + N_-^0 u_-^3}{(N_+^0 u_+ + N_-^0 u_-)^2} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3n+7}{2} \frac{N_+^0 N_-^0 u_+ u_- (u_+ + u_-)}{(N_+^0 u_+ + N_-^0 u_-)^2} \left(1 + \frac{2}{3n+7} \frac{\Delta E}{kT} \right) \right] H \frac{d \ln T}{dx} \right\}. \quad (12a) \end{aligned}$$

Таблица 1

Значения коэффициента a_n
для различных n [4]

n	a_n	n	a_n
-0,5	1,5740	2,0	1,1043
0	1,1781	2,5	1,2276
0,5	1,0356	3,0	1,4003
1,0	1,0000	3,5	1,6308
1,5	1,0277	4,0	1,9328

Электродвижущая сила Нернста—Эттингсгаузена V^H

$$V^H = \int_0^a E^H dy = \frac{kT}{e} \left\{ \frac{u_+ - u_-}{N_+^0 u_+ + N_-^0 u_-} [\gamma(a) - \gamma(0)] + \frac{a_n}{c} \left[\frac{1-n}{2} \times \right. \right. \\ \times \frac{N_+^0 u_+^3 + N_-^0 u_-^3}{(N_+^0 u_+ + N_-^0 u_-)^2} - \frac{3n+7}{2} \frac{N_+^0 N_-^0 u_+ u_- (u_+ + u_-)}{(N_+^0 u_+ + N_-^0 u_-)^2} \left(1 + \frac{2}{3n+7} \frac{\Delta E}{kT} \right) \left. \right] \times \\ \times \frac{d \ln T}{dx} \int_0^a H dy \Bigg\}. \quad (126)$$

В (12а) и (12б) через ΔE обозначена ширина запретной зоны. Коэффициент Нернста—Эттингсгаузена в случае произвольного n определяется формулой

$$Q = \frac{k}{e} \frac{a_n}{c} \left[\frac{1-n}{2} \frac{N_+^0 u_+^3 + N_-^0 u_-^3}{(N_+^0 u_+ + N_-^0 u_-)^2} - \frac{3n+7}{2} \frac{N_+^0 N_-^0 u_+ u_- (u_+ + u_-)}{(N_+^0 u_+ + N_-^0 u_-)^2} \times \right. \\ \times \left. \left(1 + \frac{2}{3n+7} \frac{\Delta E}{kT} \right) \right]. \quad (13)$$

Уравнение для изменения концентраций носителей тока и граничные условия в случае эффекта Нернста—Эттингсгаузена можно представить в следующем виде:

$$\frac{d^2 \gamma}{dy^2} - \frac{1}{\lambda_0^2} \gamma = -f^H \frac{dH}{dy}, \quad (14)$$

где

$$f^H = \frac{a_n}{c} \frac{d \ln T}{dx} \times \\ \times \frac{N_+^0 N_-^0 \left[\frac{1-n}{2} (N_+^0 u_+^2 - N_-^0 u_-^2) + \frac{3n+7}{2} u_+ u_- (N_+^0 - N_-^0) \left(1 + \frac{2}{3n+7} \frac{\Delta E}{kT} \right) \right]}{(N_+^0 + N_-^0) (N_+^0 u_+ + N_-^0 u_-)},$$

$$\frac{d\gamma}{dy} - \frac{\gamma}{\lambda_s} = -f^H H \quad \text{при } y=0, \quad (15)$$

$$\frac{d\gamma}{dy} + \frac{\gamma}{\lambda_s} = -f^H H \quad \text{при } y=a.$$

Таким образом исследование обоих эффектов сводится к решению уравнения типа (10), (14) при граничных условиях типа (11), (15).

3. Решение уравнений и анализ результатов

Решение уравнений (10), (14) при граничных условиях (11), (15) имеет вид

$$\gamma^X = f^X F(y), \quad \gamma^H = f^H F(y), \quad (16)$$

где

$$F(y) = \frac{\lambda_0}{\left(1 + \frac{\lambda_0^2}{\lambda_s^2}\right) \operatorname{sh} \frac{a}{\lambda_0} + 2 \frac{\lambda_0}{\lambda_s} \operatorname{ch} \frac{a}{\lambda_0}} \left[H(0) \left(\operatorname{ch} \frac{y-a}{\lambda_0} - \frac{\lambda_0}{\lambda_s} \operatorname{sh} \frac{y-a}{\lambda_0} \right) + \right. \\ \left. + \left(\int_0^a \operatorname{ch} \frac{a-y_1}{\lambda_0} \frac{dH}{dy_1} dy_1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_s} \int_0^a \operatorname{sh} \frac{a-y_1}{\lambda_0} \frac{dH}{dy_1} dy_1 - H(a) \right) \left(\operatorname{ch} \frac{y}{\lambda_0} + \frac{\lambda_0}{\lambda_s} \operatorname{sh} \frac{y}{\lambda_0} \right) \right] - \\ - \lambda_0 \int_0^y \operatorname{sh} \frac{y-y_1}{\lambda_0} \frac{dH}{dy_1} dy_1. \quad (17)$$

Теперь можно найти слагаемые в выражениях для э. д. с. Холла и Нернста—Эттингсгаузена, обусловленные изменением концентрации носителей тока.

Искомые величины V_1^X (для эффекта Холла) и V_1^H (для эффекта Нернста—Эттингсгаузена) равны

$$V_1^X = \frac{kT}{e} \frac{u_+ - u_-}{N_+^0 u_+ + N_-^0 u_-} f^X [F(a) - F(0)], \quad (18a)$$

$$V_1^H = \frac{kT}{e} \frac{u_+ - u_-}{N_+^0 u_+ + N_-^0 u_-} f^H [F(a) - F(0)]. \quad (18b)$$

Формула (17) дает для $F(a) - F(0)$

$$F(a) - F(0) = \frac{\lambda_0}{\left(1 + \frac{\lambda_0^2}{\lambda_s^2}\right) \operatorname{sh} \frac{a}{\lambda_0} + 2 \frac{\lambda_0}{\lambda_s} \operatorname{ch} \frac{a}{\lambda_0}} \left[H(0) \left(1 - \operatorname{ch} \frac{a}{\lambda_0} - \frac{\lambda_0}{\lambda_s} \operatorname{sh} \frac{a}{\lambda_0} \right) + \right. \\ \left. + \left(\int_0^a \operatorname{ch} \frac{a-y_1}{\lambda_0} \frac{dH}{dy_1} dy_1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_s} \int_0^a \operatorname{sh} \frac{a-y_1}{\lambda_0} \frac{dH}{dy_1} dy_1 - H(a) \right) \left(\operatorname{ch} \frac{a}{\lambda_0} + \frac{\lambda_0}{\lambda_s} \operatorname{sh} \frac{a}{\lambda_0} - 1 \right) \right] - \\ - \lambda_0 \int_0^a \operatorname{sh} \frac{a-y_1}{\lambda_0} \frac{dH}{dy_1} dy_1. \quad (19)$$

Из (16) легко видеть, что v^X всегда положительно, т. е. концентрация носителей тока в случае эффекта Холла должна лишь увеличиваться. Что же касается добавки v^H в эффекте Нернста—Эттингсгаузена, то она может иметь любой знак. Для полупроводников, у которых подвижности дырок и электронов одинаковы, разности потенциалов V_1^X и V_1^H равны нулю, в то время как v^X и v^H отличны от нуля.

Изменение концентраций v^H в эффекте Нернста—Эттингсгаузена обращается в нуль при выполнении хотя бы одного из следующих условий:

- 1) $N_+^0 = N_-^0$, $u_+ = u_-$, n — любое число; 2) $N_+^0 = N_-^0$, $n = 1$.

Представляет интерес рассмотреть предельный случай, когда длина диффузионного смещения $\lambda_0 \rightarrow \infty$ ($a \rightarrow 0$) и $N_+ = N_- = N$. В этих предположениях (4a) решается точно. Уравнение и граничные условия для N можно записать следующим образом:

$$\frac{d^2 N}{dy^2} + b \frac{dHN}{dy} = 0; \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dy} + bHN &= \frac{N - N^0}{\lambda_s} \quad \text{при } y = 0, \\ \frac{dN}{dy} + bHN &= -\frac{N - N^0}{\lambda_s} \quad \text{при } y = a. \end{aligned} \quad (21)$$

Для эффекта Холла

$$b = b^X = \frac{a_n e (u_+ + u_-)}{2ckT} E_0.$$

Для эффекта Нернста—Эттингсгаузена

$$b = b^H = \frac{1-n}{2} \frac{u_+ - u_-}{c} \frac{d \ln T}{dx}.$$

Решая (20) при граничных условиях (21), получим

$$\begin{aligned} N(y) = \frac{N^0}{1 + w^{-1}(a) + \lambda_s^{-1} w^{-1}(a) \int_0^a w(y) dy} & \left(\left[2 + \lambda_s^{-1} w^{-1}(a) \int_0^a w(y) dy \right] w^{-1}(a) + \right. \\ & \left. + [1 - w^{-1}(a)] \lambda_s^{-1} w^{-1}(y) \int_0^y w(y) dy \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь $w(y) = \exp(b \int_0^y H dy)$.

Электродвижущие силы V_1 (V_1^X или V_1^H), обусловленные изменением концентраций носителей тока, выражаются формулой:

$$V_1 = \frac{kT}{e} \frac{u_+ - u_-}{u_+ + u_-} \ln \frac{\left[2 + \lambda_s^{-1} \int_0^a w(y) dy \right] w^{-1}(a)}{2 + \lambda_s^{-1} w^{-1}(a) \int_0^a w(y) dy}. \quad (23)$$

Установим пределы применимости предлагаемой теории. Для простоты положим $N_+^0 = N_-^0 = N$ и обозначим через u наибольшую из величин u_+ и u_- . Из условия малости отброшенных в (10), (14) членов легко можно получить критерии применимости теории:

для эффекта Холла

$$\frac{\lambda_0 e F_0 u H}{2kT c} \ll 1; \quad (24a)$$

для эффекта Нернста—Эттингсгаузена

$$\frac{\lambda_0}{4} \frac{d \ln T}{dx} \frac{u H}{c} \ll 1. \quad (24b)$$

Рассмотрим случай хорошо проводящих полупроводников типа германия.

Положим $u = 10^6 \text{ CGSE}$, $\lambda_0 = 0,1 \text{ см}$, $T = 300^\circ \text{ К}$. Пусть эффект Холла исследуется при $E_0 = 1 \text{ В/см}$ и $H = 10^3 \text{ Оэ}$. Тогда $\frac{\lambda_0 e E_0 u H}{2kT c} \approx 0,07 \ll 1$.

Положим для случая эффекта Нернста—Эттингсгаузена $H = 10^4 \text{ Ое}$; $d \ln T / dx = 1 \text{ см}^{-1}$. Тогда $\frac{\lambda_0}{4} \frac{uH}{c} \frac{d \ln T}{dx} \approx 0,008 \ll 1$. Приведенная оценка показывает, что в случае хорошо проводящих полупроводников с большими подвижностями носителей тока теория эффекта Холла применима в области температур, не ниже комнатных, если магнитные поля при этом не превышают 10^3 Ое ; теория же эффекта Нернста—Эттингсгаузена справедлива в более широком интервале температур (в сторону низких температур) и магнитных полей (в сторону больших полей). Для полупроводников с небольшими подвижностями носителей тока (типа Cu_2O) пределы применимости теорий обоих эффектов значительно расширяются.

Выясним теперь, как влияет диффузия носителей тока на распределение их концентраций и на величину полей Холла и Нернста—Эттингсгаузена. Положим для простоты, что магнитное поле однородно и что поверхностные эффекты отсутствуют ($\lambda_s \rightarrow \infty$). Тогда

$$F(a) - F(0) \approx -2\lambda_0 H,$$

и относительное изменение концентраций в эффекте Холла

$$\left| \frac{\Delta N}{N^0} \right| \approx \frac{\lambda_0 e E_0}{kT} \frac{uH}{c}.$$

Для полупроводников типа германия с выбранными выше параметрами относительное изменение концентраций в эффекте Холла должно составлять примерно 13%, а относительное изменение э. д. с. Холла за счет диффузии (если положить размер a образца вдоль оси u равным 0,5 см) должно достичь 20%. При эффекте Нернста—Эттингсгаузена относительное изменение концентраций, определяемое выражением

$$\left| \frac{\Delta H}{H^0} \right| \approx \frac{\lambda_0 d \ln T}{2dx} \frac{uH}{c},$$

должно при тех же условиях составлять примерно 2%, а относительное изменение э. д. с. $\approx 20\%$.

Численная оценка показывает, что неоднородность магнитного поля у краев полюсных наконечников не может привести к существенному изменению величины исследуемых эффектов.

Заключение

1. Анализ формул (86), (126), (18a) и (18б) показывает, что для обоих исследуемых явлений при отсутствии поверхностных эффектов $|(V - V_0)/V_0| \approx \lambda_0/a$, где V — э. д. с., определенная экспериментально, V_0 — «чистая» э. д. с. Холла или Нернста—Эттингсгаузена без учета э. д. с., обусловленной изменением концентраций носителей тока. Отсюда следует, что величины э. д. с. Холла и Нернста—Эттингсгаузена будут определены тем точнее, чем лучше выполняется неравенство $\lambda_0/a \ll 1$. При выполнении условия $\lambda_0/a \ll 1$ измеренные на опыте э. д. с. V не будут отличаться от V_0 .

Если длина образца a_1 много больше его толщины a_2 , а последняя равна нескольким длинам диффузионного смещения носителей тока λ_0 , то для λ_0 можно получить следующую оценочную формулу:

$$\lambda_0 \approx \frac{V(a_2)}{V(a_1)} a_1 - a_2, \quad (26)$$

где $V(a_1)$ и $V(a_2)$ — э. д. с. Холла или Нернста—Эттингсгаузена, измеренные вдоль длины и толщины соответственно. Таким образом,

для оценки λ_0 достаточно измерить э. д. с. V при двух взаимно перпендикулярных ориентациях образца. Как следует из замечания, приведенного в конце предыдущего раздела, формула (26) будет справедливой и в том случае, когда образец частично попадает в неоднородное магнитное поле у краев полюсных наконечников.

Авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность Х. И. Амирханову и В. П. Жузе за интерес к работе и обсуждение результатов.

Дагестанский филиал
Академии наук СССР
Махачкала

Поступила в редакцию
4 марта 1954 г.

Литература

- [1] H. Welker. ZS. f. Naturforsch., 6a, 184, 1951.— [2] А. И. Ансельм. Журн. техн. физики, 22, 1146, 1952.— [3] R. Landauer a. J. Swanson. Phys. Rev., 91, 207, 1953.— [4] К. Б. Толпыго. Тр. Ин-та физики АН УССР, 3, 52, 1952.— [5] А. И. Губанов. ЖЭТФ, 21, 79, 1951.
-

О ПЛОТНОСТИ СОСТОЯНИЙ ЭЛЕКТРОНОВ ПРОВОДИМОСТИ В ФЕРРОМАГНЕТИКАХ

А. В. Соколов и С. М. Ципис

В рамках модели взаимодействующих внешних и внутренних электронов ферромагнетика рассмотрен вопрос о плотности состояний электронов проводимости в ферромагнитных металлах.

Известно, что знание плотности уровней валентных электронов в металлах имеет важное значение для изучения мягких рентгеновских (эмиссионных и абсорбционных) спектров металлов. С другой стороны, при изучении тонкой структуры края полосы поглощения можно надеяться получить подробные сведения относительно верхних уровней энергии электронов в металлах.

Теоретическое рассмотрение этих вопросов производилось до сих пор на основе одноэлектронной зонной теории металлов, пренебрегающей электронным взаимодействием. Однако для ферромагнитных металлов, электроны которых представляют единую, сильно взаимодействующую квантовую систему, рассмотрение этих вопросов в рамках одноэлектронной модели является необоснованным, так как само явление ферромагнетизма обусловлено межэлектронным взаимодействием.

Для обобщения расчета плотности состояний [1] на случай ферромагнетиков воспользуемся предложенной Вонсовским [2,3] моделью обменного взаимодействия внешних s - и внутренних d -электронов. Эта модель позволила понять природу и дать количественное объяснение «аномалиям» электрических, оптических, гальвано- и термомагнитных свойств ферромагнитных металлов [4-11]. Согласно этой модели, будем считать систему s -электронов в ферромагнетике смесью двух электронных «газов» в соответствии с двумя возможными ориентациями спина. Энергия s -электрона в приближении эффективной массы равна

$$E = \alpha - \alpha' \vec{y} \vec{\sigma} + (\beta + \beta' \vec{y} \vec{\sigma}) k^2, \quad (1)$$

где α , α' , β и β' — параметры, зависящие от интегралов обмена s - и d -электронов и интегралов переноса s -электрона, $\vec{y}$ — средний относительный атомный магнитный момент d -электрона, $\vec{\sigma}$ — вектор спина s -электрона и $\vec{k}$ — квазиимпульс электрона. Из формулы (1) видно, что эффективная масса равна

$$m_{\pm} = \hbar^2 / 2a^2 (\beta \pm \beta' y), \quad (2)$$

где знак плюс соответствует правой и минус — левой ориентациям спина, a — постоянная решетки.

Согласно зонной теории металлов выражение для плотности состояний имеет вид [1]

$$n(E) = \pm 2 \frac{m^2}{8\pi^3 \hbar^4 |g|} \int_{-E_g}^{E - V_{000} - E_g} \frac{\Gamma d\Gamma}{V\Gamma^2 - |V_g|^2}, \quad (3)$$

где E — энергия электрона в металле, $E_g = (\hbar^2/2m)\pi^2 g^2$ — кинетическая энергия электрона, движущегося перпендикулярно отражающей сетке и претерпевающего брэгговское отражение, V_{000} и V_g — коэффициенты Фурье в разложении потенциала решетки в ряд, $\mathbf{g}$ — вектор обратной решетки и

$$\Gamma = E - V_{000} - E_g - (\hbar^2/2m)(\kappa_2^2 + \kappa_3^2);$$

κ_2 и κ_3 — составляющие квазиимпульса электрона, параллельные границе зоны, а составляющая $\kappa_1' = -\pi |g| + \kappa_1$ направлена параллельно g . Знак плюс в (3) следует брать для состояний верхней полосы, минус — для состояний нижней полосы.

В случае ферромагнитных металлов формула (1) заменяется выражениями

$$n_+(E) = \pm \frac{m_+^2}{8\pi^3 \hbar^4 |g|} \int \frac{\Gamma_+ d\Gamma_+}{\sqrt{\Gamma_+^2 - |V_g|^2}}, \quad (4)$$

$$n_-(E) = \pm \frac{m_-^2}{8\pi^3 \hbar^4 |g|} \int \frac{\Gamma_- d\Gamma_-}{\sqrt{\Gamma_-^2 - |V_g|^2}}.$$

Заметим, что пределы интегрирования в формулах (4) отличны от пределов интегрирования в (3). Здесь

$$\Gamma_{\pm} = \pm \sqrt{|V_g|^2 + \left(1 \pm \frac{\beta'}{\beta} y\right)^2 \left(\frac{\pi \hbar^2 g \kappa_1}{m}\right)^2}, \quad (5)$$

$n_+(E)$ — плотность состояний, соответствующая правой ориентации спинов, а $n_-(E)$ — левой, причем естественно считать справедливым соотношение

$$n(E, y) = n_+(E, y) + n_-(E, y). \quad (6)$$

Ограничиваясь областью температур, близких к точке Кюри ($y \ll 1$), можно $\Gamma_{\pm}$ разложить в ряд относительно y и оставить члены не выше второй степени. Тогда будем иметь

$$\Gamma_{\pm} d\Gamma_{\pm} = \Gamma d\Gamma \left(1 \pm \frac{\beta'}{\beta} y\right)^2, \quad (7)$$

$$\sqrt{\Gamma_{\pm}^2 - |V_g|^2} = \left(1 \pm \frac{\beta'}{\beta} y\right) \sqrt{\Gamma^2 - |V_g|^2}. \quad (8)$$

Отсюда следует, что подынтегральное выражение формул (4) можно представить в следующем виде:

$$\frac{\Gamma_{\pm} d\Gamma_{\pm}}{\sqrt{\Gamma_{\pm}^2 - |V_g|^2}} = \left(1 \pm \frac{\beta'}{\beta} y\right) \frac{\Gamma d\Gamma}{\sqrt{\Gamma^2 - |V_g|^2}}. \quad (9)$$

Далее имеем очевидное соотношение

$$m_{\pm}^2 X_{\pm} = \frac{m_1 \Gamma d\Gamma}{\sqrt{\Gamma^2 - |V_g|^2}} \frac{1}{(1 \pm (\beta'/\beta) y)}, \quad (10)$$

где $X_{\pm}$ равно выражению (9) и $m_1 = \hbar^2/2a^2\beta$. Учитывая (4) — (10), получим для плотностей состояний электронов n_+ и n_- следующее выражение:

$$n_{\pm}(E, y) = \pm \frac{m_1^2}{8\pi^3 \hbar^4 |g|} \frac{1}{(1 \pm (\beta'/\beta) y)} \int \frac{\Gamma d\Gamma}{\sqrt{\Gamma^2 - |V_g|^2}} \quad (11)$$

и, наконец, для полной плотности состояний электронов проводимости в ферромагнетиках окончательное соотношение вида:

$$n(E, y) = n_+(E, y) + n_-(E, y) \approx \approx \pm \frac{m_1^2}{4\pi^3 \hbar^4 |g|} (1 + A^2 y^2) \int \frac{\Gamma d\Gamma}{\sqrt{\Gamma^2 - |V_g|^2}}, \quad (12)$$

где $A = \beta'/\beta$ — величина порядка единицы и ниже. Пределы интегрирования в (12) такие же, как в (3).

Рассмотрим три различных энергетических интервала:

I) $E < V_{000} + E_g - |V_g|$.

Все удовлетворяющие этому неравенству состояния лежат в нижней полосе, так что следует брать знак минус:

$$n(E, y) = (1 + A^2 y^2) \frac{m_1^2}{4\pi^3 \hbar^4 |g|} [(E^2 - |V_g|^2)^{1/2} - \{(V_{000} + E_g - E)^2 - |V_g|^2\}^{1/2}]. \quad (13)$$

II) $V_{000} + E_g - |V_g| < E < V_{000} + E_g + |V_g|$.

Эти состояния также расположены в нижней полосе, однако в качестве верхнего предела для Γ здесь следует взять $|V_g|$; тогда получим

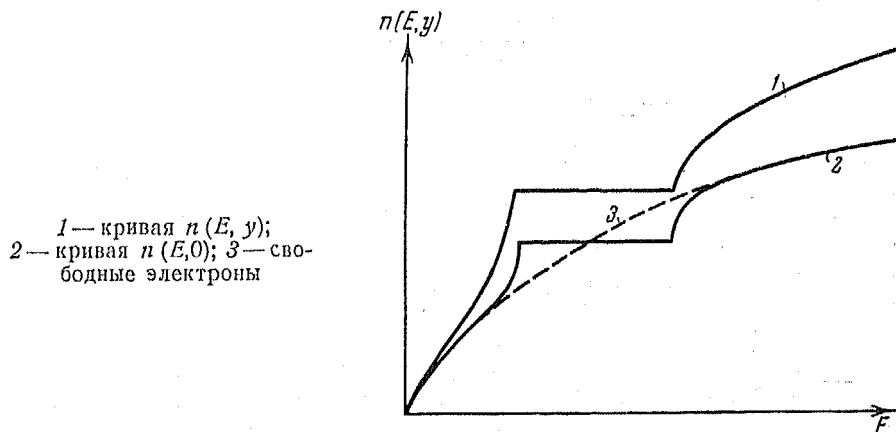
$$\dot{n}(E, y) = (1 + A^2 y^2) \frac{m_1^2}{4\pi^3 \hbar^4 |g|} (E_g^2 - |V_g|^2)^{1/2}. \quad (14)$$

III) $V_{000} + E_g + |V_g| < E$.

Состояния, для которых Γ меньше $|V_g|$, лежат в нижней полосе, состояния же, для которых Γ больше, чем $|V_g|$, — в верхней:

$$n(E, y) = (1 + A^2 y^2) \frac{m_1^2}{4\pi^3 \hbar^4 |g|} \left[- \int_{-E_g}^{-|V_g|} + \int_{|V_g|}^{E - V_{000} - E_g} \right] \frac{\Gamma d\Gamma}{(\Gamma^2 - |V_g|^2)^{1/2}} = \\ = (1 + A^2 y^2) \frac{m_1^2}{4\pi^3 \hbar^4 |g|} [(E_g^2 - |V_g|^2)^{1/2} + \{(E - E_g - V_{000})^2 - |V_g|^2\}^{1/2}]. \quad (15)$$

Вид функции $n(E, y)$ и $n(E, 0)$ показан на рисунке [$n(E, 0)$ есть $n(E, y)$ при $y = 0$].



Отметим, что отклонение изображенных здесь кривых от кривой для свободных электронов (показана пунктиром) обуславливается

только двумя плоскостями g и $-g$, между тем как следует рассматривать, по крайней мере, шесть плоскостей. Следовательно, эти отклонения необходимо умножить на число пар эквивалентных плоскостей, ограничивающих пикную полосу.

Из формул (12) — (15) и из рис. 1 видно, что кривая $n(E, y)$ расположена выше кривой $n(E, 0)$. Отсюда следует, что при учете нескольких эквивалентных плоскостей скачок в изменении плотности состояний электронов проводимости ферромагнетиков $n(E, y)$ вблизи температуры Кюри будет более резким, чем в отсутствие намагниченности. При $y = 0$ выражение (13) в точности совпадает с формулой (3) для плотности состояний обычных металлов. Нетрудно видеть, что формулу (13) легко привести к виду:

$$n(E, y) = n(E, 0) (1 + A^2 y^2). \quad (16)$$

Самое существенное в этом выражении заключается в том, что плотность состояний электронов проводимости ферромагнетика является квадратичной функцией самопроизвольной намагниченности. Самопроизвольная намагниченность является функцией температуры, вследствие чего величина плотности электронных состояний в ферромагнетике, зависящая от y , должна обладать аномальным температурным ходом. Так как интенсивность рентгеновских спектральных линий (наряду с вероятностью перехода) пропорциональна плотности электронных состояний, то интенсивность для ферромагнитных металлов также должна обладать аномальным температурным ходом.

С ростом намагниченности, как это показывают формулы (12) — (16), плотность состояний электронов проводимости ферромагнетика возрастает. Это позволяет заключить, что полоса уровней s -электронов ферромагнетика становится уже. Этот факт находится в согласии с тем обстоятельством, что в ферромагнетике в первом приближении спины системы d -электронов сильно связаны между собой, орбитальные моменты взаимно погашаются, и имеет место явление, аналогичное эффекту Пашена—Бака, а именно, под влиянием сильного внутреннего «магнитного поля», обусловленного обменным взаимодействием s - и d -электронов, происходит не усложнение картины уровней системы s -электронов, а, напротив, ее упрощение, т. е. как раз сужение полосы.

Исходя из формулы (16), легко получить выражение для ферромагнитной «аномалии» плотности электронных состояний в ферромагнетиках:

$$\frac{n(E, y) - n(E, 0)}{n(E, 0)} = A^2 y^2. \quad (17)$$

Величина ферромагнитной «аномалии» плотности электронных состояний в ферромагнетике пропорциональна квадрату самопроизвольной намагниченности y . Весьма желательно произвести экспериментальную проверку теоретических выводов, представленных формулой (17).

Таким образом нам удалось, используя обменную модель внешних и внутренних электронов ферромагнетика, показать, что плотность электронных состояний в ферромагнетике должна зависеть от величины их самопроизвольной намагниченности. Вблизи температуры ферромагнитного превращения эта зависимость имеет простой квадратичный характер [формула (16)]. Кроме того, получена ферромагнитная «аномалия» плотности электронных состояний в ферромагнитных металлах.

В заключение подчеркнем, что изложенные выше расчеты не претендуют на количественное описание плотности состояний электронов проводимости в ферромагнитных металлах, так как они проведены в

рамках упрощенной модели ферромагнетика. Тем не менее, повидимому, нет оснований сомневаться в том, что основные качественные выводы о зависимости плотности состояний электронов проводимости от самопроизвольной намагниченности должны соответствовать действительности.

Институт физики металлов
Уральского филиала Академии наук СССР

Поступила в редакцию
12 марта 1954 г.

Литература

- [1] А. Вильсон. Квантовая теория металлов, ОГИЗ, ГИИТЛ, 1944, стр. 42—44. — [2] С. В. Вонсовский. ЖЭТФ, 16, 981, 1946. — [3] С. В. Вонсовский и Е. А. Туров. ЖЭТФ, 24, 449, 1953. — [4] С. В. Вонсовский. ЖЭТФ, 18, 249, 1948. — [5] С. В. Вонсовский. Изв. АН СССР, сер. физич., 11, 463, 1947. — [6] С. В. Вонсовский и А. В. Соколов. ЖЭТФ, 19, 615, 703, 1949. — [7] С. В. Вонсовский и А. В. Соколов. ДАН СССР, 76, 197, 1951. — [8] А. В. Соколов и А. З. Векслер. ДАН СССР, 81, 27, 1951. — [9] А. В. Соколов и А. З. Векслер. ЖЭТФ, 25, 215, 1953. — [10] С. В. Вонсовский и К. П. Родионов. ДАН СССР, 75, 643, 1950. — [11] С. В. Вонсовский, Л. Я. Кобелев и К. П. Родионов. Изв. АН СССР, сер. физич., 16, 569, 1952.
-

О ПОГЛОЩЕНИИ И ИСПУСКАНИИ РЕНТГЕНОВСКИХ ЛУЧЕЙ ФЕРРОМАГНИТНЫМИ МЕТАЛЛАМИ

А. В. Соколов

В рамках модели взаимодействующих внешних и внутренних электронов ферромагнетика рассмотрен вопрос о поглощении и испускании рентгеновских лучей ферромагнитными металлами.

1. Теоретическое рассмотрение вопроса о поглощении и испускании рентгеновских лучей ферромагнетиками до сих пор не производилось. Поэтому, учитывая важность изучения этого вопроса, можно попытаться решить его хотя бы в самом грубом качественном приближении.

При поглощении рентгеновских лучей электронами, принадлежащими внутренним оболочкам, необходимо, чтобы частота лучей была достаточна для возбуждения электрона и перевода его на свободный уровень, лежащий над уровнями, заполненными электронами проводимости. Изучая тонкую структуру края полосы поглощения, можно надеяться получить подробные сведения относительно верхних уровней энергии электронов в металле.

Поскольку первоначальный уровень принадлежит некоторой внутренней оболочке, то можно считать его в нулевом приближении абсолютно резким. Пусть ψ_0 — нормированная волновая функция начального состояния, $\hbar\omega_{\xi 0}$ — разность энергий этого состояния и состояния проводимости k . «Световая проводимость», определяющая поглощение лучей, дается выражением [1]:

$$nk\nu = \sigma = -\frac{\pi e^2}{m^2 \hbar \omega G^3 a^3} \sum_{ss'} \int \frac{\rho_0(\xi, s') - \rho_0(\xi, s)}{|\text{grad}_{\xi} \omega_{\xi s'}|} |p_x(\xi, \xi')|^2 du dv. \quad (1)$$

Здесь s — суммирование по исходным состояниям и s' — суммирование по конечным состояниям электронов металла в «основной области». Так как в рассматриваемом случае первоначальные уровни суть дискретные уровни изолированных атомов, то соответствующая волновая функция существенно отлична от нуля только в малой области, поэтому суммирование по s можно выполнить без труда. Если в единице объема имеется N_0 атомов, то для световой проводимости получаем ($\rho_0(\xi, s') = 0$, а $\rho_0(\xi, s) = G^3 / 8\pi^3$)

$$\sigma = nk\nu = \frac{\pi e^2 \hbar N_0 G^3}{8\pi^3 m^2 \hbar \omega a^3} \Omega \int \{[\nabla_{\xi} E(\xi)]^{-1} |p_x(\xi, 0)|^2\}_{\omega_{\xi 0} = \omega} du dv, \quad (2)$$

где принята во внимание формула

$$\omega_{\xi 0} = [E(\xi) - E(0)] / \hbar, \quad (3)$$

$E(0) = \text{const}$ — постоянная энергия K -электрона в атоме и суммирование по состояниям в основной области s' заменяется умножением на число состояний в единице объема k -пространства.

2. При удалении электрона из внутренней оболочки один из электронов проводимости может перейти в освободившееся нижнее состоя-

ние, излучая при этом квант рентгеновских лучей. Поэтому изучение спектров испускания металлов может служить источником получения сведений относительно энергетических уровней, занимаемых электронами проводимости [2]. Интенсивность рентгеновских лучей, излученных с частотой, лежащей в интервале от ω до $\omega + d\omega$, равна

$$I(\omega) d\omega = \frac{4N_0\omega^2\hbar^2e^2}{3c^3m^2} d\omega \sum_{s'} \left| \int \psi_h^* \nabla \psi_0 d\tau \right|^2, \quad (4)$$

где суммирование производится по всем занятым состояниям электронов проводимости металла, энергия которых такова, что соответствующая ей частота ω_0 лежит в пределах $\omega \leq \omega_0 \leq \omega + d\omega$, т. е. $\hbar d\omega = dE$.

Вместо суммы по всем возможным значениям k можно написать интеграл по $(G/2\pi)^3 \Omega_0 dk_1 dk_2 dk_3$; тогда получим

$$I(\omega) d\omega = \frac{N_0\hbar^2\omega^2e^2G^3\Omega_0}{6\pi^3m^2c^3} dE \int \left(\frac{\partial E}{\partial k_1} \right)^{-1} \left| \int \psi_h^* \nabla \psi_0 d\tau \right|^2 dk_2 dk_3. \quad (5)$$

Умножив и разделив правую часть (5) на $\hbar$, получим

$$I(\omega) d\omega = \frac{N_0\hbar^3\omega^2e^2G^3\Omega_0}{6\pi^3m^2c^3} \frac{dE}{\hbar} \int \left(\frac{\partial E}{\partial k_1} \right)^{-1} \left| \int \psi_h^* \nabla \psi_0 d\tau \right|^2 dk_2 dk_3, \quad (6)$$

но $dE/\hbar = d\omega$, и, следовательно, выражение для интенсивности излучения принимает окончательный вид:

$$I(\omega) = \frac{N_0\hbar^3\omega^2e^2G^3\Omega_0}{6\pi^3m^2c^3} \int \left\{ \left(\frac{\partial E}{\partial k_1} \right)^{-1} \left| \int \psi_h^* \nabla \psi_0 d\tau \right|^2 \right\}_{\omega_{h0}=\omega} dk_2 dk_3. \quad (7)$$

Из сравнения (2) и (7) видно, что и поглощение и испускание рентгеновских лучей определяется величиной

$$F = F_1 + F_2 + F_3 = \int \left\{ \left(\frac{\partial E}{\partial k_1} \right)^{-1} \left| \int \psi_h^* \nabla \psi_0 d\tau \right|^2 \right\} dk_2 dk_3. \quad (8)$$

Таким образом величина, характеризующая поглощение и испускание рентгеновых лучей, определяется как плотностью энергетических состояний электронов проводимости, так и вероятностью перехода.

3. Для обобщения расчета поглощения и испускания рентгеновских лучей металлами по зонной теории [2] на случай ферромагнитных металлов воспользуемся предложенной Вонсовским [3, 4] моделью обменного взаимодействия внешних s - и внутренних d -электронов. В дальнейшем воспользуемся теми же обозначениями, что и при рассмотрении плотности состояний электронов проводимости в ферромагнетиках [5], так что κ_1 — составляющая волнового вектора, перпендикулярная к плоскости разрыва, тогда как κ_2 и κ_3 — составляющие, параллельные этой плоскости.

В качестве волновой функции s -электронов будем пользоваться функцией Бриллюэна. Так как все коэффициенты Фурье в разложении потенциала в ряд в простой решетке вещественны и отрицательны, то при малых значениях κ_1 ненормированные волновые функции электронов проводимости имеют вид:

$$\begin{aligned} \psi_h^{(s)} &= e^{i\kappa_1 x} \sin \pi |g| x & (\text{верхняя зона}), \\ \psi_h^{(n)} &= e^{i\kappa_1 x} \cos \pi |g| x & (\text{нижняя зона}). \end{aligned}$$

Если рентгеновский уровень есть K -уровень, то ψ_0 обладает сферической симметрией, и соответствующие вероятности переходов определяются выражениями:

$$\int \psi_0^* \frac{\partial \psi_k^{(n)}}{\partial x} d\tau = \int \exp[-\lambda r + i\vec{\kappa}\vec{r}] (i\kappa_1 \sin \pi |g|x + \pi |g| \cos \pi |g|x) d\tau = M, \quad (9)$$

$$\int \psi_0^* \frac{\partial \psi_k^{(n)}}{\partial x} d\tau = \int \exp[-\lambda r + i\vec{\kappa}\vec{r}] \times \\ \times (i\kappa_1 \cos \pi |g|x - \pi |g| \sin \pi |g|x) d\tau = \kappa_1 M', \quad (10)$$

где M и M' — величины, в первом приближении не зависящие от κ_1 , а значение λ для K -оболочки приближенно равно Z/a_0 — порядковому номеру, поделенному на радиус первой атомной орбиты.

Вычисления будем проводить так же, как в работе [5]. Расчет величины F для состояний нижней зоны в обычной зонной теории производится следующим образом. Исходят из выражения (8) и находят как плотность состояний $(\partial E / \partial \kappa_1)^{-1}$, так и вероятность перехода. Первая равна

$$\left(\frac{\partial E}{\partial \kappa_1} \right)^{-1} = \frac{m}{\pi \hbar^2 g} \frac{\Gamma}{(\Gamma^2 - |V_g|^2)^{1/2}},$$

а вторая согласно (10) равна

$$\left| \int \psi_k^* \nabla_x \psi_0 d\tau \right|^2 = \kappa_1^2 M'^2.$$

Принимая во внимание, что

$$\kappa_1^2 = \frac{m^2}{\pi^2 \hbar^4 g^2} (\Gamma^2 - |V_g|^2) \quad \text{и} \quad d\kappa_2 d\kappa_3 = -\frac{m}{\hbar^2} d\Gamma d\varphi,$$

получим

$$F_1 = \int \frac{m}{\pi \hbar^2 g} \frac{\Gamma}{(\Gamma^2 - |V_g|^2)^{1/2}} \kappa_1^2 M'^2 \frac{m}{\hbar^2} d\Gamma d\varphi = \frac{2m^4 M'^2}{\pi^2 \hbar^3 g^3} \int \sqrt{\Gamma^2 - |V_g|^2} \Gamma d\Gamma. \quad (11)$$

Для получения аналогичной величины в случае ферромагнитного металла рассматриваем электроны последнего, как смесь двух электронных газов с двумя возможными ориентациями спина s^+ и s^- . Соответственно этому мы можем писать

$$m_{\pm} = m_1 / (1 \pm (\beta' / \beta) y); \\ \sqrt{\Gamma_{\pm}^2 - |V_g|^2} = (1 \pm (\beta' / \beta) y) \sqrt{\Gamma^2 - |V_g|^2}, \\ \Gamma_{\pm} d\Gamma_{\pm} = (1 \pm (\beta' / \beta) y)^2 \Gamma d\Gamma. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (11), получим

$$F_1^{\pm} = \frac{2m_1^4 M'^2}{\pi^2 \hbar^3 g^3} \frac{1}{(1 \pm (\beta' / \beta) y)} \int \sqrt{\Gamma^2 - |V_g|^2} \Gamma d\Gamma. \quad (13)$$

Сложив F_1^+ и F_1^- , получим

$$F_1(E, y) = \frac{4m_1^4 M'^2}{\pi^2 \hbar^3 g^3} (1 + A^2 y^2) \int \sqrt{\Gamma^2 - |V_g|^2} \Gamma d\Gamma. \quad (14)$$

Производя аналогичный расчет для состояний в верхней зоне, получим

$$F_1(E, y) = \frac{4m_1^4 M'^2}{\hbar^4 g} (1 + A^2 y^2) \int \frac{\Gamma d\Gamma}{\sqrt{\Gamma^2 - |V_g|^2}}. \quad (15)$$

Изменение F определяется поэтому тремя следующими выражениями

I) $E < V_{000} + E_g - |V_g|$:

$$F_1(E, y) \sim \frac{4}{3} \frac{m_1^4 M'^2}{\pi^2 \hbar^3 g^3} (1 + A^2 y^2) [(E_g^2 - |V_g|^2)^{3/2} - \{(V_{000} + E_g - E)^2 - |V_g|^2\}^{3/2}]; \quad (16)$$

II) $V_{000} + E_g - |V_g| < E < V_{000} + E_g + |V_g|$:

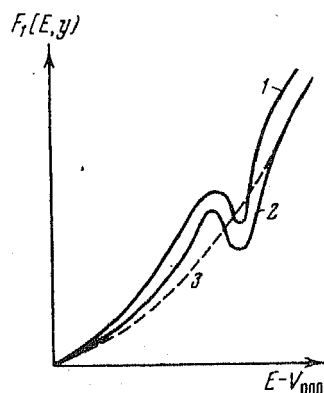
$$F_1(E, y) \sim \frac{4}{3} \frac{m_1^4 M'^2}{\pi^2 \hbar^3 g^3} (1 + A^2 y^2) (E_g^2 - |V_g|^2)^{3/2}; \quad (17)$$

III) $V_{000} + E_g + V_g < E$:

$$F_1(E, y) \sim \frac{4}{3} \frac{m_1^4 M'^2}{\pi^2 \hbar^3 g^3} (1 + A^2 y^2) (E_g^2 - |V_g|^2)^{3/2} + \frac{4m_1^2 M^2}{\hbar^4 g} (1 + A^2 y^2) \{(E - E_g - V_{000})^2 - |V_g|^2\}^{1/2}. \quad (18)$$

При этом расчете учитывались лишь плоскости $\mathbf{g}$ и $-\mathbf{g}$, так что отклонение кривой $F_1(E, y)$ от соответствующей кривой для свободных электронов должно быть умножено на число пар эквивалентных плоскостей, ограничивающих внутреннюю зону. Величины $F_2(E, y)$ и $F_3(E, y)$, относящиеся к излучению, электрический вектор которого параллелен плоскости разрыва, также могут быть легко вычислены. Оказывается, они имеют такой же общий ход, как и $F_1(E, y)$, с той лишь разницей, что их производные являются повсюду непрерывными. Поэтому форма $F(E, y)$ определяется, главным образом, формой $F_1(E, y)$ (см. рисунок). Кривая $F_1(E, y)$ для K -излучения расположена несколько выше кривой $F_1(E, 0)$ в отсутствие намагниченности. Для обнаружения этого эффекта следует измерять спектры испускания (как наиболее благоприятные объекты для исследования) ферромагнитных металлов выше и ниже температуры ферромагнитного превращения. Из формул (14) и (15) следует, что разность ординат кривых $F_1(E, y)$ и $F_1(E, 0)$ может составлять несколько процентов от значений в ненамагниченном состоянии.

4. Таким образом, в рамках $(s-d)$ -обменной модели показано, что испускание и поглощение рентгеновских лучей ферромагнитными металлами должно зависеть от величины их самопроизвольной намагниченности. Вблизи температуры ферромагнитного превращения эта зависимость имеет простой квадратичный характер [формулы (14) — (18)].



K -излучение. 1 — кривая $F_1(E, y)$; 2 — кривая $F_1(E, 0)$; 3 — свободные электроны

Институт физики металлов
Уральского филиала Академии наук СССР

Поступила в редакцию
12 марта 1954 г.

Литература

- [1] А. В. Соколов. ЖЭТФ, 25, 9, 1953. — [2] А. Вильсон. Квантовая теория металлов, ОГИЗ, ГИТТЛ, 1941, стр. 42—44. — [3] С. В. Вонсовский. ЖЭТФ, 16, 981, 1946. — [4] С. В. Вонсовский и Е. А. Туров. ЖЭТФ, 24, 419, 1953. — [5] А. В. Соколов и С. М. Ципис. ЖЭТФ, этот выпуск, стр. 321.

ДИСПЕРСИОННЫЕ ФОРМУЛЫ КВАНТОВОЙ ОПТИКИ МЕТАЛЛОВ В МНОГОЭЛЕКТРОННОЙ ТЕОРИИ С УЧЕТОМ ЭЛЕКТРОННОГО ЗАТУХАНИЯ

А. В. Соколов, В. И. Черепанов и И. Б. Штейнберг

Для совокупности взаимодействующих электронов, описываемых общей волновой функцией, произведен вывод общих дисперсионных формул квантовой оптики металлов с учетом электронного затухания.

В работе [1] были получены дисперсионные формулы квантовой оптики металлов в многоэлектронной теории. Однако они справедливы в видимой и ультрафиолетовой областях спектра лишь без учета затухания электронного движения. Интересно рассмотреть общий случай, включающий в рассмотрение электронное затухание.

В общем случае действие переменного поля световой волны на электроны металла может быть двояким. Соответственно этому в квантовой оптике металлов различают два типа процессов — ускорение и переходы электронов в более высокие энергетические состояния. В первом случае электроны могут терять приобретенное ими ускорение в силу взаимодействия их с упругими колебаниями решетки (фононами), во втором случае электронная система вообще не остается в возбужденном состоянии, а «перескакивает обратно», причем на длительность возбужденного состояния помимо других причин также оказывает влияние взаимодействие с фононами решетки. Это взаимодействие можно учесть путем введения фактора затухания электронного движения $\vec{\Gamma}_{\vec{\xi}_1 \vec{\xi}_2' \dots \vec{\xi}_N} = \vec{\Gamma}'$.

Закон сохранения энергии и интерференционное условие при учете взаимодействия электронной системы с колебаниями решетки будут иметь вид:

$$E(\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N) = F(\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N) \pm \hbar\omega \mp \hbar\omega_q, \quad (1)$$

$$\sum \vec{k}_i = \sum \vec{k}_i + \vec{K} \mp \vec{q} + 2\pi\vec{g}, \quad (2)$$

где $\vec{q}$ и $\hbar\omega_q$ — волновой вектор и энергия поглощаемого или излучаемого фонона.

Если бы взаимодействием электронной системы с колебаниями решетки можно было пренебречь, то электронная система находилась бы очень долго в возбужденном состоянии (стационарное состояние). Однако, если взаимодействие большое, то электронная система, находясь в возбужденном состоянии, будет отдавать свою энергию колебаниям решетки (нестационарное состояние). Энергия колебаний решетки при этом процессе возрастает, и с течением времени происходит равномерное распределение ее по всем частотам, т. е., в конце концов, повышается температура решетки.

Влияние колебаний решетки на электронную систему можно выразить через уменьшение продолжительности нахождения электронов в возбужденном состоянии. Математически это проявляется в том, что

энергию электронной системы в возбужденном состоянии $(\vec{\xi}'_1, \dots, \dots, \vec{\xi}'_N, s')$ следует заменить на комплексную величину

$$E(\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_N, s') \rightarrow E(\xi'_1, \xi'_2, \dots, \xi'_N, s') - i\hbar \Gamma_{\xi'_1, \dots, \xi'_N}^{\rightarrow},$$

где $\Gamma_{\xi'_1, \dots, \xi'_N}^{\rightarrow}$ — фактор затухания электронного движения. Для вывода

дисперсионных формул при учете взаимодействия электронной системы с колебаниями решетки нужно, следовательно, во всех формулах работы [1] произвести указанную замену, а формулы (2.6) [1], выражающие закон сохранения энергии и интерференционное условие, заменить формулами (1) и (2) настоящей работы. Однако, поскольку волновым вектором фотона и волновым вектором фонона можно пренебречь по сравнению с обобщенным волновым вектором всей системы электронов, то интерференционное условие будет иметь такое же выражение, как в работе [1]. Так же как и в одноэлектронной теории, энергией кванта решетки по сравнению с энергией всей системы электронов можно пренебречь, и поэтому вместо (1) будем иметь прежний вид закона сохранения энергии (2.6) [1]. При учете этих соображений выражение для плотности тока (3.17) работы [1] принимает вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{j} = & \frac{e^2}{m^2 c \hbar (Ga)^{3N}} \sum_{s, s'} \int d\vec{\xi}_1 \dots d\vec{\xi}_N [\rho_0(\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N, s') - \\ & - \rho_0(\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N, s)] (\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N, s') \sum \hat{\mathbf{p}}_i | \vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N, s) \times \\ & \times \left\{ \mathbf{B} e^{i\omega t} \frac{1 - [\exp - (\omega' + \omega - i\Gamma') t]}{\omega' - \omega - i\Gamma'} + \right. \\ & \left. + \mathbf{B}^* e^{-i\omega t} \frac{1 - \exp[-i(\omega' - \omega - i\Gamma') t]}{\omega' - \omega - i\Gamma'} \right\} (\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N, s | \sum \hat{\mathbf{p}}_i | \vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N, s') - \\ & - \frac{e^2}{mc (Ga)^{3N}} \mathbf{A} \sum_s \int \rho_0(\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N, s) e^{-\Gamma' t} d\vec{\xi}_1, \dots, d\vec{\xi}_N, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\omega' = \omega_{\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N, s; \vec{\xi}'_1, \dots, \vec{\xi}'_N, s'}$.

Это выражение имеет простой физический смысл. Непосредственно после включения поля при $t \approx 0$ это выражение дает ток смещения, обусловленный начальным распределением электронов по состояниям $\rho_0(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \dots, \vec{\xi}_N, s)$. В дальнейшем при $t > 0$, в результате перераспределения электронов по состояниям под действием поля, появляются еще два типа членов: члены, гармонически зависящие от t с частотой ω внешнего электромагнитного поля, и члены, содержащие переменную зависимость от t с частотами ω' и затухающие со временем. Первые относятся к вынужденным колебаниям системы, а вторые описывают собственные колебания системы, возбуждающиеся в начальный момент при включении поля и экспоненциально затухающие со временем. Ток, обусловленный первоначальным распределением электронов, также затухает со временем. При сильном затухании в случае больших t собственными колебаниями системы и первоначальным током можно полностью пренебречь. Однако в случае отсутствия затухания ($\Gamma' = 0$) или в случае слабого затухания ($\Gamma' \approx 0$) нужно учитывать также и собственные колебания системы.

Для удобства дальнейших вычислений формулу (3) можно представить в виде

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_1 + i \mathbf{j}_2, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_1 = & \frac{e^2}{m^2 \hbar (Ga)^{3N}} \sum_{s, s'} \int d\vec{\xi}_1, \dots, d\vec{\xi}_N [\rho_0(\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N, s') - \\ & - \rho_0(\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N, s)] (\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N, s' | \sum \hat{\mathbf{p}}_i | \vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N, s) \times \\ & \times \left\{ \mathbf{B} e^{i\omega t} \frac{1}{\omega' + \omega - i\Gamma'} + \mathbf{B}^* e^{-i\omega t} \frac{1}{\omega' - \omega - i\Gamma'} \right\} (\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N, s | \sum \hat{\mathbf{p}}_i | \vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N, s') - \\ & - \frac{e^2}{mc (Ga)^{3N}} \mathbf{A} \sum_s \int \rho_0(\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N, s) e^{-\Gamma' t} d\vec{\xi}_1, \dots, d\vec{\xi}_N, \end{aligned} \quad (4a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_2 = & \frac{e^2}{m^2 \hbar (Ga)^{3N}} \sum_{s, s'} \int d\vec{\xi}_1, \dots, d\vec{\xi}_N [\rho_0(\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N, s') - \\ & - \rho_0(\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N, s)] (\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N, s' | \sum \hat{\mathbf{p}}_i | \vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N, s) \times \\ & \times \left\{ \mathbf{B} e^{i\omega t} \frac{\exp[-i(\omega' + \omega - i\Gamma')t]}{-i(\omega' + \omega - i\Gamma')} + \right. \\ & \left. + \mathbf{B}^* e^{-i\omega t} \frac{\exp[-i(\omega' - \omega - i\Gamma')t]}{-i(\omega' - \omega - i\Gamma')} \right\} (\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N, s | \sum \hat{\mathbf{p}} | \vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N, s'). \end{aligned} \quad (4b)$$

В (4a) сумму по s, s' разбиваем на две, соответствующие $\rho_0(\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N, s')$ и $\rho_0(\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N, s)$, и в первой из них меняем индексы суммирования $s \rightleftharpoons s'$; при этом

$$\omega_{\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N, s; \vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N, s'} \rightarrow -\omega_{\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N, s; \vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N, s'} \text{ и } \Gamma_{\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N} \rightarrow \Gamma_{\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N}. \quad (5)$$

Собрав затем снова все члены в одну сумму, вместо выражения, стоящего в фигурных скобках в (4a), будем иметь

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbf{B} e^{i\omega t} \frac{1}{-\omega' + \omega - i\Gamma'} + \mathbf{B}^* e^{-i\omega t} \frac{1}{-\omega' - \omega - i\Gamma'} - \mathbf{B} e^{i\omega t} \frac{1}{\omega' + \omega - i\Gamma'} - \right. \\ \left. - \mathbf{B}^* e^{-i\omega t} \frac{1}{\omega' - \omega - i\Gamma'} \right\}. \end{aligned}$$

Группируя члены в этой скобке попарно, первый с четвертым, второй с третьим, и принимая во внимание, что

$$\mathbf{B} e^{i\omega t} + \mathbf{B}^* e^{-i\omega t} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{B} e^{i\omega t} - \mathbf{B}^* e^{-i\omega t} = (1/i\omega) \dot{\mathbf{A}},$$

рассматриваемую скобку можно представить в виде

$$\begin{aligned} \left\{ - \left[\frac{\omega' - \omega}{(\omega' - \omega)^2 + \Gamma'^2} + \frac{\omega' + \omega}{(\omega' + \omega)^2 + \Gamma'^2} \right] \mathbf{A} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\omega} \left[\frac{\Gamma'}{(\omega' - \omega)^2 + \Gamma'^2} - \frac{\Gamma'}{(\omega' + \omega)^2 + \Gamma'^2} \right] \dot{\mathbf{A}} \right\}. \end{aligned}$$

Разобьем (4б) на две части: в одну войдут $\mathbf{B}$, а в другую $\mathbf{B}^*$, и проведем следующее преобразование:

$$\frac{\exp[-i(\omega' + \omega - i\Gamma')t]}{-i(\omega' + \omega - i\Gamma')} = e^{-\Gamma't} \frac{\exp[-i(\omega' + \omega)t]}{-i(\omega' + \omega)} \frac{1}{1 + \left(\frac{\Gamma'}{i(\omega' + \omega)}\right)} =$$

$$= e^{-\Gamma't} \frac{\exp[-i(\omega' + \omega)t]}{-i(\omega' + \omega)} \left(1 - \frac{\Gamma'}{i(\omega' + \omega)} - \frac{\Gamma'^2}{(\omega' + \omega)^2} - \dots\right). \quad (6)$$

Прежде чем проводить аналогичное преобразование для выражения

$$\exp[-i(\omega' - \omega - i\Gamma')t] / -i(\omega' - \omega - i\Gamma')$$

в той части формулы (46), в которую входит B^* , произведем замену индексов $s \rightleftharpoons s'$ и, учтя (5), будем иметь

$$\frac{\exp[-i(-\omega' - \omega - i\Gamma')t]}{-i(-\omega' - \omega - i\Gamma')} = e^{-\Gamma't} \frac{\exp[-i(-\omega' - \omega)t]}{-i(-\omega' - \omega)} \frac{1}{1 + [\Gamma'/i(-\omega' - \omega)]} =$$

$$= e^{-\Gamma't} \frac{\exp[-i(-\omega' - \omega)t]}{-i(-\omega' - \omega)} \left(1 + \frac{\Gamma'}{i(\omega' + \omega)} - \frac{\Gamma'^2}{(\omega' + \omega)^2} - \dots\right). \quad (7)$$

Сделав затем в выражении (46) переход от переменных интегрирования $\vec{\xi}_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \dots \vec{\xi}_N(\xi_N, \eta_N, \zeta_N)$ к переменным $\omega', u_1, \dots, u_{3N-1}$, аналогично тому, как это сделано в работе [1], и отбрасывая в (6) и (7) члены с $\Gamma'/(\omega' + \omega)$, т. е. считая затухание малым¹, получим вместо (46) следующее выражение:

$$\frac{\pi e^2}{m^2 c \hbar \omega (Ga)^{3N}} \sum_{s, s'} \int du_1, \dots, du_{3N-1} e^{-\Gamma't} \frac{\rho_0(\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N, s') - \rho_0(\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N, s)}{|\text{grad}_{\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N} \omega'|} \times$$

$$\times (\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N, s' | \sum \hat{p}_i | \vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N, s) (\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N, s | \sum \hat{p}_i | \vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N, s').$$

Окончательное выражение для полной плотности тока в металле будет иметь вид:

$$\mathbf{j} = -\frac{e^2}{mc (Ga)^{3N}} \sum_s \int d\vec{\xi}_1, \dots, d\vec{\xi}_N \rho_0(\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N, s) \times$$

$$\times \left\{ \mathbf{A} e^{-\Gamma't} + \frac{1}{m\hbar} \sum_{s'} \left(\frac{\omega' - \omega}{(\omega' - \omega)^2 + \Gamma'^2} + \frac{\omega' + \omega}{(\omega' + \omega)^2 + \Gamma'^2} \right) D_{\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N, s}^{\vec{\xi}_1', \dots, \vec{\xi}_N', s'} \mathbf{A} \right\} -$$

$$-\frac{e^2}{m^2 c \hbar \omega (Ga)^{3N}} \sum_{s, s'} \int d\vec{\xi}_1, \dots, d\vec{\xi}_N \rho_0(\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N, s) \times$$

$$\times \left(\frac{\Gamma'}{(\omega' + \omega)^2 + \Gamma'^2} - \frac{\Gamma'}{(\omega' - \omega)^2 + \Gamma'^2} \right) D_{\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N, s}^{\vec{\xi}_1', \dots, \vec{\xi}_N', s'} \mathbf{A} +$$

$$+ \frac{\pi e^2}{m^2 c \hbar \omega (Ga)^{3N}} \sum_{s, s'} \int du_1, \dots, du_{3N-1} e^{-\Gamma't} \frac{\rho_0(\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N, s') - \rho_0(\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N, s)}{|\text{grad}_{\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N} \omega'|} \times$$

$$\times D_{\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N, s}^{\vec{\xi}_1', \dots, \vec{\xi}_N', s'} \mathbf{A}.$$

Сравнение этого выражения с током, вычисляемым по классической теории

$$\mathbf{j} = \frac{e - 1}{4\pi} \frac{\omega^2}{c} \mathbf{A} - \frac{\sigma}{c} \dot{\mathbf{A}},$$

¹ Нас интересует именно этот случай, так как мы желаем показать, что при $\Gamma' = 0$ наши конечные формулы для ϵ и σ переходят в формулы работы [1]. При наличии же сильного затухания все выражение (46) обращается в нуль благодаря наличию члена $e^{-\Gamma't}$.

дает для диэлектрической постоянной ϵ и удельной электропроводности σ следующие выражения:

$$\begin{aligned}\epsilon &= 1 - \frac{4\pi e^2}{m\omega^2 (Ga)^{3N}} \sum_s \int \left[e^{-\Gamma' t} + \frac{1}{m\hbar} \sum_{s'} \left(\frac{\omega' - \omega}{(\omega' - \omega)^2 + \Gamma'^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\omega' + \omega}{(\omega' + \omega)^2 + \Gamma'^2} \right) D_{\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N; \vec{\xi}'_1, \dots, \vec{\xi}'_N, s} \right] \rho_0(\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N, s) d\vec{\xi}_1, \dots, d\vec{\xi}_N; \\ \sigma &= - \frac{\pi e^2}{m^2 \hbar \omega (Ga)^{3N}} \sum_{s, s'} \int e^{-\Gamma' t} \frac{\rho_0(\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N, s') - \rho_0(\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N, s)}{|\text{grad}_{\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N} \omega'|} \times \\ &\quad \times D_{\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N; \vec{\xi}'_1, \dots, \vec{\xi}'_N} du_1 \dots du_{3N-1} + \frac{e^2}{m^2 \hbar \omega (Ga)^{3N}} \sum_{s, s'} \int \left(\frac{\Gamma'}{(\omega' + \omega)^2 + \Gamma'^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Gamma'}{(\omega' - \omega)^2 + \Gamma'^2} \right) \rho_0(\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N, s) D_{\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N; \vec{\xi}'_1, \dots, \vec{\xi}'_N} d\vec{\xi}_1, \dots, d\vec{\xi}_N.\end{aligned}$$

Как и следовало ожидать, при $\Gamma' = 0$ выражения для ϵ и σ переходят в формулы (3.23) и (3.24) работы [1], тогда как при $\Gamma' \neq 0$ члены, содержащие $\exp(-\Gamma' t)$, обращаются в нуль, и мы окончательно получаем

$$\begin{aligned}\epsilon &= 1 - \frac{4\pi e^2}{m\omega^2 (Ga)^{3N}} \sum_s \int \left[\frac{1}{m\hbar} \sum_{s'} \left(\frac{\omega' - \omega}{(\omega' - \omega)^2 + \Gamma'^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\omega' + \omega}{(\omega' + \omega)^2 + \Gamma'^2} \right) D_{\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N; \vec{\xi}'_1, \dots, \vec{\xi}'_N} \right] \rho_0(\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N, s) d\vec{\xi}_1, \dots, d\vec{\xi}_N, \\ \sigma &= + \frac{e^2}{m^2 \hbar \omega (Ga)^{3N}} \sum_{s, s'} \int \left(\frac{\Gamma'}{(\omega' + \omega)^2 + \Gamma'^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Gamma'}{(\omega' - \omega)^2 + \Gamma'^2} \right) \rho_0(\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N, s) D_{\vec{\xi}_1, \dots, \vec{\xi}_N; \vec{\xi}'_1, \dots, \vec{\xi}'_N} d\vec{\xi}_1, \dots, d\vec{\xi}_N.\end{aligned}$$

Институт физики металлов
Уральского филиала Академии наук СССР

Поступила в редакцию
12 марта 1954 г.

Литература

- [1] А. В. Соколов. ЖЭТФ, 25, 344, 1953.

1955

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ИСКРОВОГО СЧЕТЧИКА ДЛЯ РЕГИСТРАЦИИ α -ЧАСТИЦ

Е. Андреев и Б. М. Исаев

Показано, что за счет постоянного коронного разряда искровой счетчик обладает самостабилизирующими свойствами. Исследованы изменения счетных характеристик в зависимости от расстояния между электродами и влажности. Показано, что эффективность счета возрастает при увеличении влажности.

1. Введение

В последние годы появился ряд исследований, посвященных анализу работы искрового счетчика нового типа [1-5]. Идея использования искрового разряда для регистрации ионизирующих излучений не является новой. Еще в 1935 г. Грейнахером был предложен искровой счетчик, анодом в котором служили шарик или нить диаметром 0,5—1,5 мм, а катодом — металлическая пластинка, расположенная на расстоянии 0,5 мм от катода [6].

Под влиянием ионизирующих частиц в счетчике Грейнахера в воздухе при атмосферном давлении возникает искровой разряд, продолжительность которого ограничивается гасящей схемой и составляет величину порядка 0,01 сек. Недостатком такого типа счетчиков является большой наклон и малая протяженность счетной характеристики, нестабильность работы, неопределенный рабочий объем, а также малая разрешающая способность. Следует указать также, что разряд в подобных счетчиках вызывается не только α -, но и β -, γ -частицами. Все это привело к тому, что практического применения эти счетчики не получили.

В работе [7] было показано, что все эти недостатки могут быть устранены, если в качестве катода использовать плоскую металлическую пластинку, а в качестве анода тонкую (диаметром 0,1 мм) металлическую нить, натянутую параллельно плоскости катода на расстоянии 1—1,5 мм. Счетчик такого типа обычно работает при атмосферном давлении воздуха, и, самое главное, разряд в нем вызывается только частицами, создающими большую удельную плотность ионизации. Из-за простоты конструкции таких счетчиков и легкости регистрации импульса (величина импульса очень велика и может достигать нескольких тысяч вольт) подобные счетчики имеют в отдельных случаях ряд преимуществ перед другими способами регистрации α -частиц, медленных нейтронов или осколков деления урана [4,8].

Одним из важных свойств искрового счетчика является возможность регистрации этих видов излучений в присутствии практически неограниченного фона от β - или γ -излучения. Характерной особенностью подобных счетчиков также является резко выраженная направленность их действия.

На рис. 1 схематически представлен разрез искрового счетчика в двух направлениях. Здесь А — анод в виде проволоки, К — плоский катод. Стрелкой указано направление полета α -частиц; α -частицы регистрируются только в том случае, если угол φ состав-

ляет не более $5-6^\circ$. Что касается угла ψ , то его величина значительно больше и достигает $40-50^\circ$ [2]. В этом случае интенсивная ионизация от α -частицы вызывает появление искрового разряда, импульс которого регистрируется радиосхемой.

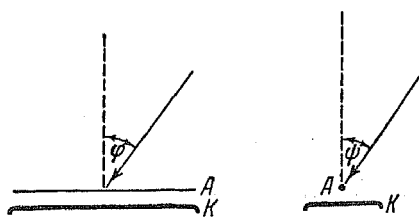


Рис. 1. Разрез искрового счетчика. А — анод, К — катод

Настоящая работа посвящена исследованию свойств искрового счетчика, в частности, зависимости счетной характеристики от межэлектронного расстояния, влажности, температуры и т. д.

2. Аппаратура

Анодом счетчика служила вольфрамовая нить диаметром 0,1 мм, укреплявшаяся на плексиглазовой рамке; катодом служила тщательно отполированная пластинка из серебра или латуни. Расстояние между катодом и анодом можно было менять при помощи микрометрического винта. В качестве источника α -частиц был взят препарат, состоящий из смеси радия и мезотория, нанесенной тонким слоем на плексиглазовый диск диаметром 30 мм. Для исследования зависимости эффективности счета от угла ψ препарат укреплялся на специальном держателе и мог быть установлен под различным углом (ось вращения препарата совпадала с направлением нити) (рис. 2). Излучающая поверхность в этом случае ограничивалась щелевой диафрагмой шириной 0,5 мм и длиной 30 мм, расположенной на расстоянии 3 см от нити.

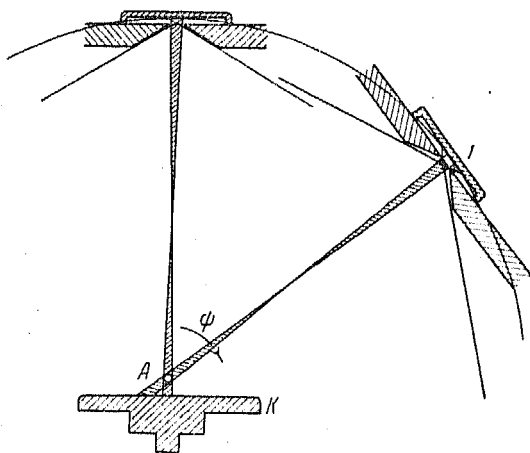


Рис. 2. А — вольфрамовая нить, К — катод, I — препарат

Так как чувствительная область счетчика ограничивается областью шириной порядка 0,5 мм [1], то действующими α -частицами являются только те, которые лежат внутри угла, показанного на рис. 2 штриховкой. Это обуславливает естественную коллимацию пучка α -частиц.

Регистрация импульсов производилась пересчетной схемой ПС-64. Высокое напряжение от выпрямителя подавалось на нить (анод). Возникающий при разряде импульс снимался с делителя напряжения, состоящего из двух последовательно включенных сопротивлений R_1 и R_2 ($R_1 = 5 \text{ M}\Omega$, $R_2 = 5 \text{ k}\Omega$), шунтированных конденсаторами C_1 и C_2 . Импульс снимался с сопротивления R_2 и подавался на усилительный каскад пересчетной схемы, смонтированной в непосредственной бли-

зости от анода счетчика. Для измерения величины коронного тока последовательно в цепь включался микроамперметр¹.

Для измерения зависимости эффективности от температуры и влажности аппаратура размещалась в специальном герметизированном ящике (для уменьшения действия озона, выделяющегося при разряде, герметизированный объем был равен 1 м³).

3. Результаты экспериментов

На рис. 3 (кривая 1) представлена типичная счетная характеристика искрового счетчика (расстояние нить — плоскость $l = 1,5$ мм; диаметр нити 0,1 мм, препарат недифрагмирован). По оси ординат нанесена скорость счета в минуту N , по оси абсцисс — полное напряжение

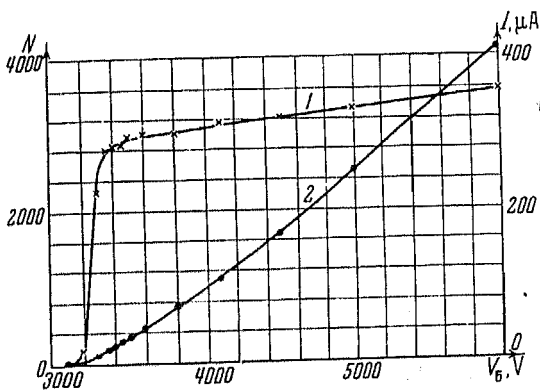


Рис. 3. 1 — типичная счетная характеристика искрового счетчика, 2 — значения коронного тока

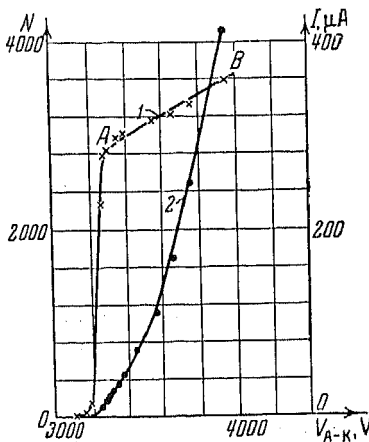


Рис. 4. 1 — счетная и 2 — коронная характеристика искрового счетчика, построенные согласно данным рис. 3

высоковольтного источника V_B . На этом же рисунке приведены значения коронного тока I (кривая 2) в микроамперах². Как видно из рисунка, величина коронного тока в рабочей области характеристики достигает больших значений (несколько сот микроампер). Учитывая, что в цепи счетчика величина гасящего сопротивления составляет несколько мегом, разность потенциалов между анодом и катодом будет значительно меньше полного напряжения V_B . Искровой счетчик в данном случае мы можем рассматривать как коронный стабилизатор, степень стабилизации в котором, как показал Векслер [8], определяется соотношением внутреннего сопротивления разрядного промежутка и внешнего сопротивления, равного сумме $R_1 + R_2$. Очевидно, что истинное напряжение на счетчике будет

$$V_{A-K} = V_B - RI, \quad (1)$$

где R — величина гасящего сопротивления ($R \approx R_1 + R_2$), I — величина коронного тока.

На рис. 4 приведена счетная и коронная характеристики искрового счетчика, построенные на основании данных рис. 3, причем по

¹ Величины R_1 , R_2 , C_1 и C_2 взяты в достаточной степени произвольно. Учитывая малую продолжительность импульса ($\sim 10^{-8}$ сек.), ясно, что основную роль в делителе играют конденсаторы C_1 и C_2 .

² Следует отметить, что мы не наблюдали острого пика в начале счетной характеристики, как это описывается в ряде работ [1,2]. Возможно, что отсутствие пика объясняется тем, что характеристики снимались при неколлимированном пучке α -частиц.

оси абсцисс отложено напряжение на разрядом промежутке V_{A-K} . Следует ожидать, что наклон и протяженность счетной характеристики будут зависеть от величины гасящего сопротивления $R \equiv R_1 +$

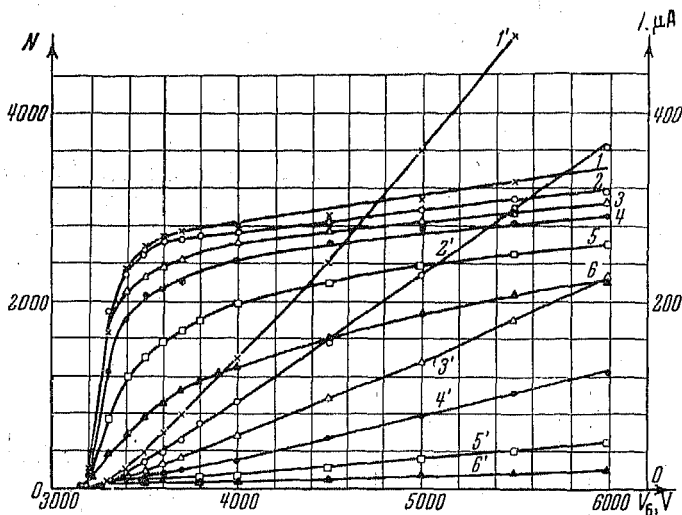


Рис. 5. 1—6—счетные и 1'—6'—коронные характеристики для различных сопротивлений: 1=2,5; 2=5; 3=10; 4=20; 5=50 и 6=150 МΩ

$+ R_2$, так как при изменении величины R будет соответственно изменяться степень стабилизации напряжения V_{A-K} .

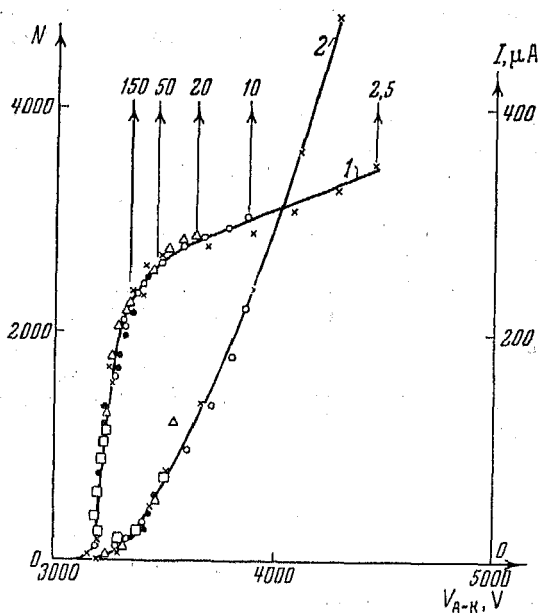


Рис. 6. 1—счетная и 2—коронная характеристики для различных сопротивлений: $\times$ = 2,5; $\circ$ = 10; $\triangle$ = 20; $\bullet$ = 50; $\square$ — 150 МΩ, построенные по данным рис. 5

Для иллюстрации нарис. 5 приведено семейство счетных (кривые 1—6) и коронных (кривые 1'—6') характеристик для различных сопротивлений R (R менялось от 2,5 до 150 МΩ).

Определяя по формуле (1) величину V_{A-K} , все эти кривые можно привести к одной счетной и одной коронной характеристикам, указанным на рис. 6. Становится понятным изменение наклона и величины счета при больших величинах гасящего сопротивления. При увеличении R увеличивается степень стабилизации, и даже при больших значениях V_B напряжение на счетчике V_{A-K} соответствует начальному подъему счетной характеристики рис. 6.

На рис. 6 стрелками указана предельная величина V_{A-K} для различных сопротивлений при напряжении $V_B = 6000$ В. При сопротивлении $R = 150$ МΩ вся счетная характеристика лежит в обла-

сти большой крутизны. Это обуславливает большой наклон счетной характеристики рис. 5 и, соответственно, меньшую эффективность.

Как уже указывалось выше, чувствительная область счетчика, через которую должна пройти α -частица, чтобы вызвать искровой разряд, имеет очень малый объем и простирается с соответствующим падением эффективности на расстояние до $\sim 0,5$ мм от центра нити [1]. Очевидно, что чувствительная область вокруг нити определяется геометрией электрического поля и в силу этого она будет несколько растянута в направлении к катоду. Для определения формы чувствительной области были рассчитаны эквиградиентные поверхности системы нить — плоскость. На рис. 7 подобные кривые представлены для расстояния нить — плоскость 1,5 мм и разности потенциалов $V_{A-K} = 3300$ В и $V_{A-K} = 4000$ В (кривые 1 и 2). Эти значения потенциалов соответствуют точкам А и В счетной характеристики, приведенной на рис. 4, и одинаковой величине $E/p = 20$ В/см·мм рт. ст. Точно указать размеры чувствительного объема вряд ли представляется возможным. Можно предположить, что чувствительный объем расположен внутри области, ограниченной кривой для $E/p = 20$ В/см·мм рт. ст., где начинается распад отрицательных ионов и величина таунсендовского коэффициента ионизации становится больше нуля [9]. Из рисунка видно, что при увеличении потенциала нити чувствительный объем расширяется, что приводит к увеличению числа сосчитываемых частиц и, следовательно, определяет величину наклона счетной характеристики.

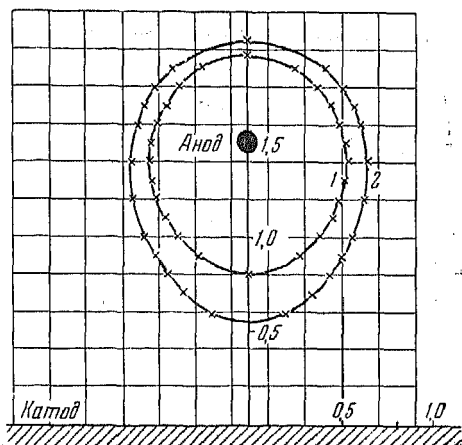


Рис. 7. Эквиградиенты поверхности системы нить — плоскость $E/p = 20$ В/см·мм рт. ст.

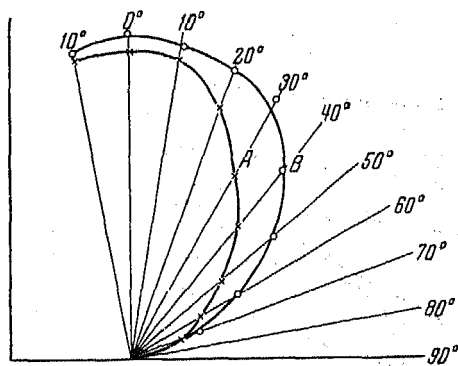


Рис. 8. Определение числа регистрируемых частиц в зависимости от угла ψ для двух значений напряжений: А — 3600 В, В — 4200 В

Исходя из этих соображений, следует ожидать, что наклон счетной характеристики будет меняться в зависимости от угла, под которым α -частица входит в чувствительную область. Для проверки этого предположения было определено число регистрируемых частиц в зависимости от угла ψ . На рис. 8 представлены результаты этих изменений, причем кривая А соответствует $V_{A-K} = 3600$ В, а кривая В — $V_{A-K} = 4200$ В. В то время как при $\psi = 0$ число сосчитываемых частиц увеличивается примерно на 5%, при углах 30–60° относительная эффективность увеличивается на 35–60%.

На рис. 9 представлены две счетные характеристики (линейные участки) для $\psi = 0$ и $\psi = 40^\circ$.

Очевидно, что вид счетной характеристики также должен существенно зависеть от расстояния анод — катод. На рис. 10 приведено

семейство счетных ($I-4$) и коронных ($I'-4'$) характеристик для расстояний нить — плоскость от 1 до 5 мм и $R=5\text{ М}\Omega$. Обращает на себя внимание падение эффективности счета при увеличении расстояния. Очевидно, это связано с уменьшением вероятности прорастания стримера в области малых градиентов поля. Надо отметить, что, начиная с расстояния 3 мм, вначале счетной характеристики вообще не наблюдается появления видимой искры.

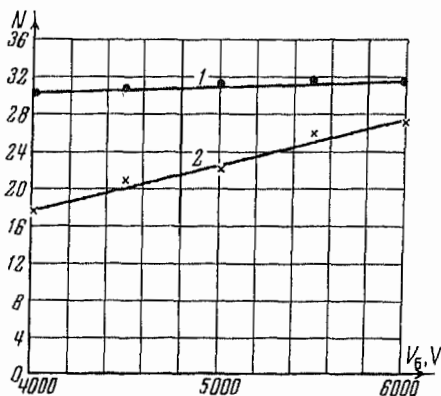


Рис. 9. 1 — $\psi = 0^\circ$, 2 — $\psi = 40^\circ$

Следует ожидать, что замена системы электродов нить — плоскость на нить — цилиндр или полуцилиндр улучшит счетные качества прибора. При этом следует ожидать увеличения общей эффективности счета за счет улучшения геометрии электронного поля. Это демонстрируется

рис. 11, где для сравнения приведено изменение чувствительности счетчика в зависимости от угла пролета α -частицы для системы

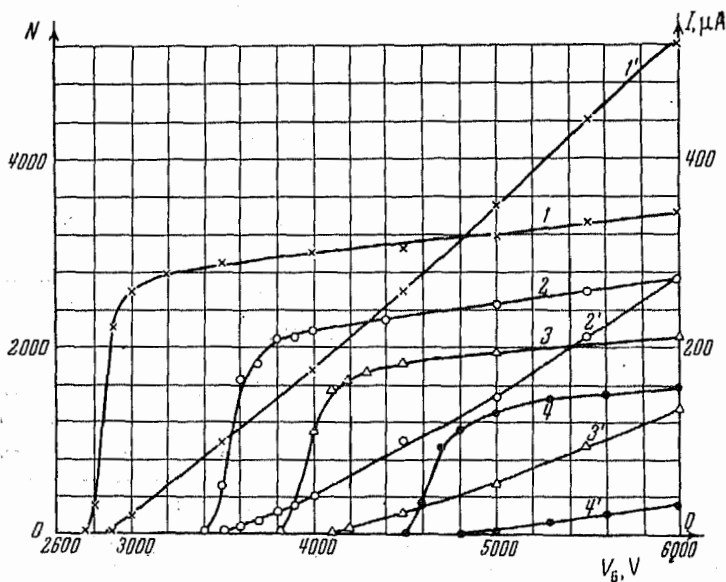


Рис. 10. 1—4 — счетные и 1'—4' — коронные характеристики для различных расстояний нить — плоскость: 1 = 1; 2 = 2; 3 = 3; 4 = 5 мм

нить — плоскость (кривая 2) и нить — полуцилиндр (кривая 2') для полуцилиндра радиусом 1,5 мм. Эффективность счетчика при угле падения $\psi = 0$ принята за единицу. Как видно из рис. 11, для случая нить — полуцилиндр чувствительность счетчика сохраняется неизменной вплоть до угла 60° . При больших углах падение чувствительности, повидимому, объясняется уменьшением напряженности электрического поля из-за краевых эффектов.

Крайне важной характеристикой счетчика является сохранение стабильности его работы при изменении температуры и влажности. Исследования показали, что чувствительность счетчика в сильной

степени зависит от количества водяных паров. В качестве иллюстрации на рис. 12 приведены три счетные характеристики (нить — плоскость) при различных давлениях водяных паров: 22 мм рт. ст. (кривая 1),

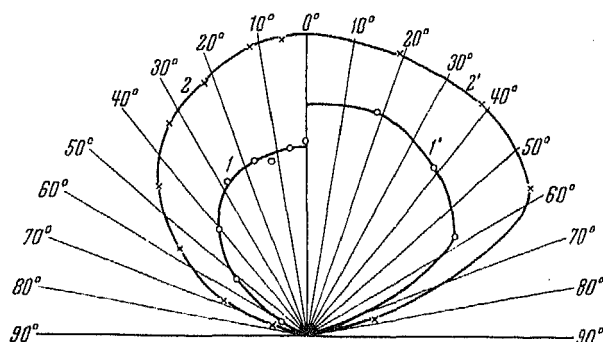


Рис. 11. Изменение чувствительности счетчика в зависимости от угла пролета α -частицы; 2 — для системы нить — плоскость, 2' — нить — полуцилиндр

12 мм рт. ст. (кривая 2) и 5,6 мм рт. ст. (кривая 3). На этом же рисунке приведена коронная характеристика. Как видно из рисунка, наблю-

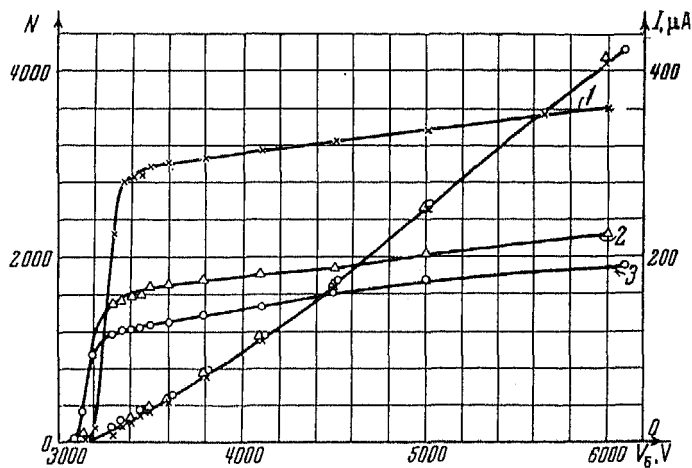


Рис. 12. 1, 2, 3 — счетные и коронные характеристики (нить — плоскость) при различных давлениях водяных паров: 1 — 22; 2 — 12; 3 — 5,6 мм рт. ст., $T = 23,5^\circ C$, расстояние $A - K = 1,5$ мм

дается резкое падение эффективности счета при уменьшении влажности (величина коронного тока при этом сохраняется постоянной).

На рис. 13 приведена кривая зависимости скорости счета (при постоянном напряжении на счетчике $V_b = 4000$ В и расстоянии $l = 1,5$ мм) от давления водяных паров. Обнаруженная зависимость эффективности счета от влажности является недостатком искрового счетчика и при проведении количественных измерений требуется периодический контроль стабильности работы прибора. Следует, однако, указать, что в практических условиях работы редко наблюдается значительное изменение влажности, и осуществление контроля стабильности работы не представляет затруднений.

Характер угловой зависимости чувствительности счетчика не меняется при изменении влажности. Это видно из сравнений кривых 2 и 1 и 2' и 1' рис. 11, снятых при давлении водяных паров 23,7 мм рт. ст. (кривая 2), 3,7 мм рт. ст. (кривая 1 — нить — плоскость) и 22,3 мм рт. ст. (кривая 2), 6,0 мм рт. ст. (кривая 1' — нить — полуцилиндр).

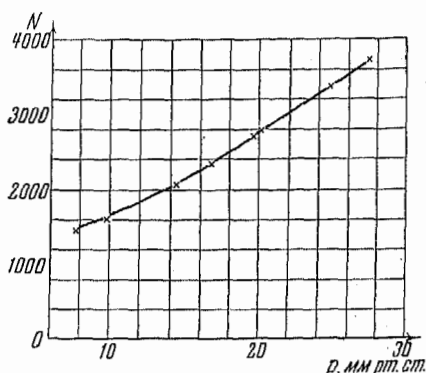


Рис. 13. Зависимость скорости счета от давления водяных паров

Увеличение эффективности искрового счетчика при увеличении влажности, повидимому, связано с образованием тяжелых отрицательных ионов. При увеличении влажности увеличивается вероятность образования тяжелых отрицательных ионов и, как следствие этого, уменьшается влияние диффузии. Это может привести к созданию более благоприятных условий развития искрового пробоя и, следовательно, к увеличению эффективности регистрации α -частиц.

Поступила в редакцию
16 февраля 1954 г.

Литература

- [1] R. D. Connor. Proc. Phys. Soc., **64**, 30, 1951. — [2] M. Ronald a. B. Payne. Journ. Sci. Instr., **26**, 321, 1949. — [3] R. D. Connor. Journ. Sci. Instr., **29**, 12, 1952. — [4] P. Savel. C. R., **235**, 156, 1952. — [5] P. Savel. C. R., **234**, 2596, 1952. — [6] H. Greinacher. ZS. f. techn. Phys., **16**, 165, 1935. — [7] W. V. Chang a. S. Rosenblum. Phys. Rev., **67**, 222, 1945. — [8] Б. И. Векслер, А. В. Грошев и Н. А. Добротин. Экспериментальные методы ядерной физики, Изд-во АН СССР, 1940. — [9] Н. А. Капцов. Электрические явления в газах и вакууме, 11-е изд., ГИТТЛ, 1950.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО РАЗРЯДА МЕТОДОМ ЗОНДОВ

Х. А. Джерпетов и Г. М. Патеюк

Произведено сравнение существующих методов зондов при исследовании высокочастотного разряда в He, Ne, Ar и H₂. Рассмотрены искажения разряда, которые возникают при внесении в высокочастотный разряд дополнительных электродов — противозондов. Произведено исследование распределения температуры, концентрации электронов и потенциала пространства вдоль оси разрядной трубки, а также зависимости этих параметров от давления газа и напряжения высокочастотного поля на внешних электродах разрядной трубки.

1. Введение

Широко распространенным методом измерения электрических параметров положительного столба газового разряда является метод зондов. Зондовая методика, достаточно обоснованная для исследования газового разряда на постоянном токе, недостаточно проверена для применения к высокочастотному разряду.

Как известно, при зондовых измерениях в разряде постоянного тока потенциал зонда относят к потенциалу одного из электродов. В высокочастотном разряде, ввиду того что на электродах имеется переменный высокочастотный потенциал, они не могут быть использованы в качестве опорных точек — противозондов.

В работах [1,2] при исследовании высокочастотного газового разряда методом зондов применялся в качестве противозонда третий электрод, который имел потенциал земли. Потенциал зонда может быть отнесен к потенциалу противозонда лишь при условии, что потенциал пространства вокруг противозонда не зависит от тока на зонд. Это возможно лишь в том случае, когда на противозонд из разряда попадают электроны и ионы в количестве, много большем, чем на зонд. Это условие требует увеличения поверхности противозонда. Однако неизвестно, как будет влиять противозонд больших размеров на режим высокочастотного разряда. Учитывая это обстоятельство, Биберман и Панин [3] предложили метод двух зондов, позволяющий определить электронную температуру и концентрацию заряженных частиц при предположении, что имеет место максвелловское распределение электронов и ионов по скоростям. Метод же противозондов позволяет определить не только электронную температуру и концентрацию заряженных частиц, но также потенциал пространства и, кроме того, дает критерий максвелловского распределения электронов по скоростям. Поэтому проверка этого метода для исследования высокочастотного разряда представляет интерес.

Целью данной работы является:

- а) сопоставление данных, полученных экспериментально методом двух зондов, с данными, полученными посредством применения противозонда;
- б) экспериментальное изучение возможных нарушений, вызываемых введением в разряд противозонда;
- в) исследование распределения вдоль оси разрядной трубки температуры и концентрации электронов и потенциала пространства при разных давлениях газа.

2. Условия опыта

Для выполнения поставленной задачи была применена газоразрядная трубка длиной в 70 см, диаметром 3,2 см (рис. 1, а). Внутри трубки были помещены два противозонда: один e , неподвижно закрепленный в центре трубки вблизи зонда, другой u — подвижный. Оба противозонда были изготовлены из никелевой фольги с одинаковой поверхностью

(30 см²). В середине трубки (на ее оси) на расстоянии 4 мм один от другого были помещены два одинаковых платиновых зонда P , имевших диаметр 0,1 мм и длину 4 мм. При этом отношение поверхности зонда к поверхности противозонда было равно приблизительно 1 : 2500. Зонды были расположены строго по оси трубки, чтобы возможный градиент плотности заряженных частиц в разряде не повлиял на условие попадания частиц на зонды.

Таким образом удавалось получать симметричные зондовые характеристики методом двух зондов.

При исследовании распределения электронной температуры T_e , концентрации электронов n_e и потенциала пространства V_R вдоль оси разряда использовались трубки, имевшие два одинаковых по форме и размерам подвижных противозонда (рис. 1, б). В середине трубки (перпендикулярно к оси) помещался цилиндрический зонд P . Большинство разрядных трубок при работе с инертными газами было отпаяно от вакуумной установки. Для поддержания чистоты газа в отпаянных трубках применялись поглотители.

Схема для зондовых измерений изображена на рис. 1. Два внешних электрода $\mathcal{E}$, в виде колец, охватывали трубку снаружи. Пользуясь переключателем K , можно было снимать зондовые характеристики с подвижным противозондом в положении 1, с неподвижным противозондом в положении 2 и с двумя зондами в положении 3. При снятии зондовых характеристик противозонды в отдельности были заземлены, а при работе с двумя зондами земля отключалась при помощи переключателя K_1 . В зондовую цепь для подавления высокочастотных колебаний вводились дроссели D . При снятии зондовых характеристик при частоте поля 5 мГц в качестве параметра брался разрядный ток в трубке. Сила тока измерялась при помощи термопарного миллиамперметра T . При более высоких частотах (100 мГц и выше) параметром служило напряжение высокой частоты, подаваемое на внешние электроды. Напряжение измерялось диодным вольтметром ДВ, собранным в лаборатории.

При определении электронных токов из зондовых характеристик использовалась линейная экстраполяция ионного тока. Электронная температура определялась из наклона полулогарифмической характеристики при измерении методом одиночного зонда или вычислялась по формуле Бибермана — Панина [3] в случае измерения методом двух зондов. За потенциал пространства на полулогарифмической характеристике бралась точка, в которой начиналось отклонение хода характеристики от прямой линии.

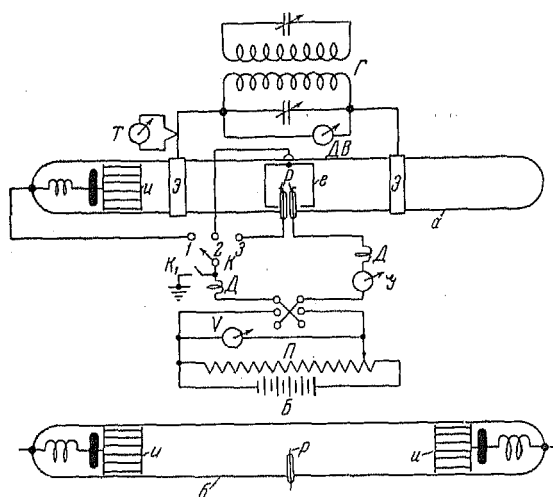


Рис. 1. Схема для снятия зондовых характеристик и типы разрядных трубок

3. Сравнение значений электронных температур, полученных при помощи методов одного или двух зондов

Для сравнения значений электронных температур, полученных при помощи методов одного или двух зондов, измерения производились в неоне и гелии.

На рис. 2 приведены зондовые характеристики, полученные при помощи двух зондов (а), а также вольтамперные и полулогарифмические характеристики, полученные соответственно при помощи подвижного противозонда (б) и с центральным (неподвижным) противозондом (в) в гелии в трубке, показанной на рис. 1, а. Частота поля равнялась 5 мГц. Эти полулогарифмические характеристики, полученные как с одним противозондом, так и с другим, указывают на наличие максвелловского распределения скоростей электронов, что дает возможность из полулогарифмических характеристик обычным путем определить температуру электронов. Однако следует заметить, что при малых давлениях газа были обнаружены случаи отступления от прямолинейного вида полулогарифмической кривой, свидетельствующие об отсутствии максвелловского распределения электронов по скоростям в высокочастотном разряде. Приведенное сравнение двух методов относится к тому случаю, когда имело место максвелловское распределение электронов по скоростям.

Результаты измерений электронной температуры разными способами в гелии и неоне приведены в табл. 1.

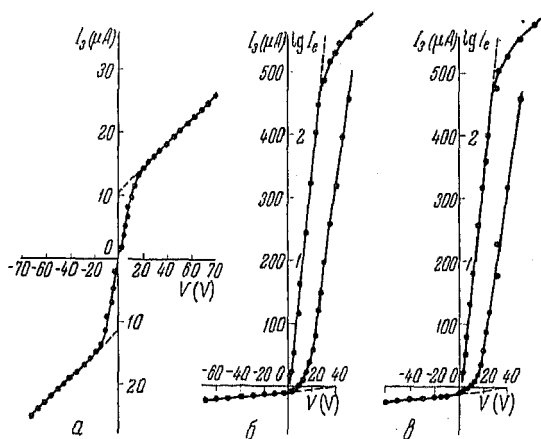


Рис. 2. Зондовые характеристики в He, полученные: а — методом двух зондов, б — методом одного зонда с неподвижным противозондом е, в — методом одного зонда с подвижным противозондом и

Таблица 1

Наименование газа	Давление в мм рт. ст.	Частота поля в мГц	Температура электронов в °К		
			Два зонда	Подвижный противозонд	Центральный (неподвижный) противозонд
Гелий	0,23	5	52000	57500	58000
		—	50000	58000	57500
		—	48000	53000	53000
		—	55000	53000	54000
	0,4	5	50000	55000	55000
		—	47000	54000	53000
		—	48000	50000	50000
		—	49000	50000	50000
Неон	0,56	130	50000	46000	—
	—	—	49000	46000	—
	—	—	50000	45500	—

Из приведенных в табл. 1 данных можно сделать заключение, что все три способа дают одинаковые значения электронной температуры. Некоторое расхождение, очевидно, можно отнести за счет ошибок измерений. Таким образом можно сказать, что при определении электронной температуры методом зондов в высокочастотном разряде противозонды существенного искажения не вносят.

4. Искажения, вносимые противозондами

При работе с трубкой, изображенной на рис. 1, а, было замечено, что при малых давлениях разряд в области центрального противозонда стягивается к оси трубки. Это обстоятельство, естественно, указывает на некоторые искажения высокочастотного разряда, которые могут сказаться при измерении других параметров. Для выяснения искажений, вносимых в разряд подвижным противозондом, была использована трубка типа, представленного на рис. 1, б.

Для работы был выбран аргон, так как полулогарифмическая характеристика в аргоне имеет резкий излом, что позволяет наряду с электронной температурой более точно определить потенциал пространства и электронную концентрацию. Измерения были проведены для частоты поля 5 мГц при давлении 0,23 мм рт. ст. и разрядном токе 100 мА. В разряде при указанных условиях наблюдались три светлые части, разделенные темными промежутками.

Изучение влияния противозонда производилось следующим образом. Внешние электроды устанавливались на расстоянии 18 см друг от друга, а противозонды — на расстоянии 3 см от внешних электродов, т. е. на расстоянии 24 см один от другого. Сохраняя расстояние между внешними электродами и противозондами неизменным, электроды и противозонды перемещались вдоль трубки так, чтобы зонд последовательно попадал в различные места разряда вдоль оси разрядной трубки. Таким образом в различных местах на оси разрядной трубки снимались зондовые характеристики при включении в качестве опорного электрода левого противозонда, или правого, или, наконец, при одновременном их включении.

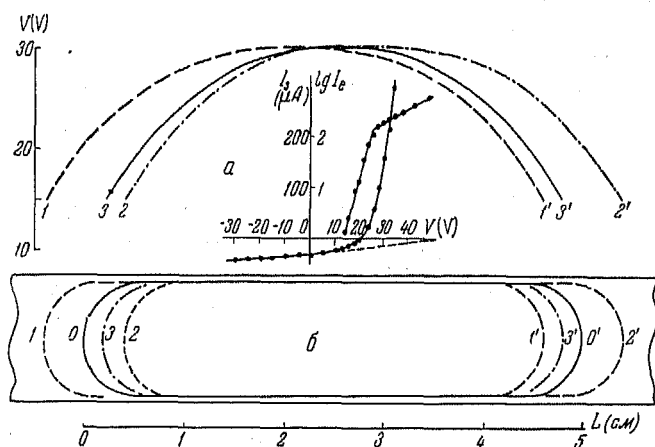


Рис. 3. Распределение потенциала вдоль оси трубки в Аг. Распределения получены, когда опорным электродом являлся: 1 — правый противозонд, 2 — левый противозонд, 3 — при включении одновременно двух противозондов

Из полученных зондовых характеристик для разных точек вдоль оси разрядной трубки были определены электронная температура, потенциал пространства и концентрация электронов. Эти измерения были произведены в пределах центральной светлой части разряда. Полученное рас-

пределение потенциала пространства показано на рис. 3. В нижней части рисунка изображен внешний вид рабочей части разряда, в котором производилось измерение (рис. 1, б). Кривая 1 дает распределение потенциала пространства вдоль оси трубки, найденное при применении правого противозонда, кривая 2 — левого, кривая 3 — при одновременном их включении.

Как видно из приведенных графиков, распределение потенциала пространства получается симметричным относительно середины разрядного промежутка при измерениях, проведенных при включении одновременно двух противозондов, и несколько иное, когда включались левый или правый противозонды в отдельности. Это явление связано с изменением формы разряда в зависимости от расположения противозондов. Указанное изменение заключается в том, что при включении правого противозонда рабочая область разряда смещается влево, что обозначено на рис. 3, б цифрами 1—1'. При включении левого противозонда рабочая часть разряда смещается вправо, что обозначено цифрами 2—2'. Наконец, при одновременном включении двух противозондов рабочая часть разряда (светлая часть) сжимается с двух сторон, что обозначено цифрами 3—3'. Цифрами 0—0' обозначен вид этой части разряда при отключенных противозондах. В центре рис. 3, а приведены зондовая вольтамперная и полулогарифмическая характеристики в аргоне, полученные при одновременном включении двух противозондов.

Из приведенных графиков следует, что присутствие противозондов вносит в структуру разряда известные искажения. Эти искажения выражаются в изменении положения светлых и темных областей разряда вдоль оси разрядной трубки. Указанные деформации разряда в нашем случае были сравнительно небольшими, не более 3—4 мм в обе стороны. Далее следует заключить, что применение в качестве опорного электрода двух противозондов, расположенных симметрично относительно внешних электродов, более целесообразно, чем применение одного противозонда. В этом случае сохраняется внутренняя структура высокочастотного разряда, симметричная относительно электродов.

5. Исследования внутренних электрических параметров в высокочастотном разряде в аргоне, неоне и водороде

Исследования распределения электронной температуры T_e , концентрации электронов n_e и потенциала пространства V_g вдоль оси разрядной трубки были произведены в трубке типа б (рис. 1) при наполнении ее аргонem, неонem и водородem.

На рис. 4 представлены графики распределения T_e , n_e и V_g вдоль оси разрядной трубки в аргоне для давления $p = 0,07$ мм рт. ст. и частоты внешнего поля 130 мГц (при амплитуде напряжения высокочастотного поля на внешних электродах 180 В). При этих условиях разряд был однородным.

Из графиков рис. 4 следует:

а) Электронная температура имеет симметричное распределение относительно электродов с наибольшей величиной в середине разрядного промежутка (рис. 4, а).

б) Концентрация электронов (рис. 4, б) и потенциал пространства вдоль трубки (рис. 4, в) имеют также симметричное распределение относительно электродов и достигают максимального значения в середине между ними. Особенно сильное изменение потенциала пространства вдоль оси разрядной трубки было нами получено в аргоне при давлении 0,07 мм рт. ст.

Конфигурация кривых распределения температуры и концентрации электронов, а также потенциала пространства вдоль оси трубки в общем случае зависит от давления и природы газа, от диаметра трубки и от раз-

рядного тока, но ход этих кривых всегда симметричен относительно электродов.

Обычно в однородном высокочастотном разряде при не слишком больших расстояниях между электродами кривая распределения температуры электронов вдоль трубки имеет максимальное значение в середине между электродами. При увеличении расстояния между электродами, при постоянной амплитуде напряжения высокой частоты на последних, ход кривых распределения температуры электронов вдоль оси трубки изменяется.

Исследование зависимости температуры, концентрации электронов, а также потенциала пространства от давления газа проводились в водороде в разрядной трубке, представленной на рис. 1, б длиной 80 см с диаметром 35 мм, при расстоянии меж-

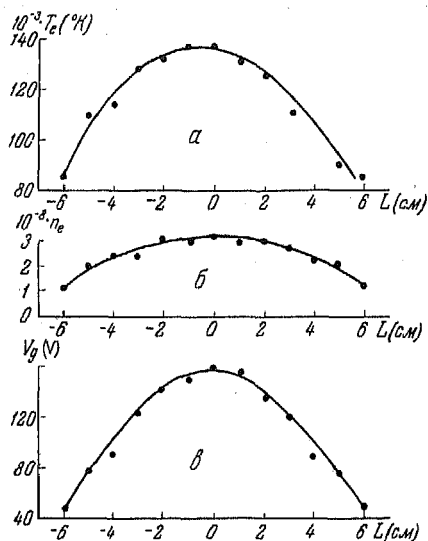


Рис. 4

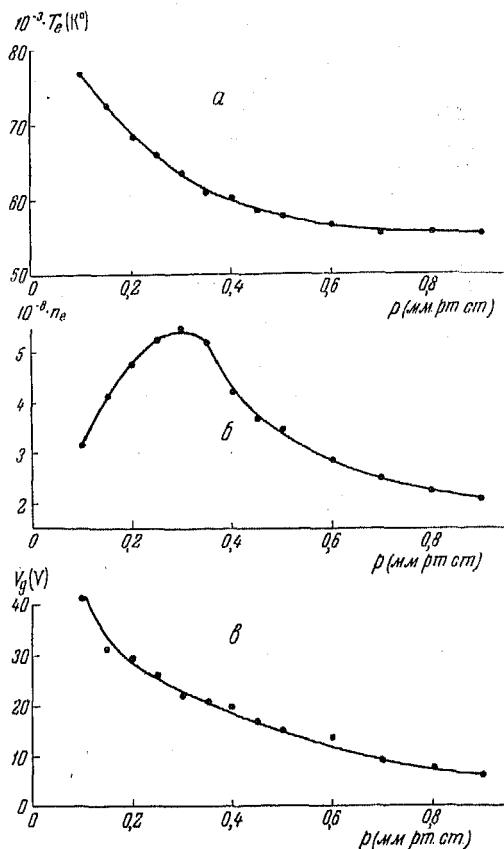


Рис. 5

Рис. 4. Распределение a — электронной температуры, b — концентрации электронов и v — потенциала пространства вдоль оси трубки в Ar при частоте 130 мГц; $p = 0,07$ мм рт. ст.; амплитуда напряжения между внешними электродами 180 В

Рис. 5. Зависимость T_e , n_e и V_g от давления в H_2 при частоте 100 мГц и силе разрядного тока 100 мА

ду внешними электродами 13 см для частоты поля 130 мГц. Измерения были проведены в области давлений от 0,1 до 1,1 мм рт. ст. при разрядном токе, равном 150 мА. При этих условиях разряд в трубке был однородным. При измерении зонд находился на оси трубки в середине между электродами. Результаты измерений представлены на рис. 5.

Из графиков рис. 5 видно:

а) температура электронов, как и при разряде постоянного тока, с увеличением давления уменьшается (кривая a);

б) концентрация электронов с ростом давления (приблизительно от 0,1 до 0,3 мм рт. ст.) возрастает до некоторого максимального значения, но при дальнейшем увеличении давления начинает монотонно уменьшаться (кривая b);

в) потенциал пространства в средней части между электродами при фиксированном разрядном токе с ростом давления понижается (кривая в).

На рис. 6 представлены графики зависимости температуры (а), концентрации электронов (б) и потенциала пространства (в) от амплитуды напряжения высокой частоты на внешних электродах в неоне для давления 0,07 мм рт. ст. (кривая 1) и 0,56 мм рт. ст. (кривая 2) для частоты поля 130 мГц. Измерения проводились в разрядной трубке типа, показанного на рис. 1, б, длиной 80 см и диаметром 27 мм. Из графиков рис. 6 следует, что температура электронов возрастает при увеличении напряжения высокой частоты на электродах. Значение концентрации электронов в средней части между электродами с ростом напряжения на последних возрастает, а величина потенциала пространства, наоборот, с ростом напряжения уменьшается.

6. Обсуждение результатов

При исследовании высокочастотного разряда при помощи метода зондов было установлено, что температура электронов, определенная как методом двойных зондов, так и методом одиночного зонда с применением противозонда, имеет одинаковые значения в пределах ошибок измерений. Применение противозонда как опорной точки приводит к незначительному перераспределению электрических параметров высокочастотного разряда вдоль разрядной трубки. Это дало нам основание производить исследования высокочастотного разряда методом зондов при различных давлениях и напряжениях высокочастотного поля в трубке типа, показанного на рис. 1, б.

Из рис. 4, 5 и 6 для аргона, водорода и неона видно, что температура электронов в высокочастотном разряде уменьшается с ростом давления газа. Повидимому, понижение электронной температуры в высокочастотном разряде с ростом давления газа в основном обусловлено теми же обстоятельствами, что и в разряде постоянного тока. Однако нужно иметь в виду, что в высокочастотном разряде на величину T_e может оказывать влияние и частота используемого поля. В высокочастотном разряде при сравнительно больших давлениях, когда частота поля значительно меньше частоты столкновений электронов с молекулами газа, характер поведения T_e при изменении давления не будет существенно отличаться от характера поведения T_e в случае разряда постоянного тока. При больших частотах поля или сравнительно малых давлениях газа, т. е. когда частота столкновений становится порядка или меньше частоты поля, можно ожидать некоторого различия в поведении T_e в высокочастотном разряде и в разряде постоянного поля.

Для сравнения значений температуры электронов, полученных нами для высокочастотного разряда, со значениями электронных температур, полученными другими авторами [4] для разряда постоянного тока, мы приводим табл. 2. Как видно из табл. 2, значение T_e в случае Аг для высокочастотного разряда при одинаковых давлениях значительно больше, чем в случае разряда постоянного тока.

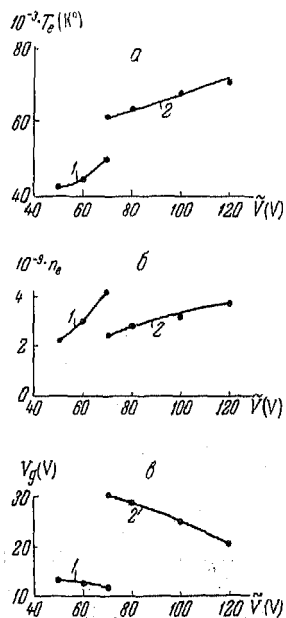


Рис. 6. Зависимость T_e , n_e и V_g от амплитуды напряжения высокой частоты V в Ne: 1—при $p = 0,07$ мм рт. ст.; 2—при $p = 0,56$ мм рт. ст.; частота 130 мГц

Таблица 2

Газ	Давление газа в мм рт. ст.	Значения $T_e \cdot 10^{-2}$, в °K			
		для разряда постоянного тока		для разряда высокой частоты	
		разр. ток $J = 50$ mA	разр. ток $J = 300$ mA	разр. ток $J = 50$ mA	разр. ток $J = 100$ mA
Неон	0,07	57	53	60	—
	0,29	40,2	35	51	—
	0,56	35	37	48	—
Аргон	0,07	26	22	—	100
	0,24	22	18	—	43,5
	0,96	16	12	—	40

Во всех наших измерениях в области давлений от 0,07 до 1 мм рт. ст. для однородного разряда в водороде, аргоне и неоне при частотах поля от 5 до 130 мГц было получено максвелловское распределение электронов по скоростям.

При увеличении амплитудного напряжения на электродах увеличивается напряженность высокочастотного поля. С увеличением напряженности поля увеличивается энергия, которую электрон получает в среднем от поля на длине свободного пробега. Поэтому при увеличении амплитуды напряжения на электродах при прочих равных условиях увеличивается значение T_e в высокочастотном разряде (рис. 6). Подобный же результат был получен автором работы [5], исследовавшим высокочастотный разряд оптическим методом.

Величина концентрации электронов является сложной функцией давления газа (рис. 5, 6). Ход зависимости концентрации электронов от давления газа можно объяснить следующим образом. При переходе из области высоких давлений к меньшим основной причиной роста концентрации электронов является увеличение энергии электронов на длине свободного пробега; с ростом этой энергии увеличивается и возможность ионизации молекул электронами при столкновениях. При переходе к низким давлениям происходит уменьшение концентрации электронов, в результате больших потерь электронов за счет диффузии, а также за счет уменьшения вероятности встреч электронов с молекулами газа.

Полученная нами экспериментальная кривая зависимости концентрации электронов от давления газа для водорода по своей конфигурации напоминает кривую проводимости ионизованного газа в зависимости от давления при ультравысоких частотах, полученную теоретически [6]. Из кривой распределения концентрации электронов в зависимости от давления в водороде также следует, что при давлении, при котором концентрация электронов имеет максимальное значение, частота столкновений электронов с молекулами газа — одного порядка с частотой действующего поля. Это также согласуется с теоретическими результатами некоторых авторов [6,7], исследовавших проводимость высокочастотного разряда. С увеличением напряженности высокочастотного поля концентрация электронов увеличивается.

При исследовании распределения потенциала пространства вдоль оси разрядной трубки нами были подтверждены результаты работ [1] о наличии в некоторых случаях большой постоянной составляющей поля в высокочастотном разряде. Оказалось, что величина постоянной составляющей поля сильно зависит от давления газа, напряженности высокочастотного поля и диаметра разрядной трубки. С ростом давления газа и напряженности высокочастотного поля величина постоянной составляющей

поля уменьшается за счет уменьшения объемных положительных зарядов на оси разрядной трубки между электродами. Возрастание постоянной составляющей поля в высокочастотном разряде с уменьшением давления газа происходит и в результате более интенсивного вывода электронов из разрядного пространства, из-за усиления процесса диффузии электронов к стенкам разрядной трубки как за счет увеличения среднего свободного пробега электронов, так и за счет увеличения средней энергии электронов.

Выход положительных ионов из разрядного пространства в результате процесса диффузии значительно меньше. Поэтому будет происходить накопление пространственного положительного заряда на оси разрядной трубки до тех пор, пока увеличение положительного заряда не прекратится благодаря установлению двуполярной диффузии электронов и ионов к стенкам разрядной трубки.

Выводы

1. Произведено сравнение существующих методов зондов для исследования высокочастотного разряда. Измерения производились как методом двух зондов, так и методом одиночного зонда с применением противозонда.

Результаты измерений показывают, что оба метода дают одинаковые значения для температуры электронов, в пределах ошибок измерения. Применение противозонда как опорной точки приводит к незначительному перераспределению электрических параметров высокочастотного разряда вдоль разрядной трубки. Этим разрешается противоречие между работами [1] и [2].

2. Произведено исследование зависимости температуры, концентрации электронов и потенциала пространства на оси разрядной трубки от давления газа.

3. Получено распределение температуры, концентрации электронов и потенциала пространства вдоль оси разрядной трубки. Эти параметры в однородном высокочастотном разряде симметричны относительно электродов и имеют максимальные значения между электродами. Распределение температуры, концентрации электронов и потенциала пространства вдоль трубки существенно зависит от давления газа, диаметра разрядной трубки и напряженности высокочастотного поля.

В проведении части измерений принимала участие Л. А. Росновская. Мы выражаем благодарность проф. Н. А. Капцову и А. А. Зайцеву за интерес к работе.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
6 марта 1954 г.

Литература

- [1] Banerji, A. Ganguli. Phil. Mag., 11, 410, 1931; 13, 494, 1932; 15, 676, 1933.—
[2] Н. Beck. ZS. f. Phys., 97, 355, 1935.— [3] Б. Биберман и Л. Панин.
Журн. техн. физ., 1, 12, 1951.— [4] R. Seeliger a. R. Hirschert. Ann. d.
Phys., 11, 817, 1931.— [5] C. Brasefield. Phys. Rev., 35, 92, 1930.— [6] F. Adler.
Journ. Appl. Phys., 20, 1125, 1940.— [7] H. Margenaw. Phys. Rev., 69, 508, 1946.

ЗАКОНОМЕРНОСТИ ЗАТУХАНИЯ ПОСЛЕСВЕЧЕНИЯ ЦИНКСУЛЬФИДНЫХ ФОСФОРОВ В ОБЛАСТИ ТЕМПЕРАТУРНОГО ТУШЕНИЯ

Ф. И. Вергунас и Н. Л. Гастинг

Излагаются результаты исследования влияния температуры и интенсивности, а также длительности возбуждения на закономерности затухания послесвечения некоторых цинксulfидных фосфоров вблизи и в области тушения.

1. Постановка задачи

Закономерности послесвечения цинксulfидных фосфоров в области низких температур, где длительность послесвечения значительна, изучены достаточно полно. Несмотря на это, относительно элементарного закона затухания послесвечения нет единой точки зрения. Три закона: экспонента [1], гипербола второго порядка [2] и закон Адировича [3], фигурируют в литературе в качестве элементарных законов затухания. Такое состояние вопроса объясняется отсутствием опытных данных, бесспорно свидетельствующих в пользу одного из этих законов.

Критерием правильности теории может быть ее способность объяснить температурный ход явления. Исследования закономерностей послесвечения в области температурного тушения могут послужить проверкой теории. Следует заметить, что эти исследования имеют значение не только контрольных опытов, но представляют и самостоятельный интерес, поскольку закономерности затухания в области тушения изучены сравнительно слабо.

Описанию проведенных нами исследований послесвечения некоторых цинксulfидных фосфоров в области тушения посвящена настоящая работа.

2. Закономерности послесвечения $\text{ZnS} - \text{Cu}$ -фосфоров

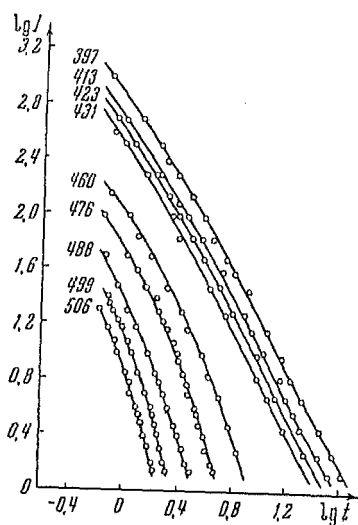
Были исследованы два $\text{ZnS} - \text{Cu}$ -фосфора с концентрацией меди 10^{-4} г/г, прокаленные в процессе изготовления один до 900°C , другой до 1100°C . Для обоих образцов были получены качественно одинаковые закономерности. Ниже приводятся кривые только для одного образца, прокаленного до 1100°C .

Исследуемый образец представлял тонкий (3 мг/см^2) слой порошка. Фосфор нагревался и охлаждался в вакуумном приборе. Возбуждение производилось светом ртутной лампы (триплет 365 мμ). Кривые затухания снимались визуально при помощи фотометра Пульфриха. Измерения во всех случаях начинались через 0,7 сек. после выключения возбуждающего света.

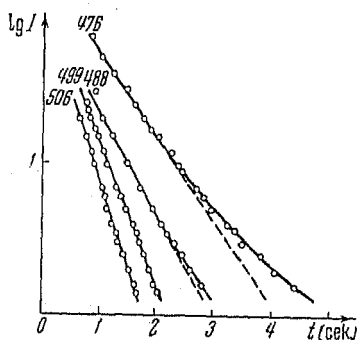
Температурное тушение зеленой полосы $\text{ZnS} - \text{Cu}$ -фосфора началось при 444°K . Послесвечение же исследовалось в интервале $398 - 506^\circ\text{K}$, т. е. вблизи и в области тушения. Исследования проводились как при длительном (сильном и слабом), так и при мгновенном возбуждении. Образец и установка при этом оставались неиз-

менными. Для всех условий возбуждения определялся температурный ход светосуммы.

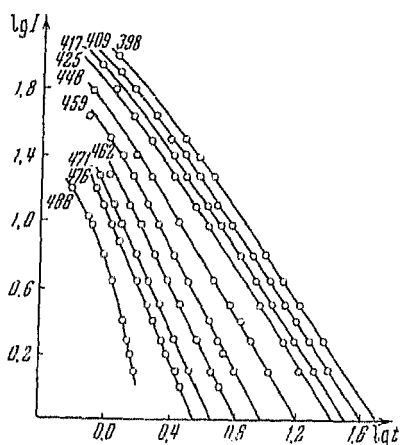
Всего было проведено три серии измерений. Первая серия — сильное возбуждение до равновесия (время возбуждения 30 сек.).



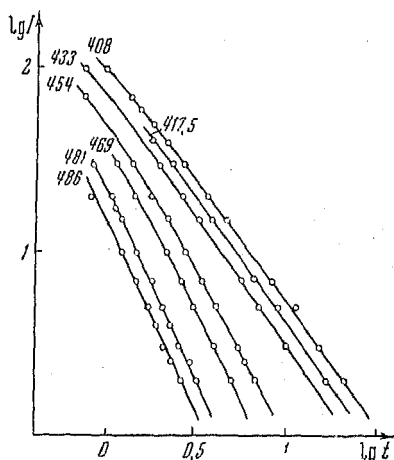
а



б



в



г

Рис. 1. Кривые затухания послесвечения ZnS — Cu-фосфора. а и б — возбуждение длительное, сильное; в — возбуждение длительное, слабое; г — возбуждение мгновенное

Вторая серия — слабое возбуждение до равновесия (время возбуждения 1 мин.) при интенсивности возбуждающего света, в 10 раз меньшей, чем в первой серии. Третья серия — мгновенное возбуждение; интенсивность возбуждающего света такая же, как и в первой серии, но время возбуждения 0,01 сек.

Кривые затухания, полученные при сильном длительном возбуждении, представлены в двойных логарифмических и полуллогарифмических координатах на рис. 1, а и б. Видно, что вблизи тушения (397—431°K) они аппроксимируются дробными гиперболами порядка 1,72, степень которых не зависит от температуры; в области тушения степень гипербол растет. При температурах 476 и 488°K начальные

стадии кривых аппроксимируются экспонентами, далекие — попрежнему гиперболами. Экспоненты на рис. 1, б продолжены пунктиром. При температурах 499°K и выше кривые от начала до конца измерений представляют экспоненты.

По наклонам экспонент были определены постоянные времени ρ . Они менялись с температурой по закону $\rho = \rho_0 e^{-\varepsilon_1/KT}$.

При слабом длительном возбуждении кривые затухания как вблизи, так и в области тушения представляли собой гиперболы (рис. 1, в). Вблизи тушения (398—425°K) степень гипербол α с температурой не менялась и была равна 1,44, в области тушения (448—476°) — росла с температурой. Аналогичный ход α для ZnS — Si-фосфоров был получен в [4]. Последняя кривая ($T = 488^\circ\text{K}$) на рис. 1, в была экспонентой.

Результаты измерений при мгновенном возбуждении приведены на рис. 1, г. Вблизи тушения (408—433°K) кривые затухания представляют собой гиперболы порядка 1,37, в области тушения, начиная с 469°K, — гиперболы второго порядка. В интервале 433—469°K степень гипербол меняется от 1,37 до 2.

Из сопоставления рис. 1 а, б, в и г следует, что закон затухания вблизи тушения при всех условиях возбуждения остается гиперболическим, меняется только степень гиперболы. На далеких стадиях температурного тушения, т. е. при самых высоких из исследуемых температур, кривые затухания как при сильном, так и при слабом возбуждении аппроксимируются экспонентами. Более сложен закон затухания в переходной области. Так мы называем интервал температур, в котором при сильном длительном возбуждении экспоненты на начальных стадиях затухания переходят в гиперболы на далеких стадиях. Этой области соответствуют начальные стадии температурного тушения. В данной области закон затухания зависит от интенсивности и длительности возбуждения. Так, например, в интервале температур 469—481°K при сильном длительном возбуждении кривые затухания представляют собой экспоненты на начальных стадиях (рис. 1, б) и переходят в гиперболы на далеких, при слабом длительном возбуждении — дробные гиперболы (рис. 1, в), при мгновенном — гиперболы второго порядка (рис. 1, г).

Из полученных серий кривых были определены некоторые количественные характеристики. Так, из температурного хода постоянных времени экспонент (рис. 1, б) была определена энергия ε_1 . По сдвигам Δ параллельно оси $\lg t$ квадратичных гипербол в области тушения и дробных вблизи тушения (рис. 1, г) методом Антонова-Романовского [5] была определена глубина уровней локализации ε_1 по формуле

$$\Delta = \frac{\varepsilon_1}{4,6 k} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right). \quad (1)$$

Значения энергий активации приведены в табл. 1. Из таблицы видно, что энергии, определенные по сдвигам Δ , вблизи и в области тушения имеют разные значения — в области тушения получены большие значения энергии активации, чем вблизи тушения. Аналогичный результат был получен в [5].

Для всех условий возбуждения по кривым зависимости I от t планиметрически определялись светосуммы. Температурный ход светосуммы был исправлен нами на температурное тушение, хотя другие авторы этого не делают [4]. На рис. 2 в координатах $\lg L$, $1/T$ приведена исправленная на тушение температурная зависимость светосуммы для серии кривых, снятых при длительном слабом возбуждении. Из рисунка видно, что эта зависимость описывается двумя пересекающимися прямыми, причем наклон прямой в области тушения больше, чем вблизи тушения.

Таблица 1

Энергия активации, eV		Фосфоры			
		ZnS— —Zn	ZnS—Cu, про- каленный при 1100 °C	ZnS—Cu, про- каленный при 900 °C	ZnS— —Cu, Co
Из температурного хода постоянной времени экспонент		0,23	0,67	0,17	1,57
По смеще- ниям Δ	вблизи тушения в области тушения		0,62 1,38	0,22 0,63	2,12
Из темпе- ратурного хода свето- суммы	вблизи тушения	сильное возбуждение слабое возбуждение мгновенное возбуж- дение	0,64 0,63 0,6	0,2	
	в обла- сти ту- шения	сильное возбуждение слабое возбуждение мгновенное возбуж- дение	1,33 1,35	0,68	2,38 2,10

Из температурного хода светосуммы вблизи тушения по формуле

$$L = L_0 e^{\varepsilon/2kT} \quad (2)$$

была определена глубина уровней локализации ε [4]. По этой же формуле была определена энергия активации и в области тушения. Результаты приведены в табл. 1. Там же приведены значения энергий активации, полученные при других условиях возбуждения.

Из таблицы видно, что независимо от условий возбуждения из температурного хода светосуммы получаются практически совпадающие значения для энергии активации. До нас такой результат никем не отмечался.

Значения энергии активации, полученные для ZnS—Cu-фосфора, прокаленного до 900°C, также приведены в табл. 1.

Чтобы проверить, являются ли закономерности, наблюдавшиеся нами для ZnS—Cu-фосфора, общими для всех цинксульфидных фосфоров, а также чтобы изучить закономерности затухания в большем интервале интенсивностей, мы исследовали еще два фосфора: ZnS—Cu, Co и ZnS—Zn.

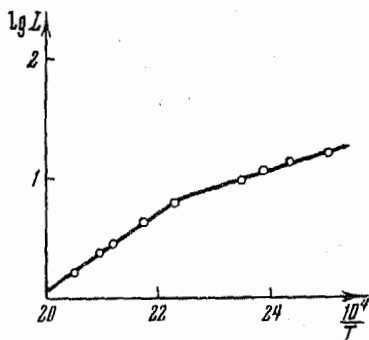


Рис. 2. Температурный ход светосуммы для ZnS—Cu-фосфора при длительном, слабом возбуждении

3. Закономерности затухания фосфора ZnS—Cu, Co

Характерной особенностью кривой температурного тушения зеленой полосы этого фосфора (концентрация Cu 10^{-5} г/г, концентрация Co 10^{-5} г/г) являются два температурных спада [6]. В интервале 170—270°K наблюдается первый спад, затем происходит разгорание и, начиная

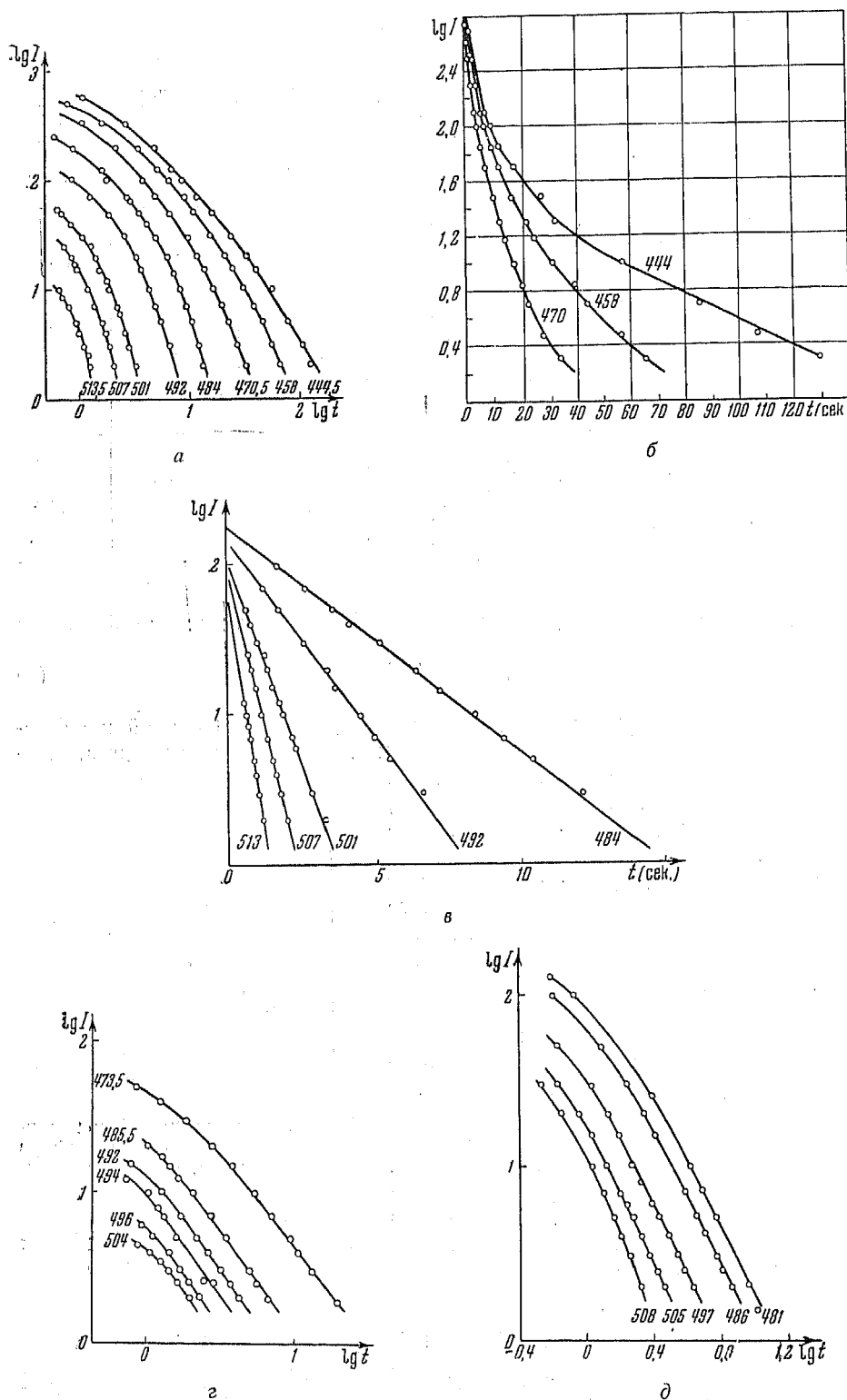


Рис. 3. Кривые затухания послесвечения $\text{ZnS}-\text{Cu}$, Со-фосфора. а, б, в — возбуждение сильное, длительное; г — возбуждение слабое, длительное; д — мгновенное возбуждение

с 390°K , наблюдается второй спад. Нами изучались закономерности затухания только в области второго спада. Были проведены три серии измерений. Первая серия: длительное сильное возбуждение, время возбуждения 1 мин. Вторая серия: длительное слабое возбуждение, время возбуждения 1 мин., интенсивность возбуждающего света в 20 раз более слабая, чем в первой серии. Третья серия: мгновенное (0,2 сек.) возбуждение, интенсивность возбуждающего света такая же, как и в первой серии.

Кривые затухания, полученные при длительном сильном возбуждении, приведены в двойных логарифмических и полулогарифмических координатах на рис. 3 а, б и в. Из рис. 3, б видно, что в начале тушения ($444\text{--}470^{\circ}\text{K}$) кривые затухания представляют экспоненты, переходящие на далеких стадиях затухания в гиперболы, причем переход совершается тем позже, чем выше температура. При температурах $484\text{--}501^{\circ}\text{K}$ последние точки также не ложатся на экспоненциальные зависимости (рис. 3, в). Начиная с 507°K , кривые затухания аппроксимируются экспонентами от начала до конца измерений.

Результаты, полученные при длительном слабом возбуждении, приведены на рис. 3, г. Видно, что при температурах $473\text{--}494^{\circ}\text{K}$ закон затухания аппроксимируется дробными гиперболами, при более высоких ($496\text{--}504^{\circ}\text{K}$) — экспонентами.

Из сопоставления рис. 3, б, в и г следует, что в случае ZnS—Cu , Co -фосфора, так же как и в случае ZnS—Cu -фосфора, кривые затухания в переходной области при сильном возбуждении в основном аппроксимируются экспонентами, при слабом — гиперболами.

Для интервала температур $481\text{--}508^{\circ}\text{K}$ были сняты кривые затухания при мгновенном (0,2 сек.) возбуждении (рис. 3, д). Из рисунка видно, что они аппроксимируются гиперболами второго порядка. Последняя кривая ($T = 508^{\circ}\text{K}$) представляет собой экспоненту.

Таким образом для ZnS—Cu , Co -фосфора в переходной области, в зависимости от интенсивности и длительности возбуждения, кривые затухания аппроксимируются экспонентами, дробными или квадратичными гиперболами.

По кривым тушения этого фосфора были определены энергии активации 1) из температурного хода постоянной времени (рис. 3, в), 2) по сдвигам квадратичных гипербол (рис. 3, д) и 3) из температурного хода светосумм. Результаты даны в табл. 1.

4. Закономерности послесвечения голубой полосы ZnS—Zn -фосфора

Исследования ZnS—Zn -фосфора проводились с голубым фильтром. Послесвечение измерялось вблизи $203\text{--}264^{\circ}\text{K}$ и в области тушения ($264\text{--}323^{\circ}\text{K}$).

Кривые затухания, полученные при длительном сильном возбуждении, приведены в двойных логарифмических и полулогарифмических координатах на рис. 4, низкотемпературные кривые на рис. 4, а, высокотемпературные — на рис. 4, б. Из рис. 4, а видно, что кривые затухания при низких температурах аппроксимируются дробными гиперболами, степень которых зависит от T (рис. 5).

Кривые, соответствующие 283°K , построены как в двойных логарифмических, так и в полулогарифмических координатах (рис. 4, а и б). Из рисунков видно, что при этой температуре гиперболический закон затухания имеет место только на далеких стадиях, начальные же описываются экспонентами.

Начиная с комнатной температуры и выше, кривые затухания описываются двумя пересекающимися экспонентами. Следовательно, закономерности послесвечения ZnS—Zn -фосфора более сложны, чем ZnS—Cu -фосфора, для которого наблюдалась одна экспонента.

На рис. 6 приведены экспоненты, полученные в результате анализа сложных кривых затухания, снятых при 292°К при двух различных интенсивностях возбуждающего света E . Из рисунка видно, что наклон

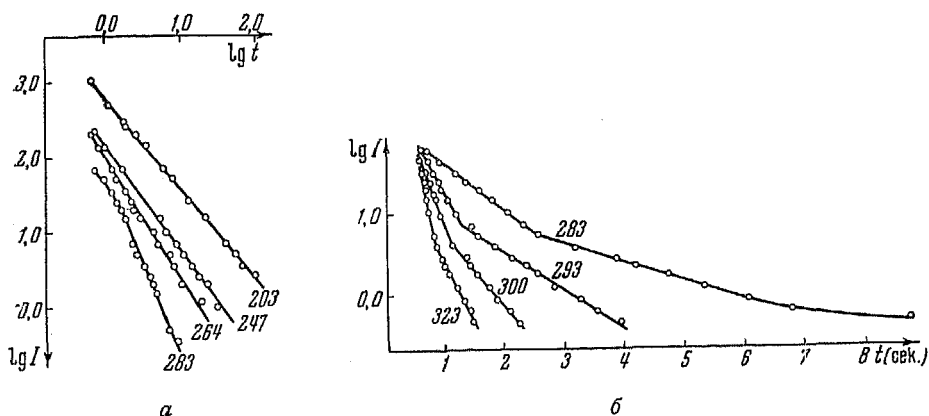


Рис. 4. Кривые затухания ZnS — Zn-фосфора. a — при низких температурах, b — при высоких

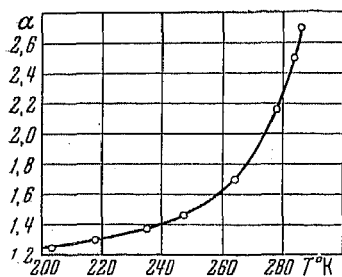


Рис. 5. Зависимость степени гипербола α от температуры для ZnS — Zn-фосфоров

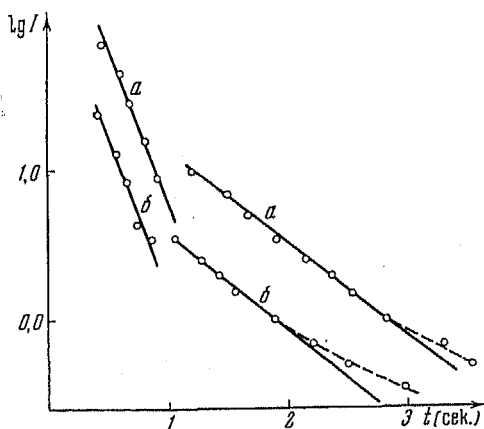


Рис. 6. Кривые затухания ZnS — Zn-фосфора, полученные в результате анализа сложной кривой. $T = 292$ °К. a — интенсивность возбуждающего света $E = 1$; b — $E = 0,14$

прямых при уменьшении E в семь раз практически не изменяется, а последние точки ложатся на гиперболу (гиперболический участок отмечен пунктиром), и с уменьшением интенсивности возбуждающего света переход экспоненты в гиперболу совершается раньше. Экспоненты на рисунке продолжены сплошными линиями.

Влияние интенсивности возбуждающего света на закон затухания в переходной области исследовалось при одной температуре 283°К. На рис. 7 в двойных и в полулогарифмических координатах приведены кривые, снятые при различных интенсивностях E . Из рисунка видно, что при $E = 1$ вначале высвечивание идет по экспоненте, затем кривая переходит в гиперболу. При $E = 0,14$ и $0,02$ экспоненциальный участок отсутствует; затухание идет по гиперболе, причем ее наклон уменьшается с уменьшением E . Следовательно, в переходной области с ослаблением интенсивности возбуждающего света экспо-

экспоненциальный закон затухания переходит в гиперболический. Таким образом для голубой полосы $\text{ZnS} - \text{Zn}$ -фосфора были получены закономерности послесвечения такие же, как для $\text{ZnS} - \text{Cu}$ - и $\text{ZnS} - \text{Cu}$, Co -фосфоров.

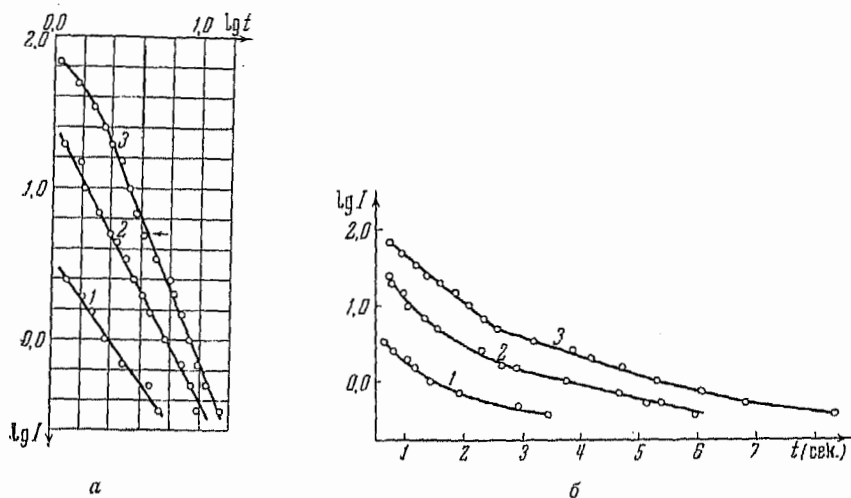


Рис. 7. Кривые затухания $\text{ZnS} - \text{Zn}$ -фосфора, снятые при разных значениях интенсивности возбуждающего света E , а — в двойных логарифмических координатах; б — в полулогарифмических координатах. 1 — $E = 0,02$, $\alpha = 1,36$; 2 — $E = 0,14$, $\alpha = 1,83$; 3 — $E = 1$, $\alpha = 2,5$

По наклонам экспонент, соответствующим большей длительности послесвечения (рис. 4, б), были определены постоянные времени, и из их температурного хода определена энергия активации ϵ_1 .

5. Выводы

Характер послесвечения всех исследованных фосфоров был одинаковым — закон затухания менялся с температурой и с интенсивностью возбуждающего света. Температура влияла следующим образом. Вблизи тушения кривые затухания аппроксимировались дробными гиперболами, степень которых практически не зависела от температуры. В области тушения степень гипербола возрастала с температурой, затем начальные стадии переходили в экспоненты, далекие стадии при этом попрежнему аппроксимировались гиперболами. Чем выше была температура, тем позже совершался переход экспоненты в гиперболу. При достаточно высоких температурах гиперболический участок исчезал, и кривые аппроксимировались экспонентами от начала до конца измерений.

Интенсивность и длительность возбуждения оказывали следующее влияние. Вблизи тушения с уменьшением интенсивности возбуждающего света уменьшалась степень дробных гипербола, характер же закона затухания не менялся. Также не менялся закон затухания на далеких стадиях температурного тушения — кривые при самых высоких температурах оставались экспонентами при сильном и слабом возбуждениях. В переходной же области закон затухания менялся с изменением интенсивности и длительности возбуждения. При больших интенсивностях возбуждающего света экспонента на начальных стадиях затухания переходила в гиперболу на далеких, при малых интенсивностях экспоненциальный участок исчезал, и кривые аппроксимировались дробными гиперболами. При мгновенном возбуждении в переходной области наблюдались гипербола второго порядка.

Из того обстоятельства, что во всех цинксulfидных фосфорах существует переходная область, в которой для одного и того же образца при одной и той же температуре в зависимости от условий возбуждения получается экспонента, дробная или квадратичная гипербола, следует, что ни экспонента, ни гипербола второго порядка в этих фосфорах не являются элементарными законами затухания.

Длительный спор между сторонниками экспоненты и квадратичной гиперболы в качестве элементарных законов затухания, по нашему мнению, объясняется тем, что всесторонних исследований закономерностей послесвечения на одних образцах в широком температурном интервале при разных условиях возбуждения не проводилось. Выводы же о закономерностях послесвечения делались на основании односторонних исследований.

Объяснение полученных нами закономерностей и наше мнение о виде элементарного закона затухания будет дано в следующей статье.

Сибирский физико-технический
институт
при Томском государственном университете

Поступила в редакцию
30 марта 1953 г.

Литература

- [1] G. F. Garlik a. A. F. Gibson. Nature, 158, 704, 1946; Proc. Phys. Soc., 60, 574, 1948; G. F. Garlik a. M. H. Wilkins. Proc. Roy. Soc., 184, 408, 1945; J. T. Randall. Proc. Roy. Soc., 184, 365, 374, 1945; J. T. Randall a. M. H. F. Wilkins. Proc. Roy. Soc., 184, 390, 1945.—[2] В. В. Антонов-Романовский. Труды ФИАН, 1, 35, 1937; 2 157, 1942.—[3] Э. И. Адирович. Некоторые вопросы теории люминесценции кристаллов, Гостехиздат, 1951.—[4] В. А. Ястребов. Труды ФИАН, 3, 123, 1946.—[5] В. В. Антонов-Романовский. ДАН СССР, 17, 95, 1937.—[6] Ф. И. Вергунас и Ю. М. Сайченко. ЖЭТФ, 14, 470, 1953.
-

1955

ОБ ОТСУТСТВИИ СТАБИЛЬНЫХ ИЗОТОПОВ Tc И Pm И ДРУГИХ АНОМАЛИЯХ В РАСПРОСТРАНЕННОСТИ β-СТАБИЛЬНЫХ ЯДЕР

А. В. Савин

Устанавливаются закономерности в расположении атомных ядер на ядерной диаграмме, в основе которых лежит критерий максимума энергии связи изобара. Все нарушения этих закономерностей связываются с заполнением ядерных оболочек. Отсутствие стабильных изотопов Tc и Pm является одним из частных случаев такого рода нарушений.

Для выявления закономерностей в распределении атомных ядер мы используем критерий максимума энергии связи изобара: ядра с наиболее плотной упаковкой нейтронов и протонов при заданном массовом числе A считаются на приведенной ниже диаграмме атомных ядер узловыми. Возможность использовать такой критерий появилась лишь недавно, в связи с накоплением экспериментальных данных по энергиям распада и массам ядер. Хотя экспериментальные данные не полны (в настоящее время нельзя точно установить 38 изобаров с максимальной энергией связи), они дают возможность подметить ряд закономерностей.

Масса узлового ядра $zM_{\text{уэл}}^A$ должна удовлетворять неравенствам: для A нечетного

$$z+1M^A - zM_{\text{уэл}}^A > -0,78 \text{ MeV}, \quad (Ia)$$

$$z-1M^A - zM_{\text{уэл}}^A > +0,78 \text{ MeV}, \quad (Iб)$$

для A четного (Z четное)¹

$$z+2M^A - zM_{\text{уэл}}^A > -1,56 \text{ MeV}, \quad (IIa)$$

$$z-1M^A - zM_{\text{уэл}}^A > +1,56 \text{ MeV}. \quad (IIб)$$

Соответствующие разности масс приведены в таблице узловых ядер, составленной с использованием данных, приведенных в работах [1-7]². Из списка узловых ядер видно, что среди них попадаются β-активные ядра (с энергией распада $< 0,78 \text{ MeV}$, равной разности масс нейтрона и протона). На диаграмме атомных ядер (см. рисунок) изображены все известные β-стабильные ядра и все известные β-активные ядра с энергией распада $< 0,78 \text{ MeV}$, а также некоторые β⁻, β⁺ и K-активные ядра, представляющие особый интерес. Узловые ядра выделены особыми обозначениями.

Из диаграммы видны следующие закономерности³:

1) Разность между числом нейтронов и протонов у узловых ядер $N - Z = I_{\text{уэл}}$ растет с увеличением A ; при этом, ввиду отсутствия

¹ Нечетно-нечетные ядра в расчет не принимаются, поскольку, как правило, они не обладают максимумом энергии связи. Существует лишь два самых легких узловых нечетно-нечетных изобара: H^2 и Li^6 .

² О достоверности в определении узлового ядра см. примечание к таблице.

³ На диаграмме одинаково обозначаются как узловые ядра, установленные с несомненностью, так и ядра, являющиеся узловыми по предположению, исходя из места расположения их на диаграмме.

узловых нечетно-нечетных ядер, для ядер с A четным $I_{\text{узл}}$ принимает попеременно два значения, различающиеся на 2 единицы.

2) Ядра с $N - Z = \text{const}$ (расположенные на диаграмме в одном горизонтальном ряду) меняют свои свойства с увеличением A в следующей последовательности: а) не узловые β -активные ядра (как правило, не изображены); б) узловые ядра, не являющиеся изобарами с минимальной массой (часто β^- -активные ядра с энергией распада, меньшей 0,78 MeV); в) β -стабильные узловые ядра, являющиеся одновременно изобарами с минимальной массой; г) неузловые β -стабильные ядра; д) β^+ - и K -активные ядра (как правило, не изображаются). Для ядер с четным A эта последовательность относится лишь к четно-четным ядрам.

Эти закономерности отражают общеизвестный факт компенсации увеличивающейся энергии кулоновского отталкивания протонов в ядре избыточным количеством нейтронов. Интерес представляют случаи нарушения этих закономерностей. Как видно из диаграммы, нарушения возникают в тех областях, где ядра с заполненными протонными и нейтронными оболочками (двойные «магические» ядра) расположены в стороне от основной линии узловых ядер. Вблизи двойных «магических» ядер ${}_{20}\text{Ca}^{40}$, ${}_{28}\text{Ni}^{56}$ нарушается последовательность в изменении свойств ядер (закономерность 2) для $N - Z = 3$ и 8 соответственно: β^- -активное ядро A^{89} расположено между β -стабильными ядрами Si^{37} и K^{41} , что происходит из-за аномально большой энергии связи ядра K^{39} . β^- -стабильное ядро Ca^{48} расположено среди β^- -активных ядер; за ним следуют три β^- -активных ядра: Ti^{52} , Cr^{56} , Fe^{60} и лишь потом β -стабильное ядро Ni^{64} . Вблизи расположенных «на периферии» двойных «магических» ядер ${}_{28}\text{Ni}^{56}$, ${}_{40}\text{Zr}^{90}$ [9] и ${}_{58}\text{Ce}^{140}$ [10, 11] нарушается закономерность 2) для $N - Z$, равных 7, 9; 10, 11, 12, 13, 14 и 20, 23, 25, 28 соответственно (см. диаграмму) и закономерность 1 для узловых ядер Cu^{67} ; Y^{90} , Zr^{90} , Zr^{91} , Mo^{95} и Nd^{143} соответственно. Характер этих нарушений указывает на аномально большую энергию связи Ni^{58} , Zr^{90} и Ce^{140} . В тех случаях, когда двойные «магические» ядра ${}^4_2\text{He}$, ${}^{16}_8\text{O}$, ${}^{120}_{50}\text{Sn}$ [9], ${}^{208}_{82}\text{Pb}$ расположены строго по ходу кривой узловых ядер, нарушений закономерностей 1 и 2 не наблюдается.

На диаграмме пунктирными линиями отмечены случаи отсутствия узловых ядер с $N = 17, 39, 43, 73, 91, 95, 131$ и с $Z = 41$ (Nb) и 59 (Pr). Как известно, β -стабильных ядер нет с $N = 19, 21, 35, 39, 45, 61, 84, 115, 123$ и с $Z = 43$ (Tc) и 61 (Pm). Эти цифры совпадают только в одном случае $N = 39$. Отсутствие узловых ядер с 7 значениями N (возможно, этих чисел и больше, так как экспериментальные данные не полны) нельзя считать аномалией. Действительно, для узловых ядер с A нечетным $I_{\text{узл}}$ увеличивается, как правило, при некоторых значениях Z на 2 единицы за счет увеличения на 2 единицы N . Если Z для этих переходных изотопов нечетное, то будут существовать два узловых изотопа с Z нечетным, а узловое ядро с N нечетным будет отсутствовать (например, последовательность узловых ядер ${}^{29}_{14}\text{Si}$, ${}^{31}_{15}\text{P}$, ${}^{33}_{16}\text{S}$, ${}^{35}_{17}\text{Cl}$, где нет узлового ядра с $N = 17$, но зато существуют два узловых изотопа фосфора с $Z = 15$). Если Z переходных изотопов четное, то отсутствия узлового ядра с некоторым N нечетным наблюдаться не будет; соответственно не будет двух узловых изотопов с одним и тем же Z нечетным (например, последовательность ${}^{50}_{27}\text{Co}$, ${}^{51}_{28}\text{Ni}$, ${}^{53}_{29}\text{Cu}$, ${}^{55}_{30}\text{Zn}$). Обе возможности равновероятны, и поэтому следует ожидать, что примерно в половине случаев будет наблюдаться отсутствие узловых ядер с нечетным числом нейтронов; в настоящее время это известно для 7 случаев из 27 возможных ($I_{\text{узл}}$ нечетное).

Таблица узловых ядер

A (массовое число)	Элемент	Процентное содержание изотопа или период полураспада	$t_{1/2}$ или вид распада	$Z+1M^A-ZM^A_{узн}$ или $Z+2M^A-ZM^A_{узн}$ в MeV	$Z-1M^A-ZM^A_{узн}$ или $Z-2M^A-ZM^A_{узн}$ в MeV	Надежность определения	Литература
1	2	3	4	5	6	7	8
1	H	99,98	—	—	—	+	[1]
2	H	0,016	—	—	0,78	(+)	[1]
3	H	12,46 г.	3,06	0,018	—	(+)	[1]
4	He	100	—	—	—	(+)	[1]
5	He	$<10^{-8}$ сек.	$\alpha+n$	-0,02	—	(+)	[3]
6	Li	7,3	—	—	3,2	(+)	[1]
7	Li	92,7	—	—	—	+	[1]
8	Be	<1 сек.	$\alpha+\alpha$	—	($>12,8$)	+	[1]
9	Be	100	—	—	14,0	(+)	[1]
10	Be	$2,7 \cdot 10^6$ г.	13,7	-0,56	—	(+)	[1]
11	B	81,2	—	—	—	+	[1]
12	C	98,9	—	—	($>13,4$)	+	[1]
13	C	1,1	—	—	—	(+)	[1]
14	C	5720 г.	9,0	-0,156	—	(+)	[5]
15	N	0,38	—	—	8,8	+	[1]
16	O	99,76	—	—	($>10,5$)	+	[1]
17	O	0,04	—	—	3,7	(+)	[1]
18	O	0,2	—	—	—	(+)	[1]
19	F	100	—	—	4,5	+	[1]
20	Ne	90,5	—	—	($>5,3$)	+	[1]
21	Ne	0,3	—	—	$>2,1$	+	[1]
22	Ne	9,2	—	—	—	(+)	[1]
23	Na	100	—	—	4,1	+	[1]
24	Mg	78,6	—	—	($>2,7$)	+	[1]
25	Mg	10,1	—	—	3,4	+	[1]
26	Mg	11,3	—	—	—	+	[1]
27	Al	100	—	—	2,64	+	[1]
28	Si	92,2	—	—	($>4,65$)	+	[5]
29	Si	4,7	—	—	3,7	+	[1]
30	Si	3,1	—	—	—	(+)	[1]
31	P	100	—	—	1,8	+	[1]
32	S	95,1	—	—	($>1,7$)	+	[5]
33	P	25 дн.	5,2	-0,26	—	(+)	[1]
34	S	4,2	—	—	($>5,7$)	+	[1]
35	S	87,1 дн.	5,0	-0,167	—	(+)	[1]
36	S	0,01	—	+0,37	—	(+)	[3]
37	Cl	24,6	—	—	4,3	+	[1]
38	A	0,06	—	—	($>4,8$)	+	[1]
39	A	15 г.	~ 10	-0,565	3,31	+	[5]
40	A	99,6	—	+0,21	—	(+)	[3]
41	K	6,9	—	—	2,55	+	[1]
42	Ca	0,64	—	—	($>3,5$)	+	[1]
43	Ca	0,13	—	—	0,81	+	[1]
44	Ca	2,13	—	—	—	(+)	[1]
45	Ca	152 дн.	5,98	-0,254	—	(+)	[1]
46	Ca	0,003	—	-0,028 (инт.)	—	(+)	[2]
47	Sc	5,4 дн.	5,65	0,62	2,06	+	[2]
48	Ti	73,4	—	—	4,3	+	[6]
49	Ti	5,5	—	—	1,8	+	[1]
50	Ti	5,3	—	+1,05	—	(+)	[6]
51	V	99,8	—	—	2,2	+	[2]
52	Cr	83,8	—	—	($>4,12$)	+	[2]
53	Cr	9,6	—	—	2,0 (инт.)	+	[2]
54	Cr	2,4	—	0,65	—	(+)	[2]
55	Mn	100	—	—	2,85	+	[2]
56	Fe	91,6	—	—	($>3,69$)	+	[2]
57	Fe	2,2	—	—	1,0	+	[2]
58	Fe	0,3	—	+1,7	—	(+)	[2]
59	Co	100	—	—	1,56	+	[2]
60	Ni	26,1	—	—	4,3	+	[2]

Продолжение

А (массовое число)	Элемент	Процентное содержа- ние изотопа или перн- од полураспада	lgf _n или вид распада	$Z+1M^Z-ZM^Z_{узн}$ или $Z+2M^A-ZM^A_{узн}$ в MeV	$Z-1M^Z-ZM^A_{узн}$ или $Z-2M^A-ZM^A_{узн}$ в MeV	Надежность определения	Литература
1	2	3	4	5	6	7	8
61	Ni	1,25	—	—	1,42	+	[2]
62	Ni	3,7	—	—	(>3,6)	+	[2]
63	Ni	300 г.	7,06	-0,063		(+)	[1]
64	Ni	1,16	—	+1,1		(+)	[2]
65	Cu	30,9	—	—	2,1	+	[1]
66	Zn	27,8	—	—	(>2,6)	+	[1]
67	Cu	58,8 час.	5,5	-0,577		(+)	[2]
68	Zn	18,6	—	—	(>3,0)	(+)	[2]
69	Ga	60,2	—	—	0,897	+	[1]
70	Zn	0,62	—	-1,18±0,2		?	[2]
71	Ga	39,8	—	—	2,1	+	[2]
72	Ge	27,4	—	—	6,52	+	[2]
73	Ge	7,9	—	—	1,5	+	[2]
74	Ge	36,3	—	+1,2		(+)	[2]
75	As	100	—	—	1,1	+	[1]
76	Se	9,0	—	—	2,2	+	[2]
77	As	40 час.	5,75	-0,7	2,46	+	[5]
78	Se	23,5	—	+3,1	5	+	[2]
79	Se	0,5·10 ⁴ г.	~9	-0,150	2,1	+	[5]
80	Se	49,8	—	-0,16		(+)	[2]
81	Br	49,5	—	—	1,38	+	[1]
82	Kr	11,5	—	—	3,5	+	[2]
83	Kr	11,48	—	—	0,98	+	[2]
84	Kr	57,0	—	0,7 (инт.)	4,68	+	[2]
85	Kr	9,4 г.	9,22	-0,695	2,5	+	[1]
86	Kr	17,4	—	-1,18		(+)	[2]
87	Rb	16·10 ¹⁰ г.	16,5	-0,27	3,6	+	[2]
88	Sr	82,7	—	—	7,0	+	[2]
89	Y	100	—	—	1,463	+	[1]
90	Zr	51,4	—	—	2,83	+	[2]
91	Zr	11,2	—	—	1,55	+	[2]
92	Zr	17,1	—	+1,25	(>4,7)	+	[2]
93	Zr	15·10 ⁶ г.	11,5	-0,060	3,1	+	[1]
94	Zr	17,4	—	-1,14	(>6,8)	+	[2]
95	Mo	15,7	—	—	0,91	+	[5]
96	Mo	16,6	—	+2,8	3,6	+	[2]
97	Mo	9,5	—	—	1,93	+	[2]
98	Mo	23,8	—	+0,04 (инт.)		(+)	[2]
99	Tc	5·10 ⁵ г.	12,7	-0,29	1,37	+	[5]
100	Ru	12,7	—	—	2,4 (инт.)	+	[2]
101	Ru	17,0	—	—	1,5	+	[1]
102	Ru	31,3	—	+1,1		(+)	[2]
103	Ru	43, дн.	8,25	-0,75		(+)	[5]
104	Ru	18,3	—	-1,2 (инт.)		(+)	[2]
105	Rh	3,6 час.	5,5	-0,57	2,01	+	[5]
106	Pd	27,2	—	+2,7	3,57	+	[2]
107	Pd	7·10 ⁶ г.	11	-0,035	1,2	+	[1]
108	Pd	26,8	—	+0,18		(+)	[2]
109	Ag	48,6	—	—	1,1	+	[1]
110	Cd	12,4	—	—	1,23±0,24	?	[2]
111	Cd	12,7	—	—	1,0	+	[1]
112	Cd	24,1	—	+1,9	4,32	+	[2]
113	Cd	12,2	∞	-0,18	2,1	+	[5]
114	Cd	28,9	—	-0,31		(+)	[2]
115	In	6·10 ¹⁴ г.	23,2	-0,63	1,45	+	[1]
116	Sn	14,4	—	—	2,5	+	[2]
117	Sn	7,54	—	—	1,73	+	[3]
118	Sn	24,0	—	—	(>1,5)	+	[5]
119	Sn	8,6	—	—	2,7	+	[1]
120	Sn	33,0	—	+2,15		(+)	[2]

Продолжение

А (массовое число)	Элемент	Процентное содержание изотопа или период полураспада	$\lg t$ или вид распада	$Z+1M^A-ZM^A_{\text{уэл}}$ или $Z+2M^A-ZM^A_{\text{уэл}}$ в MeV	$Z-1M^A-ZM^A_{\text{уэл}}$ или $Z-2M^A-ZM^A_{\text{уэл}}$ в MeV	Надежность определения	Литература
1	2	3	4	5	6	7	8
121	Sn	400 дн.	9,4	-0,88		(+)	[2]
122	Sn	4,8	—	-0,49		(+)	[2]
123	Sb	42,7	—	+0,09	1,41	+	[2]
124	Te	4,63	—	—	2,1	+	[2]
125	Sb	2,7 час.	9,4	-0,76	2,4	+	[5]
126	Te	18,7	—	+0,84	(>2)	+	[2]
127	Te	9,3 час.	5,6	-0,9	1,9	+	[2]
128	Te	31,7	—	-1,56+0,2	?	?	[2]
129	I	1,7·10 ⁷ г.	13,4	-0,17	2,6	+	[2]
130	Xe	4,05	—	+2,53	3,4	+	[2,6]
131	Xe	21,2	—	—	0,97	+	[2]
132	Xe	26,9	—	—	3,1	+	[2]
133	Xe	5,7 дн.	5,7	-0,43	1,93	+	[5]
134	Xe	10,5	—	—	(>3,9)	+	[2]
135	Cs	2·10 ⁶ г.	13,9	-0,21	1,15	+	[5]
136	Ba	7,8	—	—	0,27	—*	[2]
137	Ba	11,3	—	—	1,2	+	[5]
138	Ba	71,7	—	—	5,1	+	[1]
139	La	99,9	—	—	2,27	+	[1]
140	Ce	88,5	—	—	4,91	+	[5]
141	Ce	33,1 дн.	7,72	-0,56	2,9	+	[1]
142	Ce	11,1	—	—	—	—	—
143	Nd	12,2	—	—	0,93	+	[5]
144	Nd	23,9	—	—	(>3,5)	+	[1]
145	Nd	8,3	—	—	3,2	+	[1]
146	Nd	17,2	—	—	(>3)	+	[1]
147	Pm	3,5 час.	7,6	-0,227	0,91	+	[1]
148	Sm	11,3	—	—	—	—	—
149	Sm	13,9	—	—	1,1	+	[1]
150	Sm	7,5	—	—	>3,0	+	[5]
151	Sm	500 г.	8,3	-0,076	1,1	+	[5]
152	Sm	26,6	—	—	—	—	—
153	Eu	52,2	—	—	>0,80	+	[5]
154	Gd	2,15	—	—	—	—	—
155	Eu	1,72 г.	7,1	-0,3	1,9	+	[1]
156	Gd	20,8	—	—	>3,3	+	[1]
157	Gd	15,7	—	—	1,8	+	[1]
158	Gd	24,8	—	—	(>2,5)	+	[1]
159	Tb	100	—	—	>0,95	+	[1]
160	Dy	2,3	—	—	—	—	—
161	Tb	240 дн.	6,7	-0,52	>1,5	+	[1]
162	Dy	25,5	—	—	—	—	—
163	Dy	25,0	—	—	—	—	—
164	Dy	28,1	—	—	—	—	—
165	Ho	100	—	—	1,3	+	[1]
166	Er	32,9	—	—	(>1,9)	+	[5]
167	Er	24,4	—	—	—	—	—
168	Er	26,9	—	—	—	—	—
169	Er	9,4 дн.	6,10	-0,33	—	(+)	[1]
170	Er	14,2	—	—	—	—	—
171	Tu	500 дн.	6,3	-0,10	≥1,49	+	[5]
172	Yb	11,9	—	—	—	(+)	—
173	Yb	16,2	—	—	—	—	—

* *Примечание при корректуре.* Некоторые разности масс в таблице приводятся по данным работы [2], опубликованной после поступления настоящей статьи в редакцию. По данным той же работы обнаруживается еще одно нарушение закономерности 2): ядро $^{136}_{54}\text{Xe}$ имеет большую энергию связи, чем ядро $^{136}_{56}\text{Ba}$, обозначенное в таблице и на диаграмме, как узловое. Это, повидимому, связано с наличием у $^{136}_{54}\text{Xe}$ замкнутой оболочки $N=82$.

Продолжение

А (массовое число)	Элемент	Процентное содержа- ние изотопа или пери- од полураспада	lg <i>f</i> или вид распада	$Z+1M^A-ZM^A_{уэл}$ или $Z+2M^A-ZM^A_{уэл}$ в MeV	$Z-1M^A-ZM^A_{уэл}$ или $Z-2M^A-ZM^A_{уэл}$ в MeV	Надежность определения	Литература
1	2	3	4	5	6	7	8
174	Yb	31,8	—	—	—	—	—
175	Yb	99 час.	6,4	-0,5	—	(+)	[1]
176	Yb	12,0	—	—	—	—	—
177	Lu	6,9 дн.	6,8	-0,49	1,3	+	[9]
178	Hf	27,1	—	—	—	—	—
179	Hf	13,8	—	—	—	—	—
180	Hf	35,1	—	—	—	—	—
181	Ta	100	—	—	1,02	+	[6]
182	W	26,3	—	—	—	—	—
183	W	14,3	—	—	—	—	—
184	W	30,6	—	—	—	—	—
185	W	73 дн.	7,5	-0,57	≥1,7	+	[6]
186	W	28,6	—	—	—	—	—
187	Re	4·10 ¹² г.	17,7	-0,043	1,32	+	[1]
188	Os	13,3	—	—	≥2,07	+	[1]
189	Os	16,1	—	—	>1,2	+	[6]
190	Os	26,4	—	—	—	—	—
191	Os	15 дн.	5,34	-0,27	—	(+)	—
192	Os	41,0	—	—	—	—	—
193	Ir	61,5	—	—	1,16	+	—
194	Pt	32,8	—	—	(>2,5)	+	—
195	Pt	33,7	—	—	>1,8	+	[6]
196	Pt	25,4	—	+1,02	—	(+)	[7]
197	Pt	18 час.	6,3	-0,73	>1,65	+	[7]
198	Pt	7,2	—	-1,02	(>3,6)	+	[7]
199	Au	33 дн.	7,8	-0,46	1,8	+	[7]
200	Hg	23,2	—	—	(>2,4)	+	[7]
201	Hg	13,5	—	—	>1,5	+	[6]
202	Hg	29,6	—	+1,4 (инт.)	—	(+)	[7]
203	Hg	43,5 дн.	—	-0,487	>1,9	+	[7]
204	Hg	6,69	—	-0,56	—	(+)	[7]
205	Tl	70,5	—	—	1,75	+	[7]
206	Pb	25,1	—	+9,4 (инт.)	2,9 (инт.)	+	[7]
207	Pb	21,1	—	+1,8 (инт.)	1,44	+	[7]
208	Pb	53,4	—	+3,9	(>4,9)	+	[7]
209	Pb	3,24 час.	5,64	-0,68	1,8	+	[1]
210	Pb	22 г.	6,02	-1,24	(>1,8)	+	[7]
211	Bi	2,16 мин.	—	-0,25	1,39	+	[7]
212	Po	3,4·10 ⁻⁷ сек.	α	+1,41	2,83	+	[7]
213	Po	4,4·10 ⁻⁵ сек.	—	-0,6	1,25	+	[7]
214	Po	1,4·10 ⁻⁴ сек.	α	-1,0	4,55	+	[7]
215	At	10 ⁻⁴ сек.	α	+0,37 (инт.)	1,1	+	[7]
216	Em	10 ⁻⁵ сек.	α	—	1,6	+	[7]
217	At	0,021 сек.	—	-0,56	1,78 (инт.)	+	[7]
218	Em	0,019 сек.	α	(>1,77)	3,63	+	[7]
219	Em	3,92 сек.	—	-0,62	—	(+)	[7]
220	Em	54,4 сек.	α	-0,41	—	(+)	[7]
221	Fr	4,8 мин.	—	-0,046	1,58 (инт.)	+	[7]
222	Ra	38 сек.	α	(2,2)	12,33	+	[7]
223	Ra	11,2 дн.	α	+3,2	1,2	+	[7]
224	Ra	3,64 дн.	α	+0,13	—	(+)	[7]
225	Ra	14,8 дн.	6,08	-0,2	—	(+)	[7]
226	Ra	1622 г.	α	-0,84	—	(+)	[7]
227	Ac	21,7 г.	~5	-0,37	1,21 (инт.)	+	[7]
228	Th	1,9 г.	α	+2,32	(>2,58)	+	[7]
229	Th	7·10 ³ г.	α	—	1,0	+	[7]
230	Th	8·10 ⁴ г.	α	+0,37	3,35	+	[7]
231	Th	25,5 час.	5,07	-0,32	—	(+)	[7]
232	Th	1,5·10 ¹⁰ г.	α	-0,96	—	(+)	[7]
233	Po	27,9 дн.	6,63	-0,62	1,23	+	[7]
234	U	2,5·10 ⁵ г.	α	+3,0	4,1	+	[7]

Продолжение

A (массовое число)	Элемент	Процентное содержание изотопа или период полураспада	$\lg f$ или вид распада	$Z+1M^A-ZM^A_{\text{узл}}$ или $Z+2M^A-ZM^A_{\text{узл}}$ в MeV	$Z-1M^A-ZM^A_{\text{узл}}$ или $Z-2M^A-ZM^A_{\text{узл}}$ в MeV	Надежность определения	Литература
1	2	3	4	5	6	7	
235	U	$7,7 \cdot 10^8$ г.	α	+0,18	1,4	+	[7]
236	U	10^8 г.	α	+0,046		(+)	[7]
237	U	6,63 дн.	6,04	-0,511		(+)	[6]
238	U	$5 \cdot 10^9$ г.	α	$-1,56 \pm 0,60$		?	[7]
239	Np	2,31 дн.		-0,715	$>1,2$	+	[7]
240	Pu	6000 г.	α	+1,17	2,516	+	[7,5]
241	Pu	10 г.		-0,18	$>0,89$	+	[7,8]

Примечания: а) Столбец 5 прочеркивается, если ядра $Z+1M^A$ или $Z+2M^A$ являются β^+ , K -активными [в этом случае соотношения (Ia); (IIa) всегда выполняются];

б) цифра в столбце 6 ставится в скобки для узловых ядер с A четным, когда ядро $Z-2M^A$ β -активно и оценка приводится по энергии распада нечетно-нечетного ядра $Z-1M^A$;

в) в столбце 7 ставится +, когда узловое ядро установлено окончательно, и (+), когда для β^- -активных узловых ядер и для единственных β -стабильных четно-четных изобар нельзя проверить соотношения (I б) и (II б): отрицательный результат такой проверки весьма мало вероятен; сомнительные случаи $A = 70, 110, 128$ и 238 отмечены знаком ?; здесь литературные данные противоречивы и недостаточно точны и средние данные из двух измерений, приведенные в работе [2], нельзя считать вполне надежными.

г) если использованы данные обзорных работ [2,7], полученные методом интерполяции, то в столбцах 5, 6 рядом с цифрой ставится значок (инт.).

меняется 27 раз). Аналогичные соображения должны быть справедливы и для β -стабильных ядер с A нечетным (критерий минимума массы близок к критерию максимума энергии связи). Действительно, так как отсутствие β -стабильных ядер с N нечетным всегда сопровождается наличием пары β -стабильных изотопов с нечетным Z .

Аномалиями в распространенности, с нашей точки зрения, следует считать лишь отсутствие узловых ядер с $Z = 41, 59$ и отсутствие как узловых, так и β -стабильных ядер для $N = 39$. Все эти аномалии являются одновременно нарушениями закономерностей 1) и 2) вблизи периферических двойных «магических» ядер ${}_{28}\text{Ni}_{40}^{68}$, ${}_{40}\text{Zr}_{50}^{90}$, ${}_{58}\text{Ce}_{82}^{140}$. Числа 41 и 59 на единицу больше «магических» чисел 40 и 58, а число 39 на единицу меньше «магического» числа 40. В этих же областях наблюдаются и аномалии в распространенности β -стабильных изотопов — отсутствие стабильных изотопов Tc ($Z = 43$) и Pm ($Z = 61$), но связь этих аномалий с заполнением ядерных оболочек менее ярко выражена, чем аномалий в распространенности узловых ядер.

Для β -активных узловых ядер в таблице приводятся значения $\lg f$ [12, 13, 5]. Подобные же данные приведены сбоку на диаграмме еще для некоторых β -активных ядер, соотношение между числом нейтронов и протонов для которых должно быть особенно выгодным, исходя из нормального хода кривой узловых ядер. Это нечетно-нечетные ядра, расположенные в переходных областях, где $N - Z$ для узловых четно-четных ядер, увеличивается на 4 единицы, а также такие β -активные ядра, как Sr^{80} и другие, которые должны были бы быть узловыми, если бы энергия связи двойного «магического» ядра Zr^{90} и близлежащих ядер не была аномально велика.

Все эти β -переходы в большинстве случаев сильно запрещены, и среди них находятся все известные (за исключением одного) переходы с запрещенной формой β -спектра. Это обстоятельство указывает на зависимость степени запрещенности β -перехода, помимо всего прочего, еще от расположения ядра на диаграмме атомных ядер.

Таким образом попытки объяснить аномалии в распространенности β -стабильных ядер наличием каких-то еще особых ядерных конфигураций, помимо известных ядерных оболочек, следует считать ошибочными; все аномалии связаны с заполнением ядерных оболочек, хотя это не всегда можно установить сразу.

Москва

Поступила в редакцию
12 октября 1953 г.;
после переработки
25 октября 1954 г.

Литература

- [1] И. П. Селинов. Атомные ядра и ядерные превращения, ГИТТЛ, 1951.—
[2] В. А. Кравцов. Усп. физич. наук, 54, 3, 1954.— [3] Б. С. Желепов и
Л. Н. Зырянова. Усп. физич. наук, 48, 465, 1952.— [4] J. M. Cork, J. M. Le-
Blanc, W. H. Nester a. F. B. Stumpf. Phys. Rev., 88, 685, 1952.—
[5] J. M. Hollander, T. Perlman a. G. T. Seaborg. Rev. Mod. Phys., 25, 469,
1953.— [6] A. B. Smith. C. G. Mitchell a. R. C. Caird. Phys. Rev., 87, 454,
1952.— [7] В. А. Кравцов. Усп. физич. наук, 47, 341, 1952.— [8] J. D. Knight,
M. E. Bunker, B. Warren a. J. W. Starnes. Phys. Rev., 91, 889, 1953.—
[9] H. E. Duckworth a. S. Preston. Phys. Rev., 82, 468, 1952.— [10] H. E. Duck-
worth, C. L. Kegley, J. M. Olson a. G. S. Stanford. Phys. Rev., 83, 1114,
1951.— [11] G. P. Dube a. S. Jha. Phys. Rev., 85, 1042, 1952.— [12] M. G. Mayer
a. S. A. Moszkowsky. Rev. Mod. Phys., 23, 315, 1951.— [13] A. M. Feingold.
Rev. Mod. Phys., 23, 10, 1951.

ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

НАХОЖДЕНИЕ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕЙТРОНОВ ПО ЭНЕРГИЯМ
МЕТОДОМ МАРКОВА

В. В. Чавчанидзе и О. Д. Чейшвили

Ниже делается попытка рассмотреть некоторые вопросы теории замедления нейтронов, происходящего в результате упругих столкновений их с ядрами замедлителя [1-3], с использованием метода Маркова [4-6]. Полученные результаты также пригодны и для случая тонких слоев замедлителя, когда число упругих столкновений невелико (меньше 25-30).

Следуя [1,2], нормированную вероятность $f_0(u_j) du_j$ того, что величина $u_j = \ln(E_{j-1}/E_j)$ будет лежать в интервале $(u_j, u_j + du_j)$, можно записать так:

$$\begin{aligned} f_0(u_j) du_j &= \frac{(A+1)^2}{4A} e^{-u_j} du_j \quad \text{при } u_j \leq \ln \left(\frac{A+1}{A-1} \right)^2, \\ f_0(u_j) du_j &= 0 \quad \text{при } u_j > \ln \left(\frac{A+1}{A-1} \right)^2, \end{aligned} \quad (1)$$

где E_{j-1} и E_j — энергии нейтрона до j -го и после j -го столкновения, соответственно, A — атомный вес ядер рассеивателя (считаем, что $A \neq 1$). Имеет место тождество

$$\frac{E_0}{E_n} = \frac{E_0}{E_1} \frac{E_1}{E_2} \dots \frac{E_{j-1}}{E_j} \dots \frac{E_{n-1}}{E_n}, \quad (2)$$

где E_0 — начальная энергия нейтрона, а E_n — энергия после n столкновений. Соотношения (2) представим так:

$$\ln \frac{E_0}{E_n} = \ln \frac{E_0}{E_1} + \ln \frac{E_1}{E_2} + \dots + \ln \frac{E_{j-1}}{E_j} + \dots + \ln \frac{E_{n-1}}{E_n} \quad (3)$$

или

$$U = u_1 + u_2 + \dots + u_n, \quad (3')$$

где

$$U = \ln(E_0/E_n).$$

(3') может быть нами рассмотрено как стохастическое равенство. Все u_j стохастически независимы, и перед нами типичная задача о суммировании n случайных величин [4,6,7]. Функцию $A_n(\rho)$ легко записать в виде [6,7].

$$A_n(\rho) = \prod_{j=1}^n \int_0^{q_A} e^{i\rho\varphi_j} f_0(u_j) du_j, \quad (4)$$

где функция вноса [7,8] φ_j может быть определена просто, как $\varphi_j = u_j$; через q_A мы обозначили $\ln[(A+1)/(A-1)]^2$. Учитывая, что $f_0(u_j) du_j$ по существу не зависит от j , легко показать, что

$$A_n(\rho) = \left[\frac{(A+1)^2}{4A} \right]^n \frac{(\exp\{(i\rho-1)q_A\} - 1)^n}{(i\rho-1)^n}. \quad (4')$$

Тогда вероятность того, что после n столкновений величина U будет лежать в заданном интервале $(U, U + dU)$, равна

$$W_n(U) dU = \frac{dU}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\rho U} A_n(\rho) d\rho,$$

$$W_n(U) = \left[\frac{(A+1)^2}{4A} \right]^n \frac{e^{-U}}{(n-1)!} \sum_{m=0}^n (-1)^m C_n^m [(n-m)q_A - U]^{n-1}, \quad (5)$$

где в сумме члены отличны от нуля, когда $(n-m)q_A - U > 0$.

В случае рассеяния на водороде для $A_n(\rho)$ получим

$$A_n(\rho) = (-1)^n / (i\rho - 1)^n \quad (6)$$

и функция распределения запишется в виде

$$W_n(U) = U^{n-1} e^{-U} / (n-1)!. \quad (7)$$

Найденное распределение есть распределение Пуассона. В случае $n=1$ получается (1). Полученные результаты показывают, что метод Маркова [4-7] позволяет сравнительно просто решать некоторые задачи теории замедления нейтронов.

Тбилисский государственный
университет

Поступило в редакцию
28 июля 1954 г.

Литература

[1] А. И. Ахиезер, И. Я. Померанчук. Некоторые вопросы теории ядра, ГИТТЛ, 1950.— [2] R. E. Marshak. Rev. Mod. Phys., 19, 185, 1947.— [3] С. Глестон и М. Эдлунд. Основы теории ядерных реакторов, ИИЛ, М., 1954.— [4] С. Чандрасекар. Стохастические проблемы в физике и астрономии, ИИЛ, М., 1947.— [5] А. А. Марков. Исчисление вероятностей, изд. 4-е, ГИЗ, М., 1924.— [6] В. В. Чавчанидзе. ЖЭТФ, 26, 179, 185, 1954.— [7] В. В. Чавчанидзе. Тр. Ин-та физики АН Груз. ССР, 2, ч. II, § 3, 1954, стр. 119.— [8] В. В. Чавчанидзе. Диссертация, Тбилисск. гос. ун-т, 1953.

ОБ УГЛОВОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ β -ИЗЛУЧЕНИЯ. II

Г. Р. Хуцишвили

Исследование β -излучения ориентированных ядер представляет значительный интерес, так как, сравнивая измеренное угловое распределение β -излучения с теоретическими данными, можно сделать ценные заключения о спинах, четностях и магнитных моментах β -активных ядер.

Теоретическое рассмотрение углового распределения β -излучения проведено в работах [1,2]. В частности, в заметке [2] дано выражение $W(E, \vartheta)$ для распределения (по энергиям и по углам) β -частиц, испускаемых ориентированными ядрами в случае переходов $\Delta I = \pm 2$, «да» (I — спин ядра, «да» означает, что четность ядра при β -переходе меняется). Однако приведенное в работе [2] выражение справедливо лишь в приближении Борна.

Сравнивая выражение $W(E, \vartheta)$, полученное в приближении Борна, с выражением β -спектра рассматриваемых переходов (с учетом кулоновских эффектов, см. [3]), легко учесть кулоновские эффекты в формуле углового распределения: для этого достаточно член, пропорциональный p^2 , в квадратной скобке формулы (2) работы [2], умножить на φ_1 , а член, пропорциональный q^2 , — на φ_0 ; согласно [3] (применяем те же обозначения и те же единицы, что и в работе [2]):

$$\varphi_0 = \frac{1+s_0}{2} F_0(Z, E), \quad (1)$$

$$\varphi_1 = \frac{2+s_1}{4} F_1(Z, E). \quad (2)$$

При этом

$$s_n = V(n+1)^2 - (\alpha Z)^2, \quad (3)$$

$$\xi = Z\alpha / \beta, \quad (4)$$

а кулоновские факторы F_0 и F_1 даются формулой

$$F_n(Z, E) = \frac{[(2n+2)!]^2}{(n!)^2 [\Gamma(1+2s_n)]^2} (2pR)^{2(s_n-n-1)} \exp(\pi\xi) |\Gamma(s_n + i\xi)|^2. \quad (5)$$

В формулах (1) — (5) α означает постоянную тонкой структуры, R — радиус ядра, β — скорость электрона, Z — заряд ядра (в случае позитронного распада надо ξ заменить на $-\xi$).

Окончательно имеем, что распределение β -частиц по энергиям и по углам для переходов $\Delta I = \pm 2$, «да» имеет вид:

$$W(E, \vartheta) = \frac{1}{3} (2\pi)^{-5} \pi G^2 |B_{ik}|^2 p E q^2 \{q^2 \varphi_0 + p^2 \varphi_1 [1 - a(I) f_2 P_2(\cos \vartheta)]\}. \quad (6)$$

Отметим, что формула (6) переходит в формулу (2) работы [2] при пренебрежении членами порядка $(\alpha Z)^2$.

Поступило в редакцию
13 марта 1954 г.

Литература

[1] A. M. Cox and S. R. de Groot. *Physica*, **19**, 683, 1953.—[2] Г. Р. Хуцшвили. *ЖЭТФ*, **25**, 763, 1953.—[3] E. J. Konopinski and G. E. Uhlenbeck. *Phys. Rev.*, **60**, 308, 1941.

ПОГЛОЩЕНИЕ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛН В ЖЕЛЕЗЕ-АРМКО И ПЛЕКСИГЛАСЕ

Н. Ф. Отпущенников

Число работ, посвященных измерению поглощения ультразвуковых волн в твердых телах, пока еще сравнительно невелико. Во многих металлах и диэлектриках измерения поглощения ультразвука еще не производились, и существующие теории механизма этого поглощения экспериментально не проверены. Поэтому исследование распространения ультразвуковых волн в различных твердых телах в широкой области частот и температур представляет значительный научный и практический интерес.

В данном письме кратко сообщаются результаты измерения импульсным методом поглощения и скорости распространения ультразвуковых волн в области частот от 0,66 до 10 мГц в двух веществах: железе-Армко и плексигласе. Схема импульсной установки и техника измерений будут описаны отдельно.

Результаты измерения коэффициента поглощения ультразвуковых волн α и скорости распространения v в указанных веществах представлены в таблице.

Из полученных данных в области частот 0,6–10 мГц следует, что коэффициент поглощения ультразвуковых волн в железе-Армко возрастает прямо пропорционально частоте ультразвука. Исследования [4] поглощения ультразвука в магнии в широкой области частот также дали линейную зависимость от частоты.

Таблица

Вещество	Плотность ρ в г/см ³	Частота ультразвука ν · 10 ⁶ гц	Коэффициент поглощения α в см ⁻¹	Скорость ультразвука v в м/сек.	По измерениям других авторов	
					α в см ⁻¹	v в м/сек.
Железо-Армко	7,85	0,66 6 10	0,0024 0,024 0,038	5920		
Плексиглас	1,19	0,66 1,4 6 10	0,11 0,21 0,40 0,55	2680	0,14 [3] 0,22 [5]	2660 [4] 2640 [5] 2662 [6]

Полученные данные для плексигласа показывают, что поглощение растет пропорционально $\sqrt{\nu}$, что находится в согласии с данными других авторов [2,3]. Измеренная скорость ультразвуковых волн в плексигласе при частоте $\nu = 10$ мГц также находится в согласии с литературными данными [4–6]. Данных об измерении поглощения ультразвука в железе-Армко не имеется.

Курский педагогический
институт

Поступило в редакцию
27 сентября 1954 г.

Литература

[1] W. Roth. *Journ. Appl. Phys.*, **19**, 901, 1948.—[2] И. Г. Михайлов. Распространение ультразвуковых волн в жидкостях, ГИТТЛ, М., 1949.—[3] У. Мезон. Пьезоэлектрические кристаллы и их применение в ультразвуку, ИИЛ, М., 1952.—[4] Н. Ф. Отпущенников. *ЖЭТФ*, **22**, 436, 1952.—[5] D. S. Hughes, W. L. Rindrom and A. R. L. Mims. *Phys. Rev.*, **73**, 1552, 1949.—[6] И. Г. Михайлов. *ДАН СССР*, **59**, 1555, 1948.

О КАУЗАЛЬНОМ РАЗВИТИИ СВЯЗАННОЙ СИСТЕМЫ В ОТНОСИТЕЛЬНОМ ВРЕМЕНИ

В. Н. Цытович

В релятивистски инвариантном уравнении, описывающем связанное движение двух взаимодействующих частиц [1-3], каждой из частиц приписывается свое время: первой частице t_1 , второй t_2 . Представляет интерес вопрос о том, каким образом связаны между собой времена t_1 и t_2 . Если внешние поля стационарны, то может быть введено общее время $T = (t_1 + t_2)/2$ и относительное время $t = t_1 - t_2$; для простоты мы предполагаем массы частиц равными (это соответствует, например, случаю позитрония). Нас интересует, каким образом волновая функция от разных времен ($t \neq 0$) может быть найдена через волновую функцию от одинаковых времен ($t = 0$), другими словами, развитие связанной системы в относительном времени.

Напомним, что, например, для свободно движущейся частицы развитие ее волновой функции во времени описывается оператором $e^{-(i/\hbar)Ht}$

$$\psi(t) = e^{-(i/\hbar)Ht} \psi(0), \quad (1)$$

где H — не зависящий от времени гамильтониан. Если мы знаем (путем, например, некоторых измерений, проведенных над системой) волновую функцию в начальный момент времени, то (1) определяет ее значения во все будущие моменты времени. В теории вакуума, как известно, возникают каузальные функции пространства, которые описывают каузальное развитие во времени, отличное от (1). Согласно Фейнману [4]

$$\psi(x_1, t_1) = \int G(x_1, t_1, x'_1, 0) \psi(x'_1, 0) d^3x'_1, \quad (2)$$

где G — функция Грина, удовлетворяющая уравнению для оператора поля с δ -функцией в правой части. Если вычислить G при помощи теории вычетов, считая, что масса частицы имеет бесконечно малую отрицательно-мнимую часть, мы получим

$$\psi(t_1) = \Lambda(t_1) e^{-(i/\hbar)Ht_1} \psi(0), \quad (3)$$

где $\Lambda(t)$ является обобщением операторов проектирования:

$$\Lambda_+ = \frac{|H| + H}{2|H|}, \quad \Lambda_- = \frac{|H| - H}{2|H|};$$

$$\Lambda(t_1) = \frac{H + (t_1/|t_1|)|H|}{2|H|} = \begin{cases} \Lambda_+; & t_1 > 0, \\ -\Lambda_-; & t_1 < 0, \end{cases} \quad (4)$$

причем $|H| = \sqrt{H^2}$.

Действие $\Lambda(t_1)$ на волновую функцию $\psi(0)$ при $t_1 > 0$ обрезает все отрицательные энергии, а при $t_1 < 0$ — положительные, изменяя, кроме того, знак волновой функции

$$\Lambda(t)|_{t>0} \psi(0) = \Lambda(t)|_{t>0} \sum_n c_n \psi_n = \sum_{E_n>0} c_n \psi_n;$$

$$\Lambda(t)|_{t<0} \psi(0) = \Lambda(t)|_{t<0} \sum_n c_n \psi_n = - \sum_{E_n<0} c_n \psi_n. \quad (5)$$

Таким образом положительные частоты распространяются в будущее, а отрицательные — в прошлое [6].

В теории двух тел оператор эволюции в относительном времени $t = t_1 - t_2$ во всяком случае может быть найден, если взаимодействие мгновенно, так как в этом случае момент $t_2 = t_1$; $t = 0$ выделен взаимодействием. Уравнение типа, использованного в работах [1-3], имеет в этом случае вид

$$\{F_1 F_2 + i\hbar K(x_1, x_2) \delta(t)\} \psi_n(x_1, x_2, t, T) = 0, \quad (6)$$

где $K(x_1, x_2) \delta(t)$ — оператор мгновенного взаимодействия¹

$$F_1 = \frac{E_n}{2} - \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - H_1; \quad F_2 = \frac{E_n}{2} + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - H_2. \quad (7)$$

¹ В качестве $K(x_1, x_2)$ может быть взят и феноменологический потенциал.

Поскольку во второй член (6) входит $\delta(t)$, можно записать

$$\psi(x_1, x_2, t, T) = -\frac{1}{F_1 F_2} i\hbar K(x_1, x_2) \delta(t) \psi(x_1, x_2, 0, T) \quad (8)$$

или

$$\psi(x_1, x_2, t, T) = \int G(x_1, x_2, t_1, t_2, x'_1, x'_2, t'_1, t'_2) i\hbar \delta(t') \psi(x'_1, x'_2, 0, T) d^4 x'_1 d^4 x'_2. \quad (9)$$

Далее

$$G(x_1, x_2, t_1, t_2, x'_1, x'_2, t'_1, t'_2) = \frac{1}{\hbar^2} G^{(1)}(x_1, t_1, x'_1, t'_1) G^{(2)}(x_2, t_2, x'_2, t'_2),$$

где

$$G^{(1)} = \Lambda^{(1)}(t_1 - t'_1) \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} H_1(t_1 - t'_1)\right\} \delta(x_1 - x'_1);$$

$$G^{(2)} = \Lambda^{(2)}(t_2 - t'_2) \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} H_2(t_2 - t'_2)\right\} \delta(x_2 - x'_2).$$

Индексы (1) и (2) относятся к первой и второй частице, соответственно. Подставляя эти значения в (9) и интегрируя по t' , используя $\delta(t')$, получим

$$\begin{aligned} \psi(x_1, x_2, t, T) &= \frac{1}{(2\pi)^6 \hbar^2} \int \Lambda^{(1)}(t_1 - T') \Lambda^{(2)}(t_2 - T') \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} H_1(t_1 - T')\right\} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} H_2(t_2 - T')\right\} \times \\ &\times \exp\{ik_1(x_1 - x'_1) + ik_2(x_2 - x'_2)\} i\hbar K(x'_1, x'_2) \psi(x'_1, x'_2, 0, T'). \end{aligned} \quad (10)$$

Интегрирование по T' проводим в двух случаях: $t_1 > t_2$ и $t_1 < t_2$, разбивая промежутки интегрирования на промежутки $[-\infty, t_2]$, $[t_2, t_1]$ и $[t_1, \infty]$, например, при $t_1 > t_2$; при этом мы учитываем, что подстановка $T = \pm \infty$ в получающееся выражение дает нуль в силу наличия множителей $\Lambda^{(1)}(t_1 - T)$ и $\Lambda^{(2)}(t_2 - T)$ и $m = m - i\delta$ при $\delta \rightarrow 0$. Тогда для стационарного состояния, соответствующего определенному значению полной энергии E_n , получим:

$$\begin{aligned} \psi_n(x_1, x_2, t) &= \left\{ \Lambda^{(1)}(t) \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \left(H_1 - \frac{E_n}{2}\right)t\right] + \right. \\ &+ \Lambda^{(2)}(-t) \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left(H_2 - \frac{E_n}{2}\right)t\right] \Big\} \chi_n(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \chi_n(x_1, x_2) &= -\frac{1}{(2\pi)^6} \int \frac{\exp\{ik_1(x_1 - x'_1) + ik_2(x_2 - x'_2)\} d^3 k_1 d^3 k_2}{E_n - H_1 - H_2} \varphi_n(x'_1, x'_2) \times \\ &\times K(x'_1, x'_2) d^3 x'_1 d^3 x'_2, \\ \varphi_n(x_1, x_2) &= \psi_n(x_1, x_2, t)|_{t=0}. \end{aligned} \quad (12)$$

Равенства (11) и (12) устанавливают связь $\psi_n(x_1, x_2, t)$ с $\varphi_n(x_1, x_2)$ и указывают на вид искомого оператора $\Theta_n(t)$, $\psi_n(x_1, x_2, t) = \Theta_n(t) \varphi_n(x_1, x_2)$, описывающего каузальное изменение связанной системы в относительном времени $t = t_1 - t_2$. Если умножить (12) на $\exp\left\{-\frac{i}{\hbar} E_n T\right\}$, то общую волновую функцию можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \psi_n(t, T) &= \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} E_n T\right\} \psi_n(t) = \\ &= \begin{cases} \Lambda_+^{(1)} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} H_1 t_1\right\} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} (E_n - H_1) t_2\right\} - \\ - \Lambda_-^{(2)} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} H_2 t_2\right\} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} (E_n - H_2) t_1\right\} \chi_n, & t > 0; \\ \Lambda_+^{(2)} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} H_2 t_2\right\} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} (E_n - H_2) t_1\right\} - \\ - \Lambda_-^{(1)} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} H_1 t_1\right\} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} (E_n - H_1) t_2\right\} \chi_n, & t < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Можно сказать, что волновая функция соответствует распространению либо первой частицы в будущее в виде положительно частотной ($\Lambda_+^{(1)}$) свободной волны (частота $H_1 = |H_1|$), а второй частицы в прошлое более сложным «связанным» образом (частота $E_n - H_1$), либо второй частицы в прошлое в виде отрицательно частотной ($\Lambda_-^{(2)}$) свободной волны (частота $-H_2 = |H_2|$), а первой в будущее более сложным «связанным» образом (частота $E_n - H_2$)². Этот результат является обобщением результата, полученного Салпетером и Бете для нерелятивистского случая, и учитывает новую возможность, связанную с распространением частиц с отрицательными частотами.

Оператор каузального изменения во времени $\Theta(t)$ может быть с успехом применен для интегрирования по относительно времени в матричных элементах, возникающих в теории возмущения и, в частности, для отыскания эффективной энергии возмущения в теории двух тел (см. [6]).

Московский
государственный университет

Поступило в редакцию
21 июля 1954 г.

Литература

- [1] E. E. Salpeter and H. A. Bethe, Phys. Rev., **84**, 1232, 1951.— [2] J. Schwinger, Proc. Natl. Acad., **7**, 432, 455, 1951.— [3] А. Д. Галапин, ЖЭТФ, **23**, 488, 1952.— [4] R. P. Feynman, Phys. Rev., **76**, 749, 1949.— [5] E. Stückelberg, Helv. Phys. Acta, **15**, 23, 1942.— [6] В. Н. Цытович, ЖЭТФ, **28**, 113, 1955.

«РАВНОВЕСНЫЙ» ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР ЛАВИННЫХ ФОТОНОВ

П. С. Исаев

В настоящей работе рассчитан «равновесный» спектр фотонов, образующихся в каскадных электромагнитных процессах, с учетом не только радиационного торможения и рождения пар, но также ионизационных потерь и комптон-эффекта.

«Равновесный» спектр фотонов $\Theta(E)$ определяется следующим образом:

$$\Theta(E) = \int_0^\infty \Theta(E, t) dt,$$

где $\Theta(E, t) dE$ — среднее число фотонов в интервале энергии $(E, E + dE)$ на глубине t .

Приближенное выражение для $\Theta(E)$ имеется в книге Беленького [1] (§ 17, формула (17.8)). При вычислении этой величины для вероятности комптон-эффекта W_k [1], формула (2.20) было принято следующее приближение:

$$W_k(E', E) dE = g dE / EE'.$$

Здесь $W_k(E', E)$ — вероятность того, что фотон с энергией E' при прохождении слоя толщиной t в лавинную единицу длины испытает комптоновское рассеяние на электроны, после чего будет обладать энергией E ; g — некоторая постоянная, равная для воздуха 1,32 MeV, для углерода 1,53 MeV, для алюминия 0,839 MeV, для железа 18,4 MeV, для меди 0,404 MeV, для свинца 0,175 MeV.

В работе [2] было получено более точное выражение для «равновесного» спектра фотонов $\Theta(E)$. Уточнение связано с тем, что для вероятности комптон-эффекта было взято более точное выражение:

$$W_k(E', E) dE = \frac{g dE}{EE'} \left[1 + \left(\frac{E}{E'} \right)^2 \right] = \frac{g dE}{E'E} [1 + \delta(E'E)],$$

причем предполагалось, что $\delta(E'E)$ мало по сравнению с единицей. Поправка $\times(E)$ к приближенному «равновесному» спектру фотонов $\Gamma(E)$, данному в [1] (§ 17, формула (17.8)), в работе [2] была вычислена лишь для воздуха.

² Будущее и прошлое каждой частицы отсчитывается от момента взаимодействия.

Таблица 1

E в β-единицах	Углерод			Алюминий			Железо			Медь			Свинец				
	Γ (E)	κ (E)	Θ (E)	Γ (E)	κ (E)	Θ (E)	Γ (E)	κ (E)	Θ (E)	Γ (E)	κ (E)	Θ (E)	Γ (E)	κ (E)	Θ (E)	Согласно [5]	
																Θ _{RN}	Θ/Θ _{RN}
9													0,016	—	0,016	0,016	1
8													0,023	—	0,023	0,022	1,04
7										0,0246	—	0,0246	0,034	—	0,034	0,032	1,06
6				0,0320	—	0,320	0,0358	—	0,0358	—	—	—	0,048	—	0,048	0,048	1
5				0,0485	—	0,0485	0,0547	—	0,0516	0,0516	—	0,0516	0,073	—	0,073	0,072	1
4				0,0805	—	0,0805	0,0880	—	0,0880	0,0869	—	0,0869	0,122	—	0,122	0,11	1,11
3				0,136	—	0,136	0,157	—	0,150	0,150	—	0,150	0,230	—	0,230	0,21	1,10
2,5	0,151	—	0,151	—	—	—	0,227	0,002	0,229	—	—	—	—	—	—	—	—
2	0,234	—	0,234	0,302	—	0,302	0,360	0,003	0,363	0,342	0,003	0,345	0,571	0,030	0,601	0,49	1,22
1,5	0,416	—	0,416	0,541	—	0,541	0,657	0,005	0,662	0,628	0,003	0,631	1,12	0,04	1,16	0,89	1,30
1	0,87	—	0,87	1,15	—	1,15	1,43	0,02	1,45	1,38	0,01	1,39	3,18	0,13	3,31	2,0	1,65
0,9	—	—	—	1,39	—	1,39	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0,8	—	—	—	1,71	—	1,71	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0,75	—	—	—	—	—	—	2,42	0,05	2,47	2,37	0,03	2,40	—	—	—	—	—
0,7	—	—	—	2,13	—	2,13	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0,6	—	—	—	2,75	—	2,75	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0,5	2,76	0,05	2,81	3,67	0,09	3,76	4,83	0,15	4,98	4,90	0,11	5,01	14,4	10,7	25,1	6,4	3,9
0,4	3,85	0,03	3,88	5,04	0,16	5,20	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0,3	5,87	0,08	5,95	7,53	0,30	7,83	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0,25	—	—	—	—	—	—	4,3	0,8	15,1	16,37	0,71	17,08	—	—	—	—	—
0,2	9,88	0,23	10,11	12,76	0,71	13,47	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0,15	13,44	0,4	13,87	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0,1	19,86	0,8	20,74	26,2	2,2	28,40	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

В таблице приводятся результаты расчета «равновесного» фотонного спектра $\Theta(E) = \Gamma(E) + \kappa(E)$ для углерода, алюминия, железа, меди и свинца. Расчет проведен по формулам, полученным в работе [2]. Из полученных данных видно, что, как и следовало ожидать, для тяжелых элементов в области энергии порядка критической и ниже поправка оказывается большой.

В настоящем расчете были использованы следующие значения критической энергии: для углерода 120, для алюминия 37,2, для железа 18,4, для меди 22,4, для свинца 6,4 MeV. Предполагалось, что начальная энергия электрона, рождающего ливень, бесконечно большая. Результаты расчетов сведены в таблицу.

Из сравнения спектров для одной и той же энергии для углерода, алюминия, железа, меди и свинца легко видеть, что $\Theta(E)$ растет с увеличением Z . «Исключением» является медь (ср. с Fe). Однако это связано с выбором неточного значения критической энергии, данного в обзоре [3] (см. стр. 55), которое было взято в основу расчетов для меди.

Следует отметить, что поправку можно считать небольшой до энергии $\sim 0,1\beta$ вплоть до $Z=30$, где поправки составляют менее 10% к $\Gamma(E)$. Однако для Pb уже для $0,5\beta$ поправка составляет 10,7/14,4 или 74,5%, и уже нельзя говорить о полной пригодности способа, примененного в [2].

Сравнение полученного в данной работе спектра для Pb со спектром, полученным в работе [4], показывает, что в отличие от спектра для воздуха (для случая $E_m = \infty$, см. [2]), где несовпадение спектров наблюдалось только в области $E=1$ из-за сомнительной аппроксимации, проведенной в [4] в этой точке, для свинца расхождение получается для всех энергий $E < 2$. Это сравнение показывает, что метод, предложенный в работе [4], не может дать верного результата при расчете фотонного спектра в тяжелых элементах для энергий $E \sim 1,5\beta$ и ниже.

В заключение выражаю благодарность С. З. Бельскому за руководство данной работой, а также Л. Я. Жильцовой, проделавшей основную расчетную часть работы.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
24 июля 1954 г.

Литература

[1] С. З. Бельский. Лавинные процессы в космических лучах, Гостехиздат. 1948.— [2] П. С. Исаев. ЖЭТФ, 24, 78, 1953.— [3] Б. Росси и К. Грейзен. Взаимодействие космических лучей с веществом, 1948.— [4] I. A. Richards and W. Nordheim. Phys. Rev., 74, 1106, 1948.

ПО ПОВОДУ СТАТЬИ У. А. АРИФОВА, А. Х. АЮХАНОВА и С. В. СТАРОДУБЦЕВА [1]

М. А. Еремеев

В статье Арифова, Аюханова и Стародубцева [1], в связи с рассмотрением вопроса об уменьшении количества адсорбированных на поверхности атомов за счет повышения температуры, напечатано следующее: «В качестве примера такого неправильного истолкования роли температуры приведем одну из последних работ Еремеева [2], в которой утверждается, что с повышением температуры мишени коэффициент вторичной эмиссии электронов при ионной бомбардировке падает». Однако любой читатель обнаружит в моей статье [2] совершенно другие утверждения, а именно, что при не очень высоких температурах мишени она покрывается адсорбированными из первичного пучка ионами, что при увеличении температуры мишени количество выбитых электронов уменьшается при одновременном уменьшении количества адсорбированных на мишени частиц. Об этом авторы статьи [1] почему-то умалчивают, хотя и используют эти результаты непосредственно в своей работе.

За последние три года о процессе соударения ионов с поверхностью много стало известно дополнительно и многое уточнилось в результате применения более современных методов исследования, однако адсорбция ионов из первичного пучка и зависимость электронной эмиссии от адсорбционного слоя на мишени не встречают более возражений. Можно было предполагать заранее, что для твердых мишеней эта эмиссия не исчезает полностью при удалении адсорбционного слоя, что и подтвердилось на опыте.

Поступило в редакцию
15 августа 1954 г.

Литература

[1] У. А. Арифов, А. Х. Аюханов и С. В. Стародубцев. ЖЭТФ, 26, 714, 1954.— [2] М. А. Еремеев. ДАН СССР, 79, 5, 1951.

О ГРАВИТАЦИОННОЙ СОБСТВЕННОЙ ЭНЕРГИИ ЧАСТИЦЫ В КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

А. А. Боргардт

В некоторых классических теориях поля [1,2] электрону приписывается чисто-полевая собственная энергия. Эту энергию можно подсчитать по общей формуле [3], которая позволяет учесть и собственный магнетизм электрона

$$\mathcal{E}_0 = \int \epsilon_0 (\mathbf{E}, \mathbf{H}) \sqrt{1/4 (\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2)^2 + (\mathbf{E}, \mathbf{H})^2} (dx), \quad (1)$$

где $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ — векторы напряженности поля, ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума. Результат (без учета магнитного момента) оказывается, как известно, равным $\mathcal{E}_0 = 1,2361 \dots (e/x_0)$ в теории Борна—Инфельда [1] и $\mathcal{E}_0 = e/2x_0$ в теории Боппа—Подольского [2], где x_0 — классический радиус электрона.

Вопрос о виде линейного гравитационного поля электрона с полевой массой обычно не рассматривается, однако представляет известный интерес. Вычислим сперва гравитационный потенциал точечного электрона с бесконечной полевой массой, основываясь на уравнениях

$$\square^2 h_{\mu\nu} = -(2G/c^3) T_{\mu\nu}, \quad (2)$$

где

$$T_{ih} = T_{ia} = 0, \quad T_{44} = (e^2/2) x^{-4}. \quad (3)$$

Потенциал h_{44} получается в виде

$$h_{44} = (Ge^2/c^3) [(1/2x^2) - (1/x_0x)], \quad (4)$$

где x_0 — постоянная малая длина, которую необходимо ввести, чтобы избежать общей расходимости h_{44} . В нуле h_{44} теперь расходится, как x^{-2} . Собственная энергия гравитационного поля $\sim (\nabla h_{44})^2$ и расходится, как x^{-6} . Интересно, однако, что, отождествляя h_{44} с ньютоновским потенциалом, получаем для x_0 значение классического радиуса $x_0 = e^2/2\mathcal{E}_0$.

В регуляризованных теориях получаются следующие результаты. В теории Борна—Инфельда¹

$$\mathbf{D} = (e/x^2) \mathbf{x}^0, \quad \mathbf{E} = \mathbf{D} / \sqrt{1 + (\mathbf{x}/x_0)^4}, \quad (5)$$

гравитационный потенциал равен

$$h_{44} = (Ge^2/c^3) F(\varphi, k) / 2x_0x - \\ - (1/4x_0^2) \ln [(V\sqrt{1 + (\mathbf{x}/x_0)^4} - 1) / (V\sqrt{1 + (\mathbf{x}/x_0)^4} + 1)],$$

где $F(\varphi, k)$ — эллиптический интеграл, $k = V\sqrt{2}/2$,

$$\varphi = \arccos ((1 - x^2/x_0^2) / (1 + x^2/x_0^2)).$$

При $x \gg x_0$, $h_{44} \sim 1/x$; на малых расстояниях $h_{44} \sim \ln x$ и расходится в нуле. Гравитационная собственная энергия сходится и составляет, как легко показать, требуемую теорией долю собственной энергии электрона

$$m_{\text{гр}} / m_0 = aG^2 m_0^2 / \hbar c,$$

где a — число ~ 1 .

В теории Боппа—Подольского и для h_{44} и для $m_{\text{гр}}$ результат оказывается расходящимся. Таким образом только нелинейная электродинамика приводит к вполне удовлетворительному решению проблемы гравитационной собственной энергии. Результат оказывается благоприятным, несмотря на использование линейной теории тяготения в приведенном выше подсчете.

Днепропетровский государственный
университет

Поступило в редакцию
17 сентября 1954 г.

Литература

[1] M. Born a. L. Infeld. Proc. Roy. Soc., (A), 143, 410, 1934.—[2] B. Podolsky a. Ph. Schwed. Rev. Mod. Phys., 20, 40, 1948.—[3] А. А. Боргардт. ЖЭТФ, 24, 248, 1953.—[4] И. З. Фишер. ЖЭТФ, 18, 668, 1948.

¹ Вопрос о гравитационном поле электрона в теории [1] рассматривался Фишером [4], нашедшим точные решения уравнений Эйнштейна для этого случая.

СЖАТИЕ И ИЗГИБ ДУГИ В РАЗРЕЖЕННОМ ГАЗЕ ПРИ БОЛЬШОЙ СИЛЕ ТОКА

В. Л. Грановский и Г. Г. Тимофеева

В работе [1] было введено представление о сжатии столба электрической дуги в разреженном газе при большой силе тока под действием собственного магнитного поля («пинч — эффект»). Было указано, что это гипотетическое явление может приводить к обрыву дуги.

При попытках обнаружить это явление в дуге постоянного тока на опыте в работе [2] (в столбе ртутной дуги при $i = 50$ А) найдено только ослабление радиального электрического поля, а в работе [3] (в H_2 при $i \sim 100$ А) — сжатие кривой распределения тока всего на 30%.

Нами производились опыты над дугами в разреженных парах ртути и инертных газах в прямых цилиндрических трубках без сужений при постоянном направлении тока. Измерения подвижным зондом в трубке диаметром 70 мм с парами Hg при $p = 1 \mu$ Hg подтвердили, что при усилении тока от 1 до 80 А полуширина столба¹ уменьшается на $\sim 25\%$. При дальнейшем усилении тока до 1—2 кА обнаружить соответствующее сжатие дуги зондами не удается, так как сначала зондовые токи, затем напряжение дуги и, наконец, ток дуги обнаруживают сильные, все возрастающие беспорядочные колебания с преобладающей частотой порядка 10^4 — 10^6 гц. Опыты с двумя одинаковыми зондами, симметрично расположенными относительно оси, показали, что колебания токов на обоих зондах происходят совершенно не согласованно во времени: не только положение пиков тока, но и их число, и относительные высоты различны. Следовательно, в трубке происходят не общие изменения силы тока во всем сечении столба одновременно, а по всей вероятности, быстрые нерегулярные перемещения суженного канала дуги по сечению трубки.

Поскольку дуга перемещается в трубке за время порядка 10^{-5} сек., для обнаружения возможного сжатия дуги необходимо наблюдать последнюю в течение $\sim 10^{-6}$ сек. С этой целью дуга вызывалась разрядом конденсатора, присоединенного к трубке короткими проводами и разряжавшегося за время $\tau = 1$ —2 мсек. При этих условиях можно было наблюдать столб дуги, сжатый в узкий шнурок.

На рис. 1 приведен снимок дуги в аргоне при диаметре 32 мм, $p = 1 \mu$ Hg и $i_{\text{макс}} = 450$ А. Видно, что, несмотря на низкое давление, канал дуги сжат по сравнению с сечением трубки. Сжатие еще сильнее выражено на снимке дуги в парах Hg в трубке диаметром 9 мм при $\tau = 1,15$ мсек, $i_{\text{макс}} = 425$ А (рис. 2). Дуга видна на большей части снимка в виде узкого шнура, изогнутого по винтовой линии и прилегающего к стенкам трубки. Контрольный снимок (рис. 3) дуги в той же трубке при том же давлении, но при меньшей силе тока ($i_{\text{макс}} = 225$ А, $\tau = 2 \mu$ сек.) не показывает заметного сжатия дуги.

Условия и результаты этих и множества аналогичных наблюдений в парах Hg и в аргоне заставляют нас отвергнуть по отношению к ним все другие известные нам объяснения сжатия области прохождения тока (контракция столба высокого давления, стадия газосфокусированного электронного луча [4]). Остается признать наблюдаемые явления электродинамическими эффектами магнитного поля дуги.

Форма канала сжатой дуги показывает, что при больших силах тока, когда магнитное поле является основным фактором динамики тока в газе [5], прямолинейная форма тока оказывается неустойчивой по отношению к собственному магнитному полю.

Обрыв дуги, обусловленного пинч-эффектом, мы не нашли. Дуга, поддерживаемая длительно в прямой трубе без сужений и иных препятствий, не рвется, а быстро перемещается по сечению. Подробное описание этих опытов последует.

В проведении опытов участвовала В. И. Пугачева.

Всесоюзный электротехнический институт

Поступило в редакцию
30 ноября 1954 г.

Литература

- [1] L. Tonks. Trans. Electrochem. Soc., **72**, 167, 1937.—[2] P. C. Thoneman a. W. T. Cowhig. Proc. Phys. Soc., **64**, 345, 1951.—[3] Б. А. Мамырин. Журн. техн. физ., **23**, 1914, 1953.—[4] Г. В. Спивак и Е. Л. Столярова. Журн. техн. физ., **20**, 501, 1950.—[5] В. Л. Грановский. Электрический ток в газе, т. 1, ГИТТЛ, М.—Л., 1952, § 74.

¹ Расстояние между точками, симметричными относительно оси, где концентрация электронов вдвое меньше, чем на оси.

ОТНОШЕНИЕ СИЛ ОСЦИЛЛЯТОРОВ ДЛЯ СОСТАВЛЯЮЩИХ РЕЗОНАНСНЫХ ДУБЛЕТОВ АЛЮМИНИЯ И МЕДИ

Г. Ф. Парчевский и Н. П. Пенкин

Установка, применявшаяся в настоящей работе, подробно описана в статьях Рождественского и Пенкина [1] и Пенкина [2]. Она состоит из источника сплошного спектра (лампа СВД с криптоновым наполнением), большого интерферометра Рождественского с расстоянием между зеркалами 30 см и спектрального прибора (кварцевый спектрограф Е-1).

Столб паров исследуемого элемента получался в высокотемпературной вакуумной печи с графитовой трубкой в качестве тела нагрева. Печь вводилась в одну из ветвей интерферометра. При одновременном введении в другую ветвь интерферометра компенсационной трубки и прозрачной плоскопараллельной пластинки в спектрографе, скрещенном с интерферометром, можно было наблюдать крюки около линий поглощения. Измерения расстояний между вершинами крюков позволили определить значения сил осцилляторов соответствующих переходов.

При помощи этой установки были получены спектрограммы, содержащие фотографии крюков у линий поглощения алюминия и меди. На рис. 1 приведены репродукции этих фотографий.

Вычисление относительных значений чисел f для составляющих дублета производилось по формуле метода крюков:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{K_1 \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_2} \right)^2 \frac{N_2}{N_1} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^3}.$$

Индексы 1 и 2 относятся к коротковолновой и длинноволновой компонентам дублета; $K = \left(\frac{n-1}{\lambda} - \frac{\partial n}{\partial \lambda} \right) d$ — постоянная метода, Δ — расстояние между вершинами крюков, λ — длина волны линии поглощения, N — концентрация атомов на нижнем уровне.

Для резонансного дублета алюминия получено отношение

$$f_{3944} / f_{3062} = 3,44$$

с погрешностью 1,7%.

Для резонансного дублета меди имеем

$$f_{3248} / f_{3274} = 1,98$$

с погрешностью порядка 1%.

Отношение чисел f для компонент дублета меди было определено также в работе [3]. Используя метод полного поглощения, авторы работы нашли это отношение равным

$$f_{3248} / f_{3274} = 1,94,$$

с погрешностью 10%.

В пределах ошибок наблюдений результаты, полученные методом крюков и методом поглощения, совпадают.

Ленинградский государственный
университет

Поступило в редакцию
29 сентября 1954 г.

Литература

- [1] Д. С. Рождественский и Н. П. Пенкин. Изв. АН СССР, серия физ.-матем., 5, 635, 1941. — [2] Н. П. Пенкин. ЖЭТФ, 17, 355, 1947. — [3] R. King and D. Stockbarger. Astrophys. Journ., 91, 488, 1940.

ВЛИЯНИЕ ВСЕСТОРОННЕГО СЖАТИЯ НА ГАЛЬВАНОМАГНИТНЫЕ ЭФФЕКТЫ ВИСМУТА И ЕГО СПЛАВОВ. I

Н. Е. Алексеевский и Н. Б. Брандт

Исследованию гальваномагнитных свойств металлов посвящено большое число работ. В последнее время широкое систематическое исследование гальваномагнитных свойств чистых металлов было проведено Боровиком [1-4]. Используя результаты теоретических работ [5-9], Боровик приводит значения плотности электронов проводимости для ряда чистых металлов, вычисленные по данным измерений эффекта Холла и изменения электрического сопротивления в магнитном поле.

В связи с высказанными нами ранее соображениями о влиянии плотности электронов проводимости на характер смещения критической температуры сверхпроводников при упругой деформации [7-8] представляло интерес исследовать влияние всестороннего сжатия на электронную концентрацию. С этой целью были предприняты измерения эффекта Холла и изменения электрического сопротивления в магнитном поле у висмута и у некоторых соединений висмута с другими несверхпроводящими металлами, а также исследование температурной зависимости их электропроводности

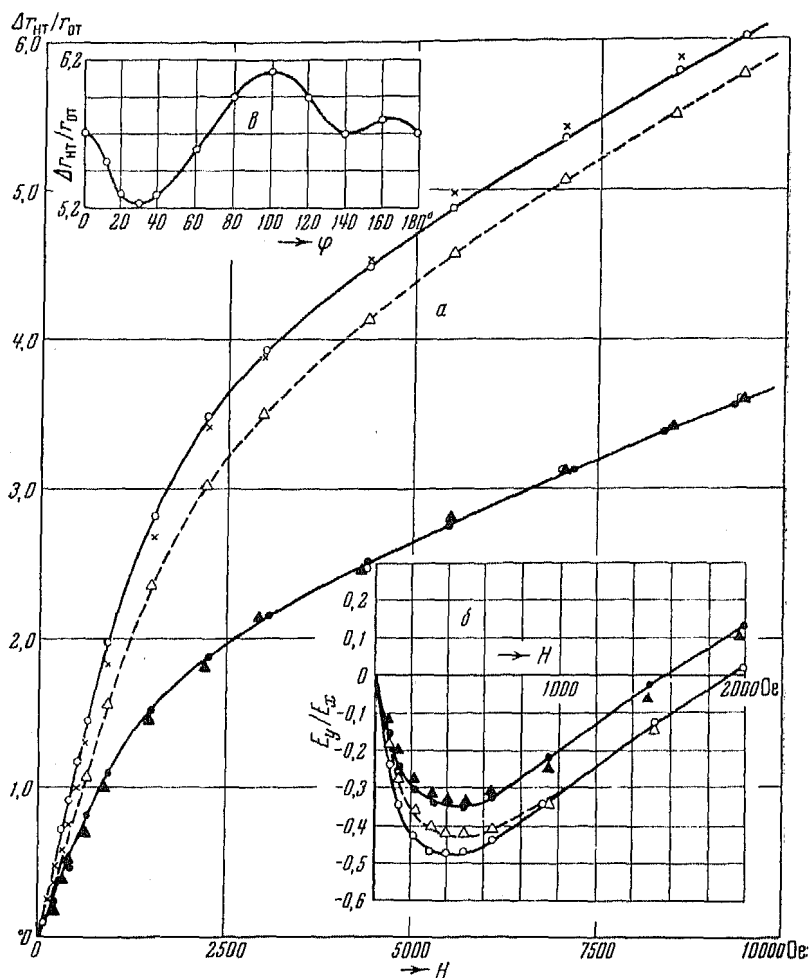


Рис. 1. Образец Вi № 8_{II}, $T = 20,4^\circ \text{K}$, $\varphi = 28^\circ$. a — зависимость сопротивления от поля, b — зависимость E_y/E_x от поля, c — диаграмма вращения в поле $H = 7000 \text{ Oe}$; $\circ$ — образец до давления, $\bullet$ — давление $\sim 1500 \text{ атм}$, $\times$ — давление снято, $\blacktriangle$ — повторное давление $\sim 1500 \text{ атм}$, $\triangle$ — после снятия повторного давления

как в сжатом, так и в несжатом состоянии. В настоящем сообщении излагаются результаты, полученные при исследовании висмута.

Исследование влияния давления на гальваномагнитные свойства в области низких температур, насколько нам известно, никем до сих пор не проводилось и поэтому может также представлять самостоятельный интерес.

Изучение гальваномагнитных явлений проводилось на монокристаллических образцах висмута различной чистоты, имевших большей частью форму шара. Такая форма образца являлась удобной, так как обеспечивала минимальные необратимые изменения, связанные с возможной деформацией образца. Подводящие провода приваривались к образцу искровым методом.

Для исследования образцов под давлением был использован метод, предложенный Лазаревым с сотрудниками [9], который мы уже успешно применяли в наших

прежних работах. Все измерения проводились в широком интервале температур от 1,5 до 300°K. Зависимость электрического сопротивления от температуры в нулевом магнитном поле измерялась при отогреве прибора, предварительно охлажденного жидким водородом или гелием. Обычно отогрев прибора от 14 до 273°K длился 5—6 час., что позволяло измерять сопротивление с достаточной точностью. Температура определялась при помощи термометры медь-константан, припаянной к наружной стенке бомбы напротив середины образца.

При исследовании висмута было промерено 14 образцов. Образцы изготавливались из висмута Хильгер чистоты 99,9996% без предварительной перекристаллизации, а также из висмута, содержащего 0,02% свинца, некоторые из образцов которого подвергались очистке путем перекристаллизации. На рис. 1 приведены кривые зави-

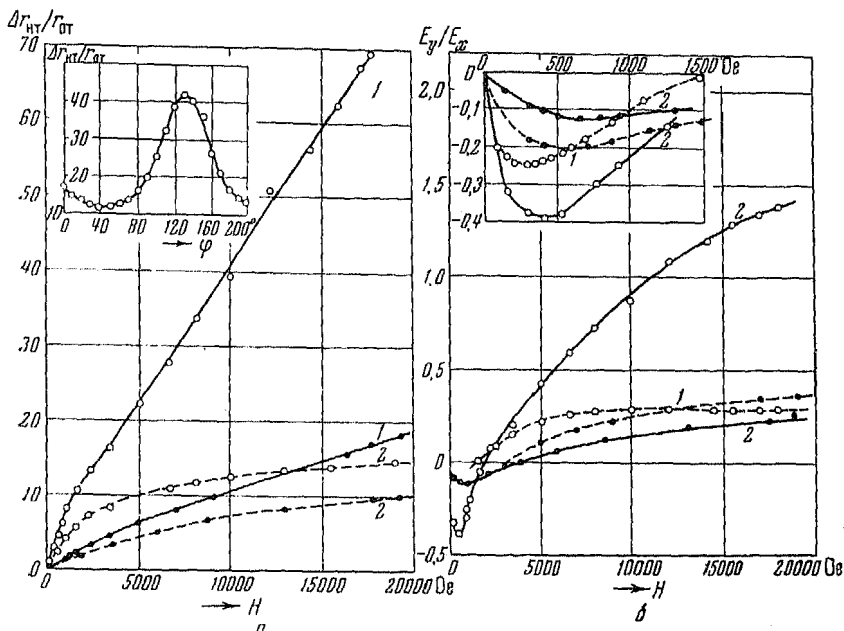


Рис. 2. Образец Вi № 14, $T = 4,2^\circ\text{K}$. а — зависимость сопротивления от поля и диаграмма вращения в поле $H = 10000$ Ое, б — зависимость E_y/E_x от поля; 1 — $\phi = 122^\circ$, 2 — $\phi = 32^\circ$, ○ — образец без давления, ● — давление 1500 атм

симости отношения поля Холла к электрическому полю в направлении тока E_y/E_x и электрического сопротивления r от величины магнитного поля H для образца, изготовленного из висмута с 0,02% свинца, для температуры $20,4^\circ\text{K}$. Аналогичные данные для образца висмута № 14 такой же чистоты, для температуры $4,2^\circ\text{K}$ и двух различных ориентаций в поле приведены на рис. 2. Всестороннее сжатие образцов, как правило, не приводило к изменению формы диаграммы вращения. При этом анизотропия образцов, характеризуемая величиной отношения минимального и максимального сопротивления в постоянном магнитном поле, при всестороннем сжатии обратимо уменьшалась на 7—10%.

На одном из образцов висмута Хильгер при измерении эффекта Холла в области гелиевых температур была обнаружена слабая осцилляция э. д. с. Холла. Аналогичное явление отмечалось в работах [10—12]. При всестороннем сжатии этого образца осцилляция э. д. с. Холла не только не исчезала, а наоборот, несколько усиливалась и изменяла период¹.

При исследовании температурной зависимости электрического сопротивления висмута с содержанием 0,02% свинца у четырех образцов было обнаружено, что всестороннее сжатие до 1500 кг/см² вызывает появление максимума на кривой $r(T)$ в области температур, лежащей около 30—40°K (рис. 3). Из указанных четырех образцов Вi № 7, № 8 и № 14 имели форму шара, а образец Вi № 8_{II} представлял собой цилиндр, диаметром 3 мм и длиной 12 мм. Направление тока у всех этих образцов было приблизительно перпендикулярно главной оси. Для других ориентаций такое явление, повидимому, отсутствует. Пунктирная кривая на рис. 3 представляет зависимость электрического сопротивления от температуры для образца, нахо-

¹ Подробное сообщение о результатах исследования влияния всестороннего сжатия на чистый висмут будет опубликовано в ближайшее время.

дящегося под давлением порядка 1500 кг/см^2 , направление тока в котором параллельно главной оси.

Сравнивая данные, полученные на чистом висмуте как в наших опытах, так и в опытах других авторов [13, 14], с результатами исследования висмута, содержащего 0,02% свинца, можно отметить следующее. В то время как чистый висмут дает почти квадратичную зависимость электрического сопротивления от величины магнитного поля, аналогичная кривая у висмута с небольшой примесью свинца обнару-

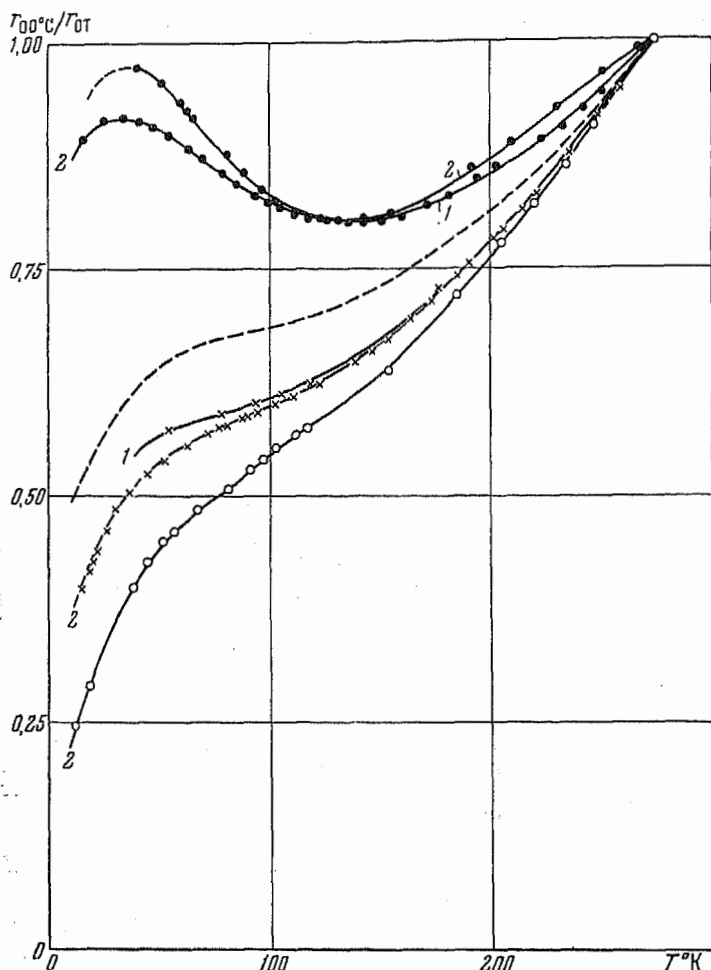


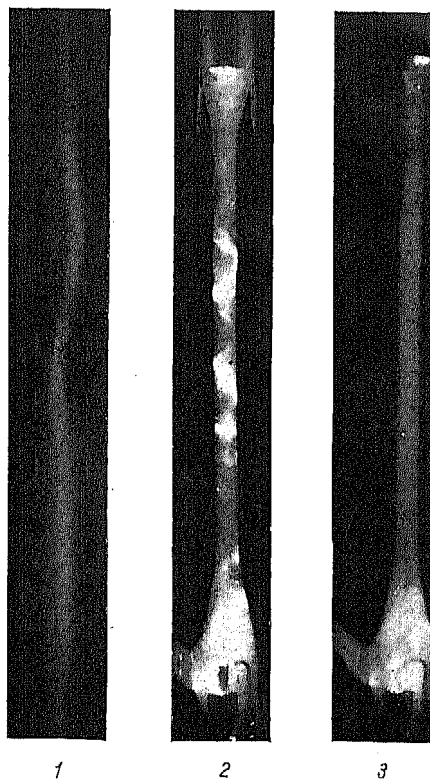
Рис. 3. Температурная зависимость электрического сопротивления висмута с содержанием 0,02% Pb. 1 — Вi № 14, 2 — Вi № 8, О — образцы без давления, ● — давление ~ 1500 атм, × — после снятия давления

живает тенденцию к насыщению. При этом зависимость E_y/E_x от H меняет знак в той же области полей, в которой зависимость $r(H)$ обнаруживает перегиб.

Появления максимума на кривой $r(T)$ при сжатии не наблюдается на более чистых образцах висмута. Не исключено, однако, что такой максимум может быть обнаружен и на этих образцах при значительно больших давлениях. Наличие максимума на кривой $r(T)$ наблюдалось в работе [15], где исследовалась температурная зависимость сопротивления образцов висмута с различным содержанием свинца. Сопоставляя наши данные о величине максимума с данными [15], можно заключить, что всестороннее сжатие образца до давления порядка 1500 кг/см^2 эквивалентно изменению концентрации примеси свинца от 0,02% до 0,15%. Следует, однако, отметить, что максимум такой же величины, вызванный примесями, находится в области более высоких температур (около 80°K).

Возможно, что появление максимума на кривой зависимости электрического сопротивления от температуры, вызванного давлением, является следствием изменения концентрации электронов проводимости при сжатии. Использование двухзонной

К статье В. Л. Грановского и Г. Г. Тимофеевой «Сжатие и изгиб дуги в разреженном газе при большой силе тока»



К статье Г. Ф. Парчевского и Н. П. Пенкина «Отношение сил осцилляторов для составляющих резонансных дублетов алюминия и меди»

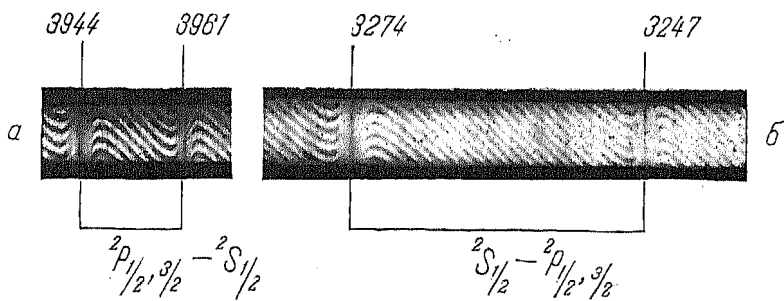


Рис. 1. Крюки около резонансных дублетов: а — алюминия, б — меди

теории для оценки концентрации и подвижностей электронов, участвующих в проводимости, для висмута представляется затруднительным, так как наличие уже небольших примесей, например, примеси свинца, приводит к существенным отклонениям зависимостей E_y/E_x от H и $r(H)$ от тех, которые следовало бы ожидать для модели с равным числом электронов и «дырок» ($n_1 = n_2$). При содержании свинца в висмуте, доходящем до 0,02%, висмут, скорее, соответствует случаю $n_1 \neq n_2$ и, хотя изменение зависимостей E_y/E_x от H и $r(H)$ при всестороннем сжатии указывает на значительное изменение подвижностей и электронной концентрации под действием давления, определение величин этих изменений требует проведения экспериментов в значительно больших магнитных полях. Если все же, используя данные для наиболее чистого висмута, оценить изменение электронной концентрации и подвижностей при всестороннем сжатии, рассматривая его как случай двухзонной проводимости с равным числом носителей тока в зонах, то оказывается, что всестороннее сжатие вызывает уменьшение подвижности и концентрации носителей тока. Весьма вероятно, что этим можно объяснить наблюдаемое Бриджменом [16] увеличение электрического сопротивления у висмута при всестороннем сжатии при комнатных температурах.

Изменение подвижностей электронов проводимости и их концентрации под влиянием всестороннего сжатия, происходящее, по видимому, вследствие небольших изменений параметров решетки, дает основание предполагать, что и температурные изменения параметров решетки могут приводить к аналогичным результатам. Таким образом, кроме отмечавшегося ранее [17] изменения концентрации носителей тока у висмута при температурах, лежащих выше температуры вырождения электронного газа, т. е. выше 70—140°K, у висмута можно ожидать изменение электронной концентрации, связанное с уменьшением параметров решетки при охлаждении. Справедливость такой гипотезы могла бы объяснить несовпадение кривых зависимости сопротивления висмута от величины эффективного магнитного поля $H(r_{00^\circ C}/r_{OT})$ (см. работы [3, 4]), полученных при различных температурах, так как изменение числа носителей тока при изменении температуры не учитывается схемой Келера [18].

Из этих же соображений недопустимо сравнение гальваномагнитных свойств образцов висмута различной чистоты, так как здесь кроме изменения длины свободного пробега, вызываемого примесями, может происходить весьма сильное изменение концентрации электронов. Поэтому не удивительно значительное расхождение кривых зависимости постоянной Холла от величины магнитного поля, обнаруженное в работах [10], и кривых $\Delta r_{HT}/r_{OT}$ от $H(r_{00^\circ C}/r_{OT})$ — в работе [3] для разных образцов висмута.

Весьма возможно, что зависимость концентрации электронов от давления и связанная с этим зависимость электронной концентрации от температуры могут иметь место не только у висмута, но и у ряда других металлов и сплавов.

Следует отметить, что осцилляции эффекта Холла, сохраняющиеся при всестороннем сжатии, дают основание предполагать возможность изучения влияния всестороннего сжатия на эффект де-Гааза и ван-Альфена. Такое предположение становится более вероятным, если учесть результаты работ [10—12], отмечающих корреляцию осцилляции э. д. с. Холла и магнитной восприимчивости у висмута.

Значительная часть данной работы была проведена в Криогенной лаборатории Московского государственного института мер и измерительных приборов, в связи с чем считаем своим приятным долгом выразить благодарность заведующему этой лабораторией проф. П. Г. Стрелкову и А. С. Боровику-Романову. Выражаем также благодарность Т. И. Костиной, Н. М. Крейнс и В. В. Евдокимовой за помощь в экспериментах.

Институт физических проблем
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
14 июня 1954 г.

Литература

- [1] Е. С. Боровик. ДАН, СССР, 70, 601, 1950. — [2] Е. С. Боровик. ДАН СССР, 75, 693, 1950. — [3] Е. С. Боровик. ЖЭТФ, 23, 91, 1952. — [4] Е. С. Боровик. ЖЭТФ, 23, 83, 1952. — [5] Д. Блохинцев и Л. Нордгейм. ZS. f. Phys., 84, 168, 1933. — [6] E. H. Sondheimer a. A. H. Wilson. Proc. Roy. Soc., 190, 435, 1947. — [7] Н. Е. Алексеевский и Н. Б. Брандт. ЖЭТФ, 22, 200, 1952. — [8] Н. Е. Алексеевский, Н. Б. Брандт и Т. И. Костина. Изв. АН СССР, сер. физич., 16, 233, 1952. — [9] Б. Г. Лазарев и Л. С. Кан. ЖЭТФ, 14, 470, 1944. — [10] A. N. Gerritsen a. W. S. De Haas. Physica, 7, 802, 1940. — [11] S. M. Reynolds, T. E. Leinhardt a. H. W. Hemstreet; Phys. Rev., 93, 247, 1954. — [12] T. G. Berlincourt a. J. K. Logan. Phys. Rev., 93, 348, 1954. — [13] Е. С. Боровик и Б. Г. Лазарев. ЖЭТФ, 21, 857, 1951. — [14] W. S. De Haas a. L. W. Schubnikov. Leid. Comm., № 210a, 210b, 1930. — [15] N. Thompson a. H. H. Wills. Proc. Roy. Soc., 155, 144, 1936. — [16] P. W. Bridgman. Proc. Am. Acad. Arts. Sci., 72, 157, 1938; 74, 21, 1940. — [17] Б. И. Давыдов и И. Я. Померанчук. ЖЭТФ, 9, 1294, 1939. — [18] M. Köhler. Ann. d. Phys., 32, 214, 1938.

О НАБЛЮДЕНИИ ЧЕРЕНКОВСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ, СОПРОВОЖДАЮЩЕГО ШИРОКИЕ АТМОСФЕРНЫЕ ЛИВНИ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ

Н. М. Нестерова и А. Е. Чудаков

Черенковское излучение, возникающее при прохождении быстрых заряженных частиц через вещество, должно иметь место не только в плотных средах, но и в воздухе, при условии достаточной большой скорости частиц. Интенсивность свечения отдельной частицы при этом очень мала, но в случае прохождения через атмосферу широких ливней космических лучей, когда большое число частиц создают одновременно направленное излучение, его можно регистрировать на фоне свечения ночного неба.

Первые данные о наблюдении этого явления были опубликованы в работах [1,2]. Теоретически оно рассмотрено в [3].

Нами были проведены предварительные опыты по исследованию вспышек в свечении ночного неба и установлению связи их с широкими атмосферными ливнями с целью выяснения возможности изучения широких ливней по вызываемому ими черенковскому излучению. Работа проводилась на высоте 3860 м над уровнем моря в безлунные ночи. Исследовалось распределение световых вспышек по интенсивности и их совпадение во времени с прохождением широких ливней. Установка состояла из параболического зеркала диаметром 30 см, фотоумножителя и электронной схемы. Свет, падавший на зеркало под углом к вертикали от 0 до 10°, собирался на фотокатоде фотоумножителя. Амплитуда электрических импульсов от фотоумножителя измерялась при помощи схемы с разрешением во времени $5 \cdot 10^{-8}$ сек. Коэффициент усиления фотоумножителя и электронной схемы регулярно контролировался в процессе работы.

При измерении распределения импульсов света по величине возможно было регистрировать $1,5 \div 2$ импульса в минуту. При этом фон, обусловленный флуктуациями тока в фотоумножителе, не сказывался на результатах измерений, что контролировалось освещением фотокатода постоянным источником света, создающим тот же ток на выходе фотоумножителя.

Распределение амплитуд импульсов, измеренное в десятикратном диапазоне, оказалось близким к степенному, с показателем интегрального спектра, равным $-1,5$. Такой вид спектра напоминает спектр плотностей широких атмосферных ливней.

Несколько опытов было проведено также в облачную погоду. При высоте сплошной облачности более 2000 м над местом наблюдения число импульсов в минуту уменьшилось примерно в два раза.

При изучении связи световых вспышек с широкими атмосферными ливнями регистрировались только те вспышки, которые совпадали во времени с сигналом от установки со счетчиками. Эта установка находилась на расстоянии 70 м от зеркала и представляла собой систему большого числа годоскопических счетчиков, управляемую схемой многократных совпадений. При помощи этой установки отбирались ливни, образованные первичными частицами с энергией $\sim 10^{14}$ eV, оси которых проходили в пределах круга с радиусом 50 м от ее центра¹.

В результате измерений было обнаружено, что в 5% случаев широкие атмосферные ливни сопровождалась световыми вспышками, амплитуда которых превышала порог нашей установки. Такой небольшой процент совпадений объясняется в основном тем, что свет собирался в телесном угле 0,1 стерadiana, в то время как годоскопическая установка регистрировала ливни, проходящие под всеми возможными углами к вертикали.

Число световых вспышек, сопровождавшихся регистрацией ливня в годоскопической установке, оказалось в 25 раз меньше, чем полное число световых вспышек той же амплитуды. Это следует объяснить тем, что согласно [3] черенковское излучение широких ливней распределяется в пределах круга с радиусом ~ 250 м, и, следовательно, установкой с зеркалом должны регистрироваться ливни, оси которых проходят на расстоянии до 250 м от установки, в то время как система счетчиков регистрировала ливни на расстоянии до 50 м.

Таким образом проведенные опыты подтвердили возможность наблюдения черенковского излучения, вызываемого широкими атмосферными ливнями с энергией 10^{14} eV.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
30 ноября 1954 г.

Литература

[1] W. Galbraith and J. V. Jelley. Nature, 171, 349, 1953.—[2] J. V. Jelley and W. Galbraith. Phil. Mag., 44, 619, 1953.—[3] В. И. Гольданский и Г. Б. Жданов. ЖЭТФ, 26, 405, 1954.

¹ В пределах круга с радиусом 50 м проходили оси 80% ливней, регистрируемых установкой.

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция ЖЭТФ просит авторов при направлении статей в печать руководствоваться изложенными ниже правилами. СТАТЬИ, ПРИСЛАННЫЕ БЕЗ СОБЛЮЖДЕНИЯ ПЕРЕЧИСЛЕННЫХ ПРАВИЛ, К РАССМОТРЕНИЮ РЕДАКЦИЕЙ ПРИИМАТЬСЯ НЕ БУДУТ.

1. Статьи, являющиеся результатами работ, проведенных в институтах, должны обязательно иметь направление от соответствующего института.

2. Редакция в особенности обращает внимание авторов на то, что статьи должны быть изложены с предельной краткостью, совместимой с ясностью изложения, и окончательно обработаны. Следует избегать повторения данных таблиц или графиков в тексте статьи, а также представления численных результатов в виде таблиц и графиков одновременно.

Статьи объемом свыше 1 печ. листа (т. е. 21—22 стр. текста на пишущей машинке) вообще не допускаются. Как текст, так и графический материал должны представляться обязательно в двух экземплярах.

3. Статья должна иметь краткую аннотацию, указывающую цель и результаты работы. Аннотация и раздел «Выводы» (если таковой имеется в статье) не должны, однако, дублировать друг друга.

4. Статьи должны быть напечатаны на пишущей машинке с одной стороны листа; рукописные вставки не допускаются. Формулы должны быть вписаны четко чернилами. Все страницы рукописи должны быть пронумерованы. Таблицы должны быть напечатаны на отдельных от текста страницах.

СТАТЬИ ДОЛЖНЫ БЫТЬ ОБЯЗАТЕЛЬНО ПОДПИСАНЫ АВТОРОМ, А ПРИ НАЛИЧИИ НЕСКОЛЬКИХ АВТОРОВ — ВСЕМИ СОАВТОРАМИ.

5. Во избежание недоразумений и ошибок следует делать ясное различие между заглавными и строчными буквами в формулах. В тех случаях, когда заглавные и строчные буквы одинаковы по начертанию и отличаются только своим размером (*V* и *v*, *U* и *u*, *W* и *w*, *O* и *o*, *K* и *k*, *S* и *s*, *I* и *i*, *C* и *c*, *P* и *p*), — необходимо заглавные буквы подчеркивать снизу двумя черточками (например, S), а строчные помечать двумя черточками сверху (например, s). Необходимо делать различие между буквой *O* (большой), *o* (малой) и *0* (нулем), для чего буквы *O* и *o* подчеркивать двумя черточками: O и o, а нуль оставлять без подчеркивания. Необходимо также различать буквы *I* и *J*, для чего в рукописи букву *I* писать как римскую единицу с точкой вверху. Греческие буквы должны подчеркиваться красным карандашом. Векторы подчеркивать синим или черным карандашом.

6. Подстрочные примечания должны иметь сплошную нумерацию по всей статье. Цитируемая литература должна даваться не в виде подстрочных примечаний, а общим списком в конце статьи, с указанием в тексте статьи ссылки порядковой цифрой над строкой, в прямых скобках (например, [1]). Цитируемая литература должна быть оформлена в следующем порядке: а) для журнальных статей указываются инициалы и фамилии авторов, название журнала, номер тома (подчеркнуть снизу), страница и год; б) для книг надо указывать инициалы и фамилию автора, полное название книги, год и место издания (для книг иностранного происхождения — указывать данные русского перевода, если таковой имеется).

7. Все рисунки и чертежи должны быть представлены отдельно от рукописи и ни в коем случае не должны приклеиваться к оригиналу. Рисунки желательно снабжать разъясняющими подписями, которые должны быть собраны на отдельном листе. На обороте рисунков должна быть указана фамилия автора, название статьи и номер рисунка. Надписи на рисунках следует по возможности заменять цифрами или буквенными обозначениями в подписи к рисунку или в тексте.

Редакция просит авторов ограничиваться минимальным числом рисунков к статьям.

8. Редакция просит авторов отмечать на полях рукописи места, которые могут быть набраны пепитом.

9. Редакция посылает автору одну корректуру. Изменения и дополнения в тексте не допускаются. Корректуре с подписью автора должна быть выслана обратно в редакцию в течение суток с момента ее получения.

10. К рукописи должен быть приложен точный адрес, фамилия, имя и отчество автора, а также номер телефона, служебного или домашнего (для авторов, проживающих в Москве).

11. РУКОПИСИ, НЕ ПРИНЯТЫЕ РЕДАКЦИЕЙ, АВТОРУ НЕ ВОЗВРАЩАЮТСЯ.

Адрес редакции: Москва, Подсосенский пер., д. 21, Изд-во АН СССР.

Цена 12 руб.

ПРОДОЛЖАЕТСЯ ПОДПИСКА НА 1955 г.
на «РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ»,
подготавливаемый Институтом научной
информации Академии наук СССР

Журнал реферирует материалы из всех естественных и около 7000 иностранных научных и научно-технических периодических и непериодических публикаций, поступающих из 80 стран мира. В журнале публикуются также данные о новых патентах, книгах и диссертациях.

Журнал рассчитан на широкие круги научных работников, профессорско-преподавательский состав, аспирантов, студентов, работников заводских лабораторий, станций и заповедников, инженерно-технический персонал, а также на преподавателей средних школ.

В настоящее время выпускаются следующие серии «Реферативного журнала»:

Названия серий	Количество номеров в год	Годовая подписная цена
Физика	12	240 р.
Математика	12	91 р. 20 к.
Астрономия и геодезия	12	91 р. 20 к.
Механика	12	91 р. 20 к.
Геология и география	12	240 р.
Биология	24	360 р.
Химия	24	432 р.
Биологическая химия (раздел Реферативного журнала «Химия»)	24	108 р.

Для всех серий «Реферативного журнала» публикуются годовые авторские указатели в последнем номере каждой серии. Предметные указатели выходят отдельным изданием за дополнительную плату.

За 1953—1954 гг. предметные указатели выйдут в середине 1955 г.

Подписная цена на предметные указатели к сериям «Реферативного журнала»:

Указатели к сериям	За годы	Цена
Физика	1954	78 р.
Математика	1953—1954	32 р.
Астрономия и геодезия	1953—1954	32 р.
Механика	1953—1954	32 р.
Химия	1953—1954	100 р.

Подписка принимается с первого номера каждой серии городскими и районными отделами «Союзпечати», отделениями и агентствами связи, магазинами «Академкнига», а также конторой «Академкнига» по адресу:
Москва, Пушкинская ул., д. 23.