

А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р

ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 28

Вып. 1

ЯНВАРЬ 1955 г.

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

СОДЕРЖАНИЕ

А. Б. Мигдал. Теория ядерных реакций с образованием медленных частиц . . .	3
А. Б. Мигдал. Образование мезонов при энергии, близкой к пороговой . . .	10
Г. А. Соколик. Замечания к теории слияния . . .	13
А. А. Лучина. О продольных колебаниях плазмы I.	17
Г. Я. Мякишев и А. А. Лучина. О продольных колебаниях плазмы. II.	28
С. А. Альтшулер. Резонансное поглощение ультразвука в парамагнитных солях . . .	38
С. А. Альтшулер. К теории электронного и ядерного парамагнитного резонанса под влиянием ультразвука	49
М. А. Кривоглаз и З. А. Матysiна. К теории электрического сопротивления упорядочивающихся сплавов	61
Б. И. Казанцев и П. В. Мейкляр. Регрессия центров скрытого фотографического изображения	70
Н. И. Леонтьев. Измеритель магнитного поля, использующий магнитный резонанс протонов	77
Г. И. Скандави и А. Н. Губкин. К вопросу об учете внутреннего поля при релаксационной поляризации в поликристаллических дипольных диэлектриках . . .	85
Л. Н. Бородавская и С. В. Лебедев. Зависимость электропроводности и электронной эмиссии от энергии металла в процессе его нагревания током большой плотности	96

Письма в редакцию

С. З. Беленький. К теории множественного образования частиц при больших энергиях	111
В. Н. Цытович. К релятивистским поправкам в задаче двух тел	113
М. С. Хайкин. Об исследованиях анизотропии поверхностного сопротивления олова при низких температурах	115
Г. П. Дишкант. К вопросу о незаконности одной статистической трактовки квантовой механики	117
И. Л. Розенталь. О теории Ферми множественного образования частиц при столкновениях нуклонов	118
В. Л. Бонч-Бруевич. Распределение Ферми при абсолютном нуле при учете взаимодействия электронов с нулевыми колебаниями решетки	121
Ю. А. Яппа. По поводу статьи В. И. Карпмана «К вопросу о связи между методом регуляризации и теорией частиц с произвольным спином»	123
К. Н. Зиновьева. Поверхностное натяжение жидкого He ⁴ в интервале температур 0,93—3,34° К	125
Э. Л. Андроникашвили и И. П. Каверкия. Вращение гелия II при больших скоростях	128

Главный редактор *Н. Н. АНДРЕЕВ*

Зам. главного редактора *М. М. СУЩИНСКИЙ*

Редколлегия

Н. А. КАПЦОВ, В. П. ПЕШКОВ, Д. В. СКОБЕЛЬЦЫН,
Н. Н. СОВОЛЕВ, М. М. СУЩИНСКИЙ, И. Е. ТАММ,
Я. П. ТЕРЛЕЦКИЙ, Е. Л. ФЕЙНБЕРГ

Подписано к печати 15.I 1955 г. Т-00112 Формат бум. 70×108¹/₁₆. Бум.
Печ. л. 10,56+1 вклейка Уч.-изд. л. 12,4 Тираж 3675 экз. Зак. 842
2-я типография Издательства Академии наук СССР. Москва, Шубинский пер., 10

ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

*Продолжение физической части
Журнала Русского физико-химического общества,
издававшегося с 1873 по 1930 г.*

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР Н. Н. АНДРЕЕВ,
ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА М. М. СУЩИНСКИЙ

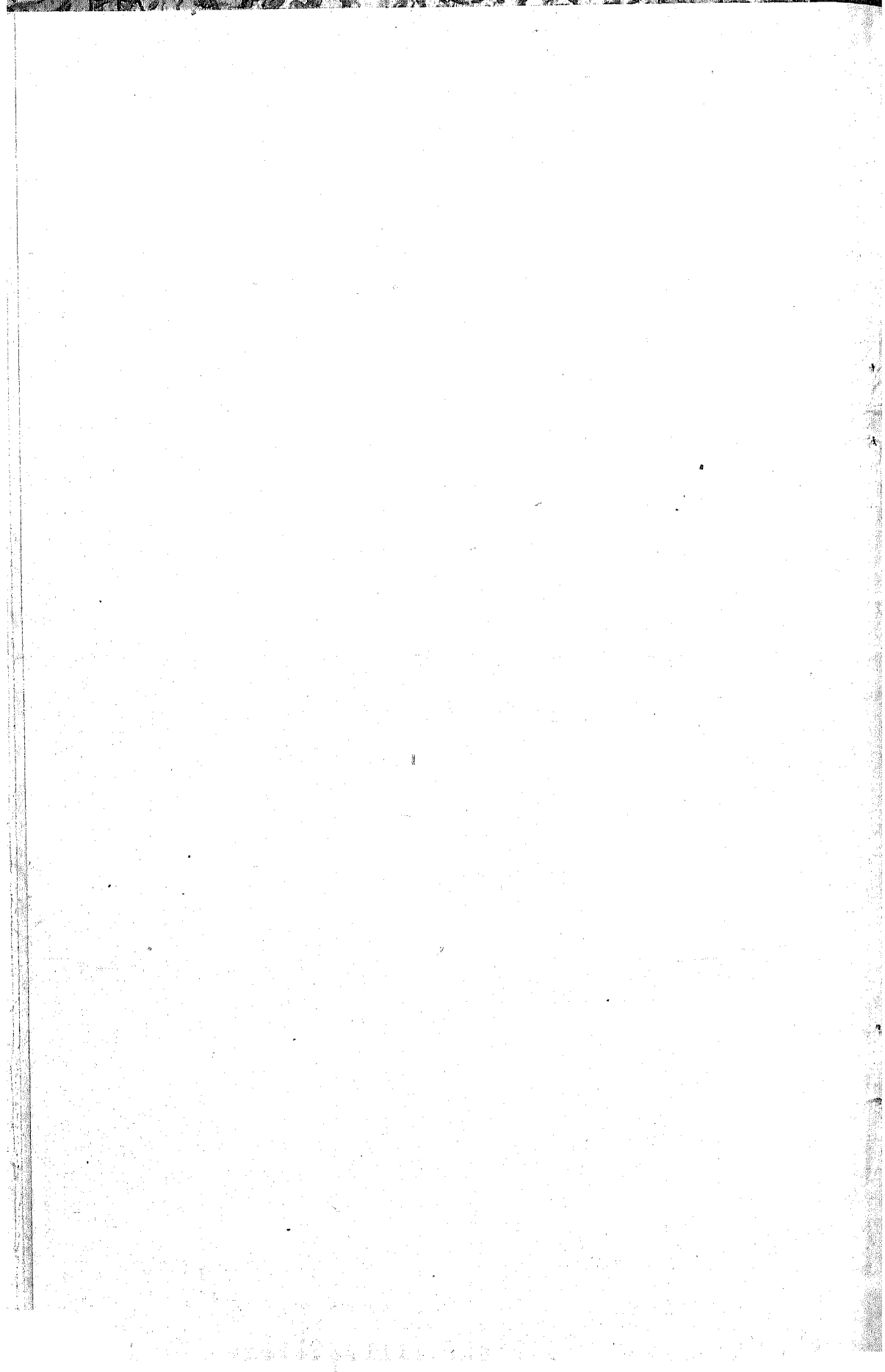
Редколлегия: акад. Н. Н. АНДРЕЕВ, д-р физ.-мат. наук
Н. А. КАПЦОВ, д-р физ.-мат. наук В. П. ПЕШКОВ,
акад. Д. В. СКОБЕЛЬЦЫН, канд. физ.-мат. наук
Н. Н. СОБОЛЕВ, канд. физ.-мат. наук М. М. СУЩИНСКИЙ,
акад. И. Е. ТАММ, д-р физ.-мат. наук Я. П. ТЕРЛЕЦКИЙ,
д-р физ.-мат. наук Е. Л. ФЕЙНБЕРГ

Т о м 28

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

МОСКВА

1955



ТЕОРИЯ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ С ОБРАЗОВАНИЕМ МЕДЛЕННЫХ ЧАСТИЦ¹

А. Б. Мигдал

Получено энергетическое и угловое распределение медленных нуклонов, образовавшихся в результате ядерных реакций. Дана оценка вероятности образования нуклонов в связанном состоянии.

1. Если в результате ядерных реакций образуются частицы с малой кинетической энергией, то взаимодействие этих частиц между собой может существенно повлиять на их распределение по энергии. Ниже будет рассмотрен случай, когда в качестве продуктов реакции получаются два или несколько нуклонов с кинетической энергией, малой по сравнению с энергией взаимодействия. При этом взаимодействие частиц не может быть учтено методом теории возмущений.

В работе получено распределение по энергии нуклонов, получающихся в результате столкновения нуклона с дейтроном и дейтрона с ядрами. Для получения распределения по энергии образующихся медленных нуклонов достаточно использовать весьма общие свойства ψ -функций, поэтому можно сделать также некоторые заключения о распределении по энергии для более сложных ядерных реакций. Ниже дается оценка отношения сечения образования дейтрона (или динейтрона, если он существует) к сечению образования свободных нуклонов. Получена также угловая корреляция между направлениями вылета двух нуклонов, обусловленная их взаимодействием.

2. Пусть на дейтрон падает нуклон, движущийся со скоростью, много большей, чем скорости нейтрона и протона в дейтроне. Для получения сечения этого процесса применим метод, аналогичный тому, который развит в теории молекул, когда используется малость скорости ядер по сравнению с электронными скоростями. Аналогично случаю молекул, для нахождения функции нулевого приближения необходимо сначала решить задачу о рассеянии налетающей частицы неподвижными нуклонами дейтрона. Функции нулевого приближения будут иметь вид

$$\Psi = \psi(\mathbf{r}_3; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \varphi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2),$$

где ψ — функция налетающей частицы в поле неподвижных частиц дейтрона, φ — функция медленных нуклонов.

Если известна функция рассеяния налетающей частицы на нейтроне и протоне, то, пренебрегая влиянием нейтрона на функцию рассеяния на протоне, и наоборот (это законно для больших энергий налетающей частицы, когда $\sqrt{\sigma} \ll r_d$, где σ — сечение рассеяния и r_d —

¹ Доложено на теоретическом семинаре в Институте физических проблем в октябре 1950 г.

Примечание при корректуре. Со времени окончания работы появилось несколько статей, посвященных тому же вопросу (см., например, [8]).

радиус дейтрона), получим асимптотический вид функции ψ

$$(\psi)_{r_3 \rightarrow \infty} \sim e^{ik_0 r_3} + f_1 (e^{ik_0 r_1} / r_3) e^{ik |r_3 - r_1|} + f_2 (e^{ik_0 r_2} / r_3) e^{ik |r_3 - r_2|} = \\ = e^{ik_0 r_3} + (f_1 e^{iq r_1} + f_2 e^{iq r_2}) (e^{ik r_3} / r_3),$$

где $q = k_0 - k$, $k = k r_3 / r_3$, а f_1 и f_2 — амплитуды рассеяния налетающей частицы на нуклонах 1 и 2.

Волновая функция системы всех трех частиц определится из условия, что при $k_0 r_3 \rightarrow -\infty$ волновая функция должна иметь вид $e^{ik_0 r_3} \varphi_0(r_1, r_2)$, где $\varphi_0(r_1, r_2)$ — функция дейтрона. Асимптотический вид волновой функции всей системы в нулевом приближении определяется выражением

$$\Psi_{r_3 \rightarrow \infty} \sim e^{ik_0 r_3} \varphi_0(r_1, r_2) + (f_1 e^{iq r_1} + f_2 e^{iq r_2}) \varphi_0(r_1, r_2) (e^{ik r_3} / r_3).$$

Разлагая выражение

$$(f_1 e^{iq r_1} + f_2 e^{iq r_2}) \varphi_0(r_1, r_2)$$

в ряд по собственным функциям двух медленных нуклонов, получившихся в результате соударения, и возводя коэффициенты разложения в квадрат, получим сечение рассеяния с образованием нуклонов в том или ином состоянии. Вводя координаты $r = r_1 - r_2$, $R = (r_1 + r_2) / 2$, получим после интегрирования по R

$$d\sigma = \left| \int \sum \varphi_p^*(r) \chi_1 \{f_1 e^{iq r/2} + f_2 e^{-iq r/2}\} \varphi_0(r) \chi_0 dr \right|^2 d\omega_k dP / (2\pi\hbar)^3, \quad (1)$$

где $d\omega_k$ — интервал углов вектора k ; χ_0 и χ_1 — функции зарядовых и спиновых координат двух нуклонов. Функции $\varphi_p(r)$ нормированы на единицу объема, функция φ_0 — на единицу. Суммирование производится по спиновым и зарядовым переменным двух нуклонов; P — импульс частиц 1 и 2 в системе их центра инерции.

Сечение для образования двух нуклонов в связанном состоянии имеет вид

$$d\sigma_0 = \left| \int \sum \varphi_1^* \chi_1 \{f_1 e^{iq r/2} + f_2 e^{-iq r/2}\} \varphi_0 \chi_0 dr \right|^2 d\omega_k, \quad (2)$$

при нормировке функций φ_1 на единицу. Для необменных соударений функция φ_1 совпадает с φ_0 . Амплитуды рассеяния f_1 и f_2 содержат, вообще говоря, обменные по спинам и зарядам слагаемые. Поэтому в процессе рассеяния могут изменяться как спиновые, так и зарядовые состояния нуклонов.

3. Интегралы в выражениях (1) и (2) не могут быть вычислены при больших q , так как в этом случае играют роль $r \sim 1/q$, а функции φ_p и φ_0 известны только для $r > r_0$, где r_0 — радиус сил взаимодействия. Для дальнейшего существенна только зависимость выражения (1) от взаимной энергии нуклонов. Эта зависимость может быть легко найдена для того случая, когда $\hbar q$ велико по сравнению с импульсом частиц в дейтроне и по сравнению с импульсом P . В этом случае в интегралах выражения (1) существенна область малых r ($r \sim 1/q$), и вероятность найти нуклоны с относительным волновым вектором P , лежащим в интервале dP , равна

$$d\omega_p = C_1 |\varphi_p(r_1)|^2 dP; \quad r_1 \sim 1/q. \quad (3)$$

4. Рассмотрим случай необменного столкновения. Тогда в конечном состоянии находятся (помимо быстрого нуклона) медленный ней-

трон и протон. Как легко получить из теории рассеяния нейтронов протонами²,

$$|\varphi_P(r_1)|^2 = \frac{A}{E + \varepsilon} \left\{ 1 + O\left(\frac{P^2 r_0^2}{\hbar^2}\right) \right\}, \quad P^2 \ll P_{1,2}^2,$$

где A не зависит от энергии, E — энергия относительного движения нуклонов, $\varepsilon = \varepsilon_0 = 2,2$ MeV для параллельных спинов и $\varepsilon = \varepsilon_1 = 0,07$ MeV для антипараллельных спинов нейтрона и протона.

Подставляя это выражение в (3), легко получить

$$d\omega_P^{np} = C_{np} \left\{ \frac{1}{E + \varepsilon_0} + \frac{a}{E + \varepsilon_1} \right\} dP. \quad (4)$$

Величина a определяет примесь слагаемого, зависящего от спина, в необменной амплитуде рассеяния. Распределение нуклонов по углам в системе, связанной с их центром инерции, сферически симметрично.

Формула (4) показывает, что распределение нуклонов по энергиям имеет максимум при энергиях порядка ε .

5. Когда в результате обменного взаимодействия с налетающей быстрой частицей образуются два медленных нейтрона, то, как видно из (3), они должны находиться в S -состоянии (функции с отличным от нуля орбитальным моментом малы на малых расстояниях r_1). Тогда, согласно правилу запрета, их спины антипараллельны, и при столкновении должно произойти изменение спина (в дейтроне спины нуклонов параллельны).

Распределение по относительным энергиям дается выражением

$$d\omega_P^{nn} = C_{nn} dP / (E + \varepsilon). \quad (5)$$

Величина ε в этом случае неизвестна

6. В случае обменного столкновения с образованием двух медленных протонов функция $\varphi_P(r_1)$ может быть получена из теории рассеяния протонов протонами^[1,2]:

$$\varphi_P(r_1) = \frac{\hbar}{r_1} \sqrt{\frac{F(\eta)}{M}} \left\{ F^2(\eta) E + \frac{\hbar^2}{M} \left[-\frac{1}{a} - \frac{h(\eta)}{R} + \gamma E \right]^2 \right\}^{-1/2},$$

где

$$F(\eta) = \frac{2\pi\eta}{e^{2\pi\eta} - 1}, \quad \eta = \frac{e^2}{\hbar v}, \quad h(\eta) = \operatorname{Re} \frac{\Gamma'(-i\eta)}{\Gamma(-i\eta)} - \lg \eta,$$

$$R = \frac{\hbar^2}{Me^2} = 2,9 \cdot 10^{-12} \text{ см}, \quad a = -7,7 \cdot 10^{-13} \text{ см},$$

$$\gamma = 3,4 \cdot 10^{11} \text{ MeV}^{-1} \text{ см}^{-1}.$$

Подставляя это выражение в (3), получим

$$d\omega_P^{pp} = C_{pp} \frac{F(\eta) dP}{F^2(\eta) E + \frac{\hbar^2}{M} \left[-\frac{1}{a} - \frac{h(\eta)}{R} + \gamma E \right]^2}. \quad (6)$$

Как и в случае двух нейтронов, спины протонов антипараллельны, и распределение не зависит от угла вектора P .

7. Формула (3) применима и в том случае, когда дейтрон большой энергии падает на ядро. Распределение двух нуклонов по энергиям относительного движения дается выражением (4), если заряд

² Если $r_1 < r_0$, то зависимость $|\varphi_P(r_1)|^2$ от энергии определяется зависимостью от энергии выражения $|\varphi_P(r_0)|^2$, так как при $r < r_0$ энергией E можно пренебречь по сравнению с глубиной потенциальной ямы.

нуклонов дейтрона не изменился, и выражением (5) или (6), если произошло изменение заряда одного из нуклонов.

Можно вычислить угловую корреляцию вылетевших нуклонов. Для этого следует проинтегрировать выражение $d\omega$ по составляющей вектора $\mathbf{P}$, параллельной вектору $\mathbf{P}_0$ ($\mathbf{P}_0$ — импульс центра инерции двух нуклонов в лабораторной системе координат).

Вводя продольную ($\mathbf{P}_1$) и поперечную ($\mathbf{P}_2$) составляющие относительного импульса нуклонов, получим

$$d\mathbf{P} = dP_1 dP_2 2\pi P_2, \quad f(\vartheta) d\vartheta = 2\pi P_2 \int \omega_P dP_1 \frac{dP_2}{d\vartheta} d\vartheta.$$

Здесь ϑ — угол между направлениями вылета нуклонов. Нетрудно убедиться, что при $P \ll P_0$

$$\vartheta = 4P_2/P_0,$$

поэтому распределение по углам дается выражением

$$f(\vartheta) d\vartheta = \frac{2\pi P_0^2}{16} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_P dP_1 \vartheta d\vartheta.$$

Для нейтрона и протона получаем из (4)

$$\begin{aligned} f(\vartheta) d\vartheta &= \frac{P_0^2}{16} C'_{np} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{[(P_1^2 + P_2^2)/M] + \epsilon_0} + \frac{a'}{[(P_1^2 + P_2^2)/M] + \epsilon_1} \right\} dP_1 2\pi \vartheta d\vartheta = \\ &= A_{np} \left\{ \frac{1}{V(4\epsilon_0/E_0) + \vartheta^2} + \frac{a'}{V(4\epsilon_1/E_0) + \vartheta^2} \right\} \vartheta d\vartheta, \end{aligned} \quad (7)$$

где E_0 — энергия центра инерции двух нуклонов, равная $E_0 = P_0^2/4M$. Величина a' определяет долю столкновений, сопровождающихся изменением спина системы нейтрон — протон при прохождении через ядро.

Для двух нейтронов получаем

$$f_{nn}(\vartheta) d\vartheta = A_{nn} \frac{\vartheta d\vartheta}{V(4\epsilon/E_0) + \vartheta^2}. \quad (8)$$

В том случае, когда после столкновения вылетают два протона, выражение (6) необходимо проинтегрировать по продольному импульсу P_1 . Производя численное интегрирование выражения (6), получаем

$$f_{pp}(\vartheta) d\vartheta = A_{pp} \Phi(E_2) \vartheta d\vartheta; \quad (9)$$

здесь A_{pp} — некоторая постоянная, а «поперечная» энергия E_2 связана с углом ϑ соотношением $E_2 = E_0 \vartheta^2/4$, где E_0 — энергия налетающего дейтрона. Функцию Φ , фигурирующую в (9), приводим в виде таблицы:

E_2 (MeV)	0	1	2	3	4	5
Φ	1,00	0,82	0,59	0,40	0,34	0,31

Формулы (3) — (9) справедливы при условии, что $\vartheta \ll \vartheta_0$, где ϑ_0 — угол отклонения импульса центра инерции при прохождении через ядро. [Это условие эквивалентно условию, использованному при получении формулы (3): $P \ll \hbar q$.]

8. При выводе распределений по энергии относительного движения и формул для угловой корреляции было использовано только то обстоятельство, что вероятность процесса (при больших q) пропорциональна квадрату функции двух нуклонов на малых расстояниях. Поэтому можно думать, что формулы (4)–(9) будут справедливы не только в том случае, когда нуклоны с малой взаимной энергией образовались в результате столкновения дейтрона с нуклоном или ядром, но и в других случаях (например, при столкновении α -частиц с ядрами).

9. Выражения (5) и (8), дающие энергетическую и угловую корреляцию двух медленных нейтронов, получившихся в результате столкновения нейтрона с дейтроном, могут быть использованы для измерения весьма важной величины ε , характеризующей взаимодействия двух нейтронов с антипараллельными спинами.

Для этой цели может оказаться более удобным изучение распределения по энергиям быстрых протонов, появившихся в результате обменного соударения. Распределение протонов по энергии легко может быть получено из распределения (5), если ограничиться той областью энергий протонов, где энергия относительного движения двух нейтронов достаточно мала. Из закона сохранения энергии и импульса вытекает

$$E_0 = E_p + \frac{P_p^2}{4M} + E_{nn} = \frac{3}{2}E_p + E_{nn}, \quad (10)$$

где E_p и P_p — энергия и импульс протона, E_{nn} — энергия двух нейтронов в системе их центра инерции. Обозначим максимальную энергию протонов через $E_p^m = \frac{2}{3}E_0$, тогда

$$E_p = E_p^m - \frac{2}{3}E_{nn}. \quad (11)$$

Распределение протонов по энергии вблизи E_p^m будет определяться тем, что сечение процесса пропорционально выражению (5) и статистическому весу конечного состояния

$$f_p(E_p) dE_p = C_1 \frac{1}{E_{nn} + \varepsilon} P^2 \frac{dP}{dE_{nn}} dE_p = C \frac{\sqrt{E_{nn}}}{E_{nn} + \varepsilon} dE_p.$$

Используя (11), получаем

$$f_p(E_p) dE_p = C \sqrt{\frac{2}{3}} [V \overline{E_p^m - E_p} / (E_p^m - E_p + \frac{2}{3}\varepsilon)] dE_p. \quad (12)$$

Распределение (12) имеет максимум при $E_p^m - E_p = \frac{2}{3}\varepsilon$.

Если существует динейтрон, то наряду с распределением (12) существуют монохроматические протоны с энергией, равной [как видно из (10)] $E_p' = E_p^m + \frac{2}{3}\varepsilon$.

Сечение образования динейтрона σ_0 может быть количественно связано с сечением образования двух нейтронов в свободном состоянии. Действительно, отношение сечений этих двух процессов определяется отношением $|\varphi_p(r_1)|^2 / |\varphi_0(r_1)|^2$, где φ_0 — функция динейтрона.

Функция динейтрона и функция φ_p должны быть записаны в том же виде, как и для системы нейтрон — протон (с заменой ε_0 на ε). Отношение этих выражений, как легко видеть из теории рассеяния нейтронов протонами и из теории дейтрона, равно (для малых r_1)

$$\frac{|\varphi_p(r_1)|^2}{|\varphi_0(r_1)|^2} = \left(\frac{\hbar^2}{M}\right)^{3/2} \frac{2\pi}{\varepsilon^{1/2} E_{nn} + \varepsilon} \quad (13)$$

при нормировке функций φ_p на единицу объема и функции φ_0 на единицу. Нетрудно видеть, что при этой нормировке функций φ_p в отношение сечений войдет также выражение

$$\frac{3\pi}{(2\pi\hbar)^3} P^2 \frac{dP}{dE_{nn}} \sqrt{\frac{E'_p}{E_p}} dE_p, \quad (14)$$

возникающее из отношения статистических весов свободного и связанного состояний.

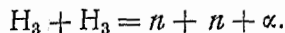
Используя (14) и (13), получаем

$$d\sigma = \sigma_0 \frac{3}{4\pi} \frac{\sqrt{E_{nn}}}{E_{nn} + \varepsilon} \sqrt{\frac{E_p}{E'_p \varepsilon}} dE_p = \frac{\sigma_0}{2\pi} \sqrt{\frac{E'_p}{E'_p \varepsilon'}} \frac{\sqrt{E_p^m - E_p}}{E_p^m - E_p^* + \varepsilon'} dE_p; \quad \varepsilon' = 2/3 \varepsilon. \quad (15)$$

Выражение (15) справедливо только для энергий E_p , близких к E_p^m . Для грубой оценки соотношения между интегральным сечением образования свободных частиц и сечением образования связанного состояния предположим, что выражение (15) справедливо во всем интервале энергий E_p . Тогда, интегрируя (15) по E_p от нуля до E_p^m , получим

$$\sigma_0 / \int d\sigma \approx 4 \sqrt{\varepsilon' / E_p^m}. \quad (16)$$

10. Формулы (10), (15) и (16) будут справедливы и в том случае, когда изучается распределение по энергии α -частиц в реакции:



Распределение α -частиц по энергии будет иметь тот же вид, что и распределение протонов в рассмотренной выше реакции $n + H_2 = n + n + p$. Величина ε' в случае α -частиц равна $\varepsilon' = 1/3 \varepsilon$. Главной трудностью экспериментов этого рода является необходимость разрешения двух максимумов в кривой распределения (α -частиц или протонов). Один максимум (при энергии $E_p = E_p^m - 2/3 \varepsilon$ или $E_\alpha = E_\alpha^m - 1/3 \varepsilon$) соответствует свободным нейтронам, тогда как другой (при энергии $E_p = E_p^m + 2/3 \varepsilon$ или $E_\alpha = E_\alpha^m + 1/3 \varepsilon$) соответствует связанному состоянию двух нейтронов (если оно существует).

Так как величина ε , повидимому, очень мала (для двух протонов и для протона и нейтрона с антипараллельными спинами величина $\varepsilon \sim 100$ keV), то для доказательства существования динейтрона необходимо чрезвычайно точное определение энергий α -частиц (или протонов). Это обстоятельство не учитывалось при экспериментальной попытке обнаружения динейтрона.

11. Выражения (15) и (16), полученные для случая двух нейтронов, разумеется, справедливы и для случая нейтрон — протон, если под σ_0 понимать сечение образования дейтрона, а под $d\sigma$ — сечение образования свободного нейтрона и протона с параллельными спинами. Можно думать, что эти выражения остаются справедливыми и в том случае, когда происходит соударение дейтрона или более сложной частицы с ядром. Формула (16) дает тогда оценку отношения вероятности образования свободных нуклонов к вероятности образования этих же нуклонов в связанном состоянии в результате ядерной реакции. Под E_p^m следует понимать максимальную энергию, которая передается нуклонам в рассматриваемой реакции. Заметим, что оценка этого отношения без учета взаимодействия нуклонов давалась бы

отношением объема пространства импульсов в дейтроне и в свободном состоянии, т. е. имела бы вид

$$\sigma_0 / \int d\mathbf{s} \sim (\epsilon_0 / E^m)^{1/2}.$$

Учет взаимодействия нуклонов, как было показано, приводит к гораздо большей вероятности образования дейтрона. Благодаря резонансному знаменателю в выражении (4) получается оценка, даваемая (16). Эта формула объясняет частое возникновение дейтронов в ядерных реакциях.

Выражаю благодарность за интересные дискуссии Б. Т. Гейликину, И. Я. Померанчуку и Я. А. Смородинскому.

Поступила в редакцию
23 февраля 1954 г.

Литература

- [1] Л. Д. Ландау и Я. А. Смородинский. ЖЭТФ, 14, 269, 1944. —
[2] J. D. Jackson а. J. M. Blatt. Rev. Mod. Phys., 22, 77, 1950. — [3] K. M. Watson. Phys. Rev., 88, 1163, 1952.

ОБРАЗОВАНИЕ МЕЗОНОВ ПРИ ЭНЕРГИИ, БЛИЗКОЙ К ПОРОГОВОЙ¹

А. Б. Мигдал

Определен энергетический спектр мезонов, образующихся при столкновениях двух нуклонов. Наиболее вероятным оказывается образование нуклонов с очень малой взаимной энергией. Вследствие этого наиболее вероятная энергия мезонов близка к максимальной энергии, допустимой для мезонов по законам сохранения. Получено соотношение между сечением образования дейтрона (в реакциях $p + p = n + p + \pi^+$; $n + p = p + n + \pi^0$; $n + n = n + p + \pi^-$) и сечением образования свободных нейтронов и протонов с параллельными спинами.

1. Сечение образования мезона с импульсом P_μ в интервале dP_μ , когда относительный импульс нуклонов P_n находится в интервале углов $d\omega_n$, равно

$$d\sigma = dP_\mu P_n^2 (dP_n / dE_n) d\omega_n \left| \int \varphi_1^* H' \varphi_0 d\tau \right|^2. \quad (1)$$

φ_0, φ_1 — точные волновые функции относительного движения двух взаимодействующих нуклонов в начальном и конечном состояниях.

Так как вид оператора H' не будет использован, то выражение (1) не содержит предположения о малости взаимодействия нуклонов с мезонным полем. Функция φ_0 описывает состояние с большим относительным импульсом нуклонов и меняет знак на расстояниях порядка $\hbar / P_n^0 \ll r_0$, где r_0 — радиус сил взаимодействия. Поэтому при интегрировании по относительным координатам нуклонов играют роль расстояния, меньшие чем r_0 , и интеграл существенно зависит от хода потенциала взаимодействия на малых расстояниях, который в настоящее время неизвестен. Легко видеть, что зависимость сечения от энергии относительного движения нуклонов конечного состояния можно найти без предположений о виде взаимодействия между нуклонами и о виде оператора H' . Действительно, при выбранной в (1) нормировке (на единицу объема) функции φ , рассматриваемые как функции комплексного переменного P_n , должны иметь полюсы при мнимых значениях P_n , соответствующих реальным или виртуальным уровням системы двух нуклонов [1]. Поэтому зависимость интеграла в (1) от взаимной энергии нуклонов конечного состояния E_n дается выражением

$$\left| \int \varphi_1^* H' \varphi_0 d\tau \right|^2 = \frac{U(P_n, P_n^0, P_\mu)}{E_n + \varepsilon}. \quad (2)$$

P_n^0 — начальный импульс нуклонов, ε — абсолютная энергия уровня. Из теории рассеяния нейтронов протонами легко получить, что

$$U(P_n, P_n^0, E_\mu) = U(0, P_n^0, E_\mu) [1 + O(E_n / V_0)],$$

¹ Доложена на теоретическом семинаре в Институте физических проблем АН СССР в октябре 1950 г.

Примечание при корректуре. Со времени окончания работы появилось несколько статей, посвященных тому же вопросу (см., например, [2]).

где V_0 — глубина потенциальной ямы. Резонансный знаменатель выражения (2) совпадает с тем, который получается в теории рассеяния нейтронов протонами, и сечение не зависит от углов вектора $\mathbf{P}_n$. (Случай двух нейтронов и двух протонов рассмотрен ниже.) Величина $\varepsilon = \varepsilon_0 = 2,2 \text{ MeV}$ для параллельных спинов и $\varepsilon = \varepsilon_1 = 0,07 \text{ MeV}$ для антипараллельных спинов нейтрона и протона.

Используя законы сохранения энергии и импульса и интегрируя (1) по $d\omega_\mu d\omega_n$, получим

$$d\sigma = C(E_n^0, E_\mu) = \frac{V(E_\mu^m - E_\mu) E_\mu}{E_\mu^m - E_\mu + \varepsilon'} \sqrt{1 + \frac{E_\mu}{2\mu c^2}} \left(1 + \frac{E_\mu}{\mu c^2}\right) dE_\mu; \quad (3)$$

$$E_\mu^m = \frac{E_n^0 - \mu c^2}{1 + (\mu/2M)}; \quad \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{1 + (\mu/2M)},$$

где E_μ^m — максимальная энергия мезонов. Для энергий E_μ , близких к максимальной ($E_\mu^m - E_\mu \ll E_\mu^m$), можно положить $C(E_n^0, E_\mu) \approx C(E_n^0, E_\mu^m)$. Как видно из (3), спектр мезонов имеет максимум при энергии $E_\mu \approx E_\mu^m - \varepsilon'$.

2. Можно получить соотношение между сечением (3) для параллельных спинов нуклонов и сечением, соответствующим образованию дейтрона в конечном состоянии. Внутри области действия ядерных сил ($r < r_0$) функции φ_1 для свободного и связанного состояний нейтрона и протона отличаются лишь постоянными множителями, которые определяются значениями функций при $r = r_0$ (если можно пренебречь энергией нуклонов по сравнению с глубиной потенциальной ямы V_0). Функции вне области действия сил известны из теории дейтрона и из теории рассеяния нейтронов протонами [2]. Можно показать, что

$$\left| \frac{\varphi_0(r_0)}{\varphi_{P_n}(r_0)} \right|^2 = \left(\frac{M}{\hbar^2} \right)^{1/2} \frac{\varepsilon_0^{1/2}}{2\pi} (E_n + \varepsilon_0) \left\{ 1 + O\left(\frac{\varepsilon}{V_0} \frac{E_n}{V_0} \right) \right\}. \quad (4)$$

Используя (4), нетрудно получить

$$d\sigma = \frac{\sigma_0}{2\pi \sqrt{[1 + (\mu/2M)] \varepsilon_0 E_\mu'}} \frac{V(E_\mu^m - E_\mu) E_\mu}{(E_\mu^m - E_\mu + \varepsilon_0')} \frac{\sqrt{1 + (E_\mu/2\mu c^2)}}{\sqrt{1 + (E_\mu'/2\mu c^2)}} \times$$

$$\times \frac{1 + (E_\mu/\mu c^2)}{1 + (E_\mu'/\mu c^2)} \frac{C(E_n^0, E_\mu)}{C(E_n^0, E_\mu')} dE_\mu d\omega_\mu; \quad (5)$$

$$\varepsilon_0' = \frac{\varepsilon_0}{1 + (\mu/M)}, \quad E_\mu' = E_\mu^m + \varepsilon_0';$$

σ_0 — сечение для образования дейтрона, рассчитанное на единицу телесного угла мезонов. Вблизи правой границы спектра мезонов $C(E_n^0, E_\mu) / C(E_n^0, E_\mu') \approx 1$. Экспериментальный спектр мезонов представляет собой наложение двух кривых: распределения (5) и аналогичного распределения для антипараллельных спинов нейтрона и протона. Интегрируя (5) по dE_μ и $d\omega_\mu$ и предполагая $C(E_n^0, E_\mu)$ растущей функцией от E_μ , получим соотношение

$$\int \sigma_0 d\omega_\mu / \int \sigma d\omega_\mu dE_\mu \geq 4 \sqrt{\varepsilon_0 / E_\mu^m}. \quad (6)$$

Знак равенства соответствует независимости H' от энергии мезонов (при условии $E_\mu \ll \mu c^2$). Если $H' \sim \sqrt{E_\mu}$, то

$$\int \sigma_0 d\omega_\mu / \int \sigma d\omega_\mu dE_\mu = 10/3 \sqrt{\varepsilon_0 / E_\mu^m}. \quad (6')$$

3. Когда в конечном состоянии оказываются два нейтрона (реакции $p + n = n + n + \pi^+$, $n + n = n + n + \pi^0$), то с заметной вероятностью осуществляется только случай антипараллельных спинов. Нейтроны с параллельными спинами не могут, согласно правилу запрета, находиться в S-состоянии и, следовательно, при малых энергиях не взаимодействуют. Поэтому сечение образования мезонов для нейтронов с параллельными спинами в конечном состоянии не содержит резонансного множителя (2) и значительно меньше, чем сечение для нейтронов с антипараллельными спинами. По этой же причине сечение не зависит от направления вектора $\mathbf{P}_n$. Распределение мезонов по энергиям дается выражением (3), однако величина ε в этом случае неизвестна.

4. В случае двух протонов в конечном состоянии (реакции $p + n = p + p + \pi^-$, $p + p = p + p + \pi^0$), находя зависимость функции φ_1 от энергии при $r = r_0$, нетрудно получить, используя результаты теории рассеяния протонов протонами [3,4]:

$$d\sigma = C_1 (E_n^0 E_\mu) \frac{F(\eta) \sqrt{(E_\mu^m - E_\mu) E_\mu} \sqrt{1 + (E_\mu / 2\mu c^2)} (1 + E_\mu / \mu c^2) dE_\mu}{F^2(\eta) (E_\mu^m - E_\mu) - \frac{\hbar^2}{M + (\mu/2)} \left\{ -\frac{1}{a} + \gamma E_n - (h(\eta) / R) \right\}^2}; \quad (7)$$

$$F(\eta) = \frac{2\pi\eta}{e^{2\pi\eta} - 1}; \quad \eta = \frac{e^2}{\hbar v_n}; \quad h(\eta) = \operatorname{Re} \frac{\Gamma'(-i\eta)}{\Gamma(-i\eta)} - \ln \eta;$$

$$R = \frac{\hbar^2}{Me^2} = 2,9 \cdot 10^{-12} \text{ см}; \quad a = -7,7 \cdot 10^{-13} \text{ см}; \quad \gamma = 3,4 \cdot 10^{11} \text{ MeV}^{-1} \text{ см}^{-1}.$$

Кулоновское отталкивание протонов, как видно из (7), существенно меняет форму спектра мезонов вблизи правой границы по сравнению с рассмотренными выше случаями. Как и в случае двух нейтронов, спины протонов антипараллельны, и сечение не зависит от углов вектора $\mathbf{P}_n$.

5. Дифференциальное сечение σ_1 захвата мезонов дейтронами в системе центра инерции легко связать, пользуясь принципом детального равновесия, с сечением σ_0 . Простые вычисления дают

$$\sigma_1 = \sigma_0 (E_n^0) \frac{E_n^0}{E_\mu} \frac{[M + (\mu/2)]}{2\mu} \frac{\sqrt{1 + (E_\mu^0 / \mu c^2)}}{\sqrt{1 + (E_\mu / 2\mu c^2)}} \frac{[1 + (2E_n^0 / \mu c^2)]}{[1 + (E_\mu / \mu c^2)]};$$

$$E_n^0 = \mu c^2 + \frac{P_\mu^2}{4M} + E'_\mu - \varepsilon_0. \quad (8)$$

Выражаю благодарность Н. М. Полиевтову-Николадзе и Л. М. Сороке за интересные дискуссии.

Поступила в редакцию
23 февраля 1954 г.

Литература

- [1] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. Квантовая механика, ОГИЗ, 1948. — [2] Я. А. Смородинский. ЖЭТФ, 17, 941, 1947; ДАН СССР, 60, 217, 1948. — [3] Л. Д. Ландау и Я. А. Смородинский. ЖЭТФ, 14, 269, 1944. — [4] J. D. Jackson and J. H. Blatt. Rev. Mod. Phys., 22, 77, 1950. — [5] K. M. Watson. Phys. Rev., 88, 1163, 1952.

ЗАМЕЧАНИЯ К ТЕОРИИ СЛИЯНИЯ

Г. А. Соколик

Дается обобщение теории слияния де-Бройля, пригодное также для бесконечномерных уравнений.

В теории слияния де-Бройля, обобщившей идеи нейтринной теории света [1], был указан метод образования частиц с высшими спинами из частиц со спином $1/2$ [2].

В настоящей работе предлагается несколько более общая точка зрения на теорию слияния. Задача формулируется следующим образом: пусть имеются два релятивистски инвариантных уравнения, вообще говоря, бесконечномерных

$$\gamma_{\mu}^{(1)} \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial x_{\mu}} + \kappa' \psi^{(1)} = 0, \quad \gamma_{\mu}^{(2)} \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial x_{\mu}} + \kappa'' \psi^{(2)} = 0, \quad (1)$$

заданных соответственно двумя приводимыми представлениями группы Лоренца $\tau^{(1)}$ и $\tau^{(2)}$. Требуется найти инвариантное уравнение, соответствующее кронекеровскому произведению $(\tau^{(1)} \times \tau^{(2)})$. В наших рассуждениях будут использованы результаты и обозначения работы Гельфанда и Яглома [3].

1. Для дальнейшего нам необходимо иметь формулу разложения прямого произведения двух неприводимых представлений группы Лоренца. Инфинитезимальное представление группы задается операторами $F^+, F^-, F^0, H^+, H^-, H^0$. Их вид для неприводимого представления задан весовыми числами k_0, k_1 [3]. Если k_0, k_1 одновременно являются целыми или полуцелыми вещественными числами, причем $k_0 < k_1$, то представление конечномерно.

Пространство представления задается базисными векторами ξ_p^k , где полный момент k , являющийся весовым числом подгруппы вращения H^+, H^-, H^0 , пробегает ряд значений ($k = |k_0|, |k_0| + 1, |k_0| + 2, \dots$). Для конечномерного случая последовательность k обрывается на $k = |k_1| - 1$ ($p = k, k - 1, \dots, -k$). Нетрудно показать, что инфинитезимальное представление группы τ_n имеет два скалярных оператора Δ_1 и Δ_2 , коммутирующих со всеми операторами представления и имеющих вид:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= F^+ F^- + F^{02} - H^+ H^- - H^{02} - 2iH^0, \\ \Delta_2 &= 2F^0 H^0 + F^+ H^- + F^- H^+. \end{aligned} \quad (2)$$

Эти операторы задаются формулами

$$\begin{aligned} \Delta_1 \xi_p^k &= (k_0^2 + k_1^2 - 1) \xi_p^k, \\ \Delta_2 \xi_p^k &= 2i(k_0 k_1) \xi_p^k. \end{aligned} \quad (2')$$

Базис пространства произведения представлений $(\tau_n^{(1)} \times \tau_k^{(2)})$ образован векторами $\xi_{p_1}^{(1)k_1} \xi_{p_2}^{(2)k_2}$, записанными в лексикографическом порядке

$$(\xi_{p_1}^{(1)h_1} \xi_{p_2}^{(2)h_2}) < \xi_{m_1}^{(1)l_1} \xi_{m_2}^{(2)l_2}, \text{ если } k_1 < l_1 \text{ или } k_1 = l_1, k_2 < l_2.$$

Как легко показать, коммутирующие между собой операторы Δ_1 и Δ_2 (2) и известный скалярный оператор подгруппы вращения $[H^2 + k(k+1)] \xi_p^h = 0$, записанные в базисе $\xi_{p_1}^{(1)h_1} \xi_{p_2}^{(2)h_2}$, приводятся одновременно к диагональному виду матрицей T , имеющей в самом общем случае вид: $T = AC$, где C — ящичная матрица, составленная из конечномерных матриц $\|C_{p_1 p_2}^{h_1, h_2, \lambda}\|$, занумерованных парами (k_1, k_2) , где через $C_{p_1 p_2}^{h_1, h_2, \lambda}$ обозначается член известного разложения Клебша — Жордана [4], A — матрицы, коммутирующие с H^2 . (Конкретный вид A задается для каждого отдельного случая.) Отсюда имеем $\Delta'_1 = T^{-1} \Delta_1 T$ и $\Delta'_2 = T^{-1} \Delta_2 T$, где Δ'_1 и Δ'_2 — диагональные матрицы.

Из собственных значений Δ'_1, Δ'_2 , используя формулу (2), получим числа $(\pm k_0^m, \pm k_1^m) = \tau_m$ представлений, на которые разлагается $(\tau_n^{(1)} \times \tau_n^{(2)})$. Разложение, пригодное также для бесконечномерных случаев, особенно просто записывается в случае конечномерных представлений:

$$[(k_0' k_1') \times (k_0'' k_1'')] = (k_0' + k_0'', k_1' + k_1'' - 1) + (k_0' + k_0'' + 1, k_1' + k_1'' - 2) + \\ + (k_0' + k_0'' - 1, k_1' + k_1'' - 2) + (k_0' + k_0'' + 2, k_1' + k_1'' - 3) + \\ + (k_0' + k_0'', k_1' + k_1'' - 3) + (k_0' + k_0'' - 2, k_1' + k_1'' - 3) + \dots \quad (3)$$

В частном случае, когда (k_0', k_1') и (k_0'', k_1'') полуцелые числа, (3) совпадает с формулой Картана [5]. Последнюю нельзя обобщить на бесконечномерный случай, пользуясь спинорным формализмом, развитым Картаном.

2. Используя полученные формулы, можно решить поставленную задачу построения обобщенного уравнения для слившихся функций $(\psi^{(1)} \psi^{(2)})$. Представления $\tau^{(1)}$ и $\tau^{(2)}$ разлагаются на неприводимые компоненты $\tau^{(1)} \sim \tau_1^{(1)} + \tau_2^{(1)} + \dots$; $\tau^{(2)} \sim \tau_1^{(2)} + \tau_2^{(2)} + \dots$. Беря произведение $(\tau^{(1)} \times \tau^{(2)})$ и используя приведенное выше разложение на неприводимые представления, получим сумму неприводимых компонент τ_i . Задаем ящичную матрицу T , составленную из матриц $\|T_{\tau_i \tau_j}\|$, полученных в предыдущем параграфе, причем $(\tau_i \tau_j)$, как и прежде, лексикографически упорядочены.

Базис пространства $(\tau^{(1)} \times \tau^{(2)})$ задан векторами $g_{p\tau}^h$, связанными с $\xi_{p_1 \tau_1}^{(1)h_1} \xi_{p_2 \tau_2}^{(2)h_2}$ формулой:

$$g_{p\tau}^h = \sum_{\substack{h_1, h_2 \\ \tau_1, \tau_2 \\ p_1 + p_2 = p}} T_{p\tau; p_1 \tau_1 p_2 \tau_2}^{h; h_1 h_2} \xi_{p_1 \tau_1}^{(1)h_1} \xi_{p_2 \tau_2}^{(2)h_2}. \quad (4)$$

Полагая в выражении для матрицы T , $A = I$, где I — единичная матрица, получаем из (4) обычное разложение Клебша — Жордана. Полученное разложение (4) определяет основную матрицу γ_0 , задающую обобщенное уравнение для слившихся функций:

$$\gamma^0 = \|\hat{C}_{\tau\tau'}^h \delta_{p p'} \delta_{hh'}\|; \quad (5)$$

вид $\hat{C}_{\tau\tau'}^h$ найден в [3]. γ^0 можно вычислить непосредственно в базисе $\xi_{p_1 \tau_1}^{(1)h_1} \xi_{p_2 \tau_2}^{(2)h_2}$ из известного условия лоренцевской инвариантности:

$$\gamma^0 = [[\gamma^0 F^0] F^0]. \quad (5')$$

Для этой цели, представляя γ^0 в виде:

$$\gamma^{0'} \xi^{(1)h_1}_{P_1 \tau_1 \xi} \xi^{(2)h_2}_{P_2 \tau_2} = \sum_{\tau_1' \tau_2'} c^{h_1 h_2}_{\tau_1 \tau_2 \tau_1' \tau_2'} \xi^{(1)h_1}_{P_1 \tau_1'} \xi^{(2)h_2}_{P_2 \tau_2'}, \quad (6)$$

и пользуясь (5), получаем 12 однородных уравнений относительно коэффициентов:

$$c^{h_1 \pm 1 h_2}_{\tau_1 \tau_2 \tau_1' \tau_2'}, \quad c^{h_1 h_2 \pm 1}_{\tau_1 \tau_2 \tau_1' \tau_2'}, \quad c^{h_1 \pm 1 h_2 \pm 1}_{\tau_1 \tau_2 \tau_1' \tau_2'}, \quad c^{h_1 \pm 1 h_2 \pm 1}_{\tau_1 \tau_2 \tau_1' \tau_2'}, \quad c^{h_1 h_2}_{\tau_1 \tau_2 \tau_1' \tau_2'}. \quad (7)$$

После довольно громоздких преобразований можно показать, что полученная система уравнений имеет нетривиальные решения, только когда $(\tau_1 \tau_2)$ и $(\tau_1' \tau_2')$ связаны следующими возможными соотношениями

$$k_0'^{(1)} = k_0^{(1)}, \quad k_0'^{(2)} = k_0^{(2)}, \quad k_1'^{(1)} = k_1^{(1)} \pm 1, \quad k_1'^{(2)} = k_1^{(2)} \pm 1,$$

или

$$k_0'^{(1)} = k_0^{(1)} \pm 1, \quad k_0'^{(2)} = k_0^{(2)} \pm 1, \quad k_1'^{(1)} = k_1^{(1)}, \quad k_1'^{(2)} = k_1^{(2)},$$

или

$$k_0'^{(1)} = k_0^{(1)} \pm 1, \quad k_0'^{(2)} = k_0^{(2)}, \quad k_1'^{(1)} = k_1^{(1)}, \quad k_1'^{(2)} = k_1^{(2)} \pm 1,$$

или

$$k_0'^{(1)} = k_0^{(1)}, \quad k_0'^{(2)} = k_0^{(2)} \pm 1, \quad k_1'^{(1)} = k_1^{(1)} \pm 1, \quad k_1'^{(2)} = k_1^{(2)},$$

т. е. когда (τ_1, τ_2) и (τ_1', τ_2') попарно «зацепляются».

3. Отметим теперь связь между обобщенными уравнениями для слившихся функций, заданными формулами (5), (5'), и уравнениями теории де-Бройля [2]. Рассмотрим частный случай слияния двух одинаковых конечномерных уравнений, заданных матрицей γ^0 , в том случае, когда последняя приводима к диагональному виду. Тогда матрица β^0 , определенная по (5) и (5'), может быть выражена в форме:

$$\beta^0 = \frac{1}{2} (\gamma^0 I' + \gamma^{0'} I); \quad (8)$$

γ^0 и $\gamma^{0'}$ относятся к разным системам индексов; I и I' — соответственные единичные матрицы. При этом собственные значения μ_i матрицы β^0 подчиняются условию $\mu_i = \frac{1}{2} (\lambda_k + \lambda_j)$ (λ_k, λ_j — собственные значения матрицы γ^0); разным μ_i соответствуют разные пары λ_k, λ_j . Условие (8) дает известное представление теории де-Бройля [2].

Таким образом показано, что уравнения теории слияния де-Бройля получаются из наших общих уравнений для слившихся функций, причем условие слияния, введенное в [2], при таком выводе не используется. Как показано в [2], для уравнений де-Бройля состояния с различными спинами разделяются в отсутствие внешних полей.

В качестве примера рассмотрим слияние двух спинорных уравнений, являющееся основой теории де-Бройля. Как показано в [3], уравнение Дирака задается представлениями $(-1/2, 3/2) = (1/2, 3/2)$, при этом γ^0 имеет вид:

$$\gamma^0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Перемножая представления и пользуясь формулой разложения (3), получим следующие неприводимые представления: $(0, 1)$, $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(0, 2)$, $(-1, 2)$, $(1, 2)$. Для того чтобы соответствующая этому представ-

лению матрица γ^0 была приводима к диагональному виду, причем энергия оставалась бы положительно определенной согласно теореме Паули [6], необходимо представить полученные неприводимые компоненты в виде:

$$\begin{aligned}(-1 \ 2) &= (0 \ 2) = (1 \ 2) \sim 1, \\(0 \ 1) &= (0 \ 2) \sim 2, \\(0 \ 1) &\sim 3.\end{aligned}$$

Таким образом уравнение для слившихся функций распадается на два уравнения: 10-мерное, заданное представлением 1, и 5-мерное, заданное представлением 2. Представление 3 задает тривиальное одномерное уравнение.

Легко показать, что полученное уравнение совпадает с уравнением Дэффина [6]. Как известно, это уравнение описывает частицы со спином 1 и 0, и его матрица удовлетворяет соотношению (8). Легко заметить, что возможна более общая схема «зацепления» неприводимых представлений, задающая нераспадающееся уравнение. При этом энергия будет положительно определенной только при наличии дополнительных условий. В этом случае уравнение также описывает частицу со спинами 1 и 0.

Отметим, что в соответствующих обобщенных уравнениях для слившихся функций состояния различных спинов, вообще говоря, не разделяются, даже в случае отсутствия внешних полей, как это следует из [8]. Это перепутывание компонент можно интерпретировать как наличие внутренних взаимодействий в слившейся частице.

Новый тип взаимодействия, предложенный в настоящей работе, отличается от обычных взаимодействий тем, что внутренние взаимодействия связывают между собой компоненты неприводимых представлений группы Лоренца, а не компоненты ψ -функций, как обычно. Таким образом появляется возможность задать структуру элементарной частицы базисом представления группы Лоренца, вообще говоря, бесконечномерного. Связь между внутренними взаимодействиями и дополнительными условиями рассмотрена также в работе Гуревича [8]. Следует заметить, что в теории де-Бройля частицы высших спинов описываются распадающимися уравнениями, что представляется искусственным с точки зрения теории частиц произвольных спинов Гельфанда и Яглома. Предполагается, что рассмотрение задачи в бесконечномерном случае может привести к общей теории нелокального поля, заданного вектором в гильбертовом пространстве [7].

В заключение считаю своим долгом выразить благодарность проф. Д. Д. Иваненко за ряд ценных замечаний и многократное обсуждение полученных результатов.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
25 февраля 1953 г.

Литература

- [1] А. А. Соколов. ЖЭТФ, 7, 1055, 1937.— [2] L. de Broglie. Théorie générale des particules à spin (méthode de fusion), Paris, 1943.— [3] И. Гельфанд и А. Яглом. ЖЭТФ, 18, 703, 1948.— [4] Ван-дер-Варден. Метод теории групп в квантовой механике, Киев—Харьков, 1938.— [5] Э. Картан. Теория спиноров, ИИЛ, М., 1947.— [6] В. Паули. Релятивистская теория элементарных частиц, ИИЛ, М., 1947.— [7] А. А. Соколов и Д. Д. Иваненко. Квантовая теория поля, ГИТТЛ, М., 1952.— [8] А. Гуревич, ЖЭТФ, 24, 149, 1953.

О ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЛАЗМЫ. I

А. А. Лучина

Решается задача о распространении продольных волн в плазме при заданных условиях на границе. Получено «дисперсионное» уравнение с учетом движения ионов.

1. Введение

При изучении открытых Лэнгмюром колебательных процессов в плазме, возникающих благодаря кулоновскому взаимодействию между заряженными частицами, обычно учитывают только движение электронов. Предложенный Власовым [1] эффективный метод исследования специфических электрических свойств плазмы — метод самосогласованного поля — применяется в основном только к ним. Ионы же вследствие их большой массы рассматриваются как положительный фон, не оказывающий влияния на колебания электронов.

Правда, в последнее время в ряде работ [2-4] имеются указания на необходимость учета ионных колебаний. Однако достаточно подробных исследований, таких, как для электронов [5-6], в литературе не имеется¹.

Между тем ионы могут играть значительную роль в колебательных свойствах плазмы. В самом деле, вследствие сравнимости длин свободного пробега электронов и ионов квадраты их скоростей трансляции относятся друг к другу как обратные величины их масс M/m . Поэтому при прохождении электронов и ионов через область переменного потенциала (колеблющийся двойной электрический слой и пр.) амплитуда колебаний ионов может оказаться сравнимой с амплитудой колебаний электронов или даже превосходить ее, при условии, что время пролета этой области меньше периода переменного потенциала. Это обстоятельство очевидно, так как время пролета указанной области для ионов в $\sqrt{M/m}$ раз больше, чем для электронов, хотя ускорение, приобретаемое ионом, в m/M раз меньше ускорения, сообщаемого электрону.

Особую роль ионы начинают играть при рассмотрении своеобразного автоколебательного процесса в плазме, приводящего к возможности существования практически незатухающих волн, несмотря на наличие соударений [3]. Наличие двух потоков заряженных частиц с различными скоростями (электронов и ионов) приводит к существованию незатухающих колебаний, если потери энергии волны за счет соударений компенсируются путем перекачки энергии от направленного движения к волне посредством кулоновского взаимодействия двух потоков частиц.

¹ Работу Базарова [7], посвященную учету влияния ионов на распространение продольных волн в плазме, мы считаем несостоятельной. В частности, при выводе исходного дисперсионного уравнения, которое в дальнейшем исследуется, допущена алгебраическая ошибка, вследствие чего электронные и ионные члены, пропорциональные квадрату заряда, в уравнении Базарова имеют разные знаки.

Строгое решение задачи о продольных колебаниях плазмы (без учета ионов и соударений) дано в работе Ландау [8] для случая, когда задано начальное отклонение функции распределения от равновесного (задача с начальными условиями). Постановка же задачи о колебаниях плазмы при заданных граничных условиях и строгое ее решение до настоящего времени отсутствуют. Между тем при рассмотрении колебаний плазмы, имеющих стационарный характер (например, в разрядных трубках), именно такая постановка задачи должна иметь место.

Задачей настоящей статьи является исследование стационарных колебаний плазмы, вызванных кулоновскими силами, при заданных условиях на границе и анализ роли ионов в распространении продольных волн в плазме.

Принимая во внимание, что в плазме могут наблюдаться синусоидальные колебания с амплитудой, не связанной с величиной ионизационного потенциала, в статье II (см. этот выпуск, стр. 28) делается попытка отождествить рассматриваемые продольные волны плотности с экспериментально наблюдаемыми стратами и проводится сравнение теории с экспериментом.

2. Постановка задачи

В основу дальнейшего рассмотрения положены кинетические уравнения для электронов и ионов с учетом взаимодействия заряженных частиц методом самосогласованного поля в форме, предложенной Власовым [1]. Упругие соударения заряженных частиц с нейтральными учтены посредством интегрального члена Больцмана.

Исходная система уравнений имеет следующий вид:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} - \frac{e}{m} \text{grad}(\varphi + \varphi_{\text{вн}}) \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} = \iint (f_1' f_a' - f_1 f_a) V_1 d\sigma_1 (d\mathbf{v}_a), \quad (1)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{M} \text{grad}(\varphi + \varphi_{\text{вн}}) \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{v}} = \iint (f_2' f_a' - f_2 f_a) V_2 d\sigma_2 (d\mathbf{v}_a), \quad (2)$$

$$\Delta \varphi = -4\pi e \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_1 (d\mathbf{v}) - \int_{-\infty}^{+\infty} f_2 (d\mathbf{v}) \right), \quad (3)$$

где $f_1 = f_1(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$, $f_2 = f_2(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ и $f_a = f_a(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ — функции распределения электронов, ионов и атомов в пространстве координат $\mathbf{r}$ и скоростей $\mathbf{v}$, зависящие от времени t ; V_1 — относительная скорость электрона и атома, V_2 — относительная скорость иона и атома; $d\sigma_1$ и $d\sigma_2$ — дифференциальные эффективные сечения упругих столкновений электронов и ионов с атомами; e — алгебраическая величина заряда электрона; m и M — масса электрона и масса иона; $\varphi_{\text{вн}}$ — потенциал внешнего электрического поля внутри плазмы, обуславливающий дрейф электронов и ионов; φ — суммарный потенциал самосогласованного поля.

Произвольное возмущение некоторой части плазмы будем учитывать заданием соответствующих граничных условий, о которых будет идти речь далее. При отсутствии возмущений система уравнений (1)–(3) определяет распределения электронов f_{10} и ионов f_{20} , не зависящие от времени. Мы будем рассматривать квазинейтральную плазму, для которой при отсутствии возмущения средняя плотность ионов равна средней плотности электронов, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{10} (d\mathbf{v}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{20} (d\mathbf{v}).$$

Для интересующего нас случая равномерного распределения частиц по пространству при отсутствии возмущающих сил система уравнений (1)–(3) распадается на два независимых уравнения:

$$-\frac{e}{m} \operatorname{grad} \varphi_{\text{вн}} \frac{\partial f_{10}}{\partial \mathbf{v}} = \iint (f'_{10} f'_a - f_{10} f_a) V_1 d\sigma_1 (d\mathbf{v}_a), \quad (4)$$

$$\frac{e}{M} \operatorname{grad} \varphi_{\text{вн}} \frac{\partial f_{20}}{\partial \mathbf{v}} = \iint (f'_{20} f'_a - f_{20} f_a) V_2 d\sigma_2 (d\mathbf{v}_a). \quad (5)$$

Уравнение типа (4) решалось рядом авторов. В случае слабых постоянных токов, в предположении обратно пропорциональной зависимости поперечника эффективного сечения упругих соударений электронов с атомами газа от скорости электрона, как показано в работах [6,9], распределение f_{10} является максвелловским с учетом дрейфа электронов. При условии, что на длине свободного пробега под действием поля электрон приобретает энергию, значительно превосходящую тепловую энергию атомов газа, распределение имеет вид:

$$f_{10} = N \left(\frac{m}{2\pi\Theta_1} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{01})^2}{2\Theta_1} \right\}, \quad (6)$$

где N — концентрация электронов, $\Theta_1 = kT_1$, k — постоянная Больцмана, T_1 — абсолютная температура электронов, $\mathbf{v}_{01}$ — средняя скорость их направленного движения.

Правомерность такого распределения в случае больших токов ($|\mathbf{v}_{01}| \gg v_{Te} = \sqrt{2\Theta_1/m}$) теоретически не обоснована.

Что же касается вида функции распределения ионов f_{20} , то ее нахождение еще более затруднительно, чем нахождение функции распределения электронов. Исследования в этом направлении велись либо для очень частных случаев, либо при грубых физических допущениях [9,10 и др.]. Однако применение максвелловского распределения для ионов не приводит к явному расхождению с экспериментом и используется рядом авторов (например, в [1,6]). Мы также в своих расчетах в качестве нулевого приближения (возмущение отсутствует) будем пользоваться максвелловским распределением для ионов:

$$f_{20} = N \left(\frac{M}{2\pi\Theta_2} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{M(\mathbf{v} - \mathbf{v}_{02})^2}{2\Theta_2} \right\}, \quad (7)$$

где $\Theta_2 = kT_2$, T_2 — абсолютная температура ионов, $\mathbf{v}_{02}$ — скорость дрейфа ионов.

Проведем линеаризацию исходных уравнений (1)–(3), предполагая, что перераспределение частиц плазмы, вызванное заданным возмущением в некоторой ее части, мало. Таким образом положим:

$$f_1 = f_{10} + f_{11}, \quad f_2 = f_{20} + f_{21}, \quad (8)$$

считая, что $f_{11} \ll f_{10}$, $f_{21} \ll f_{20}$, $\varphi \ll \varphi_{\text{вн}}$. Тогда для f_{11} и f_{21} (в случае малых токов, определяемых потенциалом $\varphi_{\text{вн}}$) получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial f_{11}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_{11}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{e}{m} \operatorname{grad} \varphi \frac{\partial f_{10}}{\partial \mathbf{v}} = -\frac{1}{\tau_1} f_{11}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial f_{21}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_{21}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{M} \operatorname{grad} \varphi \frac{\partial f_{20}}{\partial \mathbf{v}} = -\frac{1}{\tau_2} f_{21}, \quad (10)$$

$$\Delta \varphi = -4\pi e \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_{11} (d\mathbf{v}) - \int_{-\infty}^{+\infty} f_{21} (d\mathbf{v}) \right). \quad (11)$$

Правая часть уравнения (9) является обычной аппроксимацией бoльцмановского члена для электронов, используемой в ряде работ по плазме ($1/\tau_1$ — частота соударений электронов с атомами). Точно так же правая часть уравнения (10) является первым приближением бoльцмановского члена для ионов в случае малых возмущений (τ_2 — время свободного пробега ионов).

В плоскости $x = 0$ зададим периодическое по времени возмущение частоты ω (достаточно рассмотреть периодическое возмущение, так как в силу линейности рассматриваемой системы уравнений решение в случае произвольного возмущения на границе может быть представлено или в виде ряда, или в виде интеграла Фурье с известными гармониками). Тогда решение системы уравнений (9)–(11) описывает процесс распространения заданного возмущения в плазме. Поскольку рассматривается плоская задача, то

$$f_{11} = f_{11}(x, v, t), \quad f_{21} = f_{21}(x, v, t) \text{ и } \varphi = \varphi(x, t).$$

Для удобства проинтегрируем уравнения системы по компонентам скорости, соответствующим осям y и z . Обозначая полученные таким образом функции $\iint_{-\infty}^{+\infty} f_{11} d\eta d\zeta$ и $\iint_{-\infty}^{+\infty} f_{21} d\eta d\zeta$ опять через f_{11} и f_{21} , получим

$$\frac{\partial f_{11}}{\partial t} + \xi \frac{\partial f_{11}}{\partial x} - \frac{eN}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial F_{1,0}}{\partial \xi} = -\frac{1}{\tau_1} f_{11}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial f_{21}}{\partial t} + \xi \frac{\partial f_{21}}{\partial x} + \frac{eN}{M} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial F_{2,0}}{\partial \xi} = -\frac{1}{\tau_2} f_{21}, \quad (13)$$

$$\Delta \varphi = -4\pi e \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_{11} d\xi - \int_{-\infty}^{+\infty} f_{21} d\xi \right), \quad (14)$$

где

$$F_{1,0} = \left(\frac{m}{2\pi\Theta_1} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{m(\xi - \xi_{01})^2}{2\Theta_1} \right\}, \quad F_{2,0} = \left(\frac{M}{2\pi\Theta_2} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{M(\xi - \xi_{02})^2}{2\Theta_2} \right\}. \quad (15)$$

Поставленная задача о распространении продольных волн в плазме, вызванных периодически меняющимся с частотой ω возмущением на границе $x = 0$ (задача с граничными условиями), аналогична задаче Ландау [8], исследовавшего поведение возмущения в плазме с течением времени (задача с начальными условиями). Поэтому, вообще говоря, и к нашей задаче можно применить метод решения Ландау, воспользовавшись односторонними преобразованиями Лапласа, примененными к исходным уравнениям [задача для полупространства ($x = 0$, $x = \infty$)]. Этот метод в нашем случае требует задания при $x = 0$ функций

$$f_{11}(0, \xi, t), \quad f_{21}(0, \xi, t), \quad \varphi(0, t), \quad (\partial \varphi / \partial x)(0, t).]$$

Однако специфика нашей задачи с граничными условиями², заключающаяся в том, что можно произвольно распорядиться лишь величиной потока частиц, влетающих в рассматриваемую среду через ее границу, позволяет задать произвольно указанные функции лишь для положительных значений ξ (считаем ось ξ направленной по оси x). Вид этих функций для отрицательных значений ξ уже определяется их видом для $\xi > 0$, так как поток частиц, вылетающих из среды через ее границу, автоматически регулируется процессами, происходящими внутри среды (столкновения, кулоновские взаимодействия и пр.).

² На специфику этой граничной задачи нам было указано А. Н. Тихоновым и Н. Н. Боголюбовым.

В нашем случае определяющую роль в этом отношении играют упругие соударения заряженных частиц с нейтральными, чем и объясняется то обстоятельство, что решение нашей линеаризованной системы уравнений без учета соударений ($1/\tau_1 = 1/\tau_2 = 0$) при помощи метода Ландау не приводит к дополнительным условиям совместности для функций $f_{11}(0, \xi, t)$, $f_{21}(0, \xi, t)$. В то же время этот метод при учете соударений приводит к дополнительным условиям совместности, которым должны удовлетворять функции $f_{11}(0, \xi, t)$ и $f_{21}(0, \xi, t)$ в силу зависимости вида этих функций при $\xi < 0$ от их значений для $\xi > 0$. Поэтому естественнее выбрать метод решения задачи, связанный с непосредственным заданием граничных значений функций распределения частиц лишь для $\xi > 0$. Такой метод решения был предложен нам Н. Н. Боголюбовым и проведен в следующем разделе.

Предварительно упростим рассматриваемую систему уравнений (12)–(14), воспользовавшись тем, что возмущение, периодически изменяющееся по времени с частотой ω на границе, определяет и периодический по времени с той же частотой процесс распространения возмущения в плазме. Полагая

$$\begin{aligned} f_{11}(x, \xi, t) &= \psi_{11}(x, \xi) e^{-i\omega t}, \\ f_{21}(x, \xi, t) &= \psi_{21}(x, \xi) e^{-i\omega t}, \\ \varphi(x, t) &= \varphi_1(x) e^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (16)$$

для функций ψ_{11} , ψ_{21} и φ_1 получим следующую систему уравнений:

$$-i\omega\psi_{11} + \xi \frac{\partial \psi_{11}}{\partial x} - \frac{eN}{m} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial F_{1,0}}{\partial \xi} = -\frac{1}{\tau_1} \psi_{11}, \quad (17)$$

$$-i\omega\psi_{21} + \xi \frac{\partial \psi_{21}}{\partial x} + \frac{eN}{M} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial F_{2,0}}{\partial \xi} = -\frac{1}{\tau_{21}} \psi_{21}, \quad (18)$$

$$\Delta \varphi_1 = -4\pi e \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{11} d\xi - \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{21} d\xi \right). \quad (19)$$

3. Решение задачи

Будем решать систему уравнений (17)–(19), подчинив функции ψ_{11} и ψ_{21} следующим граничным условиям:

$$\psi_{11}(0, \xi) = f_1(\xi), \quad \xi > 0; \quad (20)$$

$$\psi_{21}(0, \xi) = f_2(\xi), \quad \xi > 0; \quad (21)$$

$$\psi_{11}(\infty, \xi) = 0, \quad (22)$$

$$\psi_{21}(\infty, \xi) = 0. \quad (23)$$

Последние два условия соответствуют случаю поглощения на бесконечности. Аналогично можно рассмотреть случай абсолютно отражающей стенки на одной из границ и другие случаи.

Укажем еще на близкое сходство в постановке рассматриваемой здесь граничной задачи для случая распространения продольных волн в плазме с известной задачей Милна [11–13] о рассеянии и поглощении света в атмосфере.

Решение уравнений (17), (18) для функций $\xi\psi_{11}(x, \xi)$, $\xi\psi_{21}(x, \xi)$, удовлетворяющих граничным условиям (20)–(23), можно представить в виде

$$\begin{aligned} \xi \psi_{11}(x, \xi) &= \xi f_1(\xi) \exp \left\{ -\frac{x}{\xi} \left(\frac{1}{\tau_1} - i\omega \right) \right\} + \\ &+ \frac{eN}{m} \int_0^x \exp \left\{ -\frac{x-x'}{\xi} \left(\frac{1}{\tau_1} - i\omega \right) \right\} \frac{\partial \varphi_1(x')}{\partial x'} \frac{\partial F_{1,0}(\xi)}{\partial \xi} dx', \quad \xi > 0, \\ \xi \psi_{11}(x, \xi) &= -\frac{eN}{m} \int_x^\infty \exp \left\{ -\frac{x-x'}{\xi} \left(\frac{1}{\tau_1} - i\omega \right) \right\} \frac{\partial \varphi_1(x')}{\partial x'} \frac{\partial F_{1,0}(\xi)}{\partial \xi} dx', \quad \xi < 0; \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \xi \psi_{21}(x, \xi) &= \xi f_2(\xi) \exp \left\{ -\frac{x}{\xi} \left(\frac{1}{\tau_2} - i\omega \right) \right\} - \\ &- \frac{eN}{M} \int_0^x \exp \left\{ -\frac{x-x'}{\xi} \left(\frac{1}{\tau_2} - i\omega \right) \right\} \frac{\partial \varphi_1(x')}{\partial x'} \frac{\partial F_{2,0}(\xi)}{\partial \xi} dx', \quad \xi > 0, \\ \xi \psi_{21}(x, \xi) &= \frac{eN}{M} \int_x^\infty \exp \left\{ -\frac{x-x'}{\xi} \left(\frac{1}{\tau_2} - i\omega \right) \right\} \frac{\partial \varphi_1(x')}{\partial x'} \frac{\partial F_{2,0}(\xi)}{\partial \xi} dx', \quad \xi < 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Введем следующие обозначения:

$$\int_0^\infty \xi f_1(\xi) \exp \left\{ -\frac{x}{\xi} \left(\frac{1}{\tau_1} - i\omega \right) \right\} d\xi = u_1(x); \quad (26)$$

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \int_0^\infty \exp \left\{ -\frac{x}{\xi} \left(\frac{1}{\tau_1} - i\omega \right) \right\} \frac{\partial F_{1,0}(\xi)}{\partial \xi} d\xi, \quad x > 0, \\ G_1(x) &= - \int_{-\infty}^0 \exp \left\{ -\frac{x}{\xi} \left(\frac{1}{\tau_1} - i\omega \right) \right\} \frac{\partial F_{1,0}(\xi)}{\partial \xi} d\xi, \quad x < 0; \end{aligned} \quad (27)$$

$$\int_0^\infty \xi f_2(\xi) \exp \left\{ -\frac{x}{\xi} \left(\frac{1}{\tau_2} - i\omega \right) \right\} d\xi = u_2(x); \quad (28)$$

$$\begin{aligned} G_2(x) &= \int_0^\infty \exp \left\{ -\frac{x}{\xi} \left(\frac{1}{\tau_2} - i\omega \right) \right\} \frac{\partial F_{2,0}(\xi)}{\partial \xi} d\xi, \quad x > 0, \\ G_2(x) &= \int_{-\infty}^0 \exp \left\{ -\frac{x}{\xi} \left(\frac{1}{\tau_2} - i\omega \right) \right\} \frac{\partial F_{2,0}(\xi)}{\partial \xi} d\xi, \quad x < 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi \psi_{11}(x, \xi) d\xi = u_1(x) + \frac{eN}{m} \int_0^\infty G_1(x-x') \frac{\partial \varphi_1(x')}{\partial x'} dx'; \quad (30)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi \psi_{21}(x, \xi) d\xi = u_2(x) - \frac{eN}{M} \int_0^\infty G_2(x-x') \frac{\partial \varphi_1(x')}{\partial x'} dx'. \quad (31)$$

Далее воспользуемся уравнением непрерывности, соответствующим системе уравнений (17) — (19):

$$\frac{\partial j_{11}(x)}{\partial x} \frac{1}{i\omega - (1/\tau_1)} + \frac{\partial j_{21}(x)}{\partial x} \frac{1}{i\omega - (1/\tau_2)} = \rho(x), \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} j_{11}(x) &= e \int_{-\infty}^{+\infty} \xi \psi_{11}(x, \xi) d\xi, \quad j_{21}(x) = -e \int_{-\infty}^{+\infty} \xi \psi_{21}(x, \xi) d\xi, \\ \rho(x) &= e \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{11}(x, \xi) d\xi - e \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{21}(x, \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (33)$$

Уравнения (32) и (19) приводят к соотношению

$$\frac{j_{11}(x)}{i\omega - (1/\tau_1)} + \frac{j_{21}(x)}{i\omega - (1/\tau_2)} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x}. \quad (34)$$

Полагая

$$\frac{u_1(x)}{(1/\tau_1) - i\omega} - \frac{u_2(x)}{(1/\tau_2) - i\omega} = U(x), \quad (35)$$

из соотношений (30), (31) и (34) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x} &= 4\pi e U(x) + \frac{4\pi N e^2}{m} \int_0^\infty G_1(x - x') \frac{\partial \varphi_1(x')}{\partial x'} \frac{dx'}{(1/\tau_1) - i\omega} + \\ &+ \frac{4\pi N e^2}{M} \int_0^\infty G_2(x - x') \frac{\partial \varphi_1(x')}{\partial x'} \frac{dx'}{(1/\tau_2) - i\omega}. \end{aligned} \quad (36)$$

Обозначим

$$\partial \varphi_1(x) / \partial x = f(x), \quad (37)$$

$$\frac{4\pi N e^2}{m} \frac{G_1(x)}{(1/\tau_1) - i\omega} + \frac{4\pi N e^2}{M} \frac{G_2(x)}{(1/\tau_2) - i\omega} = k(x), \quad (38)$$

$$4\pi e U(x) = g(x). \quad (39)$$

Для $f(x)$ из (36) получим интегральное уравнение вида:

$$f(x) = g(x) + \int_0^\infty k(x - x') f(x') dx' \quad (40)$$

с ядром

$$\begin{aligned} k(x) &= \omega_{10}^2 \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{x}{\xi} \left(\frac{1}{\tau_1} - i\omega\right)\right\} \frac{\partial F_{1,0}(\xi)}{\partial \xi} \frac{d\xi}{(1/\tau_1) - i\omega} + \\ &+ \omega_{20}^2 \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{x}{\xi} \left(\frac{1}{\tau_2} - i\omega\right)\right\} \frac{\partial F_{2,0}(\xi)}{\partial \xi} \frac{d\xi}{(1/\tau_2) - i\omega}, \quad x > 0, \\ k(x) &= -\omega_{10}^2 \int_{-\infty}^0 \exp\left\{-\frac{x}{\xi} \left(\frac{1}{\tau_1} - i\omega\right)\right\} \frac{\partial F_{1,0}(\xi)}{\partial \xi} \frac{d\xi}{(1/\tau_1) - i\omega} - \\ &- \omega_{20}^2 \int_{-\infty}^0 \exp\left\{-\frac{x}{\xi} \left(\frac{1}{\tau_2} - i\omega\right)\right\} \frac{\partial F_{2,0}(\xi)}{\partial \xi} \frac{d\xi}{(1/\tau_2) - i\omega}, \quad x < 0, \end{aligned} \quad (41)$$

где $\omega_{10} = \sqrt{4\pi N e^2 / m}$ и $\omega_{20} = \sqrt{4\pi N e^2 / M}$ — ленгмюровские частоты колебаний электронов и, соответственно, ионов. Свободный член имеет вид

$$g(x) = 4\pi e \int_0^{\infty} \xi f_1(\xi) \exp \left\{ -\frac{x}{\xi} \left(\frac{1}{\tau_1} - i\omega \right) \right\} \frac{d\xi}{(1/\tau_1) - i\omega} - \\ - 4\pi e \int_0^{\infty} \xi f_2(\xi) \exp \left\{ -\frac{x}{\xi} \left(\frac{1}{\tau_2} - i\omega \right) \right\} \frac{d\xi}{(1/\tau_2) - i\omega}. \quad (42)$$

Уравнение вида (40) встречается в ряде задач математической физики [13]. Например, вышеупомянутая задача Милна о рассеянии и поглощении света в атмосфере, сходная с нашей по постановке, приводит к уравнению такого же типа. Уравнение вида (40) было детально исследовано Фоком в работе [13], в которой дается метод решения и доказываются существование и единственность решения, убывающего на бесконечности ($x \rightarrow \infty$) при следующих предположениях относительно ядра $k(x)$ и функции $g(x)$ ³: само ядро и функции $g(x)$, $k_1(x) = e^{c|x|} k(x)$ для некоторого $c > 0$ являются абсолютно интегрируемыми и имеют ограниченные вариации в бесконечном промежутке. Если

уравнение $1 - K(\omega) = 0$ ($K(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(x) e^{i\omega x} dx$) помимо комплексных имеет еще и вещественные корни, то к указанным условиям добавляется требование выполнимости таких же условий для функции $(\ln g(x)) x^{s-1} g(x)$ (s — максимальная кратность корней) и условий ортогональности: $\int_0^{\infty} g(x) \gamma_r(x) dx = 0$ ($\gamma_r(x)$ — любое из линейно независимых решений однородного уравнения).

Асимптотическое поведение решения определяется уравнением

$$1 - K(\omega) = 0 \quad (43)$$

или, обозначая

$$-i\omega = p, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-px} k(x) dx = K(p), \quad (44)$$

уравнением

$$1 - K(p) = 0, \quad (45)$$

причем $K(p)$ — аналитическая функция в полосе $-c < \operatorname{Re} p < c$: а именно, при $x \rightarrow \infty$ решение имеет вид

$$f(x) \sim \exp \{p_h x\}, \quad (46)$$

где p_h — корень уравнения (45) с $\operatorname{Re} p < 0$, ближайший к мнимой оси.

Чтобы применить к решению нашего уравнения (40) метод Фока, нужно прежде всего убедиться в том, что ядро $k(x)$, определяемое соотношением (41), удовлетворяет требуемым условиям.

Принимая во внимание, что частицы с бесконечно большими скоростями не влияют на процессы в плазме, для удобства применения вышеупомянутого способа решения положим

$$F_{1,0}(\xi) = F_{1,0}^M(\xi), \quad |\xi| < a, \\ F_{1,0}(\xi) = AF_{1,0}^M(\xi) \frac{\exp \{-N_{01}(\xi)\}}{\exp \{-m(\xi - \xi_{01})^2/2\theta_{11}\}}, \quad |\xi| > a; \quad (47)$$

³ Фок рассмотрел уравнение с симметричным ядром; однако можно показать, не меняя существенно его рассуждений, что основные результаты остаются верными и в случае несимметричного ядра.

$$F_{2,0}(\xi) = F_{2,0}^M(\xi), \quad |\xi| < b, \\ F_{2,0}(\xi) = BF_{2,0}^M(\xi) \frac{\exp\{-N_{02}(\xi)\}}{\exp\{-M(\xi - \xi_{02})^2/2\theta_2\}}, \quad (48)$$

где

$$N_{01}(\xi) = \exp\{|\xi - \xi_{01}|^\alpha (m/2\theta_1)^{\alpha/2}\}, \\ N_{02}(\xi) = \exp\{|\xi - \xi_{02}|^\beta (M/2\theta_2)^{\beta/2}\},$$

$F_{1,0}^M(\xi)$, $F_{2,0}^M(\xi)$ — максвелловские распределения по скоростям для электронов и ионов, определяемые соотношениями (15); a , b , α , β — произвольные постоянные, удовлетворяющие условиям: $a \gg 2|\xi_{01}|$, $b \gg 2|\xi_{02}|$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$; постоянные A и B определяются из условия непрерывности функций $F_{1,0}(\xi)$ и $F_{2,0}(\xi)$:

$$A = \frac{\exp\{-m(a - \xi_{01})^2/2\theta_1\}}{\exp\{-N_{01}(a)\}}, \quad B = \frac{\exp\{-M(b - \xi_{02})^2/2\theta_2\}}{\exp\{-N_{02}(b)\}}. \quad (49)$$

Нетрудно видеть, что $k(x)$ — непрерывная функция x , так как интегралы, определяющие $k(x)$, сходятся равномерно относительно x , а подынтегральные функции непрерывны. Следовательно, достаточно исследовать поведение $k(x)$ на бесконечности. Нетрудно получить верхнюю оценку $k(x)$ по модулю:

$$|k(x)| < C|x|e^{-c|x|}, \quad (50)$$

где

$$c = \min\{1/a\tau_1, 1/b\tau_2\}, \quad (51)$$

$$C = \max\left\{2(1+A)\left(\frac{m}{2\pi\theta_1}\right)^{1/2} \frac{\omega_{10}^2}{|(1/\tau_1) - i\omega|\tau_1(a - |\xi_{01}|)} \times \right. \\ \left. \times 2(1+B)\left(\frac{M}{2\pi\theta_2}\right)^{1/2} \frac{\omega_{20}^2}{|(1/\tau_2) - i\omega|\tau_2(b - |\xi_{02}|)}\right\}. \quad (52)$$

Полученная оценка для $k(x)$ показывает следующее:

- 1) $k(x)$ — абсолютно интегрируемая функция в бесконечном промежутке $(-\infty, +\infty)$;
- 2) $e^{c'|x|}k(x)$ — также абсолютно интегрируемая функция в бесконечном промежутке $(-\infty, +\infty)$ для $0 < c' < c$.

Дифференцируя $k(x)$ под знаком интеграла, точно так же можно показать, что $k'(x)$ является абсолютно интегрируемой функцией в бесконечном промежутке. На бесконечности $k'(x)$ убывает не медленнее, чем экспонента с показателем $c/2$, умноженная на x . Очевидно, что и $\{e^{c''|x|}k(x)\}'$ — абсолютно интегрируемая функция в бесконечном промежутке для $c'' < c/2$. Условие же абсолютной интегрируемости производной от функции является достаточным для существования ограниченной вариации функции в бесконечном промежутке. Следовательно, функции $k(x)$ и $e^{c''|x|}k(x)$ имеют ограниченные вариации в указанном промежутке.

Нетрудно видеть, что и функция $g(x)$, определяемая через произвольные функции $f_1(\xi)$, $f_2(\xi)$ соотношением (42), удовлетворяет поставленным условиям, если $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$ достаточно быстро убывают на бесконечности.

Вышеизложенное позволяет заключить, что метод Фока применим к решению нашего уравнения (40). Поэтому можно утверждать, что существует единственное решение уравнения (40), убывающее на бесконечности, и его асимптотика определяется «дисперсионным» уравнением (45).

Преобразуем последнее уравнение к несколько иному виду. Для этого вычислим $\int_{-\infty}^{+\infty} k(x) e^{-px} dx$, подставляя вместо $k(x)$ его выражение из (41). Проведем вычисление для электронной части ядра, $k_e(x)$.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} k_e(x) e^{-px} dx &= \omega_{10}^2 \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\partial F_{1,0}}{\partial \xi} \frac{\exp \{-(x/\xi) [(1/\tau_1) - i\omega]\}}{(1/\tau_1) - i\omega} d\xi \right\} e^{-px} dx - \\ &- \omega_{10}^2 \int_{-\infty}^0 \left\{ \int_{-\infty}^0 \frac{\partial F_{1,0}}{\partial \xi} \frac{\exp \{-(x/\xi) [(1/\tau_1) - i\omega]\}}{(1/\tau_1) - i\omega} d\xi \right\} e^{-px} dx. \end{aligned} \quad (53)$$

Для p с $\operatorname{Re} p > 0$ при вычислении первого интеграла можно изменить порядок интегрирования; тогда

$$\begin{aligned} \omega_{10}^2 \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\partial F_{1,0}}{\partial \xi} \frac{\exp \{-(x/\xi) [(1/\tau_1) - i\omega]\}}{(1/\tau_1) - i\omega} d\xi \right\} e^{-px} dx &= \\ = -\frac{\omega_{10}^2}{p^2} \int_0^{\infty} \frac{\partial F_{1,0}}{\partial \xi} \frac{d\xi}{\xi - (i\omega/p) + (1/\tau_1 p)} + \frac{\omega_{10}^2}{p} \int_0^{\infty} \frac{\partial F_{1,0}}{\partial \xi} \frac{d\xi}{(1/\tau_1) - i\omega}. \end{aligned} \quad (54)$$

Аналогичное выражение получим для второго интеграла, вычисленного для p с $\operatorname{Re} p < 0$:

$$\begin{aligned} -\omega_{10}^2 \int_{-\infty}^0 \left\{ \int_{-\infty}^0 \frac{\partial F_{1,0}}{\partial \xi} \exp \left\{ -\frac{x}{\xi} \left(\frac{1}{\tau_1} - i\omega \right) \right\} \frac{d\xi}{(1/\tau_1) - i\omega} \right\} e^{-px} dx &= \\ = -\frac{\omega_{10}^2}{p^2} \int_{-\infty}^0 \frac{\partial F_{1,0}}{\partial \xi} \frac{d\xi}{\xi - (i\omega/p) + (1/\tau_1 p)} + \frac{\omega_{10}^2}{p} \int_{-\infty}^0 \frac{\partial F_{1,0}}{\partial \xi} \frac{d\xi}{(1/\tau_1) - i\omega}. \end{aligned} \quad (55)$$

А так как $\int_{-\infty}^{+\infty} k_e(x) e^{-px} dx$ — аналитическая функция комплексного переменного p (см. стр. 24) в полосе $-c'' < \operatorname{Re} p < c''$, то выражение для $\int_{-\infty}^{+\infty} k_e(x) e^{-px} dx$ получим, продолжая аналитически сумму интегралов (54), (55) на полосу $-c'' < \operatorname{Re} p < c''$. Аналогично вычисляется ионная часть $K(p)$. Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} k(x) e^{-px} dx &= -\frac{\omega_{10}^2}{p^2} \int_{C_1} \frac{\partial F_{1,0}}{\partial \xi} \frac{d\xi}{\xi - (i\omega/p) + (1/\tau_1 p)} - \\ &- \frac{\omega_{20}^2}{p^2} \int_{C_2} \frac{\partial F_{2,0}}{\partial \xi} \frac{d\xi}{\xi - (i\omega/p) + (1/\tau_2 p)}, \end{aligned} \quad (56)$$

где контуры C_1 и C_2 проходят вдоль действительной оси в пределах от $\xi = -\infty$ до $\xi = +\infty$ с обходом точек $\xi_p = (i\omega/p) - (1/\tau_1 p)$ (контуром C_1) и $\xi_p = (i\omega/p) - (1/\tau_2 p)$ (контуром C_2) снизу.

Теперь «дисперсионное» уравнение, определяющее асимптотику решения для продольного электрического поля в плазме, вызванного периодическим возмущением на границе, можно записать в виде

$$1 + \frac{\omega_{10}^2}{k^2} \int_{C_1} \frac{\partial F_{1,0}}{\partial \xi} \frac{d\xi}{(\omega/k) + (i/\tau_1 k) - \xi} + \frac{\omega_{20}^2}{k^2} \int_{C_2} \frac{\partial F_{2,0}}{\partial \xi} \frac{d\xi}{(\omega/k) + (i/\tau_2 k) - \xi} = 0, \quad (57)$$

где $k = -ip$ и контур C_1 обходит снизу точку $(\omega/k) + i/\tau_1 k$ и, соответственно, контур C_2 — точку $(\omega/k) + i/\tau_2 k$.

На достаточно больших расстояниях от источника возмущения распределение поля (и частиц) будет с достаточной степенью точности аппроксимироваться выражением вида $A \exp \{-i(\omega t - kx)\}$ [k — корень уравнения (57), ближайший к мнимой оси]. $2\pi/\text{Re } k$ имеет смысл величины пространственного периода распространяющегося возмущения, а $\text{Im } k$ — его декремента затухания⁴.

Последнее уравнение отличается от полученного Ландау [8] для дисперсии продольных волн в плазме, вызванных заданным возмущением в начальный момент времени, членами, учитывающими ионы и соударения заряженных частиц с нейтральными. Кроме того, в уравнении (57) k — комплексное, а ω — действительное число ($\omega > 0$), в то время как в уравнении Ландау ω — комплексное, а k — действительное число.

В заключение выражаю глубокую благодарность Н. Н. Боголюбову и Г. Я. Мякишеву за помощь, оказанную мне в работе, а также А. Н. Тихонову, М. В. Келдышу, М. Ф. Широкову и Ю. Л. Рабиновичу за обсуждение и ценные советы при выполнении работы.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
17 февраля 1954 г.

Литература

- [1] А. А. Власов. ЖЭТФ, 8, 291, 1938; Уч. зап. МГУ, 75, кн. II, ч. I, 1945; Теория многих частиц, Гостехиздат, 1950.— [2] Г. Я. Мякишев. Диссертация, МГУ, 1952.— [3] М. Е. Герценштейн. ЖЭТФ, 23, 669, 1952.— [4] В. П. Силин. ЖЭТФ, 23, 649, 1952.— [5] D. Bohm and E. P. Gross. Phys. Rev., 75, 1851, 1864, 1949.— [6] Ю. Л. Климонтович. Диссертация, МГУ, 1951; ЖЭТФ, 21, 1284, 1292, 1951.— [7] И. П. Базаров. ЖЭТФ, 21, 711, 1951.— [8] Л. Д. Ландау. ЖЭТФ, 16, 574, 1946.— [9] Taro Kihara. Rev. of Mod. Phys., 24, 45, 1952.— [10] В. А. Фок. ЖЭТФ, 18, 1049, 1948.— [11] E. Hopf. Mathematical problems of radioactive equilibrium, Cambr. Tracts, № 31, 1933.— [12] Е. Титчмарш. Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, 1948.— [13] В. А. Фок. Матем. сб., 14, 3, 1944.

⁴ «Дисперсионное» уравнение (57) дает также критерий появления возрастающих решений, хотя строгое решение задачи в этом случае (нахождение амплитуды) не может быть дано в рамках линейной теории.

О ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЛАЗМЫ. II

Г. Я. Мякишев и А. А. Лучина

На основе результатов работы I исследуются дисперсионные свойства плазмы в различных частных случаях. Показано, что при распространении продольных волн в разрядных трубках движение ионов в большинстве случаев имеет существенное значение. Найдены величины пространственного периода и декремента затухания в зависимости от параметров разряда.

1. Продольные колебания плазмы в области высоких частот

В случае колебаний плазмы большой частоты «дисперсионное» уравнение (57) в I значительно упрощается, и его легко разрешить, в результате чего зависимость волнового числа и декремента затухания от частоты получается в явном виде. Это уравнение, приведенное к безразмерным переменным интегрирования, имеет вид:

$$1 = -\frac{1}{k^2 a_1^2} + \frac{1}{k^2 a_1^2} \frac{\beta_1}{V 2\pi} \int_{C_1} \frac{\exp \{-u^2/2\} du}{\beta_1 - u} - \\ - \frac{1}{k^2 a_2^2} + \frac{1}{k^2 a_2^2} \frac{\beta_2}{V 2\pi} \int_{C_2} \frac{\exp \{-u^2/2\} du}{\beta_2 - u}, \quad (1)$$

где $a_1 = \sqrt{\Theta_1/4\pi Ne^2}$ — дебаевское расстояние для электронов, $a_2 = \sqrt{\Theta_2/4\pi Ne^2}$ — дебаевское расстояние для ионов, $u = \sqrt{m/\Theta_1}(\xi - \xi_{01})$ в интегралах по контуру C_1 , $u = \sqrt{M/\Theta_2}(\xi - \xi_{02})$ в интегралах по контуру C_2 :

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{m}{\Theta_1}} \left(\frac{\omega}{k} + \frac{i}{\tau_1 k} - \xi_{01} \right), \quad \beta_2 = \sqrt{\frac{M}{\Theta_2}} \left(\frac{\omega}{k} + \frac{i}{\tau_2 k} - \xi_{02} \right). \quad (2)$$

Будем искать решение с малым декрементом затухания, т. е. предположим, что

$$|\gamma| \ll |\kappa| \quad (\kappa + i\gamma = k). \quad (1)$$

Так как при интегрировании по контурам C_1 и C_2 в уравнении (1) точки β_1 и β_2 обходятся снизу, то каждый из этих интегралов можно представить в виде суммы интеграла вдоль действительной оси в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ и вычета подинтегрального выражения в особой точке, умноженного на πi [так как при условии (1)]

$$\operatorname{Re} \beta_1 \gg \operatorname{Im} \beta_1, \text{ а также и } \operatorname{Re} \beta_2 \gg \operatorname{Im} \beta_2,$$

что можно видеть из дальнейшего]. Теперь уравнение (1) запишется в виде:

$$1 = -\frac{1}{k^2 a_1^2} + \frac{1}{k^2 a_1^2} \frac{\beta_1}{V 2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp \{-u^2/2\} du}{\beta_1 - u} - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\beta_1}{a_1^2 k^2} \exp \{-\beta_1^2/2\} - \\ - \frac{1}{k^2 a_2^2} + \frac{1}{k^2 a_2^2} \frac{\beta_2}{V 2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp \{-u^2/2\} du}{\beta_2 - u} - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\beta_2}{a_2^2 k^2} \exp \{-\beta_2^2/2\}. \quad (3)$$

Поскольку мы рассматриваем случай высоких частот, естественно ввести условия:

$$1/\tau_1 \ll \omega - \kappa \xi_{01}, \quad 1/\tau_2 \ll \omega - \kappa \xi_{02}, \quad (II)$$

физический смысл которых заключается в том, что частота в системе координат, движущейся с потоком электронов, много больше частоты столкновений электронов с атомами, а частота колебаний в системе координат, движущейся с потоком ионов, много больше частоты соударений ионов с атомами.

Принимая во внимание условия (I) и (II), в нулевом приближении получим следующие значения для β_1 и β_2 :

$$\beta_1 \approx \sqrt{\frac{m}{\Theta_1}} \left(\frac{\omega}{\kappa} - \xi_{01} \right), \quad \beta_2 \approx \sqrt{\frac{M}{\Theta_2}} \left(\frac{\omega}{\kappa} - \xi_{02} \right).$$

Далее потребуем, чтобы

$$\left| \frac{\omega}{\kappa} - \xi_{01} \right| \gg \sqrt{\frac{\Theta_1}{m}}, \quad \left| \frac{\omega}{\kappa} - \xi_{02} \right| \gg \sqrt{\frac{\Theta_2}{M}}, \quad (III)$$

т. е. чтобы фазовая скорость волны в системе координат, движущейся с потоком электронов, была много больше средней тепловой скорости электронов, а фазовая скорость волны в системе координат, движущейся с потоком ионов, была много больше их средней тепловой скорости. В этом случае $|\beta_1| \gg 1$ и $|\beta_2| \gg 1$. Условия (II) и (III) являются простым обобщением аналогичных условий, которые вводятся при решении «дисперсионного» уравнения для больших частот без учета ионов и дрейфа заряженных частиц.

Разлагая множители при экспонентах подинтегральных выражений уравнения (3) в ряд по степеням κ/β_1 и κ/β_2 и ограничиваясь пятью членами разложения, получим:

$$1 = \frac{1}{k^2 a_1^2 \beta_1^2} + \frac{3}{k^2 a_1^2 \beta_1^4} - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\beta_1}{k^2 a_1^2} \exp\{-\beta_1^2/2\} + \\ + \frac{1}{k^2 a_2^2 \beta_2^2} + \frac{3}{k^2 a_2^2 \beta_2^4} - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\beta_2}{k^2 a_2^2} \exp\{-\beta_2^2/2\}. \quad (4)$$

Разделяя действительную и мнимую части, после несложных вычислений можно найти в первом приближении известное дисперсионное уравнение, связывающее волновое число κ с частотой колебаний ω и выражение для декремента затухания γ :

$$(\omega - \kappa \xi_{01})^2 = \omega_{10}^2 (1 + 3a_1^2 \kappa^2), \quad (5) \\ \gamma = \frac{1}{\tau_1 (\xi_{01} + 3a_1^2 \omega_{10} \kappa)} + \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{10} (1 + 3a_1^2 \kappa^2)^2}{\kappa^3 a_1^3 (\xi_{01} + 3a_1^2 \omega_{10} \kappa)} \exp\left\{-\frac{m \omega_{10}^2 (1 + 3a_1^2 \kappa^2)}{2 \Theta_1 \kappa^2}\right\}. \quad (6)$$

Члены, обусловленные ионами, будут не ниже первого порядка относительно малой величины m/M по сравнению с электронными членами, и поэтому при выводе соотношений (5) и (6) мы их опустили.

Последние соотношения получены в предположении выполнении условий (I) — (III). Легко видеть, что эти условия выполняются для достаточно больших длин волн ($\kappa a_1 \ll 1$) при достаточно низких давлениях, так что

$$[\tau_1 (\xi_{01} + 3a_1^2 \omega_{10} \kappa)]^{-1} \ll \kappa.$$

Первый член выражения, определяющего декремент затухания, обусловлен упругими столкновениями, второй — потерей энергии волны

при кулоновском взаимодействии электронов, участвующих в упорядоченном движении, с хаотически движущимися электронами. Как столкновения, так и выход частиц из фазы волны приводят к затуханию возмущения по мере удаления от источника. Действительно, выражение, стоящее в знаменателе правой части формулы (6), представляет собой групповую скорость волны в первом приближении:

$$v_{\text{гр}} = d\omega/dk = \xi_{01} + 3a_1^2\omega_{10}k, \quad (7)$$

которая положительна, так как направление ее совпадает с направлением распространения возмущения. Поэтому для волн, распространяющихся от источника, γ положительно, что соответствует затуханию. Интересно, что в случае очень длинных волн, как это следует из (7), возмущение распространяется по направлению скорости дрейфа электронов.

Полученный пространственный декремент затухания γ связан простым соотношением с известным значением декремента затухания по времени γ_t [1]:

$$\gamma = \gamma_t / v_{\text{гр}}. \quad (8)$$

Соотношение (8) выполняется и для всех других случаев, рассмотренных в работе, что указывает на его универсальность.

2. Продольные колебания плазмы в области низких частот

Рассмотрим случаи возбуждения колебаний плазмы возмущением малой частоты, включая предельный случай $\omega = 0$, что соответствует возникновению неподвижного пространственного расслоения в распределении частиц под действием заданного перепада потенциала на границе.

В рассматриваемом случае малых частот и произвольных средних скоростей трансляции электронов ξ_{01} и ионов ξ_{02} интегралы, входящие в уравнение (1), в элементарных функциях не берутся. Однако их можно привести к специальным функциям типа интеграла вероятности от комплексного аргумента [2].

Используя соотношение Фока [3]

$$\frac{1}{V\sqrt{2\pi}} \int_C \frac{e^{-u^2/2} du}{\beta - u} = \sqrt{2} e^{-\beta^2/2} \int_{-\infty}^{\beta/\sqrt{2}} e^{z^2} dz - i\sqrt{2\pi} e^{-\beta^2/2}$$

и произведя несложные преобразования, запишем уравнение (1) в виде:

$$1 = -\frac{i}{k^2 a_1^2} - \frac{iV\pi}{k^2 a_1^2} (\alpha_1 + i\delta_1)(\alpha_3 + i\delta_3) - \frac{1}{k^2 a_2^2} - \frac{iV\pi}{k^2 a_2^2} (\alpha_2 + i\delta_2)(\alpha_4 + i\delta_4), \quad (9)$$

где введены следующие обозначения:

$$\beta_1 / \sqrt{2} = \alpha_1 + i\delta_1, \quad \beta_2 / \sqrt{2} = \alpha_2 + i\delta_2; \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \exp\{-\beta_1^2/2\} \left(1 + \frac{2i}{V\pi} \int_0^{\beta_1/\sqrt{2}} e^{z^2} dz\right) &= \alpha_3 + i\delta_3, \\ \exp\{-\beta_2^2/2\} \left(1 + \frac{2i}{V\pi} \int_0^{\beta_2/\sqrt{2}} e^{z^2} dz\right) &= \alpha_4 + i\delta_4. \end{aligned} \quad (11)$$

В уравнение (9) входят интегралы вида (11), для которых имеются таблицы.

Переходя к безразмерным величинам и выбирая в качестве единицы длины дебаевское расстояние для электронов a_1 , вместо (9) будем иметь:

$$k^2 = -1 - (\Theta_1 / \Theta_2) - i \sqrt{\pi} (\alpha_1 + i\delta_1) (\alpha_3 + i\delta_3) - (\Theta_1 / \Theta_2) i \sqrt{\pi} (\alpha_2 + i\delta_2) (\alpha_4 + i\delta_4), \quad (12)$$

где k^* — безразмерное комплексное волновое число ($k^* = ka_1$). Уравнение (12) можно формально решить, определяя x^* и γ^* через $\alpha_1, \delta_1, \alpha_2, \delta_2, \alpha_3, \delta_3, \alpha_4, \delta_4$. Действительно, подставляя $k^* = x^* + i\gamma^*$ в уравнение (12) и разделяя действительную и мнимую части, получим алгебраическую систему двух уравнений, решение которой можно записать в виде:

$$x^* = \pm \sqrt{y}, \quad \gamma^* = \pm \sqrt{\bar{y}}, \quad (13)$$

где

$$y = (g_1 \pm \sqrt{g_1^2 + g_2^2}) / 2, \quad (14)$$

$$\bar{y} = (-g_1 \pm \sqrt{g_1^2 + g_2^2}) / 2. \quad (15)$$

При данном x^* знак γ^* однозначно определен знаком g_2 , так как

$$\gamma^* = g_2 / 2x^*. \quad (16)$$

Соотношения (13) — (15) позволяют вычислить период пространственной неоднородности плазмы $\lambda^* = 2\pi / x^*$ при заданном коэффициенте затухания γ^* и частоте ω (в общем случае заданной частоте соответствуют различные значения длины волны λ^* в зависимости от коэффициента затухания γ^*). Практически для решения удобнее вместо ω и γ^* задавать значения α_1 и δ_1 . Задание α_1 и δ_1 определяет значения ω, γ^*, x^* и соответственно $\alpha_2, \delta_2, \alpha_3, \delta_3, \alpha_4$ и δ_4 . Однако в общем случае эта зависимость носит неявный характер. Значения α_2, δ_2 могут быть непосредственно найдены при заданных α_1 и δ_1 только при пренебрежении соударениями (зная α_2 и δ_2 , можно найти из таблиц [2] значения $\alpha_3, \delta_3, \alpha_4, \delta_4$ и соответственно x^*, γ^* и ω). Действительно, так как β_2 связано с β_1 соотношением

$$\beta_2 = \sqrt{\frac{M}{m} \frac{\Theta_1}{\Theta_2}} \beta_1 + \sqrt{\frac{M}{\Theta_2}} \frac{i}{k} \left(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1} \right) + \sqrt{\frac{M}{\Theta_2}} (\xi_{01} - \xi_{02}), \quad (17)$$

то β_1 непосредственно определяет β_2 при $\sqrt{\frac{M}{\Theta_2}} \frac{i}{k} \left(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1} \right) = 0$. Учет же этого члена чрезвычайно усложнит задачу установления связи между ω, x^* и γ^* , сведя ее по существу к подбору таких значений этих величин, которые удовлетворяли бы «дисперсионному» уравнению. Следовательно, найти точное решение «дисперсионного» уравнения в общем случае практически невозможно.

Отсутствие учета столкновений при помощи аппроксимации интеграла столкновений Больцмана при вычислении первого приближения функции распределения не может решающим образом повлиять на величину пространственного периода колебательного процесса в плазме в случае, когда сам этот процесс обусловлен кулоновским взаимодействием между частицами¹. Однако при исследовании затухания столкновения уже не могут быть игнорированы, поэтому, отбрасывая их, мы тем самым отказываемся от исследования величины декре-

¹ Последнее не означает, что в данной теории пространственный период вообще не зависит от числа столкновений. Эта зависимость входит неявно в выражение для нулевого приближения функции распределения: скорость дрейфа и концентрация заряженных частиц определяются ими.

мента затухания. Единственное, что мы можем сделать в этом отношении — это показать существование волн возрастающей амплитуды при отсутствии столкновений.

Именно это и позволяет сделать вывод о возможности существования незатухающих или слабо затухающих волн, несмотря на значительное затухание за счет соударений.

Рассмотрим подробно случай $\omega = 0$. При этом все вычисления значительно упрощаются, так как в этом случае α_1 и δ_1 однозначно определяются параметрами разряда, и можно сразу найти x^* и определить знак γ^* (определение численной величины γ^* без учета соударений, как уже указывалось выше, не имеет смысла). Характерно, что в случае $\omega = 0$ значения x^* и γ^* определяются однозначно, в отличие от общего случая $\omega \neq 0$, когда имеется ряд значений x^* и γ^* , соответствующих определенной частоте.

Считая, что экспериментально наблюдаемое слоистое свечение положительного столба (страты) может быть обусловлено существованием продольной волны плотности заряженных частиц, можно сравнить найденные таким образом значения $\lambda = \lambda^* a_1$ с опытными. Случай $\omega = 0$ в такой интерпретации соответствует неподвижным стратам, в то время как $\omega \neq 0$ — бегущим.

Сравнение теории с экспериментом затруднено отсутствием точных сведений о некоторых параметрах разряда, которые используются в теории. Обычно в опытах с газоразрядными трубками приводятся лишь следующие данные: концентрация электронов N , приблизительно равная концентрации ионов, размеры трубки, ток на анод I (или плотность тока j), температура электронов T_1 и пространственный период страт λ_s .

В наши формулы входят выражения не для токов, а для средних скоростей направленного движения электронов и ионов. Эти скорости для электронов можно определить через плотность тока j , воспользовавшись известным соотношением:

$$j = \frac{1}{1,36} Ne \xi_{01}. \quad (18)$$

Скорость дрейфа ионов можно определить по порядку величины, исходя из простейших газокINETических соображений:

$$\xi_{02} = -\frac{1}{2} \sqrt{m/M} \xi_{01}. \quad (19)$$

Необходимо еще знать температуру ионов, которая в экспериментах со стратами также не определяется. Повидимому, нельзя говорить о температуре ионов в плазме без конкретного указания о распределении токов. Таким образом в каждом эксперименте температуру ионов необходимо исследовать особо.

Мы воспользуемся теми ориентировочными данными о температуре ионов, которые имеются в литературе [4-6]. В соответствии с этим будем вычислять периоды страт, полагая поочередно температуру ионов T_2 равной $1/10 T_1$, $1/5 T_1$, $1/2 T_1$ и комнатной температуре.

В табл. 1 приведены экспериментальные данные работ [7-11], а также величины пространственного периода, вычисленные теоретически для указанных значений температуры ионов.

Табл. 1 показывает, что для слабо неизотермической плазмы ($T_1/T_2 \approx 2-10$) пространственные периоды неподвижных страт, полученные теоретически, совпадают по порядку величины с экспериментальными. Ни о каком точном согласии теории с опытом, конечно, не может быть речи, так как данная постановка задачи весьма идеа-

лизирована. В частности, не учитывается влияние радиуса трубки на период страт.

Однако вычисления по порядку величины все же представляют интерес, поскольку при периоде страт, меньшем, чем диаметр трубки (именно такие опыты обсуждаются), следует ожидать, что радиус трубки не скажется решающим образом на порядке пространственного периода. Проведенное вычисление величины пространственного периода без учета ионов показывает, что вклад, вносимый ионами в величину λ , будет по порядку величины таким же, как и вклад, вносимый электронами. Следовательно, в этом случае движением ионов пренебрегать нельзя.

В случае сильно неизотермической плазмы ($T_2 \approx 300^\circ \text{K}$) существенны лишь ионные колебания, что можно показать, сравнивая величины пространственного периода, вычисленные с учетом ионов и с одними электронами.

Укажем еще на то обстоятельство, что только для одних электронов при положительных значениях κ декремент затухания γ всегда положителен ($g_2 > 0$), т. е. имеет место затухание. Так как учет столкновений приведет к еще большему затуханию, то в этом случае пространственное расслоение разряда невозможно. Совместные же колебания электронов и ионов приводят к отрицательным значениям γ ($g_2 < 0$). Это возрастание амплитуды, компенсируемое затуханием за счет соударений, может привести к незатухающим волнам.

Характерной особенностью полученных результатов является наличие неподвижных страт при $|\xi_{01}| < 0,93 v_{Te} = 0,93 \sqrt{2\theta_1/m}$ в полном согласии с экспериментом. Дело в том, что в ряде работ по теории страт было введено условие существования неподвижных страт

$$\xi_{01} \geq 0,93 v_{Te},$$

якобы вытекающее из кинетических уравнений. Первоначально оно было получено Власовым [12] из дисперсионного уравнения не вполне корректной формы, содержащего расходящийся интеграл. Однако в работе Климонтовича [13] то же условие получено на основе верного дисперсионного уравнения. Рассматривая неограниченную

Таблица 1

Газ	N электрон см^{-3}	$T_1, ^\circ\text{K}$	Давление в мм рт. ст.	Радиус (сечение) трубки $R(\delta)$	$j(I)$	λ_2 в см	λ в см для $T_2 = 1/10 T_1$	λ в см для $T_2 = 1/2 T_1$	λ в см для $T_2 = 300^\circ\text{K}$	Литературные осыли
N_2^{14}	$2 \cdot 10^8$	$3 \cdot 10^4$	0,16	3,9 см	0,27 мА/см ²	6	1,2	2,9	0,12	[7]
Ne^{20}	10^{10}	$3 \cdot 10^4$	1—2	3,5 "	Ne $1,364 \cdot 10^6$ "	2,5	0,45	1,1	0,044	[8-9]
H_2^1	$4 \cdot 10^8$	$1,2 \cdot 10^4$	0,63	1,1 "	8 мА	0,9	0,16	0,45	0,041	[10]
$\text{Hg}^{200,6}$	$1,77 \cdot 10^{10}$	$3 \cdot 10^4$	$3 \cdot 10^{-3}$	0,6-0,4 см ²	20 мА	0,2	0,04	0,085	0,013	[11]

плазму без учета соударений, Климонтович пришел к выводу, что в ней не могут существовать независимые от времени распределения электрического поля вида $E = E_0 e^{-p x}$ ($p = \gamma + i\kappa$) при $|\gamma| > |\kappa|$. (Последнее условие эквивалентно вышеуказанному ограничению, налагаемому на скорости дрейфа). Однако это условие указывает лишь на отсутствие в неограниченной плазме экспоненциально возрастающего или экспоненциально убывающего распределения электронной плотности, а это само по себе верное утверждение не имеет отношения к появлению страт. Прежде всего, при учете границы (как это имеет место в данной работе) решения типа $E = E_0 \exp\{-(\gamma + i\kappa)x\}$ с $|\gamma| > |\kappa|$ в действительности существуют и удовлетворяют дисперсионному уравнению. Далее, истинный критерий появления пространственной периодичности будет иметь вид: $|\kappa| > |\gamma|$, где в величине γ обязательно должны быть учтены соударения. Это условие связывает между собой значения скоростей дрейфа частиц, их тепловых скоростей и частоты соударения заряженных частиц с нейтральными.

Мы рассмотрели случай возникновения пространственной периодичности в распределении плотности заряда под влиянием перепада потенциала в каком-либо участке плазмы ($\omega = 0$). Если же возмущение на границе периодически меняется с частотой ω , то в плазме возбуждаются бегущие волны с фазовой скоростью ω/κ . Для небольших фазовых скоростей, а именно при $|\omega/\kappa| \ll |\xi_{02}|$, в первом приближении «дисперсионное» уравнение остается таким же, как и для случая $\omega = 0$. Для таких волн величина периода бегущей пространственной неоднородности будет такой же, как и для неподвижных страт. Этот вывод находится в согласии с экспериментом.

Для плазмы в газоразрядных трубках обычно $|\xi_{01}| \sim 10^6 - 10^8$ см/сек., $|\xi_{02}| \sim 10^4 - 10^6$ см/сек. Для сантиметрового диапазона волн поставленному ограничению на величину фазовой скорости волны соответствует область частот $\omega < 10^4 - 10^6$ гц, для которой, следовательно, применимы результаты, полученные в этом разделе.

3. Случай больших скоростей дрейфа

При больших скоростях дрейфа электронов задача о распространении в плазме периодически меняющегося со временем возмущения с учетом упругих соударений электронов и ионов с атомами газа может быть решена до конца методом последовательных приближений (так же, как и в случае больших частот). В этом случае «дисперсионное» уравнение позволяет определить в явном виде зависимость периода пространственной неоднородности и декремента затухания от частоты колебаний и параметров разряда.

Будем считать скорость дрейфа электронов много большей их тепловой скорости, т. е.

$$|\xi_{01}| \gg v_{Te} = \sqrt{2\theta_1/m}. \quad (20)$$

При этом для ионов будет иметь место аналогичное соотношение:

$$|\xi_{02}| \gg v_{Ti} = \sqrt{2\theta_2/M}. \quad (21)$$

Предположим еще, что выполняются следующие условия:

$$|\omega/\kappa| \ll |\xi_{02}|, \quad |1/\tau_2 \kappa| \ll |\xi_{02}|. \quad (22)$$

Тогда, разлагая знаменатели подинтегральных выражений уравнения (57) работы I по степеням малых параметров

$$\alpha = (\xi - \xi_{01}) / \left(\xi_{01} - \frac{\omega}{k} - \frac{i}{\tau_1 k} \right) \quad \text{и} \quad \beta = (\xi - \xi_{02}) / \left(\xi_{02} - \frac{\omega}{k} - \frac{i}{\tau_2 k} \right)$$

и ограничиваясь первым приближением при вычислении интегралов, получим

$$\begin{aligned} k^2 = & \left[\omega_{10}^2 / \xi_{01}^2 \left(1 - \frac{\omega}{k \xi_{01}} - \frac{i}{\tau_1 k \xi_{01}} \right)^2 \right] + \left[\omega_{20}^2 / \xi_{02}^2 \left(1 - \frac{\omega}{k \xi_{02}} - \frac{i}{\tau_2 k \xi_{02}} \right)^2 \right] + \\ & + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \omega_{10}^2 \left[\left(\frac{m}{\Theta_1} \right)^{1/2} \left(\xi_{01} - \frac{\omega}{k} - \frac{i}{\tau_1 k} \right) \exp \left\{ -\frac{m}{2 \Theta_1} \left(\xi_{01} - \frac{\omega}{k} - \frac{i}{\tau_1 k} \right)^2 \right\} \right] + \\ & + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \omega_{20}^2 \left[\left(\frac{M}{\Theta_2} \right)^{1/2} \left(\xi_{02} - \frac{\omega}{k} - \frac{i}{\tau_2 k} \right) \exp \left\{ -\frac{M}{2 \Theta_2} \left(\xi_{02} - \frac{\omega}{k} - \frac{i}{\tau_2 k} \right)^2 \right\} \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

Решение уравнения (23) для положительных значений κ , удовлетворяющее условиям (22) в области частот $\omega \ll \omega_{20}$ и $1/\tau_2 \ll \omega_{20}$, с точностью до членов первого порядка относительно малых величин $\omega/k\xi_{01}$, $\omega/k\xi_{02}$, $1/\tau_1 k\xi_{01}$ и $1/\tau_2 k\xi_{02}$, имеет вид:

$$\kappa = \sqrt{\frac{\omega_{10}^2}{\xi_{01}^2} + \frac{\omega_{20}^2}{\xi_{02}^2}} + \frac{\omega}{\xi_{01}} \frac{1}{1 + (\omega_{20}^2 / \omega_{10}^2) (\xi_{01}^2 / \xi_{02}^2)} + \frac{\omega}{\xi_{02}} \frac{1}{1 + (\omega_{10}^2 / \omega_{20}^2) (\xi_{02}^2 / \xi_{01}^2)}, \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \gamma = & \frac{1}{\tau_1 \xi_{01}} \frac{1}{1 + (\omega_{20}^2 / \omega_{10}^2) (\xi_{01}^2 / \xi_{02}^2)} + \frac{1}{\tau_2 \xi_{02}} \frac{1}{(\omega_{10}^2 / \omega_{20}^2) (\xi_{02}^2 / \xi_{01}^2) + 1} + \\ & + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{m \xi_{01} |\xi_{01}|}{2 \Theta_1 a_1} \frac{\exp \{-m \xi_{01}^2 / 2 \Theta_1\}}{\sqrt{1 + (\omega_{20}^2 / \omega_{10}^2) (\xi_{01}^2 / \xi_{02}^2)}} + \\ & + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{M \xi_{02} |\xi_{02}|}{2 \Theta_2 a_2} \frac{\exp \{-M \xi_{02}^2 / 2 \Theta_2\}}{\sqrt{(\omega_{10}^2 / \omega_{20}^2) (\xi_{02}^2 / \xi_{01}^2) + 1}}. \end{aligned} \quad (25)$$

Из полученных соотношений (24), (25) видно, что ионы играют существенную роль в исследуемом случае распространения возмущений в плазме. Так, вклад, вносимый ими в величину пространственного периода по порядку величины такой же, как и вклад, вносимый электронами. Направление распространения возмущения полностью определяется ионной компонентой плазмы, а именно, совпадает с направлением скорости дрейфа ионов, т. е. возмущение распространяется только в направлении к катоду. На последнее обстоятельство указывает выражение для групповой скорости v_{gp} ($v_{gp} > 0$), которое следует из дисперсионного уравнения (24):

$$v_{gp} = \left[\frac{1}{\xi_{01}} \frac{1}{(\omega_{10}^2 / \omega_{20}^2) (\xi_{02}^2 / \xi_{01}^2) + 1} + \frac{1}{\xi_{01}} \frac{1}{1 + (\omega_{20}^2 / \omega_{10}^2) (\xi_{01}^2 / \xi_{02}^2)} \right]^{-1} \approx 5/4 \xi_{02}. \quad (26)$$

Рассмотрим подробнее выражение (25) для декремента затухания. Первые два члена в нем обусловлены упругими столкновениями электронов и ионов с нейтральными молекулами газа, остальные — кулоновским взаимодействием хаотически движущихся электронов и ионов с

волной. При этом столкновения ионов с молекулами играют преобладающую роль по сравнению со столкновениями электронов с молекулами. Столкновения, как известно, приводят к затуханию волны. Что же касается двух последних членов в выражении для γ , то модуль их отношения в зависимости от соотношения температур электронов и ионов может быть как больше, так и меньше единицы; а именно, при $\Theta_1 < 4\Theta_2$ ионный член превышает электронный, в то время как для $\Theta_1 > 4\Theta_2$ электронный член может сильно превосходить ионный, так что последним можно пренебречь. Электронный же член входит в (25) со знаком минус, т. е. способствует нарастанию амплитуды волны. Следовательно, в последнем случае за счет кулоновского взаимодействия потоков электронов и ионов происходит ослабление затухания волны или даже появление волн возрастающей амплитуды ($\gamma < 0$). Последнее выполняется при условии:

$$l_e > a_1 \frac{v_{Te}^2}{\xi_{01}^2} \exp \left\{ \frac{\xi_{01}^2}{v_{Te}^2} \right\}, \quad (27)$$

где $l_e = \xi_{01} \tau_1$ — средняя длина свободного пробега электронов.

Условие (27) выполняется для $l_e \gg a_1$. По мере уменьшения l_e члены в γ , обусловленные соударениями, возрастают, и при l_e , меньшей $a_1 (v_{Te}^2 / \xi_{01}^2) \exp \{ \xi_{01}^2 / v_{Te}^2 \}$, коэффициент затухания по порядку величины равен членам, обусловленным столкновениями, и имеет положительный знак. Однако и в этом случае имеет смысл говорить о пространственно-периодическом распределении заряженных частиц (неподвижном или движущемся) при $l_e \gg \xi_{01} / \omega_{10} > a_1$, так как при этом $\gamma \ll \kappa$.

Таким образом пространственная периодичность в распределении плотности частиц, потенциалов и пр. может существовать только при $l_e > a_1$, что совпадает с критерием, даваемым рядом авторов [13, 14].

Согласно работам Зайцева [8, 9] и др. при некоторых специальных условиях вблизи анода существует область, в которой скорость дрейфа электронов — порядка тепловой скорости и даже превышает ее. Это обстоятельство, обусловленное большим градиентом потенциала у анода, позволяет сравнить результаты настоящего раздела с опытом. По данным Зайцева для анодных страт (страты, бегущие от анода к катоду) $N \approx 10^8 - 10^9$ электрон/см³ (в столбе $N \approx 10^{10}$ электрон/см³), $|\xi_{01}| = 10^8$ см/сек., $T = 3 \cdot 10^4$ °K ($|\xi_{01}| > v_{Te}$), $\lambda_a = 2,5$ мм. Вычисленные значения для периода по формуле (24) для $\omega < 10^5 - 10^6$ гц в нулевом приближении равны: $\lambda = 5$ мм (для $N = 10^8$ электрон/см³) и $\lambda = 1,6$ мм (для $N = 10^9$ электрон/см³). Совпадение теории с экспериментом можно считать хорошим, учитывая, что концентрация в опыте точно не известна. В рассматриваемой области частот период практически не зависит от частоты и совпадает с периодом неподвижной пространственной неоднородности, что подтверждается экспериментом.

Интересно отметить, что выражение (24) дает правильную качественную зависимость пространственного периода от давления. Действительно, на основе (24) приближенно имеем $\lambda \approx (2\pi / \sqrt{5}) (\xi_{01} / \omega_{10})$. Так как ξ_{01} возрастает с уменьшением давления, а концентрация падает, то λ возрастает с уменьшением давления.

Уменьшение λ с давлением будет иметь место и в случае $\omega = 0$, разобранным во втором разделе. При $v_{Te} \approx \xi_{01}$ можно получить из (13) следующее приближенное выражение для пространственного периода:

$$\lambda = A \sqrt{\Theta_1 / Ne^2},$$

где A — некоторое число. Следовательно, с ростом N пространственный период уменьшается.

Более сложен случай $v_{te} \gg \xi_{01}$. Здесь не удастся получить определенного вывода о зависимости λ от давления. Результат будет определяться сравнительной быстротой изменения ξ_{01} и N с изменением давления.

Наряду с рассмотрением частных случаев (большие скорости дрейфа, большие и малые частоты колебаний) были найдены общие условия, при которых движением ионов можно полностью пренебречь. Эти условия, полученные при анализе «дисперсионного» уравнения (57) работы I, имеют следующий вид:

$$\omega \gg \omega_{20}, \quad \omega \gg 1/\tau_2; \quad \omega/k \gg \xi_{02}, \quad \omega/k \gg v_{ti}. \quad (28)$$

Как и следовало ожидать, движением ионов можно пренебречь при достаточно высоких частотах колебаний.

Пользуясь случаем, выражаем благодарность А. А. Зайцеву за интерес, проявленный к работе и ее обсуждение. Мы также благодарны В. Н. Фаддеевой за предоставление таблиц интеграла вероятностей от комплексного аргумента.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
17 февраля 1954 г.

Литература

- [4] Г. В. Гордеев. ЖЭТФ, **22**, 230, 1952. — [2] В. Н. Фаддеева и Н. Н. Терентьев. Таблицы значений интеграла вероятностей от комплексного аргумента, ГИТТЛ, 1954. М. Борн. Оптика, ОНТИ, Киев, 1937, стр. 648. — [3] В. А. Фок. Дифракция радиоволн, Изд-во АН СССР, 1946. — [4] L. Tonks, M. Mott-Smith a. I. Langmuir. Phys. Rev., **28**, 104, 1926. — [5] L. Tonks a. I. Langmuir. Phys. Rev., **34**, 876, 1929. — [6] В. Ф. Коваленко, Д. А. Рожанский и Л. А. Сена. Журн. техн. физ., **4**, 1271, 1688, 1934. — [7] D. Oettingen. App. d. Phys., **19**, 519, 1934. — [8] А. А. Зайцев. Вестн. МГУ, серия физ.-мат. и естеств. наук, **10**, 41, 1951. — [9] А. А. Зайцев и Ю. Л. Климонтович. Вестн. МГУ, серия физ.-мат. и естеств. наук, **12**, 59, 1951. — [10] H. Paul. ZS. f. Phys., **97**, 330, 1935. — [11] H. J. Merill a. H. W. Webb. Phys. Rev., **55**, 1069, 1939. — [12] А. Власов. Теория многих частиц, Гостехиздат, 1950. — [13] Ю. Л. Климонтович. ЖЭТФ, **21**, 1292, 1951. — [14] А. И. Ахиезер и Я. Б. Файнберг. ДАН СССР, **69**, 555, 1949.

РЕЗОНАНСНОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ УЛЬТРАЗВУКА В ПАРАМАГНИТНЫХ СОЛЯХ

С. А. Альтшулер

Дана теория резонансного поглощения ультразвука в различных парамагнитных солях в предположении, что спин-решеточное взаимодействие осуществляется посредством модуляции внутреннего электрического поля кристалла упругими колебаниями решетки. Вычислен коэффициент поглощения звука σ в солях элементов группы железа (титано-цезиевые и хромовые квасцы), в солях редкоземельных элементов (нитрат перия, этилсульфат празеодима), в солях, магнитные ионы которых находятся в S -состоянии (железные квасцы). В некоторых случаях коэффициент σ столь значителен, что эффект парамагнитного поглощения звука должен быть легко наблюдаем.

1. Введение

В данной работе рассматривается резонансное поглощение ультразвука парамагнитными солями, появляющееся в результате переходов между энергетическими уровнями спиновой системы, помещенной в статическое магнитное поле. Это поглощение будет иметь место, если выполнено резонансное условие:

$$h\nu = g\beta H, \quad (1)$$

где ν — частота ультразвука, g — фактор спектроскопического расщепления, β — магнетон, H — напряженность приложенного магнитного поля.

Рассматриваемое нами явление аналогично эффекту парамагнитного резонанса, открытому Завойским [1] и заключающемуся, как известно, в резонансном поглощении спиновой системой энергии радиочастотного электромагнитного поля в результате магнитных дипольных переходов между подуровнями, создаваемыми статическим магнитным полем, расположенным перпендикулярно к переменному магнитному полю. В этом случае также должно выполняться условие (1), но под ν , очевидно, следует понимать частоту переменного магнитного поля. Завойским был также поставлен вопрос о возможности резонансного поглощения парамагнетиками энергии звуковых колебаний.

Природа механизма, осуществляющего передачу энергии звуковых колебаний парамагнитным частицам, является, очевидно, тою же, что и природа парамагнитной решеточной релаксации. Процесс парамагнитной релаксации заключается в установлении термодинамического равновесия путем передачи энергии магнитных частиц тепловым колебаниям решетки. Этот обмен энергией между спиновой системой и колебаниями решетки совершается в основном вплоть до гелиевых температур при помощи процессов 2-го порядка, именно посредством комбинационного рассеяния фононов. Только при самых низких температурах существенную роль приобретают однофононные процессы.

Резонансное поглощение ультразвука можно рассматривать как обратное явление парамагнитной решеточной релаксации, ибо оно заключается в поглощении энергии колебаний решетки системой маг-

нитных частиц. Под влиянием звуковых колебаний будут периодически изменяться силы, действующие на магнитные частицы, и возникнут переходы с одного магнитного подуровня энергии на другой. Большая заселенность нижних подуровней приведет к тому, что число переходов, связанных с поглощением энергии, будет превышать число обратных переходов. Равновесие будет восстанавливаться путем передачи избытка энергии парамагнитных частиц тепловым колебаниям решетки.

Следует иметь в виду, что парамагнитное поглощение звуковых колебаний будет происходить при помощи процессов 1-го порядка, заключающихся в полном поглощении фононов, частота которых удовлетворяет резонансному условию (1). Поэтому расчет коэффициента парамагнитного поглощения звука аналогичен вычислениям времени парамагнитной решеточной релаксации τ при гелиевых температурах. Это позволяет нам сразу же оценить порядок величины рассматриваемого нами эффекта в твердых телах.

Вероятность поглощения фонона за 1 сек. под влиянием тепловых колебаний решетки A приблизительно равна $1/2 \tau$. Вместе с тем эта вероятность пропорциональна числу осцилляторов ρ , частоты ν , входящему на единичный частотный интервал, и среднему значению квантового числа n_ν при температуре кристалла T_0 , так что

$$A = A_0 \rho_\nu n_\nu, \quad (2)$$

$$\rho_\nu = 4\pi\nu^2 V / v^3, \quad n_\nu = kT_0 / h\nu.$$

Здесь V — объем кристалла, а v — скорость звука. Звуковую волну мы будем считать почти монохроматической. Если средний интервал звуковых колебаний равен $\Delta\nu$, то интенсивность звуковой волны, т. е. энергия, проходящая за 1 сек. через площадку в 1 см^2 , будет равна $I = I_\nu \Delta\nu$, где $I_\nu = v \rho_\nu n_\nu h\nu / V$. Здесь ρ_ν и n_ν имеют тот же смысл, что и ρ_ν и n_ν в (2), но относятся к звуковым колебаниям. Энергия этих колебаний, поглощенная единицей объема парамагнетика за 1 сек. при температуре кристалла T , равна

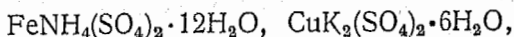
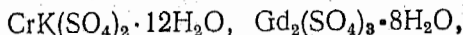
$$E = N A_0 \rho_\nu n_\nu \frac{(h\nu)^2}{kT} \frac{\Delta\nu}{v_{1/2}}, \quad (3)$$

где N — число магнитных частиц в единице объема.

Мы приняли, что интервал $\Delta\nu$ гораздо меньше полуширины линии парамагнитного резонансного поглощения $\nu_{1/2}$. Множитель $h\nu / kT$ определяет избыток актов поглощения над актами испускания фононов. Из (2) и (3) получаем коэффициент поглощения звука

$$\sigma = \frac{E}{I} = \frac{h^2}{8\pi k^2} \frac{N v^2}{\tau T_0 T v_{1/2}}. \quad (4)$$

Все измерения времен релаксации, произведенные для ряда веществ:



при температуре жидкого гелия [2] дают для τ значения, близкие к 10^{-2} сек., слабо возрастающие с увеличением приложенного магнитного поля. Отсюда для коэффициента σ при комнатной температуре получаем величину порядка $0,1 \text{ см}^{-1}$. Надо, правда, иметь в виду, что благодаря внутренним магнитным полям решающую роль в спин-решеточном взаимодействии, определяющем величину τ , играют частоты, большие 10^9 сек^{-1} . Поэтому оценка коэффициента поглощения σ при помощи (4) может быть произведена для звуковых частот $\sim 10^9 \text{ сек}^{-1}$,

для меньших же частот надо учесть, что σ пропорционален обычно квадрату частоты ν .

Таким образом изучаемый нами эффект оказывается вполне доступным для наблюдения. Поэтому мы провели вычисления коэффициента поглощения σ для различных веществ. В большинстве парамагнитных солей основную роль в спин-решеточном взаимодействии играет внутреннее электрическое поле кристалла. В этих веществах звуковые колебания решетки, изменяя электрическое поле кристалла, периодически воздействуют на орбитальное движение электронов магнитного атома. Вследствие этого происходит изменение направления спина атома по отношению к внешнему магнитному полю. Нами рассмотрено поглощение звука только при помощи этого механизма спин-решеточного взаимодействия.

2. Соли элементов группы железа

Сначала выведем общую формулу для коэффициента поглощения. Вероятность того, что атом за 1 сек. перейдет с магнитного уровня α на другой уровень β , поглотив при этом один квант колебаний решетки, равна

$$A = \frac{4\pi^2}{\hbar^2} \rho_a |\mathcal{H}_{\alpha, \beta; n_a-1, n_a}|^2. \quad (5)$$

Здесь $\mathcal{H}_{\alpha, \beta; n_a-1, n_a}$ — матричный элемент возмущения, включающий спин-решеточное, а возможно, и другие взаимодействия. Энергия, поглощенная единицей объема парамагнетика за 1 сек., равна

$$E = AN \frac{(\hbar\nu)^2}{kT} \frac{\Delta\nu}{v_{1/2}}. \quad (6)$$

Отсюда для коэффициента поглощения имеем

$$\sigma = \frac{4\pi^2}{\hbar^2} \frac{N\hbar\nu V}{kT n_a v_{1/2}} |\mathcal{H}_{\alpha, \beta; n_a-1, n_a}|^2. \quad (7)$$

Мы допустим, что поглощение звука связано с периодическими изменениями электрического поля кристалла под влиянием упругих колебаний решетки. Во многих солях магнитный ион окружен шестью молекулами воды, расположенными в вершинах октаэдра. Нормальные колебания такой группы молекул были подробно изучены в [3]. Если через Q_k обозначить нормальные координаты систем $\text{Me} \cdot 6\text{H}_2\text{O}$, то оказывается, что энергия спин-решеточного взаимодействия линейно будет зависеть только от некоторых шести координат, так что, пренебрегая квадратичными относительно Q_k членами, мы можем написать:

$$\mathcal{H}_{\alpha, \beta; n_a-1, n_a} = \sum_{h=1}^6 (\mathcal{H}_h)_{\alpha, \beta} (Q_k)_{n_a-1, n_a}. \quad (8)$$

Величины Q_k будут линейными функциями всех $3N$ нормальных координат q_i , характеризующих упругие волны решетки:

$$Q_k = \sum_i a_{ki} q_i, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned}
 a_{1i} &= 0; \\
 a_{2i} &= u (\lambda_{x_i} \Phi_{x_i} - \lambda_{y_i} \Phi_{y_i}); \\
 a_{3i} &= u (\lambda_{x_i} \Phi_{x_i} + \lambda_{y_i} \Phi_{y_i} - 2\lambda_{z_i} \Phi_{z_i}) / \sqrt{3}; \\
 a_{4i} &= u (\lambda_{x_i} \Phi_{y_i} + \lambda_{y_i} \Phi_{x_i} + \lambda_{z_i} \Phi_{x_i} + \lambda_{x_i} \Phi_{z_i} + \lambda_{z_i} \Phi_{y_i} + \lambda_{y_i} \Phi_{z_i}) / \sqrt{3}; \\
 a_{5i} &= u (\lambda_{x_i} \Phi_{z_i} + \lambda_{z_i} \Phi_{x_i} - \lambda_{y_i} \Phi_{z_i} - \lambda_{z_i} \Phi_{y_i}) / \sqrt{2}; \\
 a_{6i} &= u (\lambda_{x_i} \Phi_{z_i} + \lambda_{z_i} \Phi_{x_i} + \lambda_{y_i} \Phi_{z_i} + \lambda_{z_i} \Phi_{y_i} - 2\lambda_{y_i} \Phi_{x_i} - 2\lambda_{x_i} \Phi_{y_i}) / \sqrt{6},
 \end{aligned} \quad (10)$$

а

$$u = (2\pi v R / v) \sin \delta_i. \quad (11)$$

Здесь Φ_{x_i} , Φ_{y_i} , Φ_{z_i} и λ_{x_i} , λ_{y_i} , λ_{z_i} — косинусы, определяющие, соответственно, направление поляризации и направление скорости распространения волны, R — равновесное расстояние между молекулой воды и магнитным ионом, δ_i — фазовая константа.

Допустим, что магнитное поле направлено параллельно оси z , а звуковая волна распространяется вдоль оси x . Тогда, подставляя (8) в (7), мы при помощи (9), (10) и (11) получим для коэффициента поглощения волны, распространяющейся в направлении, перпендикулярном магнитному полю, следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\perp} &= \frac{2}{9} P v^2 R^2 \left[3 |\mathcal{H}_2|^2 + |\mathcal{H}_3|^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} (\mathcal{H}_2 \mathcal{H}_3^* + \mathcal{H}_2^* \mathcal{H}_3) + \right. \\
 &+ 2 |\mathcal{H}_4|^2 + \frac{3}{2} |\mathcal{H}_5|^2 + \frac{5}{2} |\mathcal{H}_6|^2 + \sqrt{\frac{3}{2}} (\mathcal{H}_4 \mathcal{H}_5^* + \mathcal{H}_4^* \mathcal{H}_5) - \\
 &\left. - \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathcal{H}_4 \mathcal{H}_6^* + \mathcal{H}_4^* \mathcal{H}_6) + \frac{\sqrt{3}}{2} (\mathcal{H}_5 \mathcal{H}_6^* + \mathcal{H}_5^* \mathcal{H}_6) \right]_{\alpha, \beta}, \quad (12)
 \end{aligned}$$

где d — плотность вещества, а через P мы для краткости обозначили фактор $\pi^2 N / k T v^3 v_{12} d$, который входит во все выражения для коэффициента поглощения звука в твердых телах. При этом мы произвели усреднения по всем направлениям поляризации и по всевозможным значениям δ_i .

Если волна распространяется параллельно магнитному полю, то аналогичным путем получаем для коэффициента поглощения¹

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\parallel} &= \frac{2}{9} P v^2 R^2 [4 |\mathcal{H}_3|^2 + 2 |\mathcal{H}_4|^2 + 3 |\mathcal{H}_5|^2 + \\
 &+ |\mathcal{H}_6|^2 + 2 \sqrt{2} (\mathcal{H}_4 \mathcal{H}_6^* + \mathcal{H}_6^* \mathcal{H}_4)]_{\alpha, \beta}. \quad (12')
 \end{aligned}$$

Прежде всего мы остановимся на хорошо изученных теоретически и экспериментально титано-цезиевых и хромо-калиевых квасцах. Входящий в состав $\text{CsTi}(\text{SO}_4)_2 \cdot 12\text{H}_2\text{O}$ атом титана находится в состоянии ^3D . Сильное поле кубической симметрии, созданное молекулами воды, расщепляет орбитальный уровень энергии на дублет и триплет, отделенные интервалом, большим $50\,000 \text{ см}^{-1}$. Тригональное поле, созданное остальными атомами кристалла, и спин-орбитальное взаимодействие полностью снимают орбитальное вырождение. В отсутствие внешнего магнитного поля сохраняется лишь двукратное спиновое вырождение.

¹ Мы повсюду в этой статье значками $\perp$ и $\parallel$ будем обозначать величины, относящиеся к волнам, распространяющимся перпендикулярно и параллельно приложенному магнитному полю.

Допустим, что магнитное поле приложено параллельно тригональной оси кристалла; расщепление самого нижнего уровня энергии будет определяться g -фактором, равным $5/4$ [4]. Нас будет интересовать матричный элемент возмущения, связывающий эти два магнитных подуровня. Его можно получить, воспользовавшись известными расчетами времени парамагнитной релаксации [5], если в оператор возмущения включить энергию атома во внешнем магнитном поле, спин-орбитальное и орбитально-решеточное взаимодействия. Первое приближение оказывается равным нулю. Во втором приближении матричный элемент возмущения равен

$$\mathcal{H}^{-1/2, +1/2; n_a-1, n_a} = \frac{3}{2} \frac{\lambda g \beta H}{\delta^2} \left[V \bar{6} a (iQ_2 + Q_3) - \frac{1}{\sqrt{3}} b (iQ_5 - Q_0) \right]_{n_a-1, n_a}, \quad (13)$$

где

$$a = -\frac{12}{7} \left(\frac{\bar{r}^2}{R^2} - \frac{25}{18} \frac{\bar{r}^4}{R^4} \right) \frac{e\mu}{R^3}; \quad b = \frac{24}{7} \left(\frac{\bar{r}^2}{R^2} - \frac{5}{6} \frac{\bar{r}^4}{R^4} \right) \frac{e\mu}{R^3}. \quad (14)$$

Здесь $\bar{r}$ — среднее расстояние $3d$ -электрона от ядра, μ — эффективный дипольный момент молекулы воды, δ — интервал, отделяющий два самых нижних орбитальных подуровня, λ — константа спин-орбитального взаимодействия. Отсюда мы сразу получаем значения $\mathcal{H}_h$, подстановка которых в (12) и (12') дает нам следующее выражение для коэффициента поглощения:

$$\sigma = \alpha h^2 P \left(\frac{\lambda}{\delta^2} \right)^2 \left(\frac{e\mu}{R^2} \right)^2 v^4, \quad (15)$$

где

$$\alpha = 3 \left(\frac{8}{7} \right)^2 \left[11 \left(\frac{\bar{r}^2}{R^2} \right)^2 - \frac{85}{3} \frac{\bar{r}^2 \bar{r}^4}{R^6} + \frac{75}{4} \left(\frac{\bar{r}^4}{R^4} \right)^2 \right].$$

Коэффициент поглощения, оказывается, не зависит от угла между статическим магнитным полем и направлением распространения ультразвука. Воспользовавшись следующими значениями для входящих в эту формулу величин:

$$\begin{aligned} \lambda &= 154 \text{ см}^{-1}; & \delta &= 500 \text{ см}^{-1}; \\ v &= 2,3 \cdot 10^5 \text{ см/сек.}; & d &= 2 \text{ г/см}^3; \\ R &= 2 \cdot 10^{-8} \text{ см}; & \bar{r}^2 &= 1,23 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2; \\ \bar{r}^4 &= 2,46 \cdot 10^{-32} \text{ см}^4; & \mu &= 2 \cdot 10^{-18} \text{ CGSE}; \\ \nu_L &= 1,8 \cdot 10^8 \text{ сек.}^{-1}; & T &= 20^\circ \text{K}, \end{aligned}$$

большой частью взятыми из [4, 5], мы получим для коэффициента поглощения

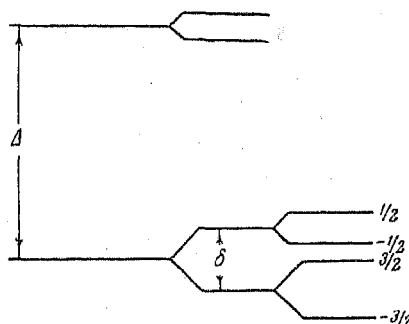
$$\sigma = 2,4 \cdot 10^{-38} v^4 \text{ см}^{-1}. \quad (16)$$

Для оценки σ мы приняли $T = 20^\circ$, так как титано-цезиевые квасцы обладают аномально коротким временем спин-решеточной релаксации, что позволяет обнаружить резонансное поглощение только при низких температурах.

Перейдем к хромовым квасцам. Основным состоянием свободного, трижды ионизованного атома хрома является ^4F . Схема расщепления уровней энергии электрическим полем кристалла и приложенным магнитным полем изображена на рис. 1. Сильное кубическое поле вызывает расщепление орбитального уровня энергии на три подуровня, самый нижний из которых является простым. Полное расщепление Δ , согласно [6], равно $50\,000 \text{ см}^{-1}$. Если принять во внимание электронный спин, то связанное с ним вырождение основного уровня энергии сохраняется

в поле кубической симметрии. Тригональное поле расщепляет спиновый квадруплет на два крамеровских дублета, интервал между которыми δ для хромовых квасцов различных типов лежит в пределах $0,12-0,18 \text{ см}^{-1}$. Нижнему дублету соответствуют магнитные спиновые квантовые числа $\pm 3/2$, верхнему — числа $\pm 1/2$.

Рис. 1. Схема последовательного расщепления основного уровня энергии иона Cr^{+++} при помещении его в электрическое поле кристалла кубической симметрии, в слабое поле тригональной симметрии и во внешнее магнитное поле



Матричный элемент возмущения, включающий в себя спин-орбитальное и спин-решеточное взаимодействия, отличен от нуля только в третьем приближении и может быть представлен в следующем виде [5]:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\alpha, \beta; n_a-1, n_a} = & \{ \epsilon_1 [Q_3 (2S_z^2 - S_x^2 - S_y^2) + \\ & + \sqrt{3} Q_2 (S_y^2 - S_x^2)] + \epsilon_2 [Q_4 (S_x S_y + S_y S_x) + \\ & + Q_5 (S_x S_z + S_z S_x) + Q_6 (S_y S_z + S_z S_y)] \}_{\alpha, \beta; n_a-1, n_a}, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\epsilon_1 = 54 \sqrt{3} \frac{\lambda^2}{\Delta^2} \left(\frac{e\mu}{R^3} \right) \frac{\bar{r}^4}{R^4}, \quad \epsilon_2 = \frac{12 \cdot 324}{175} \frac{\lambda^2}{\Delta^2} \left(\frac{e\mu}{R^3} \right) \left(\frac{\bar{r}^2}{R^2} - \frac{55}{36} \frac{\bar{r}^4}{R^4} \right),$$

S — оператор спинового момента; $\alpha, \beta = \pm 1/2, \pm 3/2$.

В рассматриваемом нами приближении отличны от нуля только переходы между подуровнями, относящимися к различным крамеровским дублетам. Поэтому положение линий поглощения уже не будет определяться условием (1), относящимся к переходам между подуровнями, возникающими только при наложении внешнего магнитного поля. Расчет при помощи (17) и (12) приводит к следующему выражению для коэффициента поглощения:

$$\sigma = \alpha \left(\frac{e\mu}{R^3} \right)^2 \left(\frac{\lambda}{\Delta} \right)^4 P_{\nu^2}. \quad (18)$$

Для переходов $-1/2 \rightarrow 3/2$ и $-3/2 \rightarrow 1/2$, коэффициент равен

$$\begin{aligned} \alpha'_{\perp} &= 3 \left(\frac{8 \cdot 324}{175} \right)^2 \left[\left(\frac{\bar{r}^2}{R^2} \right) - \frac{55}{18} \frac{\bar{r}^2 \bar{r}^4}{R^6} + 82 \left(\frac{\bar{r}^4}{R^4} \right)^2 \right], \\ \alpha'_{\parallel} &= 3 \left(\frac{8 \cdot 324}{175} \right)^2 \left(\frac{\bar{r}^2}{R^2} - \frac{55}{36} \frac{\bar{r}^4}{R^4} \right)^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Для переходов между подуровнями $-3/2 \rightarrow -1/2$, $1/2 \rightarrow 3/2$ коэффициент α не зависит от направления приложенного магнитного поля и равен $8\alpha'_{\parallel}$.

Если для численной оценки поглощения ультразвука принять, что $\lambda = 88 \text{ см}^{-1}$; $d = 1,7 \text{ г/см}^3$; $\nu_{1/2} = 1,03 \cdot 10^9 \text{ сек}^{-1}$; $T = 300^\circ \text{ К}$, а для остальных величин те же значения, что и для титано-цезиевых квасцов, то получим

$$\sigma'_{\perp} = 0,80 \cdot 10^{-21} \nu^2 \text{ см}^{-1}; \quad \sigma'_{\parallel} = 0,56 \cdot 10^{-23} \nu^2 \text{ см}^{-1}. \quad (20)$$

Мы получили для солей титана и хрома различную зависимость величины поглощения от частоты ультразвука. Это объясняется тем, что в случае хромовых квасцов спиновое вырождение частично снимается даже в отсутствие внешнего магнитного поля.

3. Соли редкоземельных элементов

Спин-решеточное взаимодействие в солях редкоземельных элементов обладает рядом особенностей, которые рассмотрены в работе автора [7]. Для примера остановимся на нитрате церия. Свободный трижды ионизованный атом церия находится в состоянии $^2F_{5/2}$. Шесть молекул воды, окружающие магнитный ион, создают, повидимому, поле кубической симметрии. Это поле расщепляет основной уровень энергии на дублет и квадруплет, отделенные интервалом Δ (рис. 2). Более слабое тригональное поле, создаваемое остальными атомами кристалла, расщепляет квадруплет на два двукратно вырожденных подуровня. Дальнейшие расщепления уровней ab , cd и fg во внешнем магнитном поле, приложенном параллельно оси октаэдра, имеют значения $^{11/3} g\beta H$, $g\beta H$, $^{5/3} g\beta H$ соответственно.

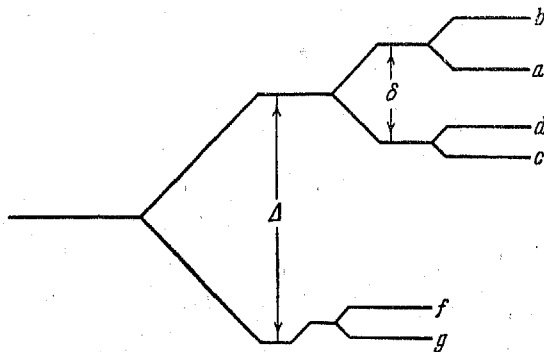


Рис. 2. Схема последовательного расщепления основного уровня энергии иона Ce^{+++} при помещении его в сильное электрическое поле кристалла кубической симметрии, в слабое поле тригональной симметрии и во внешнее магнитное поле

Сначала рассчитаем поглощение, связанное переходами между уровнями f и g . Матричный элемент возмущения, включающего в себя спин-решеточное взаимодействие и потенциал тригонального поля, отличен от нуля во втором приближении и равен

$$\mathcal{H}_{f, g; n_a-1, n_a} = \frac{1}{8} \left(\frac{e\mu}{R^3} \right) \left(\frac{\bar{r}^2}{R^2} - \frac{9}{64} \frac{\bar{r}^4}{R^4} \right)^2 \frac{(5/3 g\beta H) \delta}{\Delta^2} (Q_5 + iQ_6) n_{a-1, n_a}. \quad (21)$$

Отсюда обычным путем получаем для коэффициентов поглощения

$$\sigma_{\parallel} = \frac{1}{18} \left(\frac{\bar{r}^2}{R^2} - \frac{9}{64} \frac{\bar{r}^4}{R^4} \right)^2 \left(\frac{e\mu}{R^2} \right)^2 \frac{h^2 \delta^2 P}{\Delta^4} \nu^4, \quad (22)$$

$$\sigma_{\perp} = 1/4 \sigma_{\parallel}.$$

Если принять для полуширины линии поглощения $\nu_{1/2} = 1,6 \cdot 10^9 \text{ сек.}^{-1}$, а для остальных величин значения, приведенные в [7], то при $T = 20^\circ \text{ K}$ получим

$$\sigma_{\parallel} = 3 \cdot 10^{-41} \nu^4 \text{ см}^{-1}. \quad (22')$$

Матричный элемент возмущения для переходов между подуровнями ab имеет такой же вид, что и для fg . Различие лишь в том, что интервал ab в $^{11/5}$ раза больше интервала fg . Вследствие этого коэффициент поглощения, полученный для fg , надо умножить на $(^{5/11})^2$.

Подсчет показывает, что вероятности переходов между уровнями cd равны нулю. Этот результат связан с нашим выбором поля низкой (по отношению к основному кубическому полю) симметрии. С полем

инного типа мы получили бы поглощение того же порядка, что и для других пар уровней.

Таким образом коэффициент поглощения для нитрата церия оказывается очень малым. Это объясняется низкой симметрией электрического поля кристалла, оставляющего только крамеровское вырождение уровней энергии, которое не может быть снято изменениями электрического поля, создаваемыми колебаниями решетки. Иначе обстояло бы дело, если бы электрическое поле кристалла обладало настолько большой симметрией, что сохранилось бы некрамеровское вырождение энергетических уровней. В этом случае спин-решеточное взаимодействие отличалось бы от нуля уже в первом приближении, а коэффициент поглощения оказался бы на много большим.

Из солей редкоземельных элементов за последнее время наиболее тщательно изучению подверглись этилсульфаты, в которых кристаллическое поле обладает гексагональной симметрией. Эффект Яна-Теллера, способствующий понижению симметрии поля, у солей редкоземельных элементов настолько мал [3], что им, видимо, можно пренебречь. У атомов, обладающих полужелтым спином, поле гексагональной симметрии расщепляет энергетические уровни так, что остается только крамеровское вырождение [8]. Поэтому у солей церия, неодима и других элементов, ионы которых содержат нечетное число электронов, эффект резонансного поглощения звука будет мал. У атомов с четным числом электронов гексагональное поле оставляет некоторые уровни энергии двукратно вырожденными. Так, например, в этилсульфате празеодима основной уровень Pr^{3+} оказывается некрамеровским дублетом [9]. Легко оценить поглощение звука в результате переходов между этой парой уровней. Если мы учтем, что матричный элемент спин-решеточного взаимодействия для этого дублета отличен от нуля в первом приближении, то для коэффициента поглощения получаем

$$\sigma = \gamma P \left(\frac{e\mu}{R^2} \right)^2 \left(\frac{\bar{r}^2}{R^2} \right)^2 v^2, \quad (23)$$

где γ — численный коэффициент порядка единицы. Приняв для ширины линии поглощения $\nu_{1/2} = 2 \cdot 10^9$ сек.⁻¹, для температуры $T = 20^\circ \text{K}$ мы получим

$$\sigma \sim 10^{-15} \nu^2 \text{ см}^{-1}. \quad (23')$$

Заметим, что у солей редкоземельных элементов время спин-решеточной релаксации при комнатной температуре является очень коротким [7]. Поэтому наблюдение эффекта поглощения звука возможно только при низких температурах.

4. Соли с магнитными ионами в S-состоянии

Среди парамагнетиков особое место занимают соли двухвалентного марганца, трехвалентных железа и гадолиния. Магнитные ионы этих солей находятся в S-состоянии, вследствие чего электрическое поле кристалла вызывает крайне малые расщепления основного уровня, не превышающие 1 см^{-1} . Подробно рассмотрим соли железа, ион которого находится в состоянии ^6S . Оператор Гамильтона, учитывающий действие электрического поля кристалла и внешнего магнитного поля, имеет следующий вид [10]:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{6} D [S_x^4 + S_y^4 + S_z^4 - \frac{1}{3} S(S+1)(3S^2 + S - 1)] + g\beta H. \quad (24)$$

Для железо-рубидиевых квасцов $D = 0,0134 \text{ см}^{-1}$ [11]. Если магнитное поле приложено в направлении [100], то неравные нулю матричные элементы $\mathcal{H}$ имеют значения:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\pm^{1/2}, \pm^{1/2}} &= D \pm \frac{5}{2} G, & \mathcal{H}_{\pm^{3/2}, \pm^{1/2}} &= -\frac{3}{2} D \pm \frac{3}{2} G, \\ \mathcal{H}_{\pm^{1/2}, \pm^{3/2}} &= D \pm \frac{1}{2} G, & \mathcal{H}_{-^{1/2}, ^{1/2}} &= \mathcal{H}_{-^{3/2}, ^{3/2}} = \frac{V\sqrt{5}}{2} D.\end{aligned}\quad (25)$$

Здесь $G = g\beta H$.

Решение векового уравнения приводит к следующим собственным значениям и волновым функциям:

$$\begin{aligned}E_a &= -\frac{1}{2} D - \frac{1}{2} G + \sqrt{(D - 2G)^2 + \frac{5}{4} D^2}; & \Psi_a &= a_1 \Phi_{-^{1/2}} + a_2 \Phi_{^{1/2}}; \\ E_b &= -\frac{1}{2} D + \frac{1}{2} G + \sqrt{(D + 2G)^2 + \frac{5}{4} D^2}; & \Psi_b &= b_1 \Phi_{-^{1/2}} + b_2 \Phi_{^{1/2}}; \\ E_c &= D - \frac{1}{2} G; & \Psi_c &= \Phi_{-^{1/2}}; \\ E_d &= D + \frac{1}{2} G; & \Psi_d &= \Phi_{^{1/2}}; \\ E_f &= -\frac{1}{2} D - \frac{1}{2} G - \sqrt{(D - 2G)^2 + \frac{5}{4} D^2}; & \Psi_f &= f_1 \Phi_{-^{1/2}} + f_2 \Phi_{^{1/2}}; \\ E_g &= -\frac{1}{2} D + \frac{1}{2} G - \sqrt{(D + 2G)^2 + \frac{5}{4} D^2}; & \Psi_g &= g_1 \Phi_{-^{1/2}} + g_2 \Phi_{^{1/2}}.\end{aligned}\quad (26)$$

Трижды ионизованные атомы железа и церия имеют сходную структуру энергетических уровней вследствие того, что в основном состоянии обоих ионов квантовое число полного момента вращения равно $5/2$. Поэтому, воспользовавшись формулами (8) и (9) нашей работы, посвященной парамагнитной релаксации в солях церия [7], мы при помощи волновых функций (26) получим для матричных элементов оператора спин-решеточного взаимодействия

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{ab} &= -\frac{3}{2} V\sqrt{5} (a_1 b_1 - a_2 b_2) \left(\frac{\bar{r}^2}{R^2} - \frac{9}{64} \frac{\bar{r}^4}{R^4} \right) \left(\frac{e\mu}{R^3} \right) (Q_5 + iQ_0) \equiv F_1(a, b); \\ \mathcal{H}_{ac} &= \frac{3}{8} V\sqrt{2} \left\{ 3 (V\sqrt{5} a_1 + 3a_2) \left(\frac{\bar{r}^2}{R^2} + \frac{45}{32} \frac{\bar{r}^4}{R^4} \right) Q_2 - \right. \\ &\quad \left. - 2i(V\sqrt{5} a_1 - 3a_2) \left(\frac{\bar{r}^2}{R^2} + \frac{27}{32} \frac{\bar{r}^4}{R^4} \right) Q_4 \right\} \frac{e\mu}{R^3} \equiv F_2(a_1, a_2); \\ \mathcal{H}_{ad} &= \frac{3}{2} V\sqrt{2} \left\{ a_2 \frac{\bar{r}^2}{R^2} + \frac{9}{128} (7V\sqrt{5} a_1 + 5a_2) \frac{\bar{r}^4}{R^4} \right\} \left(\frac{e\mu}{R^3} \right) (Q_6 - iQ_0) \equiv F_3(a_2, a_1); \\ \mathcal{H}_{af} &= -\frac{3}{4} V\sqrt{3} \left\{ (5a_1 f_1 - a_2 f_2) \frac{\bar{r}^2}{R^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{15}{64} [5a_1 f_1 - 15a_2 f_2 - 14V\sqrt{5} (a_1 f_2 + a_2 f_1)] \frac{\bar{r}^4}{R^4} \right\} \left(\frac{e\mu}{R^3} \right) Q_3 \equiv F_4(a, f); \\ \mathcal{H}_{ag} &= F_1(a, g), \quad \mathcal{H}_{bc} = F_2(b_2, b_1); \quad \mathcal{H}_{bd} = F_3(b_1, b_2); \quad \mathcal{H}_{bf} = F_1(b, f); \\ \mathcal{H}_{bg} &= F_4(b, g); \quad \mathcal{H}_{cd} = 0; \quad \mathcal{H}_{cf} = F_2(f_1, f_2); \quad \mathcal{H}_{cg} = F_3(g_1, g_2); \\ \mathcal{H}_{df} &= F_3(f_2, f_1); \quad \mathcal{H}_{dg} = F_2(g_2, g_1).\end{aligned}\quad (27)$$

Отсюда для коэффициента поглощения звука при помощи (12) получаем

$$\sigma = \alpha P (e\mu / R^2)^2. \quad (28)$$

Если магнитное поле приложено перпендикулярно направлению распространения звука, то численный коэффициент α будет для различных пар уровней иметь следующие значения:

$$\begin{aligned}
\alpha_{ab} &= 5 \left[(a_1 b_1 - a_2 b_2) \left(\frac{\bar{r}^2}{R^2} - \frac{9}{64} \frac{\bar{r}^4}{R^4} \right) \right]^2 \equiv \alpha_1(a, b); \\
\alpha_{ac} &= 2 \left[a_2 \frac{\bar{r}^2}{R^2} + \frac{9}{128} (7\sqrt{5} a_1 + 5a_2) \frac{\bar{r}^4}{R^4} \right]^2 \equiv \alpha_2(a_2, a_1); \\
\alpha_{ad} &= \frac{3}{2} \left[\frac{3}{4} (V\sqrt{5} a_1 + 3a_2) \left(\frac{\bar{r}^2}{R^2} + \frac{45}{32} \frac{\bar{r}^4}{R^4} \right) \right]^2 \equiv \alpha_3(a_1, a_2); \\
\alpha_{af} &= \frac{9}{16} \left\{ (5a_1 f_1 - a_2 f_2) \frac{\bar{r}^2}{R^2} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{15}{64} [5a_1 f_1 - 15a_2 f_2 - 14V\sqrt{5}(a_1 f_2 + a_2 f_1)] \frac{\bar{r}^4}{R^4} \right\}^2 \equiv \alpha_4(a, f); \\
\alpha_{ag} &= \alpha_1(a, g); \quad \alpha_{bc} = \alpha_2(b_2, b_1); \quad \alpha_{bd} = \alpha_3(b_2, b_1); \quad \alpha_{bf} = \alpha_1(b, f); \\
\alpha_{bg} &= \alpha_4(b, g); \quad \alpha_{cd} = 0; \quad \alpha_{cf} = \alpha_3(f_1, f_2); \quad \alpha_{cg} = \alpha_2(g_1, g_2); \\
\alpha_{df} &= \alpha_2(f_2, f_1); \quad \alpha_{fg} = \alpha_3(g_2, g_1); \quad \alpha_{fg} = \alpha_1(f, g).
\end{aligned} \tag{29}$$

Если магнитное поле направлено параллельно скорости звука, то численный коэффициент α , который мы теперь обозначим через α' , будет определяться по тем же формулам (27), через четыре функции α_i , если им придать следующие значения:

$$\alpha'_1 = \alpha_1; \quad \alpha'_2 = \frac{1}{2} (V\sqrt{5} a_1 - 3a_2)^2 \left(\frac{\bar{r}^2}{R^2} + \frac{27}{32} \frac{\bar{r}^4}{R^4} \right)^2; \quad \alpha'_3 = \alpha_3; \quad \alpha'_4 = 4\alpha_4. \tag{30}$$

В сильном магнитном поле, вызывающем расщепления, гораздо большие, чем электрическое поле кристалла, энергетические уровни удобно характеризовать по значениям магнитного квантового числа M . Так как в этом случае:

$$a_1 = b_2 = f_2 = -g_1 = 1; \quad a_2 = b_1 = f_1 = g_2 = 0,$$

то для коэффициента α имеем

$$\begin{aligned}
\Delta M = 1: \quad \alpha_{-1/2, -1/2} &= \alpha_{1/2, 1/2} = 5 \left(\frac{\bar{r}^2}{R^2} - \frac{9}{64} \frac{\bar{r}^4}{R^4} \right)^2; \\
\alpha_{-1/2, -1/2} &= \alpha_{1/2, 1/2} = 2 \left(\frac{\bar{r}^2}{R^2} + \frac{45}{128} \frac{\bar{r}^4}{R^4} \right)^2; \quad \alpha_{-1/2, 1/2} = 0; \\
\Delta M = 2: \quad \alpha_{-1/2, -1/2} &= \alpha_{1/2, 1/2} = \frac{135}{2} \left(\frac{\bar{r}^2}{R^2} + \frac{45}{32} \frac{\bar{r}^4}{R^4} \right)^2; \\
\alpha_{-1/2, 1/2} &= \alpha_{1/2, 1/2} = \frac{9}{5} \alpha_{1/2, 1/2}; \\
\Delta M = 3: \quad \alpha_{-1/2, 1/2} &= \alpha_{1/2, 1/2} = 10 \left(\frac{63}{128} \frac{\bar{r}^4}{R^4} \right)^2; \quad \alpha_{-1/2, 1/2} = 0; \\
\Delta M = 4: \quad \alpha_{-1/2, 1/2} &= \alpha_{1/2, 1/2} = 5 \left(\frac{315}{128} \frac{\bar{r}^4}{R^4} \right)^2; \\
\Delta M = 5: \quad \alpha_{-1/2, 1/2} &= 0.
\end{aligned} \tag{31}$$

Следует заметить, что переходы между соседними подуровнями возможны только под действием поперечных колебаний, переходы же $\Delta M = 2$ происходят только под влиянием продольных волн.

Если приложено слабое магнитное поле, то $a_1 = b_2 = -f_2 = -g_1 = V\sqrt{6}/6$; $a_2 = b_1 = f_1 = g_2 = 1/V\sqrt{6}$. В предельном случае, когда магнитное поле отсутствует, электрическое поле расщепит основной уровень иона железа только на два подуровня, для которых коэффициент α равен

$$\alpha = 25 \left[\left(\frac{\bar{r}^2}{R^2} \right)^2 - \frac{5}{6} \frac{\bar{r}^2 \bar{r}^4}{R^6} + 36 \left(\frac{\bar{r}^4}{R^4} \right)^2 \right]. \tag{32}$$

Для того чтобы вычислить по полученным нами формулам коэффициент поглощения, необходимо учесть следующее обстоятельство. В предыдущих разделах энергия взаимодействия магнитного иона с молекулой воды имела порядок $e\mu/R^2$. Действие электрического поля кристалла на ионы, находящиеся в S -состоянии, намного слабее. Это обстоятельство мы учтем, придавая соответственно меньшие значения дипольному моменту μ . В железо-рубидиевых квасцах кристаллическое поле производит энергетическое расщепление, примерно в 10^{-6} раз меньшее, чем в таких же солях с другим катионом. Поэтому, принимая $\mu \sim 10^{-24}$, мы для коэффициента поглощения в отсутствие магнитного поля получим

$$\sigma = 10^{-24} \nu^2 \text{ см}^{-1}. \quad (32')$$

Надо сказать, что в некоторых случаях кристаллическое поле создает гораздо большие расщепления. Так, у иона гадолиния [12] оно на два порядка больше, что увеличивает коэффициент поглощения σ в 10^4 раз.

Как мы видели, вероятность поглощения фонона очень сильно зависит от величины спин-орбитального взаимодействия электронов магнитного атома и, в особенности, от характера расщепления основного уровня энергии этого атома электрическим полем кристалла. Поэтому величина эффекта резонансного поглощения звука может в очень широких пределах изменяться при переходе от одного вещества к другому. Современная ультразвуковая техника позволяет получать частоты до 10^9 гц, что, следовательно, делает возможным наблюдение эффекта резонансного парамагнитного поглощения звука, по крайней мере, в некоторых веществах.

Казанский государственный
университет

Поступила в редакцию
1 марта 1954 г.

Литература

- [1] Е. К. Завойский. Sow. Phys., 10, 197, 1946.—[2] H. C. Kramers, D. Bijl, C. J. Gorter. Physica, 16, 65, 1950.—[3] J. H. Van Vleck. Journ. Chem. Phys., 7, 72, 1939.—[4] B. Bleaney a. K. W. H. Steevens. Ann. Rep. Progr. Phys., 16, 108, 1952.—[5] J. H. Van Vleck. Phys. Rev., 57, 426, 1940.—[6] B. Bleaney a. K. D. Bowers. Proc. Phys. Soc., A, 64, 1135, 1951.—[7] С. А. Альтшулер. ЖЭТФ, 24, 681, 1953.—[8] H. Bethe. Ann. d. Phys., 3, 133, 1929.—[9] B. Bleaney a. H. E. D. Scovil. Phil. Mag., 43, 999, 1952.—[10] K. W. H. Steevens. Proc. Roy. Soc., 214, 237, 1952.—[11] B. Bleaney a. K. S. Trenan. Proc. Phys. Soc., A, 65, 560, 1952.—[12] Н. С. Гарифьянов. ДАН СССР, 84, 923, 1952.

К ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОННОГО И ЯДЕРНОГО ПАРАМАГНИТНОГО РЕЗОНАНСА ПОД ВЛИЯНИЕМ УЛЬТРАЗВУКА

С. А. Альтшулер

Дана теория резонансного поглощения ультразвука в различных классах парамагнетиков (соли, редкоземельные металлы, растворы солей, газы, вещества, обладающие ядерным парамагнетизмом). Рассмотрены различные механизмы спин-решеточного взаимодействия, могущие вызвать обсуждаемый эффект. Значения вычисленных коэффициентов поглощения показывают, что в ряде веществ эффект легко может быть наблюден, в других случаях возможно использование косвенных методов исследования.

1. Введение

В работе автора [1] дана теория резонансного поглощения ультразвука в различных парамагнитных солях в предположении, что спин-решеточное взаимодействие осуществляется посредством модуляции внутреннего электрического поля кристалла упругими колебаниями решетки.

В данной статье рассмотрено поглощение ультразвука в солях при допущении, что спин-решеточное взаимодействие определяется магнитными и обменными силами. В некоторых случаях этот механизм оказывается наиболее эффективным. Нами рассчитан также эффект поглощения звука в редкоземельных металлах; в некоторых из них он оказался весьма значительным. Рассмотрено также резонансное поглощение ультразвука, обязанное ядерному парамагнетизму. Как выяснилось, нередко данный эффект настолько велик, что может быть наблюден как прямыми, так и косвенными методами¹.

В наших расчетах мы будем исходить из следующей общей формулы для коэффициента поглощения звука [1]:

$$\sigma = \frac{4\pi^2}{h^2} \frac{N h \nu V}{k T \nu n_a \nu_{1/2}} |\mathcal{H}_{\alpha, \beta; n_a-1, n_a}|^2. \quad (1)$$

Здесь N — число магнитных частиц в единице объема, ν и ν — частота и скорость распространения звука, V и T — объем и температура парамагнетика, $\nu_{1/2}$ — полуширина линии поглощения, $\mathcal{H}_{\alpha, \beta; n_a-1, n_a}$ — матричный элемент спин-решеточного взаимодействия, относящийся к магнитным подуровням α и β и колебательным состояниям решетки, характеризующимся квантовыми числами $n_a - 1$ и n_a .

¹ Резонансное поглощение ультразвука должно существовать не только в парамагнетиках, но и в ферромагнитных и антиферромагнитных веществах. Отсутствие удовлетворительной теории спин-решеточного взаимодействия для ферро- и антиферромагнетиков делает затруднительной количественную оценку данного акустического эффекта. Известно, что обычные эффекты ферро- и антиферромагнитного резонанса не уступают по величине резонансному поглощению в парамагнетиках. Поэтому можно ожидать, что резонансное поглощение ультразвука в ферро- и антиферромагнитных телах будет также значительным.

Расчет поглощения звука производится в предположении, что выполнено резонансное условие, которое в простейшем случае имеет вид:

$$h\nu = g\beta H, \quad (2)$$

где g — фактор спектроскопического расщепления, β — магнетон, H — напряженность приложенного магнитного поля.

2. Магнитные и обменные взаимодействия

Первая теория парамагнитной релаксации, развитая в [2], строилась на допущении, что спин-решеточная связь осуществляется посредством магнитных сил, действующих между атомами кристалла. Позднее, на примере нескольких парамагнитных солей [3], было доказано, что этот механизм совершенно недостаточен для того, чтобы объяснить наблюдающиеся значения времен релаксации. Был введен иной механизм, которым мы и пользовались в предыдущей работе [1]. Однако в некоторых парамагнитных веществах механизм, рассмотренный в работе [2], может играть основную роль. В этой работе рассмотрен случай, когда спин атома $S = 1/2$. Между тем легко видеть, что вероятность изменения ориентации спина под влиянием колебаний внутреннего магнитного поля пропорциональна четвертой степени магнитного момента атома. К тому же эта вероятность обратно пропорциональна a^3 , если через a обозначить равновесное расстояние между магнитными атомами кристалла. Отсюда ясно, что магнитные силы могут определять спин-решеточное взаимодействие в веществах с большими магнитными моментами атомов и с большой плотностью магнитных частиц.

Мы воспользуемся обычным выражением для оператора магнитного дипольного взаимодействия атомов:

$$U_{hl} = g^2 \beta^2 \left[\frac{(S_h S_l)}{r_{hl}^3} - \frac{3(S_h r_{hl})(S_l r_{hl})}{r_{hl}^5} \right]. \quad (3)$$

Для определения коэффициента поглощения звука мы будем исходить из формулы (1). Входящему в (1) квадрату матричного элемента спин-решеточного взаимодействия, если допустить, что звуковая волна распространяется вдоль оси x , легко придать следующий вид [2]:

$$|\mathcal{H}_{\alpha, \beta; n_\alpha - 1, n_\alpha}|^2 = \frac{h n_a}{4\pi^2 M v} \sum_l \left(\frac{2\pi v r_{hl}}{v} \right)^2 |(U_{hlx})_{\alpha, \beta}|^2, \quad (4)$$

где

$$U_{hlx} = \partial U_{hl} / \partial x_{hl}, \quad (5)$$

а суммирование проводится по всем магнитным атомам кристалла. Как обычно, мы примем, что эти атомы образуют простую кубическую решетку. Мы будем пользоваться представлением, в котором S_{hx} и S_{lx} диагональны. Обозначим через M_h и M_l магнитные квантовые числа соответствующих атомов. Оператор U_{hlx} будет содержать различные выражения типа $S_{hq} S_{lp}$, недиагональные матричные элементы которых отличны от нуля только в следующих случаях:

$$\begin{aligned} (S_{hx} S_{lx})_{M_h, M_h+1; M_l, M_l} &= \frac{1}{2} \sqrt{S(S+1) - M_h(M_h+1)} M_l \equiv l, \\ (S_{hy} S_{ly})_{M_h, M_h+1; M_l, M_l} &= it; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
 & (S_{hx} S_{lx})_{M_h, M_h+1; M_l, M_l+1} = \\
 & = \frac{1}{4} \sqrt{S(S+1) - M_h(M_h+1)} \sqrt{S(S+1) - M_l(M_l+1)} = p, \\
 & (S_{hx} S_{ly})_{M_h, M_h+1; M_l, M_l+1} = (S_{hy} S_{lx})_{M_h, M_h+1; M_l, M_l+1} = ip, \\
 & (S_{hy} S_{ly})_{M_h, M_h+1; M_l, M_l+1} = -p.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Сначала рассмотрим поглощение звука, связанное переходами $\Delta M_h = 1$ и $\Delta M_l = 0$. При помощи (3), (4) и (6) найдем квадрат модуля соответствующего элемента матрицы U_{hlx} :

$$\begin{aligned}
 & |(U_{hlx})_{M_h, M_h+1; M_l, M_l}|^2 = \\
 & = 9 \frac{g^4 \beta^4}{r_{hl}^4} z_{hl}^2 [2x_{hl}^2 (x_{hl}^2 + y_{hl}^2) - 10 x_{hl}^2 r_{hl}^2 + r_{hl}^4] t^2.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Произведем усреднение по различным направлениям распространения звука по отношению к осям кристалла, а также по всевозможным значениям M_h и M_l . Тогда получим

$$|(U_{hlx})_{M_h, M_h+1; M_l, M_l}|^2 = \frac{759}{7} \frac{g^4 \beta^4}{r_{hl}^4} \frac{1}{36} S(S+1)^2 (2S+1). \tag{9}$$

Подставляя это выражение в (4), а затем в (1) и учитывая только влияние ближайших соседей, мы получим для коэффициента поглощения

$$\sigma = \gamma P Z (g^2 \beta^2 / a^3)^2 S(S+1)^2 (2S+1)^2 v^2, \tag{10}$$

где Z — число ближайших соседей атома в кристаллической решетке, $\gamma_{\perp} = 253/21$, d — плотность вещества, а $P = \pi^2 N / k T v_{\perp} d$. Наши вычисления относятся к поглощению звуковых колебаний, распространяющихся перпендикулярно к приложенному магнитному полю, направленному по оси z . Если провести аналогичный расчет для волны, параллельной магнитному полю, то мы получим то же выражение (10), но только с другим коэффициентом $\gamma_{\parallel} = 16/21$.

Для коэффициента поглощения, связанного двойным переходами ($\Delta M_h = +1$; $\Delta M_l = +1$), получаем

$$\sigma = \gamma P Z (g^2 \beta^2 / a^3)^2 (S+1)^2 (2S+1)^2 v^2, \tag{11}$$

где $\gamma_{\perp} = 40/7$, $\gamma_{\parallel} = 40/21$. Таким образом оказывается, что линия, отвечающая резонансному условию

$$h\nu = 2 g \beta H, \tag{12}$$

имеет примерно ту же интенсивность, что и обычная линия, положение которой определяется условием (2).

Оценим для примера коэффициент поглощения σ по формуле (10) для MnF_2 . Для температуры $T = 300^\circ \text{K}$, приняв $v_{\perp} = 10^9 \text{ сек}^{-1}$, получим

$$\sigma = 0,7 \cdot 10^{-19} \text{ в}^2 \text{ см}^{-1}. \tag{10'}$$

Влияние магнитных сил на спин-решеточное взаимодействие заметно в веществах с большой плотностью магнитных атомов. Но в этих веществах будут также велики обменные силы. Обычно оператору обменного взаимодействия придают следующий изотропный вид:

$$\sum_l I(r_{hl}) (S_h S_l).$$

Эта матрица не имеет диагональных элементов, и, следовательно, изотропные обменные силы непосредственно никакого влияния на спин-решеточное взаимодействие оказать не могут². Однако встречающиеся в некоторых парамагнетиках анизотропные обменные силы [4] могут играть существенную роль. Примем, как это было сделано для объяснения магнитных свойств $\text{NiSiF}_6 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ [5], что оператор обменного взаимодействия имеет дипольную форму

$$\mathcal{H}_{\text{об}} = \sum_i A(r_{hi}) [(S_h S_i) - 3 r_{hi}^{-2} (S_h r_{hi})(S_i r_{hi})]. \quad (13)$$

Тогда расчет будет совершенно аналогичен вычислениям, проведенным нами для магнитных сил. Мы должны только знать зависимость обменного интеграла A от расстояния между атомами. Сделаем естественное допущение, что $A(r) = A_0(a) e^{-r/r_0}$, где $r_0 \sim a$, тогда в матричный элемент возмущения войдет выражение $[(2/a) + (1/r_0)]$. Если мы примем, что оно равно $3/a$, то для коэффициента поглощения звука получим те же формулы (10) и (11), но только $(g^2 \beta^2 / a^3)$ будет заменено $[A(a)]^2$. Для переходов между соседними уровнями энергии коэффициенты γ будут равны

$$\gamma_{\perp} = 391/105, \quad \gamma_{\parallel} = 8/21.$$

Детальное сравнение экспериментальных данных по парамагнитному резонансу с теоретическими расчетами, проведенное Глсбаевым [6] для широкого круга веществ, показало, что обменные интегралы лежат в пределах $10^{-17} - 10^{-18}$ эрг. В таком случае обменные силы могут увеличить полученные нами значения коэффициента поглощения под влиянием только магнитных взаимодействий на один-два порядка.

3. Редкоземельные металлы

Парамагнетизм редкоземельных металлов обусловлен глубоко лежащими внутри атомов $4f$ -электронами; влияние электронов проводимости незначительно. Поэтому имеется глубокое сходство между магнитными свойствами редкоземельных металлов и солей этих элементов. Автором [7] путем сравнения теоретических расчетов с экспериментальными данными по парамагнитному резонансу в металлическом цери, празеодиме и неодиме было установлено, что атомы этих металлов трижды ионизованы и что расщепление их энергетических уровней определяется электрическим полем, имеющим ту же симметрию, что и кристаллическая решетка.

Мы проведем вычисления коэффициента поглощения звука в редкоземельных металлах, считая, что спин-решеточное взаимодействие определяется модуляцией электрического поля колебаниями решетки. Сначала остановимся на металлах, обладающих кубической решеткой, к которым относятся β -церий, β -празеодим, европий и иттербий. Для вычисления коэффициента поглощения мы можем воспользоваться формулами (1), (4) и (5), но только под U_{hi} следует понимать энергию $4f$ -электронов в электрическом поле, создаваемом соседними ионами металла. Учитывая взаимодействие с шестью ближайшими соседями и допустив, что звуковая волна распространяется вдоль оси x , мы получим для U_{hx} следующее выражение:

² Среднее внутреннее магнитное поле кристалла, а следовательно, и полуширина линии поглощения $\nu_{1/2}$ сильно зависят от изотропных обменных сил. Поэтому косвенно эти силы влияют на поглощение ультразвука и спин-решеточную релаксацию.

$$U_{hlx} = \frac{3ee'}{a^4} [u_x(r^2 - 3x^2) + 2u_y xy + 2u_z xz]. \quad (14)$$

Здесь $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, соединяющий $4f$ -электрон с ядром, x, y, z — компоненты этого вектора, e' — эффективный заряд иона, a — постоянная решетки, $\mathbf{u}$ — единичный вектор, определяющий направление колебаний атомов.

β -церий. Уровни энергии и волновые функции атома церия, находящегося в электрическом поле кубической симметрии и внешнем магнитном поле, определяются из формул (26) работы [1], ибо Ce^{+++} , как и Fe^{+++} , имеет квантовое число полного момента вращения, равное $5/2$. Эти формулы можно значительно упростить, если учесть, что зеемановское расщепление гораздо слабее вызываемого электрическим полем. Вычисления при помощи данных функций показывают, что в первом приближении от нуля будут отличаться только следующие недиагональные матричные элементы:

$$\begin{aligned} (U_{hlx})_{ac} &= (U_{hlx})_{bd} = \frac{4V\sqrt{3}}{105} (-3u_x + 2iu_y) \left(\frac{ee'}{a^2}\right) \bar{r}^2, \\ (U_{hlx})_{ad} &= (U_{hlx})_{bc} = \frac{4V\sqrt{3}}{105} u_z \left(\frac{ee'}{a^2}\right) \bar{r}^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Отсюда, произведя усреднения по всевозможным направлениям поляризации, мы получим

$$|(U_{hlx})_{ac}|^2 = 13 |(U_{hlx})_{ad}|^2 = 13 \left(\frac{4}{105} \frac{ee'}{a^2} \bar{r}^2\right)^2. \quad (16)$$

Подставляя (16) в (4) и (1), получаем коэффициент поглощения звука в магнитном поле, перпендикулярном направлению распространения волны:

$$\sigma = \gamma P \left(\frac{ee'}{a}\right)^2 \left(\frac{\bar{r}^2}{a^2}\right)^2 v^2, \quad (17)$$

где

$$\gamma_{ac} = \gamma_{bd} = 13(8/105)^2, \quad \gamma_{ad} = \gamma_{bc} = (8/105)^2.$$

Если звуковая волна параллельна магнитному полю, то $\gamma_{ac} = \gamma_{bc} = \gamma_{ad} = \gamma_{bd} = 2(8/105)^2$. Эта же формула будет справедлива и для других металлов с кубической решеткой, но для них множители γ будут иметь другие значения. Численная оценка коэффициента σ затруднительна, ибо пока нет данных о величине эффективного заряда. Если мы примем $e' = e$ и для γ возьмем наибольшее из возможных значений, то при $T = 300^\circ\text{K}$ получим

$$\sigma \sim 10^{-16} \text{ в}^2 \text{ см}^{-1}. \quad (17')$$

Интервалы $E_a - E_c$ и $E_b - E_d$ одинаковы, им будет соответствовать одна линия поглощения, положение которой должно сильно зависеть от наклона внешнего магнитного поля к осям кристалла. При повороте магнитного поля от направления $[100]$ к направлению $[111]$, величина интервала $E_a - E_c = E_b - E_d$ изменится от $4/3 g\beta H$ до $1/3 g\beta H$. Поэтому в поликристаллическом образце эта линия поглощения будет иметь полуширину порядка $\sim g\beta H$.

Положение другой линии поглощения будет слабо зависеть от направления магнитного поля по отношению к осям кристалла, ибо изменение интервала $E_a - E_d = E_b - E_c$ происходит только от $7/3 g\beta H$ до $8/3 g\beta H$.

β -празеодим. В электрическом поле кубической симметрии уровень энергии иона празеодима расщепляется на четыре подуровня: один синглет, один дублет и два триплета. Последующее расщепление в магнитном поле не зависит от наклона этого поля к осям кристалла. Метод возмущений приводит к следующим значениям энергии и волновых функций:

$$\begin{aligned} E_{1,3}^{(\alpha)} &= \frac{7}{27} \Delta \pm \frac{1}{2} G + \frac{189}{80} \frac{G^2}{\Delta}; & \Psi_{1,3}^{(\alpha)} &= \frac{1}{\sqrt{8}} (\Phi_{+3} + \sqrt{7} \Phi_{\pm 1}); \\ E_2^{(\alpha)} &= \frac{7}{27} \Delta + \frac{864}{35} \frac{G^2}{\Delta}; & \Psi_2^{(\alpha)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_{-4} - \Phi_4); \\ E^{(\beta)} &= \frac{14}{27} \Delta + \frac{180}{7} \frac{G^2}{\Delta}; & \Psi^{(\beta)} &= \frac{1}{\sqrt{24}} (\sqrt{5} \Phi_{-4} + \sqrt{14} \Phi_0 + \sqrt{5} \Phi_4); \\ E_{1,2}^{(\gamma)} &= \frac{2}{27} \Delta \pm \frac{36}{5} \frac{G^2}{\Delta}; & \Psi_1^{(\gamma)} &= \frac{1}{\sqrt{24}} (\sqrt{7} \Phi_{-4} - \sqrt{10} \Phi_0 + \sqrt{7} \Phi_4); \\ & & \Psi_2^{(\gamma)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_{-2} + \Phi_2); \\ E_{1,3}^{(\delta)} &= -\frac{13}{27} \Delta \pm \frac{5}{2} G + \frac{189}{80} \frac{G^2}{\Delta}; & \Psi_{1,3}^{(\delta)} &= \pm \frac{1}{\sqrt{8}} (\sqrt{7} \Phi_{\mp 3} - \Phi_{\pm 1}); \\ E_2^{(\delta)} &= -\frac{13}{27} \Delta - \frac{36}{5} \frac{G^2}{\Delta}; & \Psi_2^{(\delta)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_{-2} - \Phi_2). \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь Δ — величина полного расщепления основного уровня энергии Pr^{++} электрическим полем кристалла. В магнитном поле, перпендикулярном направлению распространения звука

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha,\alpha} &= \frac{13}{3} \left(\frac{182}{275} \right)^2, & \gamma_{\alpha,\alpha} &= \gamma_{\alpha,\alpha} = \frac{8}{27} \left(\frac{182}{275} \right)^2, \\ \gamma_{\delta,\delta} &= \frac{13}{27} \left(\frac{208}{275} \right)^2, & \gamma_{\delta,\delta} &= \gamma_{\delta,\delta} = \frac{2}{3} \left(\frac{338}{825} \right)^2, \\ \gamma_{\gamma,\gamma} &= 13 \left(\frac{416}{33 \cdot 225} \right)^2. \end{aligned}$$

Если направление поля параллельно скорости звуковой волны, то от нуля будут отличаться следующие множители:

$$\gamma_{\alpha,\alpha} = \gamma_{\alpha,\alpha} = \frac{16}{27} \left(\frac{182}{275} \right)^2, \quad \gamma_{\delta,\delta} = \gamma_{\delta,\delta} = \frac{4}{3} \left(\frac{338}{825} \right)^2.$$

Особый интерес представляет поглощение звука в результате переходов между подуровнями γ_1 и γ_2 , ибо магнитное поле расщепляет уровни γ только во втором приближении. Положение пика поглощения будет в этом случае определяться величиной Δ . Таким образом наблюдение этой линии позволило бы сразу оценить величину электрического поля внутри кристалла. Заметим, что при помощи обычного парамагнитного резонанса сделать это невозможно, так как магнитные дипольные переходы между подуровнями γ_1 и γ_2 , как можно видеть, запрещены.

Европий. Момент вращения J трижды ионизованного атома европия в основном состоянии равен нулю. При комнатной температуре, однако, заметно заселен первый возбужденный уровень с $J=1$, отстоящий от основного на 214 см^{-1} . Как известно, энергетические уровни с $J=1$ не расщепляются электрическим полем кубической симметрии. Поэтому расщепление во внешнем магнитном поле будет таким же, как у свободного атома. Множители γ имеют следующие значения:

$$(\gamma_{\perp})_{-1,1} = 0,52; (\gamma_{\perp})_{-1,0} = (\gamma_{\perp})_{0,1} = 0,08; (\gamma_{\parallel})_{-1,0} = (\gamma_{\parallel})_{0,1} = 0,16;$$

$$(\gamma_{\parallel})_{-1,1} = 0.$$

Интербий. В основном состоянии ион иттербия имеет $J = 7/2$, так же как и ион гадолиния. Поэтому мы воспользуемся известными значениями энергии и волновых функций для гадолиния [8]:

$$E_{1,2}^{(a)} = \pm \frac{3}{2} G; \quad \Psi_{1,2}^{(a)} = \frac{1}{2} (\sqrt{3} \Phi_{\pm 1/2} - \Phi_{\mp 3/2});$$

$$E_{1,4}^{(b)} = \frac{5}{8} \Delta \pm \frac{11}{6} G; \quad \Psi_{1,4}^{(b)} = \sqrt{\frac{7}{2}} \left(\Phi_{\pm 1/2} - \sqrt{\frac{5}{7}} \Phi_{\mp 1/2} \right);$$

$$E_{2,3}^{(b)} = \frac{5}{8} \Delta \pm \frac{1}{2} G; \quad \Psi_{2,3}^{(b)} = \frac{1}{2} (\Phi_{\pm 1/2} + \sqrt{3} \Phi_{\mp 3/2});$$

$$E_{1,2}^{(c)} = \Delta \pm \frac{7}{6} G; \quad \Psi_{1,2}^{(c)} = \sqrt{\frac{5}{12}} \left(\Phi_{\pm 1/2} + \sqrt{\frac{7}{5}} \Phi_{\mp 1/2} \right).$$

При помощи этих волновых функций для отличных от нуля множителей γ находим следующие значения:

$$(\gamma_{\perp})_{b,b_s} = (\gamma_{\perp})_{b_s,b_s} = 13/(21)^2; \quad (\gamma_{\parallel})_{b,b_s} = (\gamma_{\parallel})_{b_s,b_s} = (4/7)^2.$$

Перейдем к рассмотрению металлов с гексагональной решеткой. Сначала остановимся на α -Ce, Nd, Dy и Er, ионы которых имеют нечетное число электронов. У таких ионов электрическое поле гексагональной симметрии вызывает полное расщепление уровней энергии, сохраняя лишь двукратное крамеровское вырождение. Так как это вырождение не может быть снято никаким электрическим полем, то спин-решеточная связь может появиться только во втором приближении. Поэтому эффект парамагнитного резонанса на ультразвуке в данных металлах будет примерно в $(g\beta H/\Delta)^2$ раз слабее, чем в металлах с кубической решеткой. Все сказанное нами относится также и к самарию, решетка которого тетрагональна.

Особый случай представляет собой гадолиний, ион которого находится в S -состоянии. Спин-решеточное взаимодействие у Gd^{+++} , по видимому, определяется магнитными и обменными силами.

Ионы металлов α -Pr, Tb, Ho, Rm содержат четное число электронов. Некоторые уровни энергии этих ионов в электрическом поле гексагональной симметрии сохраняют двукратное (некрамеровское) вырождение, которое может быть снято в поле меньшей симметрии. В этом случае спин-решеточное взаимодействие отлично от нуля уже в первом приближении. Эффект поглощения звука будет такого же порядка, что и у металлов с кубической решеткой.

Изучение резонансного поглощения ультразвука в редкоземельных металлах имеет особый интерес, ибо исследование поглощения электромагнитных волн в металлах крайне затруднительно из-за скин-эффекта.

4. Ядерный парамагнитный резонанс на ультразвуке

Резонансное поглощение ультразвука будет, очевидно, иметь место не только в «электронных» парамагнетиках, но и в веществах, обладающих ядерным парамагнетизмом. Попытаемся оценить величину этого эффекта.

Прежде всего рассмотрим твердые тела (не металлы). Обмен энергией между упругими колебаниями решетки и системой ядерных спинов, вследствие магнитного взаимодействия ядер, дает эффект, величина которого может быть рассчитана по формуле (10). При этом

только надо иметь в виду, что, во-первых, под β теперь надо понимать ядерный магнетон; это уменьшит коэффициент поглощения σ в $\sim 10^{12}$ раз. Во-вторых, ν_1 , теперь будет означать ширину линии ядерного резонанса, что приведет к увеличению σ примерно в 10^5 раз. Более тщательный численный расчет, проведенный для кристалла NaBr, дает $\sigma \sim 10^{-25} \nu^2 \text{ см}^{-1}$. Таким образом поглощение ультразвука под влиянием магнитных сил крайне мало.

Известно, что во многих случаях спин-решеточная связь обязана квадрупольным взаимодействиям [9]. Порядок величины коэффициента поглощения звука, вызванного квадрупольными силами, может быть определен по той же формуле (10), если заменить в ней $g^2\beta^2$ на g^2Q . Если к тому же учесть, что $\beta \sim 10^{-23} \text{ Г} \cdot \text{см}^3$, а $Q \sim 10^{-25} \text{ см}^2$, то для некоторых веществ получим $\sigma = 10^{-20} \nu^2 \text{ см}^{-1}$. Эта величина все же очень мала, ибо при применяемых статических магнитных полях $\sim 10^4 \text{ Ое}$, как это видно из условия (1), приходится пользоваться переменными полями частоты $\sim 10^7 \text{ гц}$.

Намного больший эффект можно ожидать в жидкостях. Из известной теории спин-решеточного взаимодействия в жидкостях [10] вытекает, что в то время как в твердых телах в спектре тепловых колебаний частотам, определяемым из условия (3), соответствуют крайне малые интенсивности, в жидкостях тепловое движение содержит колебания этих частот огромной интенсивности. В случае твердых тел мы могли, по сравнению с интенсивностью звуковых колебаний, пренебречь тепловыми колебаниями той же частоты. Теперь мы должны отбросить это допущение, а тогда вероятность поглощения кванта энергии звуковых колебаний будет по порядку величины равна $1/2 \tau$ (τ — время спин-решеточной релаксации).

Энергия звуковой волны, поглощенная единицей объема вещества за 1 сек., будет, очевидно, равна

$$\frac{1}{2\tau} N h\nu \frac{h\nu}{kT} \frac{\Delta\nu}{\nu_{1/2}},$$

а отсюда для коэффициента поглощения имеем (I — интенсивность звуковых колебаний)

$$\sigma = N (h\nu)^2 \Delta\nu / 2\tau kT \nu_{1/2}. \quad (19)$$

Остановимся, для примера, на протонном резонансе в воде. Путем прибавления парамагнитных солей время спин-решеточной релаксации легко может быть доведено до 10^{-4} сек.

Если $\nu = 3 \cdot 10^7 \text{ гц}$, а интервал частот $\Delta\nu$ и полуширина $\nu_{1/2}$ приблизительно одинаковы, то за 1 сек. будет поглощена энергия ~ 360 эрг. Легко подсчитать, что интенсивности звуковых и тепловых колебаний будут сравнимы, если $I \approx 10^6 \text{ эрг/см}^3 \text{ сек.}$; в этом случае $\sigma \sim 0,01 \text{ см}^{-1}$. Увеличение интенсивности звука приведет к исчезновению эффекта из-за насыщения (см. ниже). Следует иметь в виду, что поскольку спин-решеточное взаимодействие в воде создается магнитными силами, то мы будем иметь две линии поглощения, положение которых определяется условиями (2) и (12), при этом вторая линия, как легко вывести из работы [10], будет вдвое интенсивнее первой.

Известно, что в обычном явлении ядерного магнитного резонанса часто наблюдается эффект насыщения, заключающийся в том, что спин-решеточное взаимодействие не обеспечивает передачи всей энергии, поглощенной спиновой системой, тепловым колебаниям решетки. Вследствие этого заселенность верхних магнитных уровней возрастает, и поглощение энергии электромагнитного поля уменьшается. Аналогичный эффект возможен и в случае парамагнитного резонанса на ультразвуке. Для простоты предположим, что мы имеем только два

магнитных уровня, и пусть A означает вероятность перехода между ними за 1 сек. под влиянием ультразвука. Обозначим через n избыток заселенности нижнего уровня, а n_0 пусть означает такой избыток, который соответствует тепловому равновесию при температуре решетки. В отсутствие ультразвука, как известно, процесс установления равновесия будет описываться уравнением

$$dn/dt = (n_0 - n)/\tau,$$

которое можно рассматривать как определение времени спин-решеточной релаксации τ . Если в веществе имеется звуковое поле, то это уравнение примет вид:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{n_0 - n}{\tau} - 2nA, \quad (20)$$

из которого вытекает, что в стационарном состоянии ($dn/dt = 0$)

$$n/n_0 = 1/(1 + 2A\tau). \quad (21)$$

Эту величину обычно называют фактором насыщения. Если $n/n_0 \gg 1$, то ясно, что поглощение ультразвука будет исчезающе малым.

В жидкостях $A = (1/2\tau)(\Delta\nu/\nu_{\text{л}})$ фактор n/n_0 близок к $1/2$, и насыщение, следовательно, будет слабым. В твердых телах для вероятности перехода легко получить следующее выражение:

$$A = I\sigma kT / N(h\nu)^2. \quad (22)$$

Численная оценка показывает, что при помощи интенсивностей порядка 1 W/cm^2 при частоте $\sim 10^7$ гц легко получить сильное насыщение. Этот факт может быть использован для косвенного обнаружения резонансного поглощения ультразвука на ядрах. Допустим, что наблюдается обычный эффект резонансного поглощения электромагнитного поля частоты ν . Тогда наложением достаточно сильного звукового поля той же частоты эффект может быть уничтожен.

При помощи формул (21) и (22) может быть также выяснена возможность эффекта насыщения в электронном парамагнитном резонансе на ультразвуке. В некоторых веществах, обладающих большим коэффициентом поглощения звука σ , насыщение может наступить в обычных экспериментальных условиях.

5. Заключение

Мы рассмотрели резонансное поглощение ультразвука в основных типах парамагнетиков. Из металлов нами обсуждались только редкоземельные. У других металлов изучаемый нами эффект будет мал. У металлов, не имеющих глубоко лежащих f -электронов с некомпенсированным спином, парамагнетизм обязан внешним электронам атомов, участвующих в проводимости. Вследствие этого в обмене энергией между колебаниями решетки и электронными спинами, находящимися во внешнем магнитном поле, будет участвовать также и поступательное движение электронов. Так как средняя энергия поступательного движения намного превышает магнитную энергию электрона, то ясно, что поглощение звука не может существенно зависеть от напряженности магнитного поля, оно не будет носить резко выраженного резонансного характера.

В предыдущем разделе мы рассмотрели ядерный эффект в жидкостях. Формула (19) может быть также использована для оценки электронного резонансного поглощения звука в жидких растворах

парамагнитных солей. В этом случае число поглощающих атомов N будет значительно меньше, чем в случае ядерного резонанса, полуширина линии поглощения $\nu_{1/2}$, наоборот, будет много больше. Поэтому коэффициент поглощения будет относительно мал, несмотря на значительно более короткое время спин-решеточной релаксации ($\tau \sim 10^{-8}$ сек.). Правда, электронный резонанс позволяет использовать более высокие частоты, что может сделать эффект наблюдаемым при современной чувствительности установок.

Теория спин-решеточного взаимодействия, разработанная для жидкостей, применима также и к газам. При помощи формулы (20) работы [10] получается, что время парамагнитной релаксации для газа при атмосферном давлении и при комнатной температуре равно $\tau \sim 10^{-6}$ сек. Из формулы (19) вытекает, что коэффициент поглощения будет очень мал [порядка $\sim 10^{-20} (\nu^2/I) \text{ см}^{-1}$], если мы воспользуемся известным из опытов по парамагнитному резонансу в кислороде [11] значением $\nu_{1/2} = 0,05 \text{ см}^{-1}$.

Интересно сопоставить рассматриваемое нами явление с парамагнитным резонансом на электромагнитных волнах.

1. Прежде всего, сравним величины обоих эффектов. Коэффициент поглощения энергии электромагнитного поля [12] равен

$$\sigma_e = \frac{8\pi^2}{c} \nu \chi'' \quad (23)$$

Здесь χ'' — мнимая часть комплексной магнитной восприимчивости. Если через χ_0 обозначить статическую восприимчивость, то в максимуме поглощения $\chi'' \approx \chi_0 \nu / \nu_{1/2}$, и, следовательно,

$$\sigma_e = \frac{8\pi^2}{c\nu_{1/2}} \chi_0 \nu^2 \quad (24)$$

У «электронных» парамагнетиков частота $\nu_{1/2} \sim 10^9$ гц, $\chi_0 \sim 10^{-5}$ и поэтому $\sigma \sim 10^{-22} \nu^2 \text{ см}^{-1}$. Для коэффициента поглощения ультразвука для многих веществ мы также получили выражение, пропорциональное ν^2 , причем фактор пропорциональности сильно зависит от величины матричного элемента оператора спин-решеточного взаимодействия. Если этот матричный элемент отличен от нуля в первом приближении, то для коэффициента поглощения звука σ получаются значения, намного превышающие σ_e . Если же требуются высшие приближения, то обычно σ_e и σ являются величинами одного порядка.

Следует заметить, что мы повсюду для твердых тел вычисляли средний коэффициент поглощения для продольных и поперечных волн. Вообще говоря, вероятность перехода между магнитными подуровнями под влиянием звуковых колебаний одного типа сильно отличается от таковой для колебаний другого типа. Так, например, если магнитное поле перпендикулярно к направлению распространения звуковой волны, то поглощение звука в результате переходов между подуровнями ad и bc β -цепи возможно лишь под влиянием поперечных колебаний.

2. В случае обычного парамагнитного резонанса вероятность поглощения фотона максимальна, если переменное магнитное поле перпендикулярно полю статическому; эта вероятность уменьшается до нуля, если магнитные поля становятся параллельными друг другу. Вероятность поглощения фонона слабо зависит от направления магнитного поля. Все же изменение направления этого поля может на порядок изменить величину эффекта.

3. Поглощение ультразвука часто возможно в результате переходов между такими подуровнями, для которых магнитные дипольные

переходы запрещены. Поэтому, например, в веществах с чисто спиновым парамагнетизмом вероятность поглощения фотона велика только для переходов, связанных с изменением магнитного квантового числа атома на единицу, что ведет к появлению одной лишь резонансной линии. Вероятность поглощения фотона будет иметь одинаковый порядок как для переходов, при которых магнитные квантовые числа двух взаимодействующих атомов изменяются на единицу, так и таких, которые связаны с изменением квантового числа только одного атома. Поэтому здесь будут существовать две заметных линии поглощения.

4. Ширина линий парамагнитного резонанса как на ультразвуке, так и на электромагнитных волнах определяется одними и теми же факторами. Если спин-решеточное взаимодействие сильнее спин-спинового, то полуширина будет иметь порядок $\sim 1/2\pi\tau$ и поэтому будет сильно зависеть от температуры. Если связь спинов друг с другом сильнее связи с колебаниями решетки, то ширина линии будет определяться магнитными дипольными взаимодействиями, обменными силами, электрическими полями ионов и от температуры зависеть не будет. Хотя уширение линий поглощения в обоих явлениях обуславливается одними и теми же силами, однако в этом втором рассматриваемом нами случае по форме линии могут существенно отличаться друг от друга. Это объясняется тем, что в обоих явлениях мы имеем дело с одними и теми же полосами энергетических уровней, создаваемых магнитными и другими взаимодействиями, однако законы, определяющие вероятности переходов между этими уровнями под влиянием ультразвука и под действием внешнего переменного магнитного поля, по своей природе совершенно различны. Так, например, резонансные линии поглощения электромагнитного поля под влиянием изотропных обменных сил, как известно, сужаются^[13]. Доказательство данного сужения основывается на том, что второй момент линии поглощения не зависит от обменных сил; это происходит оттого, что матрица $S_{\alpha\beta}$, определяющая вероятность магнитных дипольных переходов, коммутирует с оператором обменного взаимодействия $A\Sigma S_i S_j$.

Ясно, что переходы под влиянием ультразвука могут привести к такой линии поглощения, второй момент которой будет зависеть от обменных сил. Все же, очевидно, порядок ширины линий поглощения в обоих сравниваемых нами эффектах будет одинаков.

Остановимся еще на следующем. Относительно малая чувствительность ультразвуковых методов исследования делает желательным использование косвенных приемов обнаружения парамагнитного резонанса на ультразвуке. Некоторые из них мы обсуждали в предыдущем разделе. Укажем еще на одну возможность. Парамагнитное резонансное поглощение ультразвука будет сопровождаться изменением намагниченности вещества, которое можно оценить при помощи коэффициента высокочастотной восприимчивости χ' . Из исследований обычного парамагнитного резонанса известно, что если менять магнитное статическое поле, то максимальное изменение χ' будет примерно равно значению χ'' в максимуме поглощения. Отсюда при помощи (23) и (24) мы сразу получаем $\chi' \sim c\sigma/8\pi^2\chi$. Изменение намагниченности под влиянием ультразвука можно, вероятно, обнаружить, пользуясь известными методами измерения χ' Завойского^[14] или ядерной индукции^[15].

В заключение отметим, что расчеты спин-решеточного взаимодействия, которое определяет величину эффекта резонансного поглощения ультразвука в парамагнетиках, не могут претендовать на большую точность. Цель приведенных вычислений — оценить порядок величины эффекта, установить основные закономерности. Одним из наиболее интересных результатов, который даст экспериментальное изучение

обсуждаемого нами эффекта, будет выяснение природы и определение констант, характеризующих спин-решеточное взаимодействие в различных классах парамагнетиков.

Казанский государственный
университет

Поступила в редакцию
1 марта 1954 г.

Литература

- [1] С. А. Альтшулер. ЖЭТФ, этот выпуск, стр. 38. — [2] J. Waller. ZS. f. Phys., **79**, 370, 1932. — [3] J. H. Van Vleck. Phys. Rev., **57**, 426, 1940. — [4] W. Orzechowski. Physica, **14**, 234, 1948. — [5] J. F. Ollom a. J. H. Van Vleck. Physica, **17**, 205, 1951. — [6] Г. Я. Глебашев. Диссертация, Казанский университет, 1954. — [7] С. А. Альтшулер. ЖЭТФ, **26**, 439, 1954. — [8] C. Kittel a. J. M. Güttinger. Phys. Rev., **73**, 162, 1948. — [9] R. V. Pound. Phys. Rev., **79**, 585, 1950. — [10] N. Blombergen, E. M. Purcell a. R. V. Pound. Phys. Rev., **73**, 678, 1948. — [11] R. Beringer a. J. G. Castle. Phys. Rev., **78**, 581, 1950; **81**, 82, 1951. — [12] Я. К. Гортер. Парамагнитная релаксация, ИИЛ, 1949, стр. 41. — [13] J. H. Van Vleck. Phys. Rev., **74**, 1168, 1948. — [14] Е. К. Завойский. ЖЭТФ, **17**, 155, 1947. — [15] E. Bloch, W. W. Hansen a. M. Paskard. Phys. Rev., **70**, 474, 1946.

К ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ УПОРЯДОЧИВАЮЩИХСЯ СПЛАВОВ

М. А. Кривоглаз и З. А. Матысина

Остаточное электрическое сопротивление бинарных упорядочивающихся сплавов рассмотрено в рамках многоэлектронной теории. Показано, что зависимость сопротивления от состава сплава и степени дальнего порядка получается такой же, как и в одноэлектронном приближении. Учтена корреляция в сплавах.

1. Введение

Квантово-механическая теория остаточного сопротивления неупорядоченных сплавов была развита Нордгеймом [1]. Теория остаточного сопротивления упорядочивающихся твердых растворов в общем случае бинарных сплавов различной структуры, любого состава и степени дальнего порядка была построена Смирновым [2]. Эти работы хорошо объясняют наблюдающуюся на опыте зависимость остаточного сопротивления ρ_0 от состава сплава и степени дальнего порядка. При расчете ρ_0 в [1,2] были сделаны два основных упрощающих предположения. Во-первых, предполагалось, что абсолютное значение разности $|V_A - V_B|$ энергий взаимодействия электронов проводимости с атомами сплава первого и второго сорта достаточно мало. Во-вторых, задача решалась в одноэлектронном приближении, т. е. реальная система взаимодействующих электронов заменялась системой невзаимодействующих электронов, движущихся в потенциальном поле, которое создается ионами кристаллической решетки металла и остальными электронами.

Первое из указанных предположений, повидимому, выполняется с достаточной точностью для многих сплавов. Однако, как неоднократно отмечалось, решение многоэлектронной задачи при помощи одноэлектронного приближения в случае металла не является теоретически обоснованным. Между тем результаты теоретического рассмотрения некоторых электронных свойств металлов (например, возможность прохождения электронов через идеальную кристаллическую решетку без рассеяния, вид дисперсионных формул оптики металлов) в многоэлектронной и в одноэлектронной теории совпадают [3,4]. В настоящей работе будет показано, что полученные в [1,2] зависимости остаточного сопротивления от состава сплава и степени дальнего порядка сохраняются и в многоэлектронной теории, если только воспользоваться предположением о малости $|V_A - V_B|$.

В работах [1,2] при вычислении ρ_0 не учитывалась корреляция между заполнением различных узлов кристаллической решетки атомами сплава, т. е. предполагалось, что атомы сплава хаотически распределены на узлах подрешетки данного сорта. В частном случае сплавов с простой кубической решеткой стехиометрического состава корреляция была учтена при помощи одноэлектронного приближения в [5]. В настоящей работе выводятся формулы для остаточного сопротивления с учетом корреляции, пригодные для сплавов различных структур и произвольного состава.

2. Определение вероятностей квантовых переходов электронов проводимости под влиянием беспорядка в расположении атомов

Рассмотрим бинарный упорядочивающийся сплав А — В с кристаллической решеткой типа Бравэ, имеющий в упорядоченном состоянии два сорта узлов. Предположим, что этот сплав был отожжен при какой-то температуре, в результате чего установилось некоторое равновесное распределение атомов А и В на узлах кристаллической решетки. Исследуем электрическое сопротивление такого сплава, быстро закаленного до настолько низкой температуры, что влияние колебаний кристаллической решетки сплава на движение электронов пренебрежимо мало, и можно считать ионы закрепленными в узлах решетки.

Для определения стационарных состояний системы, строго говоря, следовало бы решить уравнение Шредингера для всех электронов металла в поле всех ядер. Поскольку, однако, внутренние электроны ионов металла связаны значительно сильнее, чем электроны проводимости, и находятся на дискретном энергетическом уровне, то можно применить адиабатическое приближение. Согласно этому приближению следует рассмотреть движение сильно связанных электронов при заданных координатах $\mathbf{r}_i$ электронов проводимости. После этого энергию сильно связанных электронов, которая зависит от $\mathbf{r}_i$, надо включить как слагаемое в потенциальную энергию электронов проводимости. В остальном же сильно связанные электроны можно не учитывать. При этом под сильно связанными электронами будем понимать электроны, лежащие в настолько глубоких электронных оболочках атомов сплава, что эти оболочки практически не поляризуются. Все остальные электроны относим к электронам проводимости. Проведенное выделение электронов проводимости в отдельную подсистему необходимо для того, чтобы именно для этих электронов иметь возможность сформулировать условие малости разности энергий взаимодействия электронов с ионами решетки разного сорта:

$$|V_A - V_B| \sim \xi. \quad (1)$$

Здесь малость параметра ξ означает, что решения уравнений Шредингера с потенциальными энергиями V_A и V_B мало отличаются. Уравнение стационарных состояний N_e электронов проводимости в поле ионов сплава имеет вид:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \sum_i \Delta_i + \sum_i V(\mathbf{r}_i) + \sum_{i < k} \frac{e^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|} \right] \psi_n(\dots \mathbf{r}_i \dots) = E_n \psi_n(\dots \mathbf{r}_i \dots), \quad (2)$$

где $-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_i$ — оператор кинетической энергии i -го электрона, $V(\mathbf{r}_i)$ — потенциальная энергия i -го электрона в поле ионов. В качестве нулевого приближения, как обычно [1,2], примем состояние системы электронов, которые находятся в поле полностью упорядоченной кристаллической решетки, состоящей из эффективных ионов. При этом каждый эффективный ион создает потенциал, равный среднему потенциалу ионов сплава, находящихся на узлах данного сорта. Волновая функция нулевого приближения определяется из уравнения

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \sum_i \Delta_i + \sum_i \bar{V}(\mathbf{r}_i) + \sum_{i < k} \frac{e^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|} \right] \psi_n^0(\dots \mathbf{r}_i \dots) = E_n^0 \psi_n^0(\dots \mathbf{r}_i \dots). \quad (3)$$

Уравнение (3) описывает движение системы электронов в строго периодическом поле $\bar{V}(\mathbf{r}_i)$, создаваемом эффективными ионами. Используя лишь свойства трансляционной симметрии, можно, как известно, решение уравнения (3) привести к следующему виду:

$$\psi_n^0(\dots \mathbf{r}_i \dots) = \sum_P (-1)^P P \exp \left[i \sum_{i=1}^{N_e} \mathbf{k}_i \mathbf{r}_i \right] u_n(\dots \mathbf{r}_i \dots), \quad (4)$$

где $P \exp \left[i \sum_{i=1}^{N_e} \mathbf{k}_i \mathbf{r}_i \right] u_n(\dots \mathbf{r}_i \dots)$ получается из функции

$$\exp \left[i \sum_{i=1}^{N_e} \mathbf{k}_i \mathbf{r}_i \right] u_n(\dots \mathbf{r}_i \dots)$$

при помощи некоторой перестановки координат частиц, $\sum_P$ означает суммирование по всем перестановкам, а $(-1)^P$ равно $+1$ при четном числе транспозиций, соответствующих данной перестановке, и равно -1 , если число транспозиций нечетное. Функция $u_n(\dots \mathbf{r}_i \dots)$ остается неизменной при смещении координат всех электронов на постоянную решетку $\mathbf{a}$:

$$u_n(\dots \mathbf{r}_i + \mathbf{a} \dots) = u_n(\dots \mathbf{r}_i \dots). \quad (5)$$

Под влиянием энергии возмущения

$$V'(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_{N_e}) = \sum_{i=1}^{N_e} [V(\mathbf{r}_i) - \bar{V}(\mathbf{r}_i)] \quad (6)$$

система может перейти из ψ_n^0 в другое состояние, которое описывается волновой функцией

$$\psi_m^0(\dots \mathbf{r}_i \dots) = \sum_P (-1)^P P \exp \left[i \sum_{i=1}^{N_e} \mathbf{k}'_i \mathbf{r}_i \right] u_m(\dots \mathbf{r}_i \dots). \quad (7)$$

Вероятность такого перехода пропорциональна квадрату модуля матричного элемента

$$V'_{nm} = \int \psi_n^{0*} V' \psi_m^0 d\tau_1 \dots d\tau_{N_e} = \sum_{i=1}^{N_e} \int \Phi_{nm}(\mathbf{r}_i) \Delta V(\mathbf{r}_i) d\tau_i, \quad (8)$$

где

$$\Delta V(\mathbf{r}_i) = V(\mathbf{r}_i) - \bar{V}(\mathbf{r}_i), \quad (9)$$

$$\Phi_{nm}(\mathbf{r}_i) = \int \psi_n^{0*}(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_{N_e}) \psi_m^0(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_{N_e}) d\tau_1 \dots d\tau_{i-1} d\tau_{i+1} \dots d\tau_{N_e}. \quad (10)$$

Благодаря свойствам симметрии волновых функций системы по отношению к перестановкам координат отдельных электронов вид функции $\Phi_{nm}(\mathbf{r}_i)$ не зависит от номера i . Используя формулу (4) и условия цикличности, нетрудно видеть, что

$$\Phi_{nm}(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = e^{i\mathbf{q}\mathbf{a}} \Phi_{nm}(\mathbf{r}), \quad (11)$$

где

$$\mathbf{q} = \sum_i (\mathbf{k}'_i - \mathbf{k}_i).$$

Следовательно, $\Phi_{nm}(\mathbf{r})$ можно представить в виде

$$\Phi_{nm}(\mathbf{r}) = e^{iq\mathbf{r}} U_{nm}(\mathbf{r}), \quad (12)$$

где $U_{nm}(\mathbf{r})$ — периодическая функция с периодом $\mathbf{a}$.

Потенциальную энергию i -го электрона $V(\mathbf{r}_i)$, как и в [1,2], можно представить в виде суммы потенциальных энергий, создаваемых отдельными ионами сплава,

$$V(\mathbf{r}_i) = \sum_{s\chi} V^{xs}(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_s - \mathbf{h}_\chi), \quad (13)$$

где $\mathbf{R}_s$ обозначает вектор, проведенный к первому узлу s -й кристаллической ячейки; $\mathbf{h}_\chi$ — вектор, проведенный из первого узла ячейки к узлу номера χ этой же ячейки, V^{xs} — потенциальная энергия электрона в поле иона, находящегося в узле номера χ s -й ячейки, равная соответственно V_A или V_B , если в этом узле находится атом А или В. Суммирование в формуле (13) проводится по всем узлам кристаллической решетки сплава. Аналогично потенциальная энергия $\bar{V}(\mathbf{r}_i)$ равна

$$\bar{V}(\mathbf{r}_i) = \sum_{s\chi} \bar{V}^x(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_s - \mathbf{h}_\chi), \quad (14)$$

где $\bar{V}^x$ — потенциальная энергия электрона в поле эффективного иона, находящегося в узле номера χ . Эта энергия не зависит от номера ячейки s .

Подставляя в формулу (8) выражения (12), (9), (13) и (14) и производя в каждом слагаемом замену переменных

$$\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_s - \mathbf{h}_\chi \rightarrow \mathbf{r}'_i,$$

получим

$$V'_{nm} = N_e \sum_{s\chi} \exp\{iq\mathbf{R}_{s\chi}\} (V^{xs}_{nm} - \bar{V}^x_{nm}). \quad (15)$$

Здесь

$$V^{xs}_{nm} = \int \exp\{iq\mathbf{r}'_i\} V^{xs}(\mathbf{r}'_i) U_{nm}(\mathbf{r}'_i + \mathbf{h}_\chi) d\tau'_i, \quad (16)$$

$$\bar{V}^x_{nm} = \int \exp\{iq\mathbf{r}'_i\} \bar{V}^x(\mathbf{r}'_i) U_{nm}(\mathbf{r}'_i + \mathbf{h}_\chi) d\tau'_i, \quad (17)$$

$\mathbf{R}_{s\chi} = \mathbf{R}_s + \mathbf{h}_\chi$ — радиус-вектор узла номера χ s -ой ячейки, V^{xs}_{nm} равно V_{Anm} или V_{Bnm} в зависимости от того, какой атом находится в данном узле.

Квадрат модуля матричного элемента $|V'_{nm}|^2$ на основании формулы (15) равен

$$\begin{aligned} |V'_{nm}|^2 = & N_e^2 \left\{ \sum_{\chi s} (V^{xs}_{nm} - \bar{V}^x_{nm}) (V^{xs*}_{nm} - \bar{V}^{x*}_{nm}) + \right. \\ & \left. + \sum_{\chi s' \neq \chi' s'} \exp\{iq(\mathbf{R}_{\chi s} - \mathbf{R}_{\chi' s'})\} (V^{xs}_{nm} - \bar{V}^x_{nm}) (V^{\chi' s'*}_{nm} - \bar{V}^{\chi' s'*}_{nm}) \right\}. \quad (18) \end{aligned}$$

Первая сумма формулы (18) обуславливает остаточное сопротивление сплава, в котором отсутствует корреляция. Такого вида сумма была вычислена Смирновым [2]. При этом получен следующий результат:

$$\sum_{\chi s} (V_{nm}^{\chi s} - \bar{V}_{nm}^{\chi}) (V_{nm}^{\chi s*} - \bar{V}_{nm}^{\chi*}) =$$

$$= N' \left[p_A^{(1)} p_B^{(1)} \sum_{\chi_1=1}^{\lambda_1} \Delta_{nm}^{\chi_1} + p_A^{(2)} p_B^{(2)} \sum_{\chi_2=1}^{\lambda_2} \Delta_{nm}^{\chi_2} \right]. \quad (19)$$

Здесь

$$\Delta_{nm}^{\chi j} = |V_{Am}^{\chi j} - V_{Bm}^{\chi j}|^2 = \left| \int e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} [V_A(\mathbf{r}) - V_B(\mathbf{r})] U_{nm}(\mathbf{r} + \mathbf{h}_{\chi j}) d\mathbf{r} \right|^2, \quad (20)$$

$p_\alpha^{(j)}$ — вероятность замещения узла j -го сорта атомом α ($j = 1, 2$; $\alpha = A, B$), χ_j — номер узла j -го сорта, а N' — число ячеек кристаллической решетки. Функция $U_{nm}(\mathbf{r} + \mathbf{h}_{\chi j})$ отличается от $U_{nm}(\mathbf{r})$ на величину порядка $|V_A - V_B|$. Поэтому, как и в [2], с точностью до кубических относительно $|V_A - V_B|$ членов все $\Delta_{nm}^{\chi j}$ равны между собой:

$$\Delta_{nm}^{\chi_1} \approx \Delta_{nm}^{\chi_2} \approx \Delta_{nm}. \quad (21)$$

Тогда формула (19), как и в [2], может быть преобразована к виду:

$$\sum_{\chi s} (V_{nm}^{\chi s} - \bar{V}_{nm}^{\chi}) (V_{nm}^{\chi s*} - \bar{V}_{nm}^{\chi*}) = N \Delta_{nm} \left[c_1 c_2 - \frac{\nu}{1-\nu} \gamma^2 \eta^2 \right], \quad (22)$$

где N — число узлов кристаллической решетки сплава, c_1 и c_2 — относительные атомные концентрации атомов А и В в сплаве ($c_1 + c_2 = 1$), $\eta = (p_A^{(1)} - c_1)/\gamma$ — степень дальнего порядка, ν — отношение числа узлов 1-го сорта к общему числу узлов,

$$\gamma = \begin{cases} \frac{1-\nu}{\nu} c_1 & \text{для } c_1 \leq \nu, \\ c_2 & \text{для } c_1 \geq \nu. \end{cases} \quad (23)$$

Вторая сумма формулы (18) равна нулю, если корреляция в сплаве отсутствует [2]. Если предположить, что корреляция в сплаве мала, то при вычислении этой суммы можно ограничиться линейными относительно параметра корреляции членами¹. Поэтому сохраним в указанной сумме только те слагаемые, которые соответствуют ближайшим соседям. Остальные слагаемые дадут члены более высокого порядка малости относительно параметра корреляции. В принятом приближении искомую сумму можно представить в виде:

$$\sum_{\chi s \neq \chi' s'} \exp \{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{R}_{\chi s} - \mathbf{R}_{\chi' s'})\} (V_{nm}^{\chi s} - \bar{V}_{nm}^{\chi}) (V_{nm}^{\chi' s'*} - \bar{V}_{nm}^{\chi'*}) \approx$$

$$\approx \sum_{k=1}^z \exp \{i\mathbf{q} \delta \mathbf{R}_k\} \sum_{\chi s} (\bar{V}_{nm}^{\chi s} \bar{V}_{nm}^{\chi' s'*} - \bar{V}_{nm}^{\chi} \bar{V}_{nm}^{\chi'*}). \quad (24)$$

Здесь сумма по $\chi s, \chi' s'$ разбита на такие суммы, для которых $\delta \mathbf{R}_k = \mathbf{R}_{\chi s} - \mathbf{R}_{\chi' s'}$ постоянно. Суммирование по k проводится по всем z ближайшим соседям данного узла χs . При этом узел $\chi' s'$ определяется заданием χs и k . Сумма

$$\sum_s (\bar{V}_{nm}^{\chi s} \bar{V}_{nm}^{\chi' s'*} - \bar{V}_{nm}^{\chi} \bar{V}_{nm}^{\chi'*})$$

¹ Параметр корреляции может быть выбран, например, так же, как в работе [8].

зависит только от сорта узлов χ и χ' . Вводя вероятности $p_{\alpha\beta}^{(jl)}$ замещения соседних узлов j -го и l -го сорта ($j, l = 1, 2$) соответственно атомами α и β ($\alpha, \beta = A, B$), указанную сумму можно представить в виде:

$$\sum_s (\overline{V_{nm}^{xs} V_{nm}^{x's'^*}} - \overline{V_{nm}^x V_{nm}^{x'^*}}) = N' \left[p_{AA}^{(jl)} V_{Anm}^{xj} V_{Anm}^{x'l^*} + p_{AB}^{(jl)} V_{Anm}^{xj} V_{Bnm}^{x'l^*} + \right. \\ \left. + p_{BA}^{(jl)} V_{Bnm}^{xj} V_{Anm}^{x'l^*} + p_{BB}^{(jl)} V_{Bnm}^{xj} V_{Bnm}^{x'l^*} - \right. \\ \left. - (p_A^{(j)} V_{Anm}^{xj} + p_B^{(j)} V_{Bnm}^{xj}) (p_A^{(l)} V_{Anm}^{x'l^*} + p_B^{(l)} V_{Bnm}^{x'l^*}) \right]. \quad (25)$$

При этом подразумевается, что узлы номера χ и χ' являются соответственно узлами сорта j и l . После введения величин ε^{jl} , которые определяются соотношениями:

$$\varepsilon^{jl} = p_{AB}^{(jl)} - p_A^{(j)} p_B^{(l)} = p_{BA}^{(jl)} - p_B^{(j)} p_A^{(l)} = \\ = - (p_{AA}^{(jl)} - p_A^{(j)} p_A^{(l)}) = - (p_{BB}^{(jl)} - p_B^{(j)} p_B^{(l)}), \quad (26)$$

формула (25) принимает более простой вид:

$$\sum_s (\overline{V_{nm}^{xs} V_{nm}^{x's'^*}} - \overline{V_{nm}^x V_{nm}^{x'^*}}) = \\ = - N' \varepsilon^{jl} (V_{Anm}^{xj} - V_{Bnm}^{xj}) (V_{Anm}^{x'l^*} - V_{Bnm}^{x'l^*}) \approx - N' \varepsilon^{jl} \Delta_{nm}. \quad (27)$$

В последнем равенстве $(V_{Anm}^{xj} - V_{Bnm}^{xj}) (V_{Anm}^{x'l^*} - V_{Bnm}^{x'l^*})$ заменено на Δ_{nm} , что справедливо с точностью до кубических относительно $|V_A - V_B|$ членов. Проведя в формуле (24) суммирование по χ и по k и учитывая (27), получаем следующее выражение для суммы (24):

$$\sum_{xs+x's'} \exp \{iq (R_{xs} - R_{x's'})\} (\overline{V_{nm}^{xs}} - \overline{V_{nm}^x}) (\overline{V_{nm}^{x's'^*}} - \overline{V_{nm}^{x'^*}}) \approx \\ \approx - \left[N_1 \varepsilon^{11} \sum_{h_1=1}^{z_1} \cos q \delta R_{h_1} + N_2 \varepsilon^{22} \sum_{h_2=1}^{z_2} \cos q \delta R_{h_2} + \right. \\ \left. + 2N_3 \varepsilon^{12} \sum_{h_3=1}^{z_3} \cos q \delta R_{h_3} \right] \Delta_{nm}. \quad (28)$$

Здесь $N_1 = \nu N$ — число узлов 1-го сорта, $N_2 = (1 - \nu) N$ — число узлов 2-го сорта, z_1 — число узлов 1-го сорта, соседних с узлом 1-го сорта, z_2 — число узлов 2-го сорта, соседних с узлом 2-го сорта, а z_3 — число узлов 2-го сорта, соседних с узлом 1-го сорта.

Если $|q|$ достаточно мало, так что для всех k

$$q \delta R_k \ll 1, \quad (29)$$

то на основании формул (18), (22) и (28) квадрат модуля матричного элемента $|V'_m|^2$ равен

$$|V'_m|^2 = a_{nm} f(c, \eta, \varepsilon), \quad (30)$$

где

$$a_{nm} = N_e^2 N \Delta_{nm},$$

$$f(c, \eta, \varepsilon) = c_1 c_2 - \frac{\nu}{1-\nu} \gamma^2 \eta^2 - \nu z_1 \varepsilon^{11} - (1 - \nu) z_2 \varepsilon^{22} - 2\nu z_3 \varepsilon^{12} \quad (31)$$

и ϵ означает совокупность величин ϵ^{11} , ϵ^{22} и ϵ^{12} . Здесь коэффициенты a_{nm} с точностью до членов высшего (третьего) порядка малости относительно $|V_A - V_B|$ не зависят от c , η и ϵ , т. е. одинаковы для всех квантовых переходов. Последнее обстоятельство существенно для дальнейшего рассмотрения. В случае одноэлектронного приближения неравенства, аналогичные (29), выполняются для всех квантовых переходов в случае «плохих металлов», т. е. металлов с малым числом электронов проводимости. Если число электронов проводимости велико и квантовые переходы, для которых условие (29) не выполняется, играют существенную роль, то корреляционная поправка в формулах (30), (31) по абсолютной величине оказывается преувеличенной. Однако основной вклад в квадрат модуля матричного элемента $|V'_{nm}|^2$ дает выражение (22), вычисление которого не опирается на условие (29) малости q . Поэтому без учета корреляции в сплаве выражение (30) справедливо при любых q .

3. Вычисление остаточного сопротивления

Среднее значение плотности электрического тока можно определять по формуле:

$$I = \sum_{nm} w_{nm} I_{nm}, \quad (32)$$

где совокупность величин w_{nm} представляет матрицу плотности, построенную на волновых функциях ψ_n^0 , которые определяются формулой (4), а I_{nm} — матричные элементы оператора плотности тока. В отсутствие электрического поля средняя плотность электрического тока равна нулю, т. е.

$$\sum_{nm} w_{nm}^0 I_{nm} = 0, \quad (33)$$

где w_{nm}^0 образуют матрицу плотности без внешнего поля. Если к металлу приложено внешнее поле F , то матричные элементы w_{nm} можно представить в виде:

$$w_{nm} = w_{nm}^0 + \Delta w_{nm}, \quad (34)$$

а средняя плотность тока равна

$$I = \sum_{nm} \Delta w_{nm} I_{nm}. \quad (35)$$

Величины Δw_{nm} определяются из условия стационарности, требующего, чтобы матрица плотности не изменялась во времени

$$dw_{nm}/dt = 0. \quad (36)$$

Далее, как при выводе кинетического уравнения, учтем, что система электронов находится в состоянии динамического равновесия, и величины w_{nm} изменяются как за счет наличия поля, так и за счет рассеяния электронов на неоднородностях, связанных с не вполне упорядоченным расположением в сплаве атомов двух сортов. Изменение w_{nm} в единицу времени вследствие первой причины является некоторой функцией поля. Разложение этой функции в степенной ряд по степеням F не содержит нулевого члена и может быть записано в следующем виде:

$$(\partial w_{nm}/\partial t)_{\text{поле}} = a_{nm} F + \dots \quad (37)$$

Так как согласно формулам (30) и (31) вероятности любых квантовых переходов пропорциональны одинаковой функции $f(c, \eta, \varepsilon)$, то изменение w_{nm} в единицу времени, связанное с неоднородностями сплава, также пропорционально этой функции:

$$(\partial w_{nm}/\partial t)_{\text{сплав}} = \lambda_{nm} f(c, \eta, \varepsilon), \quad (38)$$

где λ_{nm} в принятом приближении ($|V_A - V_B|$ мало) не зависит от c , η и ε . Коэффициенты λ_{nm} являются функциями матричных элементов оператора плотности. Разложение этих коэффициентов в ряд по степеням Δw_{pr} имеет вид:

$$\lambda_{nm} = \sum_{pr} \mu_{prnm} \Delta w_{pr} + \dots \quad (39)$$

При этом нулевой член равен нулю, так как в отсутствие электрического поля выражение (38) обращается в нуль. Из формул (36), (37), (38) и (39) получим систему уравнений для определения величин Δw_{pr} :

$$f(c, \eta, \varepsilon) \sum_{p,r} \mu_{prnm} \Delta w_{pr} + \alpha_{nm} F = 0. \quad (40)$$

Здесь отброшены высшие члены разложений (37) и (39), что справедливо при не слишком больших полях, когда выполняется закон Ома. Решение системы уравнений (40) имеет вид:

$$\Delta w_{pr} = c_{pr} \frac{F}{f(c, \eta, \varepsilon)}. \quad (41)$$

Подставляя найденное решение в формулу (35), получим окончательное выражение для средней плотности электрического тока

$$I = \frac{F}{f(c, \eta, \varepsilon)} \sum_{nm} c_{nm} I_{nm}. \quad (42)$$

Следовательно, остаточное сопротивление сплава равно

$$\rho_0 = A f(c, \eta, \varepsilon), \quad (43)$$

где постоянная A не зависит от c , η и ε .

Из формулы (43) видно, что многоэлектронная теория при выполнении условий (29) приводит к такой же зависимости остаточного сопротивления от состава сплава, степени дальнего порядка и корреляции в сплаве, как и одноэлектронное приближение. При этом коэффициент A , пропорциональный $|V_A - V_B|^2$, в многоэлектронной теории остается параметром так же, как и в одноэлектронной теории.

Выражение (31) для $f(c, \eta, \varepsilon)$ принимает особенно простую форму в двух случаях:

1. Для неупорядоченного сплава $\eta = 0$ и функция $f(c, \eta, \varepsilon)$ равна

$$f(c, \varepsilon) = c_1 c_2 - z\varepsilon. \quad (44)$$

Здесь величина ε , определяемая формулой (26), в неупорядоченном сплаве одинакова для любых соседних узлов, независимо от их сорта, а z — координационное число. Значение ε может быть оценено при помощи статистической теории упорядочения, учитывающей взаимодействие только между ближайшими соседями. С точностью до квадратичных относительно W/kT членов, согласно [6] ε равно

$$\varepsilon = c_1^2 c_2^2 \frac{W}{kT}, \quad (45)$$

где энергия упорядочения $W = 2|v_{AB}| - |v_{AA}| - |v_{BB}|$ ($v_{\alpha\beta}$ — энергия взаимодействия соседних атомов α и β).

Формулы (44) и (43) при $\epsilon = 0$ переходят в соответствующие формулы работы [1], не учитывающей корреляции в сплаве. Из формул (43), (44) и (45) следует, что корреляция (ближний порядок) уменьшает остаточное сопротивление упорядочивающихся сплавов ($W > 0$) и увеличивает остаточное сопротивление распадающихся сплавов ($W < 0$). Влияние ближнего порядка увеличивается при понижении температуры T , при которой сплав был закален. Для данной температуры учет корреляции дает тем большую поправку к электросопротивлению, чем ближе состав сплава к стехиометрическому. Отметим, что поправка к ρ_0 , соответствующая учету корреляции, может быть весьма велика. Так, например, при $c_1 = c_2 = 1/2$, $W/kT = 1/z$ (температура T примерно в четыре раза больше температуры упорядочения) корреляция уменьшает сопротивление сплава (в случае «плохих металлов») на 25%. (В случае металлов, у которых число носителей тока не мало, корреляция оказывает меньшее влияние на сопротивление.) Представляет интерес экспериментально обнаружить влияние ближнего порядка на остаточное сопротивление сплава и исследовать этот эффект при разных температурах отжига и разных составах сплава.

Следует отметить, что приведенные формулы (44) и (45) перестают быть справедливыми при температурах порядка температуры упорядочения, когда поправочный член ze в формуле (44) оказывается немалым. В этом случае нельзя ограничиваться линейным относительно W/kT членом, и следует учитывать корреляцию не только между ближайшими соседями.

2. В случае упорядочивающегося сплава, в котором каждый узел окружен соседними узлами только другого сорта (например, сплавы с объемноцентрированной кубической решеткой типа β -латуни, сплавы с простой кубической решеткой и т. д.) $\epsilon^{11} = \epsilon^{22} = 0$, $v = 1/2$, $z_s = z$ и функция $f(c, \eta, \epsilon)$ может быть записана в таком виде:

$$f(c, \eta, \epsilon) = c_1 c_2 - \gamma^2 \eta^2 - z \epsilon^{12}. \quad (46)$$

При этом величина ϵ^{12} в приближении ближайших соседей с точностью до квадратичных относительно W/kT членов, аналогично (45), равна

$$\epsilon^{12} = (c_1^2 - \gamma^2 \eta^2)(c_2^2 - \gamma^2 \eta^2) \frac{W}{kT}. \quad (47)$$

Формула (46) справедлива лишь при температурах, значительно более низких, чем температура упорядочения при η , близких к единице, когда поправка ze^{12} мала. Если в этой формуле положить $\epsilon^{12} = 0$, то выражение (43) переходит в соответствующее выражение работы [2]. В общем случае выражение для ρ_0 работы [2] получается из формул (43) и (31) при $\epsilon^{ij} = 0$.

В заключение пользуемся случаем выразить глубокую благодарность проф. А. А. Смирнову за неоднократное обсуждение работы и ценные советы.

Лаборатория металлофизики
Академии наук Украинской ССР

Поступила в редакцию
16 февраля 1954 г.

Литература

- [1] L. Nordheim. Ann. d. Phys., 9, 607, 1931.—[2] А. А. Смирнов. ЖЭТФ, 17, 743, 1947.—[3] С. В. Вонсовский. Изв. АН СССР, сер. физ., 12, 337, 1948; Усп. физ. наук, 48, 289, 1952.—[4] А. В. Соколов. ЖЭТФ, 25, 341, 1953.—[5] С. Г. Рыжанов. ЖЭТФ, 9, 4, 1939.—[6] И. М. Лифшиц. ЖЭТФ, 9, 481, 1939.

РЕГРЕССИЯ ЦЕНТРОВ СКРЫТОГО ФОТОГРАФИЧЕСКОГО
ИЗОБРАЖЕНИЯ

Б. И. Казанцев и П. В. Мейкляр

Произведено исследование регрессии центров скрытого изображения и субцентров с течением времени. Показано, что процесс регрессии происходит по закону, аналогичному спадаанию фотопроводимости и затуханию люминесценции кристаллов галоидного серебра.

Регрессия центров скрытого изображения в толстослойных пластинках заключается в том, что проявляемость эмульсионных кристаллов, на которые действовали ионизирующие частицы $[1-2]$ или свет $[3]$, уменьшается с течением времени хранения.

Аналогичное явление для обычных фотографических пластинок в столь отчетливой форме не наблюдается. В этих слоях центры скрытого изображения более стабильны и мало разрушаются с течением времени. Менее стабильными и подверженными заметной регрессии оказываются эти же центры скрытого изображения в том случае, если прекратить действие света до того, как они станут проявляемыми. Такие центры часто называют субцентрами скрытого изображения. Регрессии центров скрытого изображения и субцентров посвящена настоящая работа.

Методика эксперимента

Фотографической пластинке задавалась определенная экспозиция либо непрерывно в течение 100 сек. (t_0), либо путем дробления этой же экспозиции на две части с промежуточной темновой паузой.

Время первого освещения t_1 мы брали равным 10, 20, 30 сек. и т. д. Соответственно время второго освещения t_2 составляло 90, 80, 70 сек. и т. д. В каждом случае $t_1 + t_2 = t_0$, т. е. 100 сек. Время темновой паузы τ менялось от 1 до 30 суток. Освещение производилось лампой накаливания, питаемой через стабилизатор.

Перед фотографической пластинкой помещался сенситометрический графитовый клич с постоянной 0,15 для белого света и 0,17 для синего. Проявление велось в проявителе Чибисова. Постоянство температуры проявления с точностью до $0,5^\circ$ обеспечивалось термостатированием. Получаемые сенситограммы промерялись на фотоэлектрическом денситометре, так что определялась диффузная плотность почернения D . Измерения производились на диапозитивных (2° Х. и Д.), репродукционных штриховых (2° ГОСТ) и изобротхроматических пластинках (31 ед. ГОСТ). По сенситограммам строились характеристические кривые $D = f(\lg H)$, причем величина $\lg H$ логарифма количества освещения откладывалась в относительных единицах.

Результаты опытов

Производилось сравнение характеристической кривой для непрерывного освещения слоя в течение 100 сек. с характеристическими кривыми, получаемыми при разделении этой экспозиции на две части

при разной длительности первого освещения, т. е. разных значениях t_1/t_0 .

Во всех случаях кривая для двойного освещения была смещена относительно кривой для непрерывного освещения в сторону больших значений $\lg H$ (рис. 1). Это смещение мы оценивали по $\Delta \lg H$ для какого-нибудь определенного значения оптической плотности почернения. На рис. 2 изображена зависимость $\Delta \lg H$ от t_1/t_0 для трех различных темновых пауз τ для диапозитивных пластинок ($D=1$), а на рис. 3 для репродукционных (для $D=1,5$). Из этих кривых видно, что регрессия субцентров скрытого изображения наиболее заметна для некоторого среднего значения $(t_1/t_0)_{\text{макс}}$, причем эта величина $(t_1/t_0)_{\text{макс}}$ увеличивается с увеличением длительности темновой паузы τ .

Результаты опытов можно выразить несколько иначе. Пусть H_0 — количество освещения, необходимое для создания некоторой плотности почернения при непрерывном освещении и проявлении сразу после экспонирования, а N_0 — число атомов серебра в центрах скрытого изображения эмульсионных кристаллов, определяющих эту плотность почернения, при этом $H_0 = CN_0$. Если проявление проис-

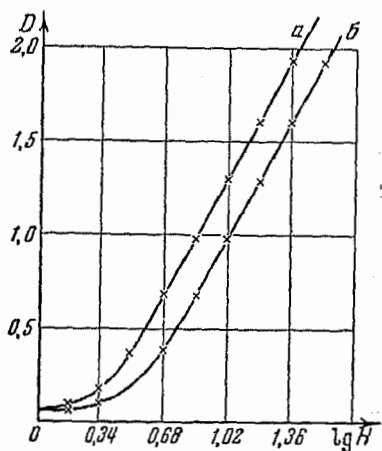


Рис. 1. Характеристические кривые для репродукционных пластинок. Кривая a — для непрерывного освещения; b — для двойного освещения с $t_1/t_0 = 0,5$ и $\tau = 6$ сут.

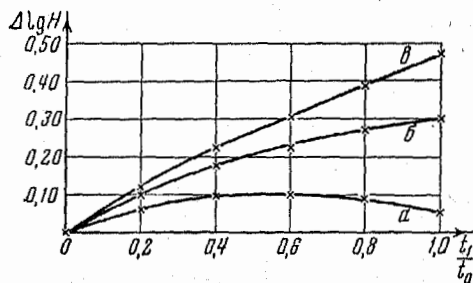


Рис. 2. Зависимость $\Delta \lg H$ от t_1/t_0 для диапозитивных пластинок (для $D=1$). a — $\tau = 1$ сут.; $б$ — $\tau = 6$ сут.; $в$ — $\tau = 20$ сут.

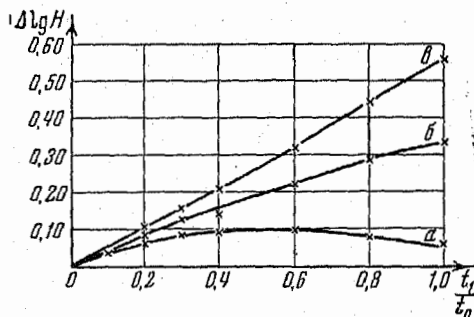


Рис. 3. Зависимость $\Delta \lg H$ от t_1/t_0 для репродукционных пластинок (для $D=1,5$). a — $\tau = 1$ сут.; $б$ — $\tau = 7$ сут.; $в$ — $\tau = 20$ сут.

ходит через время τ после экспонирования, то за это время число атомов серебра в центре станет N . Результат проявления станет таким же, как если бы при непрерывном экспонировании и проявлении без перерыва подействовало количество освещения $H = CN$. Это значит, что

$$\Delta \lg H = \lg \frac{H_0}{H} = \lg \frac{N_0}{N}.$$

Можно поэтому записать, что

$$\frac{N}{N_0} = \frac{1}{\text{anti lg} (\Delta \lg H)}.$$

Из зависимости N/N_0 от τ можно сделать некоторые заключения относительно механизма регрессии.

В настоящее время существуют две теории регрессии [4]. Согласно первой из них, регрессия вызвана окислением центров скрытого изображения кислородом воздуха, причем считается, что эта реакция особенно интенсивно идет в присутствии паров воды.

Согласно второй теории, регрессия вызвана воссоединением атомов серебра центра скрытого изображения с атомами брома. Если справедлива первая из этих теорий, т. е. механизм регрессии мономолекулярный, то число регрессирующих атомов серебра dN за время dt равно

$$dN = -kN dt. \quad (1)$$

Если же справедлива бимолекулярная, т. е. реброминерационная теория, то соответствующее число регрессирующих атомов серебра равно

$$dN = -kN^2 dt. \quad (2)$$

В обоих случаях k — коэффициент пропорциональности.

Решением первого уравнения является

$$N/N_0 = e^{-k\tau}, \quad (3)$$

а решением второго

$$N/N_0 = (1 + N_0 k \tau)^{-1}. \quad (4)$$

Опыт показывает, что ни одно из этих уравнений не выполняется. Для иллюстрации на рис. 4 и 5 приведена зависимость $\ln(N/N_0)$ от τ для диапозитивных и репродукционных пластинок и различных t_1/t_0 .

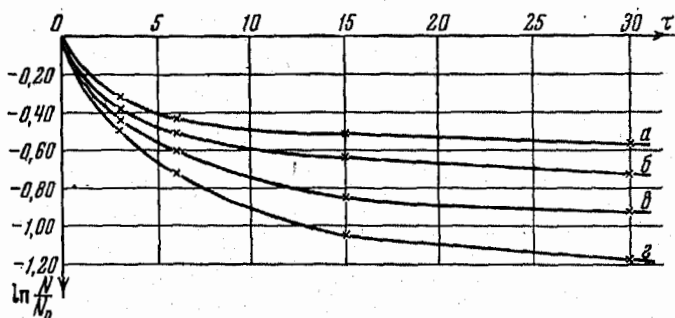


Рис. 4. Зависимость $\ln(N/N_0)$ от τ для диапозитивных пластинок. $a - t_1/t_0 = 0,4$; $б - t_1/t_0 = 0,6$; $в - t_1/t_0 = 1,0$

В случае справедливости уравнения (3) последняя зависимость была бы линейной. Мейкляром [5] было показано, что для процесса спада фотопроводимости в кристаллах галоидного серебра имеет место уравнение

$$\frac{\Delta\sigma}{\Delta\sigma_0} = \frac{1}{(1 + at)^a},$$

где $\alpha \approx 10^3$ для тонких монокристаллов, а $\alpha = 0,2-0,5$. Поэтому представляло интерес проверить, не выполняется ли подобное соотношение для процесса регрессии центров скрытого изображения. Для этого процесса соотношение имеет вид:

$$\frac{N}{N_0} = \frac{1}{(1 + N_0 k \tau)^\alpha} \quad (5)$$

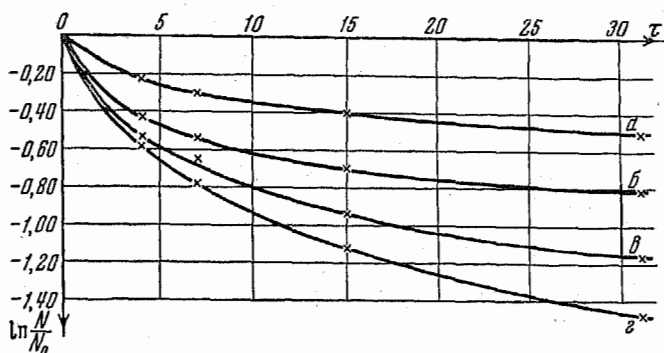


Рис. 5. Зависимость $\ln(N/N_0)$ от τ для репродукционных пластинок. $a - t_1/t_0 = 0,4$; $б - t_1/t_0 = 0,6$; $в - t_1/t_0 = 0,8$; $г - t_1/t_0 = 1,0$

Проверка справедливости уравнения (5) производится путем построения зависимости обратной логарифмической производной от τ , которая должна быть линейной, так как из (5) следует

$$-\frac{1}{d \ln(N/N_0)/d\tau} \approx \frac{1}{\alpha} \tau + \frac{1}{N_0 k \alpha}.$$

Результаты такой проверки изображены на рис. 6 для диапозитивных пластинок, на рис. 7 — для репродукционных пластинок и на рис. 8 — для польской фотографической бумаги «Фотон».

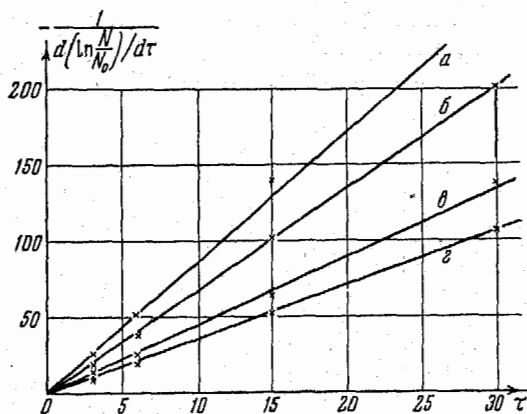


Рис. 6. Зависимость $\frac{1}{d \ln(N/N_0)/d\tau}$ от τ для диапозитивных пластинок. $a - t_1/t_0 = 0,4$; $б - t_1/t_0 = 0,6$; $в - t_1/t_0 = 0,8$; $г - t_1/t_0 = 1,0$

Значения $\lg H$ для бумаги «Фотон» оценивались визуально по смещению поля данной плотности почернения для сенситограммы, полученной после регрессии, по сравнению с сенситограммой, полученной при проявлении непосредственно после экспонирования. Полученные значения α находятся в тех же пределах, что и для явления спадания фотопроводимости. Это иллюстрирует приводимая ниже таблица.

Ввиду того что $N_0 k$ имеет большое значение, $1/N_0 k \alpha$ очень мало, и прямые на рис. 6, 7 и 8 практически проходят через начало координат, т. е. выполняется соотношение:

$$N/N_0 = c\tau^{-\alpha},$$

где $c = 1/(N_0 k)^\tau$.

Из полученных данных можно сделать вывод о том, что кинетика регрессии центров скрытого изображения подобна кинетике фотопроводимости [5] и люминесценции [6]. Отсюда можно заключить, что кинетика регрессии определяется электронной частью этого процесса, которая имеет бимолекулярный рекомбинационный характер.

Таблица

Значения α

t_1/t_0	Фотоматериал		
	Диапозитивные пластинки	Репродукционные пластинки	Фотобумага «Фотон»
1,0	0,28	0,50	0,52
0,8	0,22	0,39	—
0,6	0,15	0,23—0,25	—
0,4	0,12	0,16	—

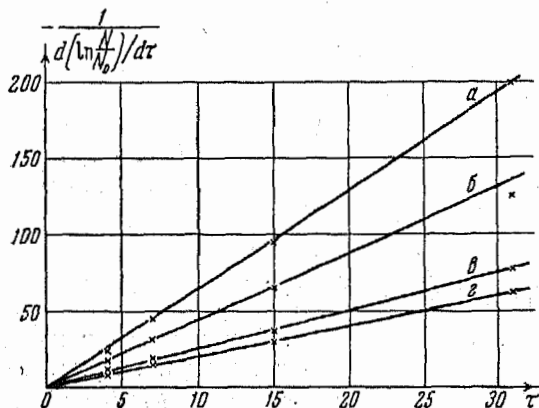


Рис. 7. Зависимость $\frac{1}{d \ln(N/N_0)/d\tau}$ от τ для репродукционных пластинок. $a - t_1/t_0 = 0,4$; $b - t_1/t_0 = 0,6$; $v - t_1/t_0 = 0,8$; $z - t_1/t_0 = 1,0$

Это находится в соответствии с данными Чердынцева [7], который нашел, что при термическом разрушении мельчайших частиц серебра, выделенных ранее фотохимически, имеет место бимолекулярная реакция

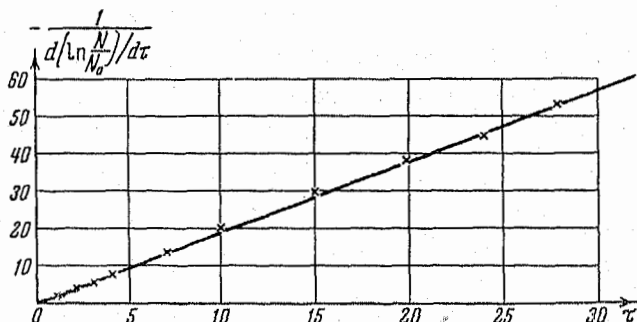


Рис. 8. Зависимость $\frac{1}{d \ln(N/N_0)/d\tau}$ от τ для фотографической бумаги «Фотон»

типа $(1/m) - (1/m_0) = \text{const} \cdot t$. Наши выводы находятся в соответствии также и с результатами работы [8]. Последние авторы показали, что при действии света на кристаллы бромистого серебра выделяются атомы брома, которые могут не только воссоединяться с фотолитическим серебром, но и разрушать серебро, напыленное ранее на поверхность кристалла.

Для доказательства правильности окислительной теории регрессии часто приводят результаты опытов по усилению регрессии в атмосфере кислорода, особенно, в присутствии паров воды и ослаблению регрессии в вакууме.

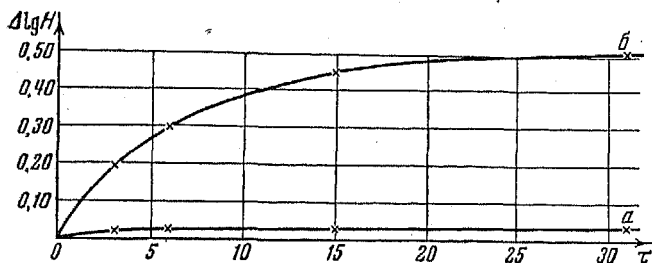


Рис. 9. Регрессия в диапозитивных пластинках. а — кривая для пластинки, обработанной 3% раствором буры; б — для необработанной пластинки

Нам представляется, что из этих результатов не следует еще правильность окислительной теории. Резкое изменение среды, окружающей эмульсионный кристалл, не может не сказаться на кинетике

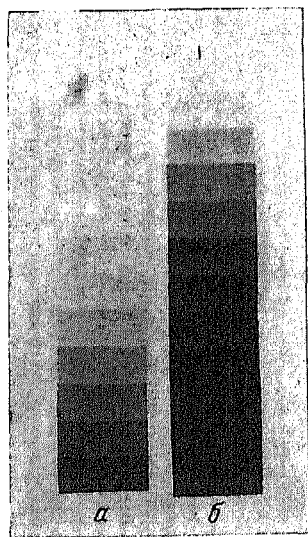


Рис. 10. Фотографическая бумага „Фотон“. а — сенситограмма, полученная при проявлении через $\tau = 6$ сут. после экспонирования; б — сенситограмма, проявленная сразу после экспонирования

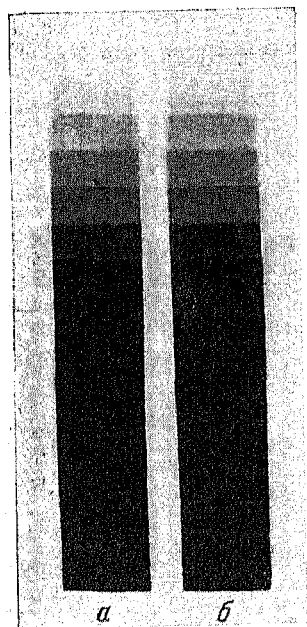


Рис. 11. Фотографическая бумага „Фотон“, обработанная 3% раствором буры; а — сенситограмма, полученная при проявлении через $\tau = 6$ сут. после экспонирования; б — сенситограмма, проявленная сразу после экспонирования

происходящих на его поверхности процессов вне зависимости от их механизма.

Так, в работе [9] показано, что время релаксации фотопроводимости кристалла CdS в присутствии паров воды значительно уменьшается,

а в вакууме увеличивается. Иначе говоря, в присутствии паров воды скорость рекомбинации электронов с дырками увеличивается, а в вакууме уменьшается.

Известно [4], что регрессия следов ионизирующих частиц в толстослойных пластинках уменьшается при обработке пластинок бурой. Такое же явление наблюдается и для регрессии в обычных пластинках. Это видно из рис. 9, где кривая *б* соответствует регрессии в необработанных диапозитивных пластинках, а кривая *а* — регрессии в этих же пластинках, обработанных бурой. На рис. 10 приведены сенситограммы, полученные на бумаге «Фотон» при экспонировании непосредственно перед проявлением *б* и при регрессии в течение 6 суток *а*, а на рис. 11 то же, но при предварительной обработке бумаги в 3% растворе буры.

Молотовский Государственный
педагогический институт

Поступила в редакцию
5 февраля 1954 г.

Литература

- [1] M. Blau. Sitz. Ber. Acad. Wiss. Wien, **140**, 623, 1931. — [2] H. Faraggi et G. Albouy. C. R., **226**, 717, 1948. — [3] L. Winand et L. Falla. Bull. Roy. Soc. Sci. Liège, **18**, 184, 1949. — [4] Г. Фарраги и Ж. Альбуи. Фотографическая регистрация ионизирующих излучений, ИИЛ, 1953, стр. 223. — [5] П. В. Мейкляр. ЖЭТФ, **21**, 42, 1951. — [6] С. И. Голуб, ДАН СССР, **60**, 1153, 1948. Тр. Одесск. гос. ун-та, **3**, 41, 1951. — [7] С. В. Чердынцев. Журн. физ. химии, **15**, 419, 1941. — [8] J. M. Hedges a. J. W. Mitchell. Phil. Mag., **44**, 357, 1953. — [9] R. Bube. Phys. Rev., **83**, 393, 1951; Journ. Chem. Phys., **21**, 1409, 1953.

ИЗМЕРИТЕЛЬ МАГНИТНОГО ПОЛЯ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЙ МАГНИТНЫЙ РЕЗОНАНС ПРОТОНОВ

Н. И. Леонтьев

Описан измеритель магнитного поля, использующий эффект ядерной абсорбции протонов. Измеритель имеет цепи автоматической подстройки, что дает возможность измерять поля с точностью $\pm 0,006\%$. Указаны области измерений, где прибор может быть применен.

Введение

В ряде исследований возникает необходимость измерения и стабилизации статических магнитных полей, а также измерения их однородности с высокой степенью точности. Среди различных приборов, предложенных для решения этих задач, измерители и стабилизаторы магнитного поля, использующие ядерный магнитный резонанс, являются наиболее простыми, обеспечивая вместе с тем наивысшую точность.

Измеритель магнитного поля может быть построен на основе использования эффекта ядерной индукции [1] или эффекта ядерной абсорбции [2].

Рассмотрим, какие преимущества дает эффект ядерной абсорбции при использовании его как базы для постройки измерителя магнитного поля. Поместим некоторое число атомов парамагнитного или диамагнитного вещества в однородное магнитное поле H_0 , направленное по оси z . Величина поля должна быть такова, что связь между магнитным моментом ядерного спина и магнитным моментом внешних электронных оболочек атома полностью разорвана. Одновременно воздействуем на эти атомы переменным полем $H = 2H_m \cos \omega_p t$, колеблющимся с частотой прецессии Лармора и направленным перпендикулярно полю H_0 . При этом в зависимости от величины амплитуды H_m могут быть два случая.

1) Амплитуда H_m велика, $H_m \gg \frac{1}{|\gamma|(T_1 T_2)^{1/2}}$, где γ — гиромагнитное отношение ядер, т. е. отношение магнитного момента ядра к механическому, T_1 — время релаксации, т. е. время установления теплового равновесия, T_2 — период прецессии момента ядра в межатомном поле. Сильное радиочастотное поле вызывает синхронное с полем вращение (прецессию) вектора намагничивания вокруг поля H_0 , которое отклоняется от оси z тем сильнее, чем ближе поле H_0 к резонансному H_p , определяемому из уравнения прецессии Лармора:

$$H_p = \omega_p / 2\pi\gamma', \quad (1)$$

где γ' — гиромагнитное отношение, выраженное в единицах системы CGS. При $H_0 = H_p$ вектор намагничивания составит угол в 90° с направлением z . Если измерить электродвижущую силу индукции, возникающую в охватывающей вещество катушке, ось которой направлена по оси y , то максимум ее в катушке будет соответствовать условию резонанса ($H_0 = H_p$). Используя метод ядерной индукции, можно построить измеритель магнитного поля, в котором измерение H_0 сво-

дится к измерению ω_p . При наличии соответствующего эталона частоты ω_p может быть измерена с высокой степенью точности.

2) Амплитуда H_m мала. Эффект индукции оказывается очень малым, но становятся оптимальными условия для наблюдения резонансного поглощения электромагнитной энергии переменного поля. Максимум поглощения энергии лежит в области резонансной частоты, определяемой уравнением (1). Этот эффект носит название эффекта ядерной абсорбции и также может быть использован для построения измерителя магнитного поля, в котором измерение поля сводится к измерению частоты.

Строить измеритель магнитного поля, использующий эффект резонансной индукции, не рационально, так как для того, чтобы обнаружить слабо колеблющееся поле вдоль оси y в присутствии сильного поля H_m вдоль оси x , необходимо в пробник прибора, содержащий ампулу с парамагнитным веществом, ввести ряд регулирующих элементов и тщательно его экранировать [3]. Пробник измерителя магнитного поля, использующего эффект ядерной абсорбции, можно изготовить меньших размеров, и таким образом измерять поля с меньшими зазорами.

Общее описание прибора

Нами построен прибор, использующий эффект ядерной абсорбции протонов, для которых γ' точно известно. На рис. 1 показана блок-схема прибора. Пробник представляет собой тонкостенную медную

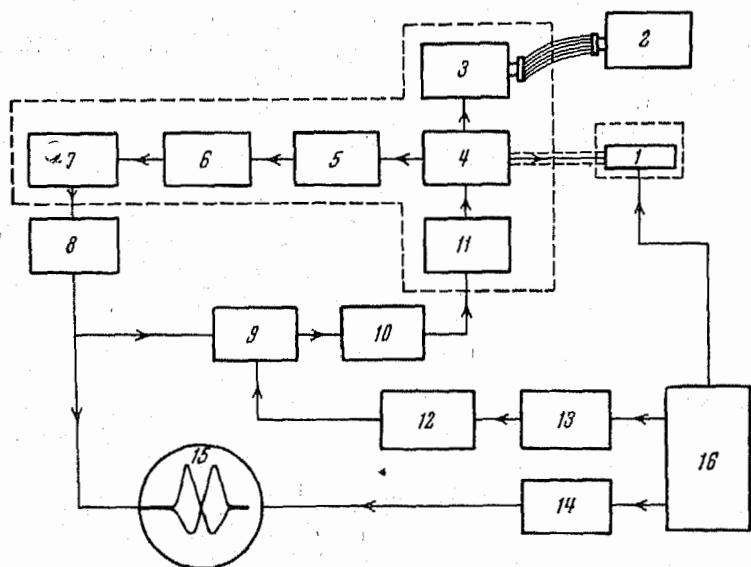


Рис. 1. Блок-схема измерителя магнитного поля: 1 — пробник, 2 — гетеродинный волномер, 3 — буферный каскад, 4 — генератор, 5 — детектор, 6 — дифференцирующая цепь, 7, 8 — усилители сигнала, 9 — фазовый детектор, 10 — дифференциальный усилитель, 11 — реактивная лампа, 12 — формирователь прямоугольных импульсов, 13, 14 — фазовращатели, 15 — электронно-лучевая трубка, 16 — сеть 50 гц

коробочку, служащую электрическим и механическим экраном. В коробочку помещена ампула в форме тороида; наружный диаметр ампулы 15 мм, внутренний диаметр 3 мм, высота 6 мм, толщина стенок 0,2 мм, материал — органическое стекло. Ампула заполнена 10% раствором хлорного железа, и на нее намотана катушка, которая слу-

жит индуктивностью контура генератора. Контурная катушка связана с генератором коаксиальным кабелем длиной 500 мм. Это дает возможность измерять напряженность поля в любой точке зазора магнитов диаметром до 1 м и быстро заменять одну катушку другой. Прибор имеет три сменных пробника с тремя контурными катушками, намотанными вокруг ампулы проводом ПЭШО 0,22. Длинноволновая, средневолновая и коротковолновая катушки имеют 38, 22 и 6 витков соответственно. Ампула окружена каркасом из органического стекла диаметром 24 мм, на котором намотана модулирующая катушка. Эта катушка имеет 250 витков провода ПЭ 0,2. Модулирующая катушка питается переменным током от сети 50 гц. Амплитуда модуляции может плавно меняться изменением тока в катушке от 0 до 120 мА. Ток контролируется по прибору, вынесенному на переднюю панель измерителя. Для измерений пробник помещают в зазор магнитного поля так, чтобы ось модулирующей катушки совпала с направлением измеряемого поля. Для каждого значения поля можно найти такое значение частоты генератора ω_p , при котором на экране осциллографической трубки появится сигнальный импульс, соответствующий квантовому переходу протонов на соседний зеемановский уровень. При этом справедливо уравнение (1). Луч осциллографической трубки разворачивается по горизонтали напряжением синфазным и синхронным с модулирующим напряжением. Если к тому же настроить прибор так, что импульсы появятся в момент времени

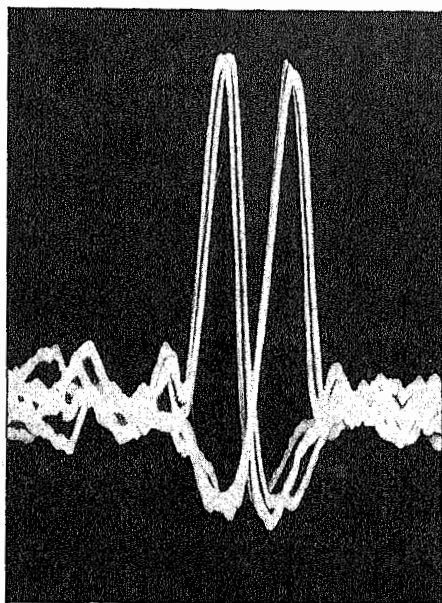


Рис. 2. Фотография сигнальных импульсов на экране индикаторной трубки

$$t_0, t_0 + (T_{\text{мод}}/2), t_0 + T_{\text{мод}}, \dots,$$

то модулирующее поле не даст искажений при измерении, и H_0 будет равно H_p (рис. 2). Это соответствует настройке прибора, при которой вершины совпадающих импульсов (за один период модуляции на экране появятся два импульса) расположены точно в центре экрана. В нашем приборе импульсы дифференцируются и в качестве опорной точки берется точка пересечения задних фронтов дифференцированных импульсов. Из рис. 2 видно, что положение на экране опорной точки соответствует положению вершин недифференцированных совмещенных импульсов.

Настройка прибора сводится к плавному изменению частоты генератора до тех пор, пока опорная точка не будет установлена в центре экрана, точнее, посредине линии развертки при симметричном модулирующем напряжении. Настройка до появления импульсов на экране производится при помощи верньера, изменяющего емкость контура генератора, а подстройка (точная установка опорной точки в центр экрана) производится цепями автоматической подстройки. Измерив частоту генератора при помощи гетеродинного волномера, легко под-

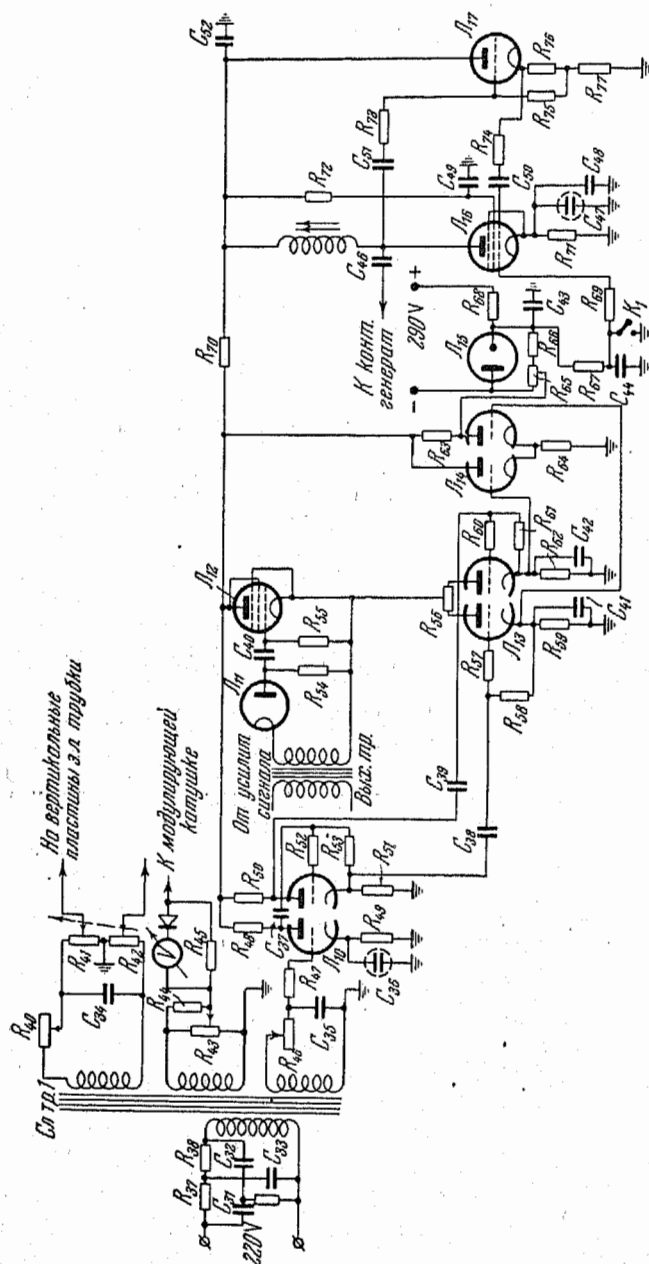


Рис. 3. Принципиальная схема цепей автоматической подстройки. $R_{37}, R_{38}, R_{73} - 1 \text{ k}\Omega$; $R_{39} - 500 \Omega$; $R_{40}, R_{46} - 5 \text{ k}\Omega$; $R_{41}, R_{42} - 820 \text{ k}\Omega$; $R_{43} - 10 \text{ k}\Omega$; $R_{44}, R_{45} - 10 \Omega$; $R_{46} - 5 \text{ k}\Omega$; $R_{47}, R_{52}, R_{53}, R_{54}, R_{55}, R_{56}, R_{57}, R_{58}, R_{59}, R_{61}, R_{77} - 510 \text{ k}\Omega$; $R_{48}, R_{50}, R_{51}, R_{66} - 100 \text{ k}\Omega$; $R_{49}, R_{51} - 2 \text{ k}\Omega$; $R_{53}, R_{63} - 1 \text{ M}\Omega$; $R_{54}, R_{62} - 51 \text{ k}\Omega$; $R_{55}, R_{61} - 30 \text{ k}\Omega$; $R_{56}, R_{76} - 160 \text{ k}\Omega$; $R_{57} - 10 \text{ M}\Omega$; $R_{58} - 12,5 \text{ k}\Omega$; $R_{59}, R_{72} - 50 \text{ k}\Omega$; $R_{60}, R_{70} - 24 \text{ k}\Omega$; $R_{61}, R_{74} - 400 \text{ k}\Omega$; $R_{62} - 70 \text{ k}\Omega$; $R_{63} - 200 \text{ k}\Omega$; $C_{31}, C_{32} - 1 \mu\text{F}$; $C_{33}, C_{44} - 2 \mu\text{F}$; $C_{34}, C_{35}, C_{43} - 0,25 \mu\text{F}$; $C_{36}, C_{47} - 100 \mu\text{F}$; $C_{37}, C_{38}, C_{39} - 0,5 \mu\text{F}$; $C_{40} - 0,02 \mu\text{F}$; $C_{41}, C_{42} - 12 \mu\text{F}$; $C_{43} - 20 \mu\text{F}$; $C_{44}, C_{45} - 1000 \mu\text{F}$; $C_{46} - 0,01 \mu\text{F}$; $C_{47} - 60 \mu\text{F}$; $C_{51} - 60 \mu\text{F}$; $L_{10}, L_{13}, L_{14} - 6 \text{ H}9 \text{M}$; $L_{11} - 6 \text{ H}6$; $L_{12}, L_{16} - 6 \text{ H}3 \text{П}$; $L_{15} - \text{СГ}4 \text{С}$; $L_{17} - 6 \text{ Ж}5$.

считать напряженность поля:

$$H_0 = 234,864 f_p,$$

где H_0 — напряженность поля в гауссах, f_p — частота в мегагерцах.

Цепи автоматической подстройки

Основной частью цепей автоматической подстройки является фазовый детектор [4] (лампы L_{12} и L_{13} , рис. 3). На сетки правой и левой половин лампы L_{13} подаются в противофазе прямоугольные импульсы, сформированные формирователем прямоугольных импульсов из напряжения, которое синхронно и синфазно с модулирующим напряжением.

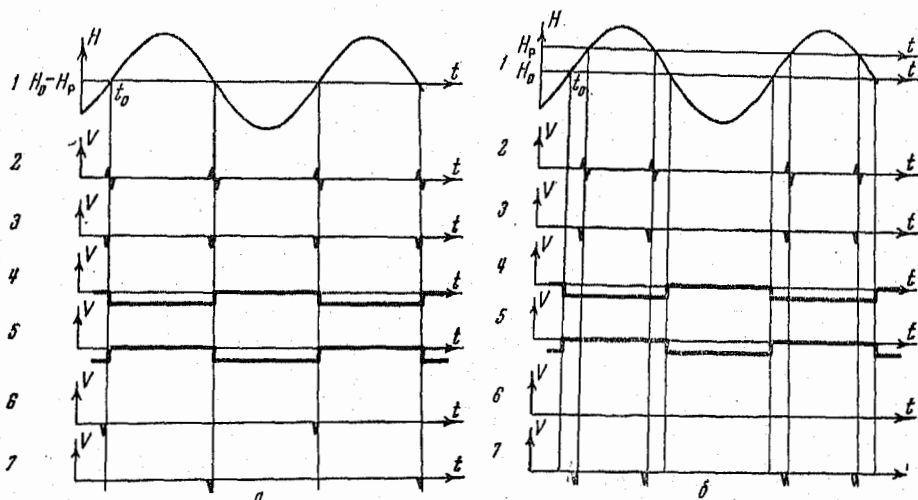


Рис. 4. Эпюры напряжений: а — $H_0 = H_p$; б — $H_0 \neq H_p$. 1 — суммарная напряженность измеряемого и модулирующего поля; 2 — сигнал на электронно-лучевой трубке; 3 — напряжение на сетке лампы L_{12} ; 4 — напряжение на сетке правой половины лампы L_{13} ; 5 — напряжение на сетке левой половины лампы L_{13} ; 6 — напряжение на сопротивлении R_{62} ; 7 — напряжение на сопротивлении R_{59} .

Длительность прямоугольного импульса равна длительности полупериода модулирующего напряжения.

Амплитуда прямоугольных импульсов такова, что в каждый момент времени одна из половин лампы L_{13} заперта, а вторая — открыта. Импульс, поданный на сетку лампы L_{12} , снимается с сопротивления R_{59} или с сопротивления R_{62} , в зависимости от того, какая из двух половин лампы L_{13} проводит. Рис. 4, а дает эпюры напряжений для случая, когда частота генератора выбрана так, что $H_0 = H_p$. Из рисунка видно, что на сопротивлениях R_{59} и R_{62} появится одно и то же число импульсов. Рис. 4, б дает эпюры напряжений для случая, когда прибор настроен неточно и измеряемое поле не равно резонансному. При этом на сопротивлении R_{59} импульсов не будет, а все импульсы появятся на сопротивлении R_{62} . Напряжения на сопротивлениях R_{59} и R_{62} усредняются конденсаторами C_{41} и C_{42} , а разность этих напряжений, меняющаяся по знаку в зависимости от того, в какую сторону сдвинута от резонансной частоты частота генератора, подается на девиационный каскад (реактивную лампу). Девиационный каскад подстраивает частоту генератора до частоты f_p .

Принципиальная схема цепей автоматической подстройки показана на рис. 3. С силового трансформатора снимается напряжение на пла-

стины горизонтального отклонения электронно-лучевой трубки, на модулирующую катушку и на формирователь прямоугольных импульсов. В первичной цепи силового трансформатора поставлен двойной Т-образный фильтр для улучшения формы напряжения во вторичной обмотке. Фильтр настроен на 3-ью гармонику сети. Сопротивление R_{40} и емкость C_{34} представляют собой простой фазовращатель. При его помощи компенсируется сдвиг фаз между цепями модулирующей катушки и развертки электронно-лучевой трубки. Сдвоенный потенциометр R_{41} и R_{42} дает возможность регулировать амплитуду развертки. Сопротивление R_{46} и емкость C_{35} представляют собой второй фазовращатель, компенсирующий сдвиг фаз между цепями формирователя прямоугольных импульсов и модулирующей катушки. Два каскада на лампе L_{10} из синусоиды формируют прямоугольные импульсы. Сопротивление R_{49} в катод первой лампы дает возможность получить отрицательный и положительный импульсы равной длительности. Прямоугольные импульсы подаются на правый и левый триоды лампы L_{13} фазового детектора. При помощи потенциометра R_{50} при замене лампы L_{13} всегда можно настроить фазовый детектор так, что в отсутствие сигнала напряжение на сопротивлении R_{50} было бы равно напряжению на сопротивлении R_{62} . Лампа L_{11} отсекает отрицательную часть дифференцированного сигнального импульса. С анода дифференциального усилителя L_{14} снимается напряжение, которое пропорционально разности напряжений, получаемых на сопротивлениях R_{50} и R_{62} . Величина постоянного анодного напряжения правой половины лампы L_{14} компенсируется напряжением, падающим на сопротивлении R_{68} и части сопротивления R_{65} , подключенным параллельно стабиловольту L_{15} . На стабиловольт L_{15} подается напряжение от отдельного выпрямителя. Потенциометром R_{65} (при замене L_{15}) между сеткой лампы L_{16} и землей устанавливается нулевой потенциал. При правильной настройке цепей автоматической подстройки, напряжение между сеткой лампы L_{16} и землей будет равно нулю (опорная точка находится точно в центре экрана), или отрицательным (опорная точка сдвинута вправо от центра экрана), или положительным (опорная точка сдвинута влево). При сдвиге опорной точки на край экрана это напряжение равно ± 25 В. Параметры девиационного каскада [6] (лампы L_{16} и L_{17}) таковы, что при изменении напряжения на сетке лампы L_{16} от -2 до -6 В частота генератора при неизменной величине модулирующего напряжения меняется так, что опорная точка перемещается от края до края через весь экран. При смещении на лампе L_{16} , равном $-3,75$ В, что обеспечивается сопротивлением смещения R_{71} ($2k\Omega$), рабочая точка девиационного каскада находится посередине линейного участка девиационной характеристики. При этом отрицательное напряжение относительно земли, поданное на сетку лампы L_{16} , сдвигает опорную точку влево, а положительное — вправо. При такой регулировке цепей автоматической подстройки опорная точка автоматически переместится в центр экрана, если ручной настройкой импульсы подведены хотя бы к краю экрана. Постоянная времени цепей автоматической подстройки такова, что опорная точка сдвигается от края до края экрана за время, равное одной минуте. Для сокращения времени измерений, а также для получения большей точности необходимо ручной настройкой подвести опорную точку ближе к центру экрана. Тумблер K_1 закорачивает сетку лампы L_{16} на землю, выключая схему автоматической подстройки.

Генератор и другие каскады измерителя

Генератор измерителя собран на лампе 6ЖЗП, работающей в триодном режиме, по схеме с емкостной связью (лампа L_1 , рис. 5).

Такая схема дает возможность связать катушку контура, находя-

щуюся в зазоре измеряемого магнита, коаксиальным кабелем с заземленным наружным проводом. Сопротивление обратной связи R_6 уравнивает амплитудную характеристику генератора по диапазону. При помощи блока переменных конденсаторов и трех сменных катушек генератор перекрывает диапазон частот от 4,25 до 30 мГц, что соответствует полям 1000—7000 Ое. Генератор дает возможность расширить диапазон измерений в обе стороны, если применить дополнительные сменные катушки. Предварительный отсчет частоты производится по лимбу верньера, а окончательный — по показанию гетеродинного волномера.

На лампе L_3 собран анодный детектор. Использование лампы L_1 как генератора (катод, сетка, экранирующая сетка) и детектора (катод, сетка, анод) одновременно дает худшие результаты, так как трудно найти

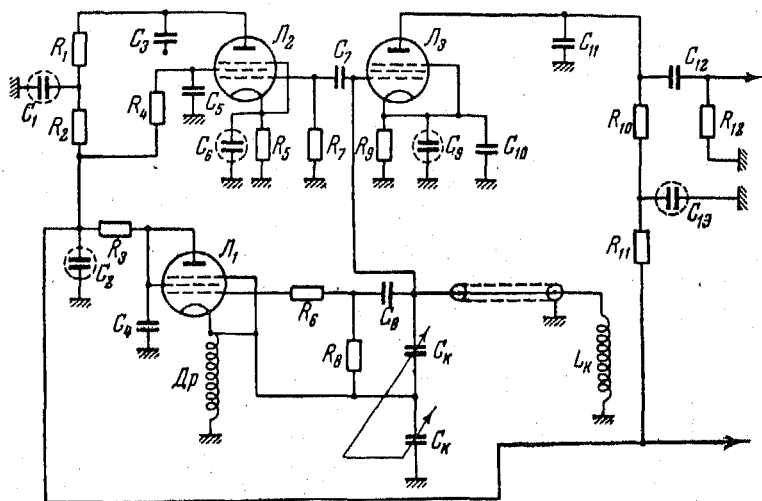


Рис. 5. Принципиальная схема генератора, детектора и буферного каскада. R_1 —500 Ω ; R_2 —1 к Ω ; R_3, R_9, R_{11} —24 к Ω ; R_4 —50 к Ω ; R_5 —500 Ω ; R_6 —325 Ω ; R_7 —1 М Ω ; R_8 —70 к Ω ; R_{10}, R_{12} —100 к Ω ; C_1, C_2 —10 μ F; C_3 —20 μ F; C_4, C_5, C_{11} —0,01 μ F; C_6, C_9 —100 μ F; C_7 —100 μ F; C_8, C_{12} —60 μ F; C_{10} —0,005 μ F; C_{13} —10 μ F; C_K —17÷550 μ F; L_1, L_2, L_3 —6ЖЗП; Др—10 мН

одну и ту же величину напряжения смещения, которая была бы оптимальной в широком диапазоне частот и для генератора, и для детектора.

Буферный каскад (лампа L_2) вследствие малой связи и малого коэффициента усиления позволяет устранить влияние гетеродинного волномера на генератор.

Сопротивление R_{12} и емкость C_{12} представляют собой дифференциальную цепочку, после которой сигнал подается на усилитель сигнала. Усилитель сигнала пятикаскадный. Выходной каскад пушпульный, трансформаторный. Трансформатор имеет две вторичные обмотки. С одной сигнал подается на пластины вертикального отклонения электронно-лучевой трубки, со второй — на вход фазового детектора. Максимальный коэффициент усиления усилителя около 10^6 . Потенциометр в цепи сетки третьего каскада дает возможность плавной регулировки коэффициента усиления. Полоса пропускания усилителя 30—20 000 гц с крутым падением коэффициента усиления по краям полосы.

Анодные напряжения всех ламп стабилизируются электронным стабилизатором. Стабилизатор дает 265 В (80 мА) стабилизированного напряжения; шумы стабилизатора 2—3 мВ. Накалы ламп L_1, L_2, L_3 ,

L_{16} и L_{17} (рис. 3 и 5) соединены последовательно и питаются через барретор 0,3Б 17—3Б. постоянным током, выпрямленным селеновым столбиком. Общая потребляемая прибором мощность 160 W. Индикатором измерителя является электронно-лучевая трубка типа 13Л037. Схема питания трубки аналогична схеме питания трубки в осциллографе ЭО-4.

Прибор выполнен в виде двух отдельных блоков: в одном из них (меньшем) расположен генератор, детектор, два каскада усилителя сигнала, буферный и девиационный каскады; во втором — расположены остальные цепи. Такая конструкция дает возможность применить прибор в том случае, когда в непосредственной близости от измеряемого магнита мало свободного места. Блоки соединены между собой двумя кабелями. По коаксиальному кабелю подается сигнал, а по второму (многожильному) — напряжения питания и напряжение, управляющее реактивной лампой.

Применение прибора

При помощи описанного выше измерителя проводились точные измерения постоянных магнитов. Многодневные измерения одного из них (2400 Oe), предварительно магнитно-остаренного и поддерживаемого при постоянной температуре, показали, что максимальное отклонение от среднего значения 10 измерений составляет $\pm 0,006\%$. Ту же величину точности можно получить, если в течение продолжительного времени наблюдать за тоном звука в наушниках гетеродинного волномера, связанного с буферным каскадом. При включенной цепи автоматической подстройки частота генератора не остается постоянной, а медленно меняется около своей средней величины. Максимальный уход частоты, который таким образом удастся прослушать, составляет 600 гц, что при частоте генератора 10 мгц составляет 0,006%. При измерении более сильных полей относительное колебание частоты меньше. Абсолютная точность прибора не проверялась из-за отсутствия в нашем распоряжении других методов измерения магнитного поля с такой же точностью. Кроме измерений постоянных магнитов с прибором были проведены измерения старения постоянных магнитов, измерения изменения напряженности поля электромагнита, питаемого от батарей большой емкости, и измерения однородности поля магнита. Прибор также можно использовать для измерения мгновенных значений переменных полей.

Автор выражает глубокую благодарность д-ру В. Шютце за помощь, оказанную в работе.

Поступила в редакцию
11 февраля 1954 г.

Литература

- [1] F. Bloch. Phys. Rev., 70, 460, 1946.— [2] H. C. Torrey, E. M. Purcell a. R. V. Pound. Phys. Rev., 69, 680, 1946.— [3] F. Bloch, W. W. Hansen a. M. Packard. Phys. Rev., 70, 474, 1946.— [4] N. A. Shuster. Rev. Sci. Instr., 22, 254, 1951.— [5] H. D. Holerich. Electronics, 4, 120, 1948.

К ВОПРОСУ ОБ УЧЕТЕ ВНУТРЕННЕГО ПОЛЯ ПРИ РЕЛАКСАЦИОННОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ В ПОЛИКРИСТАЛЛИЧЕСКИХ ДИПОЛЬНЫХ ДИЭЛЕКТРИКАХ

Г. И. Сканиви и А. Н. Губкин

Предложен метод вычисления внутреннего поля из экспериментальных данных для релаксационной поляризации в дипольных поликристаллических диэлектриках. Для частного случая органических дипольных поликристаллов произведены вычисления параметров, характеризующих релаксационную поляризацию.

Как известно, в жидких и твердых диэлектриках действующее (локальное) поле лишь в сравнительно редких случаях (неполярные жидкости, двухатомные кубические кристаллы) может быть в первом приближении определено по известной формуле Лоренца:

$$E = E_{\text{ср}} + \frac{4\pi}{3} I, \quad (1)$$

где I — электрический момент единицы объема.

Для кристаллов с известной структурой внутреннее поле может быть найдено при помощи метода структурных коэффициентов [1].

В настоящей работе сделана попытка оценить коэффициенты внутреннего поля при помощи экспериментальных данных о релаксационной поляризации для диэлектриков сложной и неизвестной структуры. Такая оценка представляет интерес по двум причинам. Во-первых, она дает возможность уточнить величину параметров, характеризующих релаксационную поляризацию, которые сами по себе имеют существенное значение (потенциальный барьер, ограничивающий движение релаксирующих дипольных или ионных групп, частота собственных колебаний этих групп). Во-вторых, она дает представление о характере действующего поля в поликристаллическом дипольном диэлектрике, о его отличии от поля Лоренца и о связи его с величинами диэлектрических проницаемостей при нулевой и бесконечной частотах.

Согласно методу Лоренца, действующее поле может быть представлено в виде суммы:

$$E = E_{\text{ср}} + \frac{4\pi}{3} I + E_{\text{доб}}, \quad (2)$$

где $E_{\text{доб}}$ — добавочное внутреннее поле, обусловленное действием частиц, находящихся внутри сферы Лоренца. Используя метод структурных коэффициентов [1], можно поле, действующее на i -ую частицу, представить следующим образом:

$$E_i = E_{\text{ср}} + \frac{4\pi}{3} I + \sum_{h=1}^m \alpha_h C_{ih} E_h + \sum_{h=1}^{m'} \alpha'_h C'_{ih} E_h. \quad (3)$$

Здесь α_h — релаксационная поляризуемость h -ой группы диполей (или слабо связанных ионов); α'_h — упругая поляризуемость h -ой группы

частиц; C_{ik} — структурный коэффициент, учитывающий расположение диполей в решетке; C'_{ik} — структурный коэффициент, учитывающий расположение упруго связанных частиц в решетке; m — число групп, различно расположенных в кристаллической ячейке диполей; m' — число групп, различно расположенных в кристаллической ячейке частиц, обладающих «упругой» поляризацией; E_k — поле, действующее на k -ую частицу, находящуюся в окружении рассматриваемой i -ой частицы (i изменяется от 1 до m' ; $m' \geq m$).

Если принять, что на все частицы в диэлектрике действует одно и то же усредненное локальное поле, то выражение (3) примет вид:

$$E = \frac{1}{m'} \sum_{i=1}^{m'} E_i = E_{\text{ср}} + \frac{4\pi}{3} I + \frac{1}{m'} \sum_{i=1}^{m'} \sum_{k=1}^m \alpha_k C_{ik} E_k + \frac{1}{m'} \sum_{i=1}^{m'} \sum_{k=1}^{m'} \alpha'_k C'_{ik} E_k. \quad (4)$$

Ввиду того что структурные коэффициенты нам неизвестны, ибо неизвестна структура решетки, введем обобщенные коэффициенты внутреннего поля β_1 и β_2 :

$$E = E_{\text{ср}} + \beta_1 I_{\text{рел}} + \beta_2 I_0, \quad (5)$$

где $I_{\text{рел}}$ — электрический момент единицы объема, обусловленный релаксационной поляризацией; I_0 — электрический момент единицы объема, обусловленный поляризацией смещения.

Обобщенные коэффициенты могут быть выражены согласно уравнению (4) через структурные коэффициенты:

$$\beta_1 = \frac{4\pi}{3} + \frac{1}{m' I_{\text{рел}}} \sum_{i=1}^{m'} \sum_{k=1}^m \frac{C_{ik} I_{\text{рел}k}}{n_k}, \quad (6)$$

$$\beta_2 = \frac{4\pi}{3} + \frac{1}{m' I_0} \sum_{i=1}^{m'} \sum_{k=1}^{m'} \frac{C'_{ik} I_{0k}}{n_{0k}}. \quad (7)$$

Здесь $I_{\text{рел}k}$ — электрический момент единицы объема, обусловленный релаксацией диполей k -ой группы; I_{0k} — электрический момент единицы объема, обусловленный поляризацией смещения частиц k -ой группы.

В случае линейной поляризации, которая рассматривается в настоящей работе, электрический момент единицы объема пропорционален напряженности действующего поля, поэтому коэффициенты β_1 и β_2 от поля не зависят.

Согласно Фрелиху [2], который обобщил уравнение Кирквуда для полярных жидкостей на случай дипольных твердых тел, основной величиной, характеризующей релаксационную поляризацию в кристаллических дипольных телах, является не отдельный диполь или группа диполей, как в дипольных жидкостях, а единичная ячейка кристалла, обладающая некоторым эффективным дипольным моментом m_j , зависящим от направления входящих в ячейку диполей. Это отличие кристаллических дипольных тел от дипольных жидкостей обуславливается различием в строении кристалла и жидкости.

Для учета взаимодействия диполей будем считать, согласно Кирквуду и Фрелиху, что дипольный момент шара, окружающего данную ячейку с фиксированным дипольным моментом m_j , равен m_j^* . Будем характеризовать в первом приближении релаксационную поляризацию дипольных кристаллических ячеек одним потенциальным барьером и, следовательно, одним временем релаксации. Это можно сделать, если плотность группировки времен релаксации относительно наименьшего достаточно велика.

Если принять, что каждая дипольная единичная кристаллическая ячейка имеет только два положения равновесия, с противоположными направлениями электрических моментов, то можно использовать уравнение релаксационной поляризации [3] в следующем простом виде:

$$\frac{d(\Delta N_j)}{dt} \frac{e^{U/kT}}{\nu} = -\Delta N_j (e^{\Delta U_j/kT} + e^{-\Delta U_j/kT}) + \frac{N_0}{6} (e^{\Delta U_j/kT} - e^{-\Delta U_j/kT}), \quad (8)$$

где ΔN_j — увеличение числа кристаллических ячеек в 1 см^3 с дипольным моментом $\mathbf{m}_j$, направленным по полю, которое обусловлено наложением внешнего поля; N_0 — полное число кристаллических ячеек в 1 см^3 диэлектрика; ν — частота собственных колебаний эффективного диполя кристаллической ячейки; U — потенциальный барьер, ограничивающий ориентацию единичной ячейки; ΔU_j — изменение потенциального барьера, вызываемое внешним полем.

Дипольный момент единицы объема, обусловленный релаксационной поляризацией, для данного направления диполей в единичной ячейке, равен

$$I_{\text{рел}j} = 2\Delta N_j m_j. \quad (9)$$

Умножая обе части равенства (8) на $2m_j$, получим

$$\frac{e^{U/kT}}{\nu} \frac{dI_{\text{рел}j}}{dt} = -I_{\text{рел}j} (e^{\Delta U_j/kT} + e^{-\Delta U_j/kT}) + \frac{N_0 m_j}{3} (e^{\Delta U_j/kT} - e^{-\Delta U_j/kT}).$$

При $\Delta U \ll kT$ имеем

$$\tau \frac{dI_{\text{рел}j}}{dt} = -I_{\text{рел}j} + \frac{N_0}{3} m_j \frac{\Delta U_j}{kT},$$

где $\tau = (1/2 \nu) e^{U/kT}$.

Если считать, что энергия дипольной единичной ячейки во внешнем электрическом поле определяется (вследствие взаимодействия дипольных ячеек) не дипольным моментом самой ячейки $\mathbf{m}_j$, а дипольным моментом, который равен дипольному моменту шара $\mathbf{m}_j^*$, окружающего данную ячейку, при условии, если дипольный момент этой ячейки фиксирован, то

$$\Delta U_j = (\mathbf{m}_j^* \mathbf{E}),$$

тогда

$$\tau \frac{dI_{\text{рел}j}}{dt} = -I_{\text{рел}j} + \frac{N_0}{3} \frac{(\mathbf{m}_j \mathbf{m}_j^*)}{kT} \mathbf{E}.$$

Усредняя по всем возможным направлениям диполей с учетом вероятности нахождения диполей в данной конфигурации и считая, что направление внутреннего поля совпадает с направлением $I_{\text{рел}}$ и I_0 [см. (5)], получим окончательно

$$\tau \frac{dI_{\text{рел}}}{dt} = -I_{\text{рел}} + BE, \quad (10)$$

где

$$B = N_0 \frac{(\overline{mm^*})}{3kT}.$$

Подставляем в (10) вместо E выражение (5):

$$\tau (dI_{\text{рел}}/dt) = -I_{\text{рел}} + BE_{\text{ср}} + \beta_1 B I_{\text{рел}} + \beta_2 B I_0. \quad (11)$$

Чтобы решить уравнение (11), необходимо выразить I_0 через $E_{\text{ср}}$ и $I_{\text{рел}}$. В общем случае

$$I_0 = \sum_{k=1}^{m'} I_{0k} = n_2 \alpha_1 E_1 + n_2 \alpha_2 E_2 + \dots + n_{m'} \alpha_{m'} E_{m'}.$$

Здесь $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m'}$ — упругие поляризуемости. Вводя, как и ранее, усредненное действующее поле

$$E = \frac{1}{m'} \sum_{i=1}^{m'} E_i,$$

получим

$$I_0 = E \left[n_1 \alpha_1 m' E_1 \left(\sum_{i=1}^{m'} E_i \right)^{-1} + n_2 \alpha_2 m' E_2 \left(\sum_{i=1}^{m'} E_i \right)^{-1} + \dots + n_{m'} \alpha_{m'} m' E_{m'} \left(\sum_{i=1}^{m'} E_i \right)^{-1} \right]. \quad (12)$$

Сумма, стоящая в скобках, может быть заменена произведением эквивалентных величин $n_{\text{экр}} \alpha_{\text{экр}}$ и

$$I_0 = n_{\text{экр}} \alpha_{\text{экр}} E. \quad (13)$$

Используя уравнения (5), (11) и (13), после несложных преобразований получим основное уравнение

$$\tau (dI_{\text{рел}} / dt) = -I_{\text{рел}} [1 - \beta_1 B (1 + A)] + E_{\text{ср}} B (1 + A). \quad (14)$$

Здесь

$$A = \beta_2 n_{\text{экр}} \alpha_{\text{экр}} / (1 - \beta_2 n_{\text{экр}} \alpha_{\text{экр}}). \quad (15)$$

Решая уравнение (14) для случая статического поля, получим

$$I_{\text{рел}} = \frac{B(1+A)}{\gamma} (1 - e^{-t\tau/\gamma}) E_{\text{ср}},$$

где

$$\gamma = 1 - \beta_1 B (1 + A), \quad (16)$$

а величина $\theta = \tau / \gamma$ — постоянная времени установления релаксационной поляризации.

В случае переменного внешнего поля в установившемся режиме:

$$E_{\text{ср}} = E_m e^{i\omega t}, \quad I_{\text{рел}} = I_m e^{i(\omega t - \delta)}.$$

Для случая линейной поляризации имеем

$$\tau (dI_{\text{рел}} / dt) = i\omega \tau I_{\text{рел}}. \quad (17)$$

Приравнивая (17) и (14) и разделяя действительную и мнимую части, получим

$$I_{\text{рел}}^* = \frac{\gamma B (1 + A) E_{\text{ср}}}{\gamma^2 + \omega^2 \tau^2} - i \frac{B (1 + A) \omega \tau E_{\text{ср}}}{\gamma^2 + \omega^2 \tau^2}. \quad (18)$$

Используя соотношения

$$\epsilon^* = 1 + 4\pi I^* / E_{\text{ср}} \text{ и } \epsilon^* = \epsilon' - i\epsilon'',$$

где ε^* и I^* — комплексные выражения для диэлектрической проницаемости и полного электрического момента единицы объема, и уравнение (18), получим после разделения действительной и мнимой части выражения для ε' и ε'' :

$$\varepsilon' = 1 + \frac{4\pi A}{\beta_2} + \frac{4\pi B(1+A)(1+(\beta_1/\beta_2)A)\gamma}{\gamma^2 + \omega^2\tau^2}; \quad (19)$$

$$\varepsilon'' = \frac{4\pi\omega\tau B(1+A)(1+(\beta_1/\beta_2)A)}{\gamma^2 + \omega^2\tau^2}. \quad (20)$$

При $\omega \rightarrow \infty$ имеем

$$\varepsilon_\infty = 1 + 4\pi A/\beta_2. \quad (21)$$

При $\omega = 0$ имеем

$$\varepsilon_0 = 1 + \frac{4\pi A}{\beta_2} + \frac{4\pi B(1+A)(1+(\beta_1/\beta_2)A)}{\gamma}. \quad (22)$$

Используя формулы (21) и (22), а также (19) и (20), можем выразить ε' и ε'' через ε_0 и ε_∞ (диэлектрические проницаемости при нулевой и бесконечной частотах)¹:

$$\varepsilon' = \varepsilon_\infty + \frac{(\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty)\gamma^2}{\gamma^2 + \omega^2\tau^2}, \quad (23)$$

$$\varepsilon'' = \frac{(\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty)\omega\tau\gamma}{\gamma^2 + \omega^2\tau^2}. \quad (24)$$

Из выражений (23) и (24) следует, что

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \frac{\omega\tau(\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty)\gamma}{\varepsilon_0\gamma^2 + \varepsilon_\infty\omega^2\tau^2}$$

в случае, если проводимость мала.

Условие частотно-температурного максимума $\operatorname{tg} \delta$ может быть получено путем дифференцирования по $\omega\tau$ выражения для $\operatorname{tg} \delta$ и приравнивания полученного результата нулю. Оно имеет вид:

$$(\omega\tau)_m = \sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon_\infty}.$$

Из сравнения выражений (19) и (20) с (23) и (24) можно получить

$$(\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty)\gamma = 4\pi B(1+A)[1 + (\beta_1/\beta_2)A]. \quad (25)$$

Для нахождений связи между величинами β_1 , β_2 , γ и B воспользуемся выражениями (16), (21) и (25). Эта связь имеет вид:

$$\beta_1 = \frac{4\pi(\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty)}{B(\varepsilon_0 - 1)[4\pi + (\varepsilon_\infty - 1)\beta_2]} - \frac{4\pi}{\varepsilon_0 - 1}; \quad (26)$$

$$\gamma = \frac{\beta_1(\varepsilon_\infty - 1) + 4\pi}{\beta_1(\varepsilon_0 - 1) + 4\pi}. \quad (27)$$

В уравнениях (26) и (27) неизвестными являются β_1 , β_2 , γ и $B = N_0(\text{mm}^*)/3kT$. Величина B может быть определена из основного уравнения Фрелиха [2], характеризующего поляризацию дипольных тел:

$$\frac{(\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty)(2\varepsilon_0 + \varepsilon_\infty)}{9\varepsilon_0} = \frac{4\pi}{3} N_0 \frac{(\text{mm}^*)}{3kT}. \quad (28)$$

¹ Если $\gamma = (\varepsilon_\infty + 2)/(\varepsilon_0 + 2)$, то уравнения (23) и (24) переходят в соответствующие уравнения Дебая.

Подставляя B из (28), получим вместо (26)

$$\beta_1 = \frac{48\pi^2\epsilon_0}{(\epsilon_0 - 1)(2\epsilon_0 + \epsilon_\infty)[4\pi + (\epsilon_\infty - 1)\beta_2]} - \frac{4\pi}{(\epsilon_0 - 1)}. \quad (29)$$

Если диэлектрик представляет собой смесь полярного поликристаллического вещества и неполярной прослойки, то это скажется в первом приближении лишь на величине B . Тогда B можно определить из уравнения Кирквуда, которое получено для случая смеси полярного и неполярного полимеров [4] и обобщено нами по типу уравнения Фрелиха:

$$\frac{(\epsilon_0 - 1)(2\epsilon_0 + 1)}{9\epsilon_0} - \frac{(\epsilon_\infty - 1)(2\epsilon_\infty + 1)}{9\epsilon_\infty} = \frac{4\pi}{3} N_0 \frac{(\overline{mm}^*)}{3kT}. \quad (30)$$

В этом случае получим вместо формулы (29) следующее выражение:

$$\beta_1 = \frac{48\pi^2\epsilon_0\epsilon_\infty}{(2\epsilon_0\epsilon_\infty + 1)(\epsilon_0 - 1)[4\pi + \beta_2(\epsilon_\infty - 1)]} - \frac{4\pi}{(\epsilon_0 - 1)}. \quad (31)$$

Если известна одна из трех величин β_1 , β_2 и γ , то выражения (27), (29) и (31) являются основными формулами, которые могут служить для определения остальных двух.

В общем случае коэффициент β_2 может быть определен из выражений (15) и (21):

$$\beta_2 = \frac{1}{n_{\text{ЭКВ}}\alpha_{\text{ЭКВ}}} - \frac{4\pi}{\epsilon_\infty - 1}.$$

Для случая, когда поля E_i мало отличаются от усредненного поля E , из (12) следует, что

$$n_{\text{ЭКВ}}\alpha_{\text{ЭКВ}} \approx \sum_{i=1}^{i=m'} n_i\alpha_i,$$

поэтому

$$\beta_2 = \left(\sum_{i=1}^{m'} n_i\alpha_i \right)^{-1} - 4\pi(\epsilon_\infty - 1)^{-1}.$$

Следовательно, если известны концентрации упруго поляризующихся частиц и их поляризуемости, то можно определить коэффициент β_2 , а значит, и выразить коэффициент β_1 и параметр γ через ϵ_0 и ϵ_∞ , т. е. решить поставленную задачу. В случае же, если состав диэлектрика сложен или неизвестен, коэффициент β_2 достаточно точно вычислить нельзя, и выражение коэффициентов внутреннего поля через величины ϵ_0 и ϵ_∞ может быть проведено только для частных случаев.

Для частного случая диэлектриков, не содержащих ионов (например, органические вещества), т. е. обладающих при $\omega \rightarrow \infty$ только поляризацией электронного смещения, можно положить

$$\beta_2 = 4\pi/3.$$

Действительно, из уравнения (4) следует, что

$$E = E_{\text{ср}} + \frac{4\pi}{3} I_{\text{рел}} + \frac{4\pi}{3} I_0 + E'_{\text{доб}} + E''_{\text{доб}},$$

где

$$E'_{доб} = \frac{1}{m'} \sum_{i=1}^{m'} \sum_{k=1}^m \alpha_k C_{ik} E_i, \quad E''_{доб} = \frac{1}{m'} \sum_{i=1}^{m'} \sum_{k=1}^m \alpha'_k C'_{ik} E_i.$$

При $\omega \rightarrow \infty$

$$E = E_{cp} + \frac{4\pi}{3} I_0 + E'_{доб}.$$

Можно показать [3], что для диэлектриков, поляризация которых имеет характер электронного смещения и показатель преломления которых невелик, приближенно применима формула Клаузиуса — Мосоти. Поэтому можно считать, что в этом случае

$$E'_{доб} \approx 0,$$

т. е. электронная поляризация не дает вклада в $E_{доб}$, а следовательно, из выражения (7) вытекает, что $\beta_2 = 4\pi/3$. При этом, если ϵ_∞ лежит в обычных пределах ($2 \div 4$), то

$$\sum_{i=1}^{m'} n_i \alpha_i = \frac{3(\epsilon_\infty - 1)}{4\pi(\epsilon_\infty + 2)} \sim 0,1,$$

что соответствует правильным порядкам величин $n \sim 10^{22} \text{ см}^{-3}$ и $\alpha \sim 10^{-23} \text{ см}^3$ (электронная поляризуемость молекулы твердого диэлектрика приблизительно равна кубу молекулярного радиуса [3]). Используя это приближение ($\beta_2 = 4\pi/3$), получим вместо формулы (29) и (31) выражения

$$\beta_1 = \frac{4\pi[9\epsilon_0 - (\epsilon_\infty + 2)(2\epsilon_0 + \epsilon_\infty)]}{(2\epsilon_0 + \epsilon_\infty)(\epsilon_\infty + 2)(\epsilon_0 - 1)}, \quad (32)$$

$$\beta_1 = \frac{4\pi[9\epsilon_0\epsilon_\infty - (2\epsilon_0\epsilon_\infty + 1)(\epsilon_\infty + 2)]}{(2\epsilon_0\epsilon_\infty + 1)(\epsilon_\infty + 2)(\epsilon_0 - 1)}, \quad (33)$$

которые дают возможность определить β_1 и γ [из формулы (27)], если известны ϵ_0 и ϵ_∞ . Как видно, $\beta_1 \neq 4\pi/3$, а $\gamma \neq (\epsilon_\infty + 2)/(\epsilon_0 + 2)$, и полученные соотношения значительно отличаются от известных формул Дебая.

Формулы (32) и (33) дают возможность исследовать, как изменяется коэффициент β_1 при изменении ϵ_0 и ϵ_∞ . Из выражения (32) следует, что $\beta_1 = 0$ при условии, если

$$\epsilon_0 = \epsilon_\infty(\epsilon_\infty + 2)/(5 - 2\epsilon_\infty). \quad (34)$$

Это условие может выполняться при изменении ϵ_∞ в интервале от 1 до 2,5 (ϵ_0 соответственно меняется от 1 до ∞). Знак β_1 при изменении ϵ_∞ в этих пределах зависит от величины ϵ_0 : если $\epsilon_0 > \epsilon_\infty(\epsilon_\infty + 2)/(5 - 2\epsilon_\infty)$, то $\beta_1 > 0$, в противном случае $\beta_1 < 0$. В случае же, если $\epsilon_\infty \geq 2,5$, то всегда $\beta_1 < 0$ (рис. 1). Формула (32) может быть представлена графически в виде семейства кривых $\beta_1 = \varphi(\epsilon_0)$ при различных параметрах ϵ_∞ . Такие графики изображены на рис. 2 для $\epsilon_\infty = 2, 3$ и 4. Как видно из рис. 2, β_1 по абсолютной величине уменьшается с ростом ϵ_0 при $\epsilon_\infty \geq 2,5$ и проходит через максимум при $\epsilon_\infty < 2,5$.

Если поликристаллический дипольный диэлектрик, обладающий лишь электронной и дипольной поляризацией, удовлетворяет условию

(34), то усредненное действующее поле в нем оказывается равным

$$E = E_{\text{ср}} + \frac{4\pi}{3} I_0, \quad (35)$$

несмотря на наличие релаксационной поляризации. Для этих диэлектриков справедливо следующее простое соотношение между ϵ_0 и ϵ_∞ :

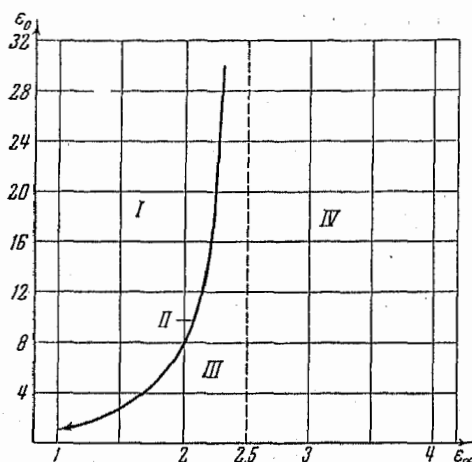


Рис. 1. Графическое представление формулы (34): I — область значений ϵ_0 и ϵ_∞ , при которых $\beta_1 > 0$; III и IV — $\beta_1 < 0$; кривая II соответствует условию $\beta_1 = 0$

$$\frac{\epsilon_0 - 1}{\epsilon_\infty + 2} = \frac{4\pi}{3} \left[\sum_{i=1}^{m'} n_i \alpha_i + N_0 \alpha_{\text{рел.}} \right],$$

где $\alpha_{\text{рел.}} = \overline{mm}^*/3kT$ — релаксационная поляризуемость единичной кристаллической ячейки. В этих случаях параметр $\gamma = 1$ [см. уравнение (27)] и вычисление характеристик релаксационной поляризации [5] значительно облегчено.

Уравнение (33) дает возможность оценить аналогичным образом коэффициент β_1 для случая смеси полярного и неполярных веществ. Как показывают вычисления, коэффициент β_1 в этом случае также может быть равен нулю; β_1 всегда меньше нуля при $\epsilon_\infty \geq 2,5$ и убывает по абсолютной величине с ростом ϵ_0 при данном $\epsilon_\infty \geq 2,5$.

При достаточно большом ϵ_0 коэффициент β_1 может сделаться очень малой величиной, что справедливо как для чистых дипольных поликристаллов [формула (32)], так и для смеси полярного и неполярного веществ [формула (33)]. Так, например, при $\epsilon_\infty = 3$, $\beta_1 = -0,01$ при $\epsilon_0 = 100$, как для зависимости, выражаемой уравнением (32), так и для зависимости, выражаемой уравнением (33). Отрицательный знак коэффициента β_1 указывает на то, что релаксационная поляризация уменьшает действующее поле.

Зная коэффициенты внутреннего поля β_1 и β_2 , можно по формуле (5) оценить, как сильно действующее поле отличается от среднего макроскопического. Действительно, считая по-прежнему, что $\beta_2 = 4\pi/3$, при помощи

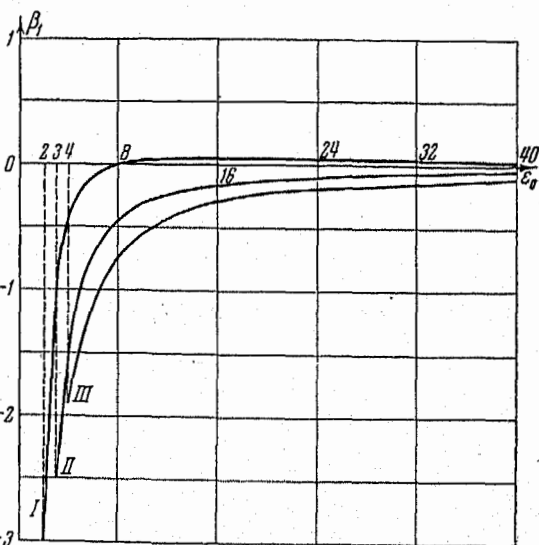


Рис. 2. Зависимость β_1 от ϵ_0 при разных фиксированных ϵ_∞ [формула (32)]; I — $\epsilon_\infty = 2$; II — $\epsilon_\infty = 3$; III — $\epsilon_\infty = 4$

$$I_0 = \frac{\epsilon_\infty - 1}{4\pi} E_{\text{ср}} \quad \text{и} \quad I_{\text{рел.}} = \frac{\epsilon' - \epsilon_\infty}{4\pi} E_{\text{ср}},$$

где ϵ' — диэлектрическая проницаемость при данной частоте ω , легко получить выражение действующего поля через среднее макроскопическое:

$$E = \left[\frac{(\epsilon_{\infty} + 2)}{3} + \beta_1 \frac{(\epsilon' - \epsilon_{\infty})}{4\pi} \right] E_{\text{ср.}} \quad (36)$$

Как видно, это выражение отличается от соответствующего выражения для случая, когда внутреннее поле равно полю Лоренца

$$E = \frac{\epsilon' + 2}{3} E_{\text{ср.}} \quad (37)$$

В том случае, если $\epsilon_{\infty} = 3$, $\epsilon' = 15$, а $\beta_1 = -0,1$, из выражения (36) получим, что $E = 1,6 E_{\text{ср.}}$, в то время как выражение (37) для этого случая дает $E = 6 E_{\text{ср.}}$. Если же $\beta_1 = 0$ [см. условие (34)], то получим, что $E = [(\epsilon_{\infty} + 2)/3] E_{\text{ср.}}$, что соответствует действующему полю (35).

Таким образом в случае ярко выраженной релаксационной поляризации действующее поле отличается от среднего макроскопического значительно меньше, чем действующее поле Лоренца.

Таблица 1

Гидрогенизированные касторовые масла (олеоваксы)	Экспериментальные данные [1]			19°C			45°C		
	ϵ_{∞}	ϵ_0 при 19°C	ϵ_0 при 45°C	β_1 , формула (32) для продукта 1, формула (33) для продуктов 2, 3, 4	γ		β_1 , формула (32) для продукта 1, формула (33) для продуктов 2, 3, 4	γ	
					$\frac{\epsilon_{\infty}+2}{\epsilon_0+2}$	Формула (27)		$\frac{\epsilon_{\infty}+2}{\epsilon_0+2}$	Формула (27)
Продукт 1	3,4	21,8	25,2	-0,14	0,23	1,27	-0,12	0,20	1,26
" 2	3,2	13,3	14,1	-0,15	0,34	1,14	-0,13	0,32	1,13
" 3	3,2	11,9	13,0	-0,17	0,37	1,13	-0,15	0,35	1,14
" 4	3,8	5,5	5,5	-0,68	0,77	1,12	-0,68	0,77	1,12

В табл. 1 представлены значения коэффициента β_1 , и параметра γ , вычисленные по предложенному методу для олеоваксов разной степени пластичности по данным нашей предыдущей работы [5].

Для олеовакса состава 1, который содержит минимальное количество аморфной фазы, вычисление коэффициента β_1 произведено по формуле (32), для олеоваксов же составов 2, 3 и 4, содержащих некоторое количество аморфной неполярной прослойки, — по формуле (33). Для сравнения в таблице приведены значения коэффициента $\gamma = (\epsilon_{\infty} + 2)/(\epsilon_0 + 2)$.

Из табл. 1 видно, что коэффициенты β_1 и γ , полученные из экспериментальных значений ϵ_{∞} и ϵ_0 при помощи изложенного метода, сильно отличаются от значений $\beta_1 = 4\pi/3$ и $\gamma = (\epsilon_{\infty} + 2)/(\epsilon_0 + 2)$, употребляемых в теории релаксационной поляризации, основанной на применении действующего поля Лоренца.

Определив коэффициент β_1 , можем при помощи общих формул для вычисления характеристик релаксационной поляризации [5] найти энергию активации, время релаксации и частоту собственных колеба-

ний дипольной единичной ячейки. Такие вычисления были проделаны для олеомаков четьрех составов при двух температурах (табл. 2).

Таблица 2

Гидрогенизированные касторвые масла (олеомаксы)	Частота, соответствующая максимуму $\lg \delta$		Время релаксации $\tau \cdot 10^5$ сек.		Энергия активации U , eV	Частота собственных колебаний ν , сек. ⁻¹
	19°C	45°C	19°C	45°C		
Продукт 1	25 100	91 200	2,0	0,6	0,38	$0,8 \cdot 10^{11}$
" 2	19 950	50 120	1,9	0,8	0,28	$1,7 \cdot 10^9$
" 3	19 950	50 120	1,7	0,7	0,26	$1,0 \cdot 10^9$
" 4	12 590	22 390	1,7	1,0	0,18	$3,4 \cdot 10^7$

Как видно из табл. 2, время релаксации τ имеет величину порядка 10^{-5} сек. для олеомаков разной степени пластичности и почти не изменяется при изменении состава, тогда как вычисления, проведенные без учета отличия внутреннего поля от поля Лоренца [5], дают медленное увеличение τ с ростом пластичности состава. Энергия активации уменьшается с увеличением пластичности состава, величина энергии активации несколько снижена по сравнению с энергией активации, полученной по предыдущим расчетам [5] у всех составов, кроме 4. Частота собственных колебаний дипольной единичной ячейки уменьшается с ростом пластичности состава от величин порядка 10^{11} до величин порядка 10^7 сек.⁻¹. По сравнению с частотой собственных колебаний, вычисленной по работе [5], изложенный метод дает снижение частоты примерно на порядок.

Метод учета набора времен релаксации, примененный в [5], не связан с характером внутреннего поля. Таким образом этот метод применим и для настоящего случая. Применение же теории абсолютных скоростей реакций (см. [5]) дает несколько иные результаты, чем те, которые были получены при учете поля Лоренца, ибо исходная величина для этой теории — время релаксации τ , благодаря учету иного внутреннего поля, имеет другие значения.

Таблица 3

Гидрогенизированные касторвые масла (олеомаксы)	T, °K	Время релаксации $\tau \cdot 10^5$ сек.	ΔF , ккал	$\frac{\Delta S}{\text{град.}}$, ккал	ΔH , ккал
Продукт 1	292 318	2,0 0,6	10,8 11,0	— 9,9 — 9,8	7,9
" 2	292 318	1,9 0,8	10,8 11,2	—17,8 —17,6	5,6
" 3	292 318	1,7 0,7	10,7 11,1	—17,1 —17,0	5,7
" 4	292 318	1,7 1,0	10,7 11,4	—25,7 —25,8	3,2

В табл. 3 представлены значения разности теплосодержания, разности энтропии и разности свободной энергии, вычисленные с учетом отличия внутреннего поля от поля Лоренца. Как видно из табл. 3, значения энтропии активации возросли по абсолютной вели-

чине по сравнению со значениями энтропии активации, полученными в [5]. Это можно объяснить, по всей вероятности, тем, что в настоящей работе учет взаимодействия дипольных групп проведен более полно.

Изложенный выше метод определения коэффициентов внутреннего поля может быть применен и для случая жидких дипольных диэлектриков. В этом случае вместо единичной дипольной ячейки кристалла следует рассматривать полярную молекулу жидкости:

$$\vec{m} = \vec{\mu}, \quad \vec{m}^* = \vec{\mu}^*,$$

где $\vec{\mu}$ — дипольный момент молекулы, а $\vec{\mu}^*$ — дипольный момент шара, окружающего данную молекулу, если направление ее дипольного момента фиксировано; $(\vec{m}\vec{m}^*) = \vec{\mu}\vec{\mu}^*$, так как в жидкости все дипольные направления эквивалентны.

Общее уравнение Фрелиха (28) в этом случае переходит в уравнение Кирквуда для полярных жидкостей (см. [2])

$$\frac{(\epsilon_0 - \epsilon_\infty)(2\epsilon_0 + \epsilon_\infty)}{9\epsilon_0} = \frac{4\pi}{3} N_0 \frac{\vec{\mu}\vec{\mu}^*}{3kT},$$

где N_0 — число диполей в 1 см³, и величина B , входящая в релаксационные уравнения, равна

$$B = N_0 \frac{\vec{\mu}\vec{\mu}^*}{3kT}.$$

Учитывая эти замечания, можно получить аналогичным расчетом уравнения (29) и (31), которые будут справедливы и для полярных жидких диэлектриков.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
19 января 1954 г.

Литература

- [1] Г. И. Сканапи. ЖЭТФ, 17, 399, 1947. — [2] Н. Fröhlich. Theory of Dielectrics: Dielectric Constant and Dielectric Loss, Oxford, 1949. — [3] Г. И. Сканапи. Физика диэлектриков, ГИТТЛ, 1949. — [4] J. Kirkwood and R. Fuoss. Journ. Chem. Phys., 9, 329, 1941. — [5] Г. И. Сканапи и А. Н. Губкин. ЖЭТФ, 27, 742, 1954.

ЗАВИСИМОСТЬ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ И ЭЛЕКТРОННОЙ ЭМИССИИ ОТ ЭНЕРГИИ МЕТАЛЛА В ПРОЦЕССЕ ЕГО НАГРЕВАНИЯ ТОКОМ БОЛЬШОЙ ПЛОТНОСТИ

Л. Н. Бородовская и С. В. Лебедев

При нагревании никелевых проволок током $6 \cdot 10^4 - 5 \cdot 10^6$ А/см² обнаружены явления такого же характера, как наблюдавшиеся ранее в вольфраме [1-3]. Кроме того, при исследовании зависимости сопротивления проволоки R от введенной в нее энергии E , на кривой $R = R(E)$ обнаружены точки излома, положение которых по сопротивлению и энергии не изменяется при изменении плотности нагревающего тока (Ni, W, Au, константа). Исследование эмиссии показало, что аномально большая эмиссия с неразрушающихся проволок может падать, хотя скорость поступления энергии в проволоку превышает потери энергии при температуре плавления в случае стационарного накала. Приводятся данные, характеризующие скорость убывания эмиссии после выключения нагревающего тока.

В рассматриваемых ниже опытах применявшаяся ранее [1-3] методика записи и обработки осциллограмм была усовершенствована, что повысило точность полученных данных.

Напомним, что $V_R(t) = i(t)R(t)$ — напряжение на исследуемой проволоке, и $V_r(t) = i(t)r$ — напряжение на постоянном сопротивлении r позволяют найти ток $i(t) = V_r(t)/r$, сопротивление исследуемой проволоки $R(t) = [V_R(t)/V_r(t)]r$ и поступившую в нее к моменту t энергию

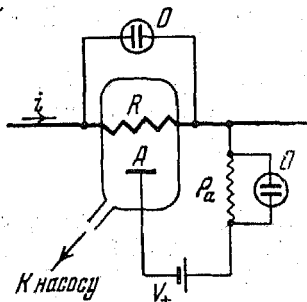


Рис. 1. Схема измерений эмиссии. R — исследуемая проволока, A — анод, V_+ — анодная батарея, r_a — постоянное сопротивление, O — осциллограф

$$E(t) = \frac{1}{r} \int_{t_1}^t V_R(t) V_r(t) dt,$$

где t_1 — момент включения нагревающего тока i . При этом имеется в виду, что скорость поступления энергии значительно превышает ее потери: $i^2 \gg i_m^2$ (i_m — максимальный ток, который выдерживает испытуемая проволока при стационарном нагревании, т. е. ток, компенсирующий максимальные потери). Для никеля диаметром 0,015 см в вакууме $i_m = 1$ А, в воздухе $i_m = 3$ А.

Опыты по измерению эмиссии производились по схеме, показанной на рис. 1. Анодный ток I_a с исследуемой проволоки определялся по осциллограмме напряжения $V_p(t) = r_a I_a(t)$, падающего на постоянное сопротивление r_a .

1. Зависимость сопротивления от энергии

Никелевые проволоки нагревались в трансформаторном масле, воздухе или вакууме импульсами тока большой плотности. Качественно вид полученных при этом осциллограмм $V_R(t) = i(t)R(t)$ совпадает с

аналогичными осциллограммами, снятыми с вольфрама (рис. 2). Для этих осциллограмм характерно наличие области малого dR/dE с последующим скачком R в момент t_c — взрывом. (На наших осциллограммах малому dV_R/dt соответствует малое dR/dE , а скачку V_R — скачок R). Точки излома¹ осциллограмм, как показано на рис. 2, обозначаются цифрами 1, 2, 3, 4, 5 и соответствуют моментам времени t_c , t_2 , t_3 , t_4 , t_5 . Значком 5 (или t_5) отмечается момент, предшествующий t_c в тех случаях, когда скачок R не виден или выражен нечетко.

При изменении плотности тока характер изменения вида осциллограмм никеля и вольфрама совпадает: отношение времени $t_c - t_4$, в течение которого dR/dE мало, к полному времени нагревания $t_c - t_1$ уменьшается с уменьшением плотности тока j (рис. 3). При

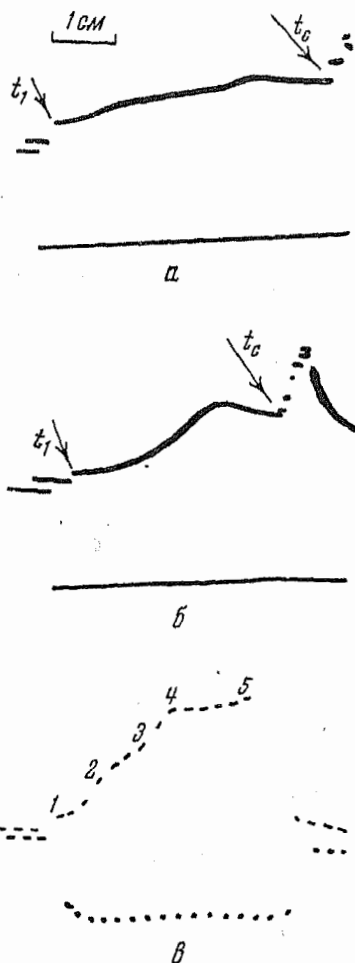


Рис. 2. Осциллограммы $V_R(t) = R(t) i(t)$ (верхние кривые) и $V_r(t) = ri(t)$ (нижние кривые) для проволоки длины l и диаметра d в масле. а — никель: $d = 0,008$ см; $l = 1,1$ см; $j(t_1) = 10^6$ А/см²; $r = 2 \Omega$, чувствительность осциллографа $a = 75$ В/см ($a_R \sim a_r = a$), масштаб времени $b = 7,9 \cdot 10^{-6}$ сек./см. б — вольфрам: $d = 0,006$ см; $l = 0,46$ см; $j(t_1) = 1,8 \cdot 10^6$ А/см²; $r = 2 \Omega$; $a = 75$ В/см; $b = 7,9 \cdot 10^{-6}$ сек./см. в — никель: $d = 0,015$ см; $l = 2,15$ см; $j \approx 5 \cdot 10^6$ А/см²; $r = 0,5 \Omega$; метки времени даны с частотой $\nu = 7,7 \cdot 10^5$ сек.⁻¹. В начале снимка $a_R = 470$ и $a_r = 425$ В/см, в конце $a_R = 440$ и $a_r = 385$ В/см. Нулевые линии — параллельные прямые, являющиеся продолжением горизонтальных отрезков в начале осциллограмм. В опытах 2,в; 3,а; 3,б; 3,в нулевые линии для $V_r(t)$ проходят также через горизонтальный отрезок в конце осциллограмм $V_r(t)$ [конец осциллограмм $V_R(t)$ в этих опытах лежит выше нулевой линии]

уменьшении j ниже $2 \cdot 10^6$ А/см² на осциллограммах никеля (рис. 3, з, д) область малого dR/dE не видна. В отличие от области $t > t_4$, для области $t < t_4$ зависимость R от E не меняется при изменении j от $6 \cdot 10^4$ до $5 \cdot 10^6$ А/см².

Кроме точки 4, на осциллограммах никеля виден также излом кривой $R(E)$ в точке 3. Особенностей зависимости R от E до этой точки не наблюдается, причем $R(t_3) = R_3 \approx R_{пл}^{тв}$, а $E(t_3) = E_3 \approx W_n$, т. е. значения сопротивления и энергии в точке 3 такие, при которых в обычном случае началось бы плавление ($R_{пл}^{тв}$ и $R_{пл}^{ж}$ — сопротивление проволоки при температуре плавления в твердом и жидком состоянии, W_n — энергия нагревания до температуры плавления, $W_{пл}$ — энергия

¹ Наличие резко выраженных точек излома на осциллограммах $V_R(t)$ показывает, что изменения dR/dt происходят одновременно по всему объему проволоки или, во всяком случае, по большей части ее объема. Следовательно, осциллограммы характеризуют изменение удельного сопротивления исследуемого металла.

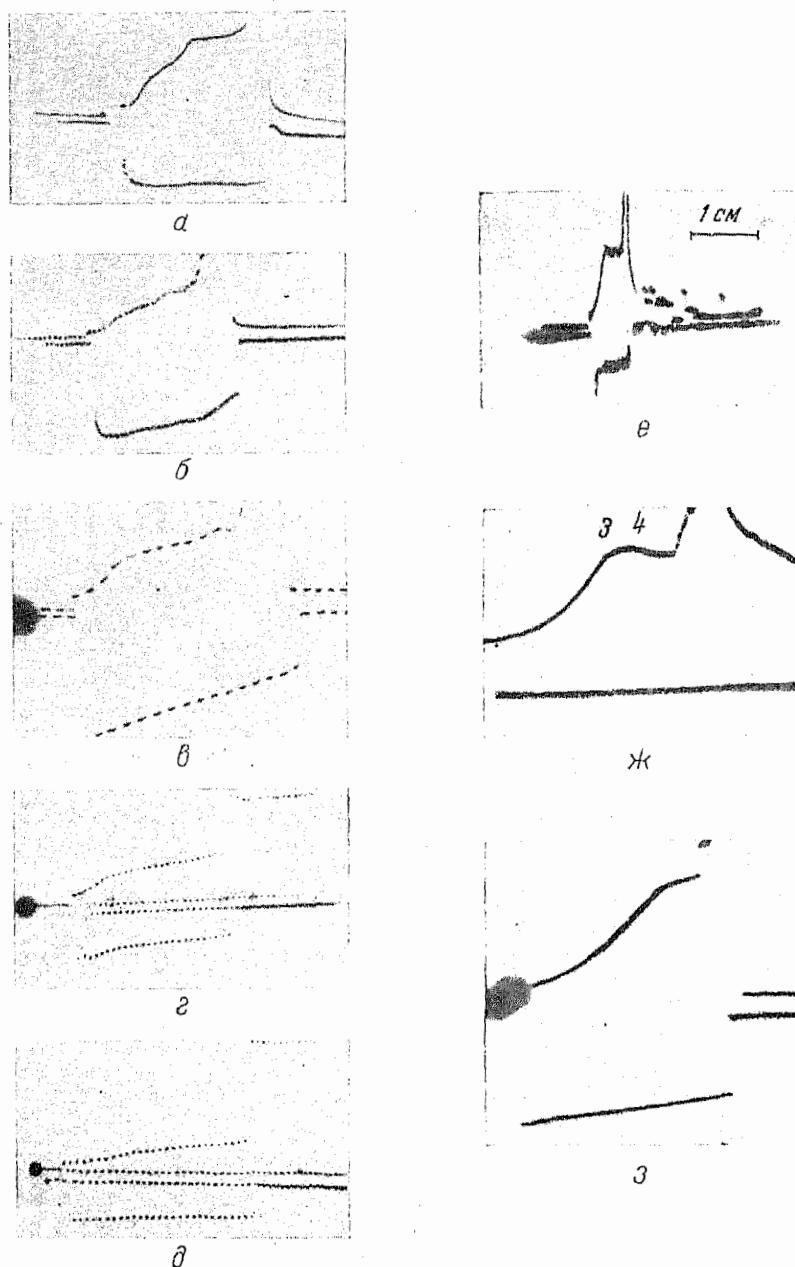


Рис. 3. Осциллограммы $V_R(t)$ (верхние кривые) и $V_T(t)$ (нижние кривые) для никеля и вольфрама. а — никель: $j = 5 \cdot 10^5$ в масле ($d = 0,015$; $l = 1,8$; $r = 0,5$; $a = 560$; $b = 1,05 \cdot 10^{-6}$). б — никель: $j = 2 \cdot 10^5$ в масле ($d = 0,015$; $l = 2,35$; $r = 2$; $a = 160$; $v = 2,6 \cdot 10^3$). в — никель: $j = 7 \cdot 10^5$ в масле ($d = 0,015$; $l = 2,85$; $r = 1,22$; $a = 117$; $v = 2 \cdot 10^4$). г — никель: $j = 2 \cdot 10^5$ в воздухе ($d = 0,015$; $l = 2,85$; $r = 0,72$; $a = 64$; $v = 5 \cdot 10^3$). д — никель: $j = 6 \cdot 10^4$ в вакууме ($d = 0,015$; $l = 5,25$; $r = 2$; $a = 50$; $v = 5 \cdot 10^3$). е — вольфрам: $j = 7 \cdot 10^5$ в воде ($d = 0,0077$; $l = 0,75$; $r = 0,225$; $a_R = 650$; $a_r = 155$; $b = 24,5 \cdot 10^{-6}$). ж — вольфрам: $j = 1,2 \cdot 10^6$ в масле ($d = 0,006$; $l = 1,07$; $r = 2$; $a = 110$; $b = 1,2 \cdot 10^{-6}$). з — вольфрам: $j = 3,5 \cdot 10^5$ в масле ($d = 0,006$; $l = 3$; $r = 9,5$; $a = 70$; $b = 9,6 \cdot 10^{-4}$). j — А/см² — средняя плотность тока; l и d — сантиметры; v — сек.⁻¹; r — Ω ; a — В/см и b — сек./см — среднее значение чувствительности и масштаба времени. В опытах 3,г и 3,д во время съемки осциллограмм выписывались и нулевые линии. Для остальных осциллограмм положение нулевых линий пояснено в подписи к рис. 2

плавления). Энергия, поступившая в проволоку за время $t_4 - t_3$, приблизительно равна $W_{пл}$, изменение же сопротивления при переходе от точки 3 к точке 4, R_4/R_3 , оказывается меньше табличного [4] значения $R_{пл}^{ж}/R_{пл}^{тв}$. Действительно, по табличным данным для никелевой проволоки диаметром 0,015 см на 1 см ее длины $W_{пл} = 1,39$ дж, $W_{пл} = 0,46$ дж, $R_{пл}^{ж}/R_{пл}^{тв} = 1,94$. (Величина $R_{пл}^{ж}/R_{пл}^{тв} = 1,94$ приведена в [4] на стр. 295. Данные о сопротивлении жидкого никеля указаны ниже в табл. 2. Значения величин $W_{пл}$ и $W_{пл}$ взяты из [5], стр. 30 и [6], т. 1, стр. 129). По данным же, полученным в наших экспериментах,

$$\begin{aligned}
 E_3 &= 1,40 \text{ дж} \approx W_{пл}; \quad E_4 = \\
 &= 1,82 \text{ дж} \approx W_{пл} + W_{пл}; \\
 R_3 &= 0,36 \Omega \approx R_{пл}^{тв}; \quad R_4 = \\
 &= 0,46 \Omega,
 \end{aligned}$$

откуда $R_4/R_3 = 1,3$ (табл. 1).

Значение $R_{пл}^{тв} = 0,35 \Omega$ было получено в момент плавления исследуемой проволоки при медленном нагревании в вакууме. Пригодность табличных значений $W_{пл}$ и $W_{пл}$ для применявшегося нами сорта никеля может быть проконтролирована следующим образом. В опытах в вакууме при $j \approx 10^5$ А/см² (рис. 3, д, табл. 1) поступление энергии прекращается в момент t_4 , когда $E \approx W_{пл} + W_{пл}$, причем проволока в результате опыта оказывается вся жидкой (вся обращается в шарики).

Таблица 1*

Никель, диаметр 0,015 см, длина 1 см

i	A	j	A/cm ²	t ₂ -t ₁ сек.	R ₂ Ω	E ₂ дж	t ₃ -t ₁ сек.	R ₃ Ω	E ₃ дж	t ₄ -t ₁ сек.	R ₄ Ω	E ₄ дж	t ₅ -t ₄ сек.	E ₅ -E ₄ дж	E _{полн} дж
900		5·10 ⁶		5·10 ⁻⁶	0,48	0,37	1·10 ⁻⁵	0,35	4,42	1·10 ⁻⁵	0,46	1,77	6·10 ⁻⁶	1,98	3,75
350		2·10 ⁶		2·10 ⁻⁵	0,17	0,31	5·10 ⁻⁵	0,35	1,30	5·10 ⁻⁵	0,48	1,76	1·10 ⁻⁵	0,66	2,42
125		7·10 ⁵		1,5·10 ⁻⁴	0,18	0,34	4·10 ⁻⁴	0,35	1,38	5·10 ⁻⁴	0,45	1,77	0,6·10 ⁻⁴	0,27	2,04
42		2·10 ⁵		1,3·10 ⁻³	0,20	0,32	4·10 ⁻³	0,36	1,46	5·10 ⁻³	0,46	1,90	—	—	1,90
17		9·10 ⁴		1,1·10 ⁻²	0,20	0,40	2,5·10 ⁻²	0,36	1,46	3·10 ⁻²	0,48	1,96	—	—	1,96
11		6·10 ⁴		2,5·10 ⁻²	0,20	0,38	7·10 ⁻²	0,36	1,38	7·10 ⁻²	0,42	1,75	—	—	1,75
					0,19	0,36		0,36	1,40		0,46	1,82			
					±0,01	±0,03		±0,01	±0,05		±0,02	±0,08			

* Сила и плотность тока указаны приближенно, так как во время опыта ток изменялся (см., например, рис. 3). В каждой строке приведены средние результаты по нескольким опытам. (При расчетах учитывалось изменение α_R , α_j и b на протяжении осциллограммы.)

Отсюда непосредственно видно, что к моменту t_4 в металл действительно была введена энергия $E \geq W_n + W_{пл}$. Однако табличное значение² $R_{пл}^{жк} / R_{пл}^{тв} = 1,94$ для нормального плавления не могло быть проверено нашей методикой, так как при медленном нагревании проволока растекается прежде, чем успевает полностью расплавиться.

Сходство в поведении вольфрама и никеля дополняется тем, что для вольфрама также можно выделить участок, подобный участку (3, 4) для никеля. Например, в опыте с вольфрамовой проволокой диаметром 0,006 см, длиной 1 см при $j = 1,2 \cdot 10^6$ А/см², осциллограмма которого показана на рис. 3, ж, получается $R_3 = 3,72 \Omega$, $R_4 = 4,02 \Omega$; $E_4 - E_3 = 0,15$ дж. С другой стороны, в момент плавления исследуемой проволоки при медленном нагревании ее в вакууме было измерено $R_{пл}^{тв} = 3,74 \Omega$ на 1 см длины, табличное значение $W_{пл} = 0,137$ дж на 1 см длины. Таким образом и для вольфрама³ $R_3 \approx R_{пл}^{тв}$ и $E_4 - E_3 \approx W_{пл}$.

Точки 3 и 4 видны также и на осциллограммах в опытах с золотом. Измерения в этих опытах были менее точными, чем для никеля, но

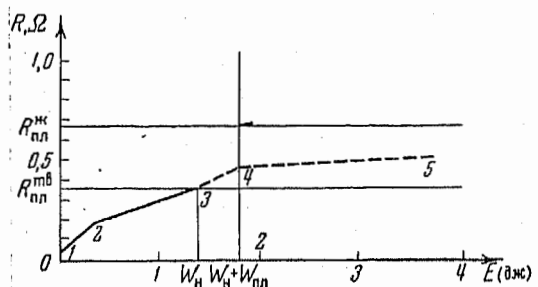


Рис. 4. Сопоставление нормальной зависимости R от E (сплошная линия) с зависимостью между этими величинами при больших j (пунктирная линия, до точки 3 совпадающая со сплошной). Цифрами 1, 2, 3, 4, 5 на кривой отмечены те же состояния, что и на осциллограммах рис. 2, в.

Никель, диаметр 0,015 см, длина — 1 см

Результаты опытов с никелем схематически изображены на рис. 4. Сплошной кривой показана обычная зависимость сопротивления от энергии для твердого и жидкого никеля (см. [4], стр. 295). Пунктирная линия, вначале совпадающая со сплошной, соответствует данным, полученным при больших j . Для плотностей тока от $6 \cdot 10^4$ до $2 \cdot 10^5$ А/см² график действителен только для $E \leq W_n + W_{пл}$. [При токе $6 \cdot 10^4$ — $2 \cdot 10^5$ А/см² в опытах в вакууме в момент t_4 ($E_4 = W_n + W_{пл}$) ток прекращается, что указывает на разрушение проволоки. В случае опытов в воздухе, при разрушении проволоки между ее частями зажигается дуга, после чего измерения R и E становятся ненадежными⁴.

² Примечание при корректуре. В [11] для никеля приведено значение $R_{пл}^{жк} / R_{пл}^{тв} = 1,3$, отличающееся от табличного значения $R_{пл}^{жк} / R_{пл}^{тв} = 1,94$ [4] и совпадающее с измеренным нами значением R_4/R_3 .

³ Примечание при корректуре. Если считать, что отношение R_4/R_3 характеризует изменение сопротивления при плавлении (как это, повидимому, можно заключить для никеля по значениям E_3 , E_4 , R_3 и из сравнения с данными [11]), то для вольфрама получаем $R_{пл}^{жк} / R_{пл}^{тв} = 1,08$.

⁴ Электрическая прочность промежутка между частями разрушающейся никелевой проволоки в вакууме больше, чем в воздухе. Для вольфрамовых проволок вследствие большой эмиссии наблюдается обратное.

До момента разрушения проволоки осциллограммы опытов в воздухе и в вакууме одинаковы. В масле при этих j опыты не производились, так как нельзя было измерять энергию без учета потерь⁵.] Полная пунктирная кривая соответствует процессу до момента взрыва для $j = 5 \cdot 10^6$ А/см². В случае меньшей плотности тока взрыв наступает при меньшей энергии.

Заметим, что величина энергии, при которой при заданном j происходит взрыв, изменялась от опыта к опыту больше, чем другие измеряемые величины. Иногда область взрыва имела вид отдельных ступенек, повидимому, соответствующих неодновременному взрыву разных участков проволоки.

2. Эмиссия

Измерения эмиссии производились на никелевых проволоках при $j = 1 \cdot 10^6$ А/см² по схеме, показанной на рис. 1.

Анодный ток I_a , измеренный по осциллограммам и отнесенный к поверхности проволоки S , достигает величины $1,6 \cdot 10^{-4}$ А/см², тогда как нормальная эмиссия чистого никеля при температуре плавления $I_{пл} = 3 \cdot 10^{-6}$ А/см².

Нормальная эмиссия вычислена по формуле:

$$I = AT^2 e^{-\phi/hT}$$

при $\phi = 7,4 \cdot 10^{-12}$ эрг, $A = 30$ А/см² град.², $T = 1725^\circ\text{K}$:

Таким образом I_a/S в 50 раз превышает $I_{пл}$.

Вакуум в этих опытах был около 10^{-6} мм рт. ст. Проволоки обезгаживались при желтом калении в течение нескольких часов. Подводы к ним и анод обезгаживались при красном калении. Типичная для данных условий осциллограмма тока I_a показана на рис. 5, а. Как видно из осциллограмм рис. 5, ток I_a , достигнув максимума, падает, хотя энергия проволоки продолжает нарастать. Действительно, по нити при этом протекает ток $i = 17$ А, тогда как потери при температуре плавления компенсируются током $i_m = 1$ А. Выключение тока i здесь происходило автоматически при разрушении проволоки в момент t_4 . При этом осциллограмма $V_R(t)$ показывает, что проволока до момента t_4 не разрушена и что падение I_a при нарастании энергии происходит в области 3, 4. (Второй выброс I_a связан с разрушением проволоки в момент t_4 .)

Величина тока I_a и характер его зависимости от времени остаются примерно такими же и в тех случаях, когда ток i выключается немного раньше момента t_4 и проволока не разрушается. В таких случаях удается проделать несколько опытов с одним и тем же кусочком проволоки, причем результаты повторных опытов совпадают. Следовательно, наблюдаемый спад I_a не может быть объяснен очищением поверхности проволоки во время опыта. На рис. 5, б показаны две осциллограммы, полученные при повторных опытах с одной и той же проволокой. Повторяемость результатов была хорошей и в опытах

⁵ Для никеля диаметром 0,015 см в масле $i_m = 6$ А, тогда как при $j = 10^6$ А/см², $i = 20$ А. При измерении i_m в масле возникали конвекционные токи, меняющие условия охлаждения проволоки по сравнению с условиями в импульсных опытах. При малых j это обстоятельство затрудняет оценку потерь энергии в импульсных опытах по величине i_m .

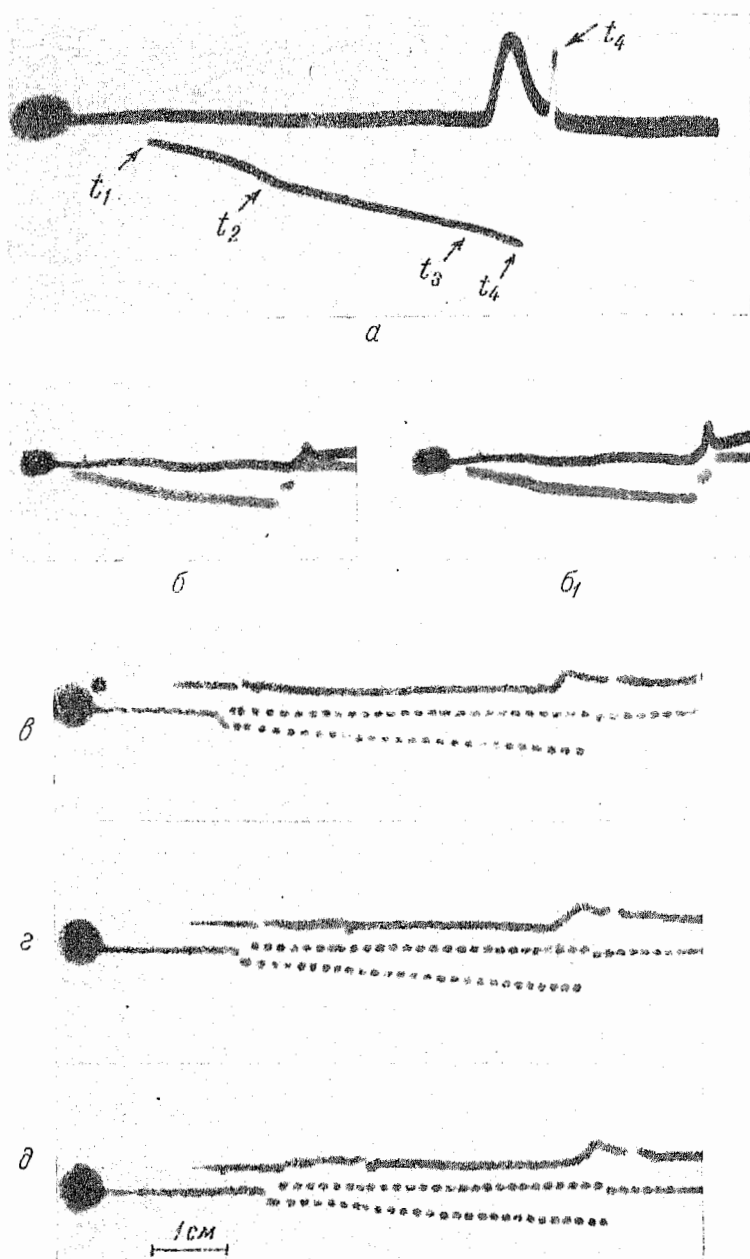


Рис. 5. Осциллограммы $V_p(t) = \rho_a I_a(t)$ (верхние кривые) и $V_R(t)$ (нижние кривые) никелевой проволоки $d = 0,015$ см (верхние осциллограммы смещены вправо относительно нижних). $j = 10^9$ А/см², причем с момента включения t_1 до момента выключения t_4 падает на 3—5 %. В опытах а, б, в, д $l \approx 1$ см, $V_+ = 70$ В; $\rho_a = 10^8$ Ω; $a = 24,5$ В/см; $\nu = 10^8$ сек.⁻¹. В опытах а, в, г, д проволоки разрушаются, а в опытах б и б₁ — не разрушаются. Горизонтальная часть осциллограмм $V_p(t)$ до выброса вверх совпадает с нулевой линией. На рис. 5, а, б, б₁ нулевые линии осциллограмм $V_R(t)$ и $V_p(t)$ — почти совпадающие прямые. На рис. 5, в, г, д положение нулевых линий осциллограмм $V_R(t)$ записано при съемке

с разрушающимися проволоками. Эти опыты (б, в, г, д) проделаны в одинаковых условиях, причем разброс величины I_a примерно соответствует различию в длине проволок. Падение I_a с ростом энергии проволоки показывает также, что большая величина I_a не связана с появлением разряда между проволокой и анодом. Действительно, разряд не мог бы гаснуть при увеличении энергии проволоки, так как условия для его развития становятся при этом более благоприятными.

Таким образом измеренный анодный ток является, повидимому, током аномальной эмиссии, для которой характерны большая величина и возможность спадания при возрастании энергии металла.

Падение эмиссии с ростом энергии наблюдается и для вольфрама, хотя плотность тока эмиссии при этом на несколько порядков больше, чем для никеля. Примеры таких опытов показаны на рис. 6, а и в. В опыте 6, а падение I_a начинается при значении тока $i = 13$ А, тогда как ток, компенсирующий потери, $i_m = 3$ А. Площадки на осциллограммах, отме-

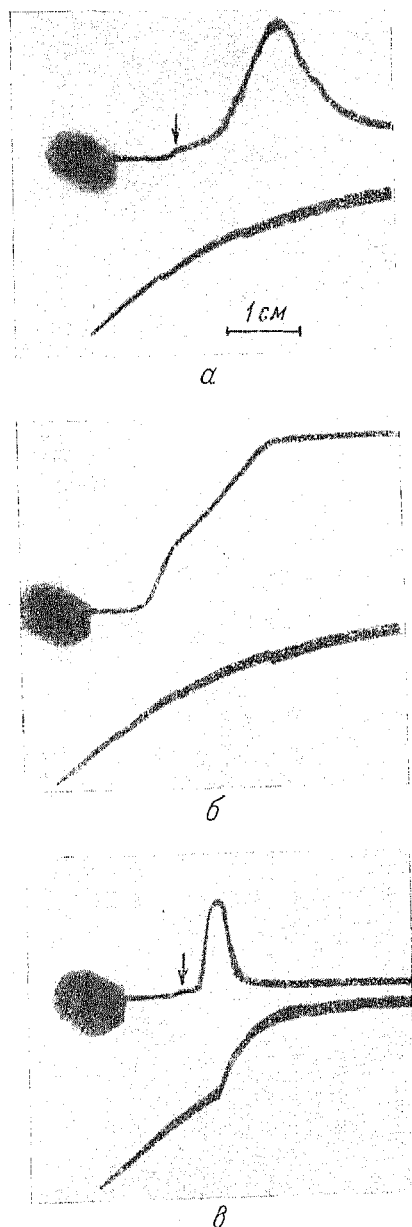


Рис. 6. Осциллограммы $V_p(t)$ (верхние кривые) и $V_r(t)$ (нижние кривые). Вольфрам: $d = 0,01$ см, $r = 2\Omega$; а — 52 В/см; б — $5,7 \cdot 10^{-4}$ сек./см. Проволоки при опыте не разрушаются. Конфигурация электродов в опытах 6, а, б, в — различная. Верхняя осциллограмма смещена относительно нижней на $0,3$ см влево. а — $i(t_1) = 59$ А; $l = 0,75$ см; $\rho_a = 200 \Omega$; $V_+ = 300$ В; $I_a^{\text{макс}} = 5,7$ А/см²; б — $i(t_1) = 56$ А; $l = 0,2$ см; $\rho_a = 2600 \Omega$; $V_+ = 1000$ В; $I_a^{\text{макс}} = 5$ А/см²; в — $i(t_1) = 63$ А; $l = 0,5$ см; $\rho_a = 200 \Omega$; $V_+ = 300$ В; $I_a^{\text{макс}} = 12,7$ А/см². Нулевые линии осциллограмм $V_p(t)$ и $V_r(t)$ — параллельные прямые. Для $V_p(t)$ нулевые линии направлены вдоль горизонтальных участков начала осциллограмм $V_p(t)$. Для $V_r(t)$ нулевые линии проходят приблизительно на $0,15$ см ниже нулевых линий осциллограмм $V_p(t)$.

ченные стрелками, соответствуют току I_a^* , ограниченному пространственным зарядом (область соблюдения закона Богуславского — Лэнгмюра)⁶. Ранее было выяснено, что превышение I_a над I_a^* обусловлено состоянием катода, а не вторичными токами [7]. Следовательно, падение I_a указывает на падение эмиссии.

⁶ В наших опытах с никелем отклонения от закона Богуславского — Лэнгмюра не может наблюдаться, так как $I_{\text{пл}} < I_a^*$.

Если эмиссия определяется формулой $I = AT^2 e^{-\varphi/kT}$, то большая ее величина ($I > I_{\text{пл}}$) могла бы быть объяснена перегревом металла выше температуры плавления при обычных значениях A и φ или перегревом одного электронного газа. Однако падение эмиссии с ростом энергии металла можно объяснить только изменением $A = A_0 (1 - \bar{K})$

и φ (которые в обычных условиях почти не изменяются при изменении T) или уменьшением температуры электронов при $i > i_m$. Таким образом в случае применимости этой формулы рассмотренные эксперименты подтверждают соображения, что наблюдаемые аномалии обусловлены изменением свойств металла, а не перегревом его выше температуры плавления.

Большая величина тока I_a ($50 I_{\text{пл}}$, $100 I_{\text{пл}}^{[2]}$) не может быть объяснена малым значением среднего коэффициента отражения $\bar{K}$ и свидетельствует об аномально малом значении работы выхода φ или о перегреве электронного газа относительно решетки. Избыток энергии электронов, связанный с повышением их температуры выше температуры решетки или с их возбуждением $^{[3]}$, может быть достаточным для сильного увеличения эмиссии и вместе с тем недостаточным, чтобы привести к значительному изменению зависимости R от E . Поэтому отсутствие заметных аномалий зависимости R от E при $j \leq 5 \cdot 10^6 \text{ А/см}^2$ (раздел 1) не опровергает предположения об избытке энергии электронов. Против предположения о перегреве электронного газа относительно

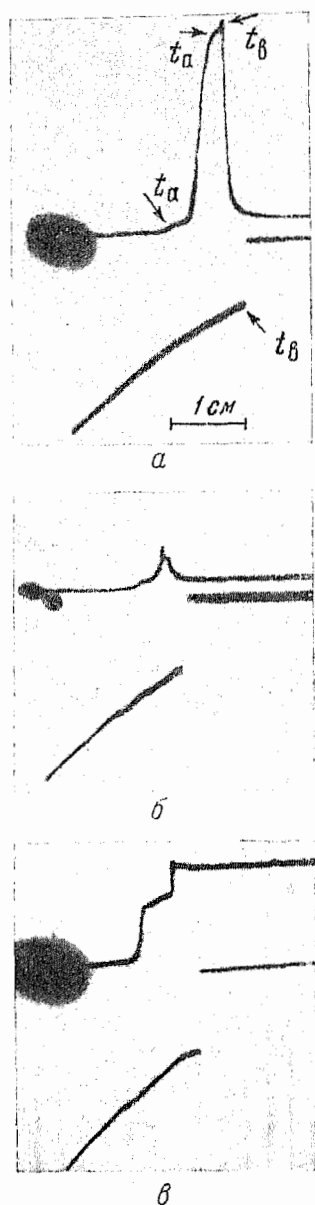


Рис. 7. Осциллограммы $V_p(t)$ (верхние кривые) и $V_r(t)$ (нижние кривые). Вольфрам: $d = 0,01 \text{ см}$; $l = 0,5 \text{ см}$; $i(t_1) = 63 \text{ А}$; $r = 2 \text{ }\Omega$; $a = 52 \text{ В/см}$; $b = 5,7 \cdot 10^{-4} \text{ сек./см}$. Проволоки не разрушаются. Конфигурация электродов в опытах a , b , в разная. Верхняя осциллограмма смещена относительно нижней на $0,3 \text{ см}$ влево. $a - \rho_a = 500 \text{ }\Omega$; $V_+ = 200 \text{ В}$; $I_a^{\text{макс}} = 10 \text{ А/см}^2$. $b - \rho_a = 200 \text{ }\Omega$; $V_+ = 300 \text{ В}$; $I_a^{\text{макс}} = 5,3 \text{ А/см}^2$. $в - \rho_a = 7000 \text{ }\Omega$; $V_+ = 200 \text{ В}$; $I_a^{\text{макс}} = 0,38 \text{ А/см}^2$. Нулевые линии для $V_p(t)$ — прямые, направленные вдоль горизонтальных участков в начале осциллограмм $V_p(t)$. Нулевые линии для $V_r(t)$ — прямые, направленные вдоль горизонтальных участков в конце осциллограмм $V_r(t)$.

решетки свидетельствует то обстоятельство, что аномальный анодный ток убывает слишком медленно после уменьшения тока i : как отмечалось в $^{[7]}$, $I_a \gg I_a^*$ в течение $\sim 10^{-5} \text{ сек.}$ после выключения тока i .

Падение эмиссии с ростом энергии можно попытаться объяснить плавлением металла в предположении, что эмиссия жидкого металла меньше, чем твердого при той же температуре⁷. Однако в то время

⁷ Примечание при корректуре. В $^{[12]}$ наблюдалось, что ток термоэлектронной эмиссии меди не испытывает скачка при переходе через точку плавления.

как падение эмиссии с ростом энергии наблюдается в опыте 6,в, оно не наблюдается в опыте 7,а⁸, хотя нагревающий ток $i(t)$, сначала одинаковый в обоих опытах, с некоторого момента спадает резко в опыте 6,в. Это означает, что, начиная с некоторого момента, скорость поступления энергии в 7,а становится больше, чем в 6,в. Следовательно, в 7,а плавление должно наступить раньше, чем в 6,в, и вызванным падением анодного тока должно было бы наблюдаться в 7,а еще до момента выключения тока i . (Напомним также, что как в 7,а, так и в 6,в проволока после окончания опыта остается целой.)

Осциллограммы рис. 7, а, б, в показывают, что падение анодного тока $|dI_a/dt|$ после выключения тока i происходит тем быстрее, чем больше I_a/I_a^* . Например, из рис. 7, а видно, что $|dI_a/dt|$ уменьшается по мере приближения I_a/I_a^* к единице. То же видно из сопоставления различных осциллограмм: в опыте 7,а при $I_a^{\text{макс}}/I_a^* = 30$, I_a падает почти в 30 раз за время, не превышающее $2 \cdot 10^{-4}$ сек., тогда как в опыте 7,в при $I_a^{\text{макс}}/I_a^* \approx 1,5$ падения I_a почти незаметно.

Характер зависимости скорости убывания I_a от величины I_a/I_a^* остается таким же и в том случае, когда ток i выключается не сразу, а достаточно быстро спадает. Так, например, в опыте 6,а, когда $I_a^{\text{макс}}/I_a^* = 13$, за время записи I_a падает в несколько раз, но в опыте 6,б при $I_a^{\text{макс}}/I_a^* = 2,7$ падения I_a не происходит. (Величина $|dI_a/dt|$ после полного выключения оказывается значительно большей, чем после неполного выключения.)⁹

Скорость убывания тока I_a не определяется величиной этого тока. Например, в опытах 6,а,б скорость спадания тока I_a совсем различна, хотя его максимальная величина в обоих случаях почти одинакова и равна соответственно 5,7 и 5 А/см². (Опыт 6,б был проведен при $V_+ = 1000$ В, но он повторялся также при $V_+ = 500$ В и $V_+ = 250$ В. При этом величина $I_a^{\text{макс}}$ изменялась, но отношение $I_a^{\text{макс}}/I_a^*$ оставалась равным 2,7 и во всех этих случаях заметного спадания I_a не наблюдалось. Следовательно, различие в скорости убывания I_a в опытах 6,а и 6,б нельзя объяснить различием V_+ .)

Итак, исчезновение аномалий анодного тока (т.е. исчезновение превышения I_a над I_a^*) происходит с тем большей скоростью, чем больше I_a/I_a^* , независимо от величины анодного тока.

3. Учет возможных загрязнений металла

Может возникнуть вопрос, нельзя ли объяснить обнаруженные особенности поведения металлов содержащимися в них примесями?

Как известно, примеси сильно влияют на электропроводность металла. Из верхней части табл. 2 видно, что удельное сопротивление ρ_{20} материала нашей проволоки при 20°С сравнительно мало отличается от удельного сопротивления чистого никеля.

Об аномалиях эмиссии мы судили не только по абсолютной величине анодного тока, но и по необычному характеру кривой $I_a = I_a(E)$. Падение же эмиссии при росте энергии нельзя объяснить наличием примесей.

⁸ В опыте 6,в падение I_a наблюдается при $i \approx 5i_m$. В опыте 7,а падение происходит только после полного выключения тока i .

⁹ В [7] (рис. 3) I_a не падает в течение $t_2 - t_1 \sim 10^{-5}$ сек. после выключения тока j . Падению I_a препятствует, повидимому, слабый повторный импульс $j' \sim j/150 \sim 7 \cdot 10^4$ А/см², который дает цепочка L, C при $t_1 \leq t \leq t_2$ (см. $V_r(t)$ в [7], рис. 3,эс, верхняя кривая).

Таблица 2

	ρ_{20} $\Omega \cdot \text{см}$	$\rho_{\text{пл}}^{\text{ТВ}}$ $\Omega \cdot \text{см}$	$\rho_{\text{пл}}^{\text{Ж}}$ $\Omega \cdot \text{см}$	$\rho_{1500}^{\text{Ж}}$ $\Omega \cdot \text{см}$	Литература
Табличные данные для Ni	$6,9 \cdot 10^{-6}$ $6,9 \cdot 10^{-6}$ $7,24 \cdot 10^{-6}$ $8,7 \cdot 10^{-6}$	$55 \cdot 10^{-6}$ — — —	$107 \cdot 10^{-6}$ — $108 \cdot 10^{-6}$ —	— $109 \cdot 10^{-6}$ — —	[4], стр. 295 [6], т. I, стр. 127, 129 [6], т. IV, стр. 335 [8], стр. 86
Наша проволока*, диаметр 0,015 см	$8,5 \cdot 10^{-6}$	$63 \cdot 10^{-6}$	—	—	Измерено в обычных условиях
	ρ_1 $\Omega \cdot \text{см}$	ρ_2 $\Omega \cdot \text{см}$	ρ_3 $\Omega \cdot \text{см}$		
Наша проволока**, диаметр 0,015 см	—	$64 \cdot 10^{-6}$ $\pm 2 \cdot 10^{-6}$	$81,5 \cdot 10^{-6}$ $\pm 4 \cdot 10^{-6}$		Измерено при больших j

* Все данные, приведенные в настоящей работе (кроме опыта 2,а), получены для этого сорта никеля.

** Начало осциллограммы искажено.

Очевидно, что зависимость величины энергии $E(t_c)$, при которой происходит взрыв металла, от плотности нагревающего тока также не может быть объяснена наличием примесей.

Иначе обстоит дело с отличием R_4 от табличного значения $R_{\text{пл}}^{\text{Ж}}$. Поскольку разность между этими величинами не меняется при изменении j и величина $R_{\text{пл}}^{\text{Ж}}$ для исследуемой проволоки нами не проверялась, возможно, что использованное нами табличное значение $R_{\text{пл}}^{\text{Ж}}$ не пригодно для исследуемого сорта проволоки. Однако известно, что малые примеси к никелю других металлов (в частности, меди) увеличивают его удельное сопротивление в жидком состоянии, подобно тому, как это происходит в твердом состоянии [4]. Следовательно, для никеля с примесью $R_{\text{пл}}^{\text{Ж}}$ должно быть, скорее, несколько больше, но не меньше, чем для чистого никеля (табл. 2).

Заметим, что в случае никеля с $\rho_{20} = 14 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot \text{см}$, заведомо содержащего примесь Mn, вид осциллограмм и величина отношения R_4/R_3 оказываются такими же, как и в случае чистого никеля (рис. 2, а). Более того, переход типа $R_3 \rightarrow R_4$ и следующая за ним область малого dR/dE , оканчивающаяся взрывом, наблюдаются и для константана, причем и в этом случае $R_4/R_3 \approx 1,3$. С другой стороны, для никеля табличное значение $R_{\text{пл}}^{\text{Ж}}/R_{\text{пл}}^{\text{ТВ}} = 1,94$; для константана¹⁰ эта величина, повидимому, также превышает 1,3.

Таким образом отличие найденного нами значения R_4 от приведенного в таблицах значения $R_{\text{пл}}^{\text{Ж}}$ не может быть объяснено наличием

¹⁰ Исследования нами константановая проволока имела $\rho_{20} = 48 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot \text{см}$, $\rho_{\text{пл}}^{\text{ТВ}} = 58 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot \text{см}$. По табличным данным для сплава 40% Ni и 60% Cu, имеющего $\rho_{20} = 50 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot \text{см}$, в жидком состоянии $\rho_{1500} = 85 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot \text{см}$. При других концентрациях сплава Cu — Ni, для которых $\rho_{20} \approx 50 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot \text{см}$, $\rho_{\text{пл}}^{\text{Ж}} > 85 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot \text{см}$ (см. [4], стр. 306). Например для сплава 85% Ni и 35% Cu, имеющего $\rho_{20} = 50 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot \text{см}$ и $T_{\text{пл}} = 1358^\circ \text{C}$, известно: $\rho_{\text{пл}}^{\text{Ж}} = 136,7 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot \text{см}$ и $\rho_{1400} = 138,5 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot \text{см}$ (см. [9], т. V, стр. 50).

примесей. Как отмечалось, по нашим измерениям для золота $R_4/R_3 = 1,94$, тогда как по табличным данным $R_{пл}^{ж}/R_{пл}^{тб} = 2,28$. Однако излом кривой $R(E)$ в точке 3 на осциллограммах золота выражен недостаточно четко, и определение значения R_3 может показаться ненадежным. Для контроля сравним величину ρ_4 , найденную по нашим осциллограммам, с $\rho_{пл}^{ж}$ (табл. 3). Судя по величине ρ_{20} , исследованный

Таблица 3

	ρ_{20} $\Omega \cdot \text{см} \times 10^6$	$\rho_{пл}^{ж}$ $\Omega \cdot \text{см} \times 10^6$	ρ_4 $\Omega \cdot \text{см} \times 10^6$	
Аи чистое	2,4	30,82	—	[6], т. IV, стр. 335
Наша проволока, диаметр 0,01 см. .	3,45	—	—	Измерено в обычных условиях
То же	—	—	$26,2 \pm 1,2$	Измерено при боль- ших j

сорт золота содержал примесь. Но, как уже отмечалось, примесь не должна снижать величины $\rho_{пл}^{ж}$. Следовательно, и в данном случае ρ_4 несколько меньше табличного значения $\rho_{пл}^{ж}$.

4. Сопоставление полученных результатов с данными других авторов

1. В работе [9] приведены результаты исследования плавления оловянных стержней, нагреваемых током $j \approx 10^3 - 1,4 \cdot 10^3 \text{ А/см}^2$ и охлаждаемых с поверхности струей воздуха. При этом было установлено, что поликристаллические стержни всегда начинают плавиться изнутри, а монокристаллические — с поверхности.

Условия этих опытов отличались от условий рассматриваемых опытов с $j > 6 \cdot 10^4 \text{ А/см}^2$ в основном лишь по плотности тока.

Результаты опытов [9] качественно совпадают с результатами наших опытов с обрывающимися импульсами для вольфрама [3] в том отношении, что металл не плавится, хотя по введенной в него энергии он должен был бы быть жидким. (В работе [9] наблюдалось, что монокристаллы плавятся лишь на поверхности, где температура ниже, чем внутри, а в [3] проволоки не оплавлялись при $E \approx W_n + W_{пл}$.) Правда, с количественной стороны разница здесь весьма значительная. Если, например, пересчитать наблюдаемый в упомянутых опытах [3] избыток энергии $E - W_n \approx W_{пл}$ к температуре при обычном значении теплоемкости, то получится величина $\sim 1000^\circ$, а не $1-2^\circ$, как оценивается в статье [9] для малых j . Однако в наших опытах можно выключать нагревающий ток раньше; тогда, очевидно, можно получить как угодно малый избыток энергии.

Авторы статьи [9] пришли к выводу, что они наблюдают перегрев твердого тела. Как нам кажется, исходя из такого представления, нельзя объяснить всех наблюдаемых нами явлений. В частности, в случае перегрева металла непонятно уменьшение эмиссии при увеличении энергии (см. раздел 2). Можно было бы предположить, что в результате перегрева потери энергии возросли и падение эмиссии связано с остыванием проволоки. Тогда в опытах 6,а,в потери должны были бы более чем в 16 раз превышать потери при температуре плавления ($i = 4,3 i_m$ и $i = 5 i_m$). Порядок величины необходимой для этого температуры можно оценить, считая, что проволока нагрета равномерно

и излучает как черное тело. При этом получается температура, более чем в два раза превышающая температуру плавления вольфрама, т. е. превышающая его температуру кипения ($T_{\text{пл}} \approx 3650^\circ \text{K}$, $T_{\text{кип}} \approx 6200^\circ \text{K}$)¹¹. Однако перегрев неплавящегося металла выше его температуры кипения представляется маловероятным. Кроме того, сильный перегрев, повидимому, вызвал бы сильное увеличение сопротивления проволоки, так как зависимость R от E при перегреве должна оставаться такого же характера, как и у металла до точки плавления. В действительности же сопротивление проволоки во время спадания эмиссии отличается от $R_{\text{пл}}^{\text{тв}}$ не более чем на 10%, причем после опыта проволока остается целой. (Заметим, что в опытах с вольфрамом мы не можем надежно указать положение начала спадания тока I_a относительно точек 3 и 4, поскольку эти точки в опытах 6 и 7 не заметны, а при более совершенной технике записи осциллограмм V_R такие опыты не повторялись.)

2. В работе [10] изучалась зависимость $R = R(E)$ для металлов при j до $5 \cdot 10^6 \text{ A/cm}^2$ таким же методом, какой применялся и в наших опытах. В этой работе утверждается, что сопротивление переходных металлов, измеренное при большой плотности тока, значительно больше сопротивления при обычных токах, т. е. что происходит нарушение закона Ома. При этом завышение R имеет наибольшую величину именно в момент включения сильного тока, т. е. тогда, когда металл практически еще не получил энергию в результате протекания тока (например, при $j \approx 5 \cdot 10^6 \text{ A/cm}^2$ для платины $[V_R(t_1)/V_r(t_1)]r = 5 R_{20}$).

В наших опытах такой эффект значительно меньше (например, по осциллограмме 4, в для никеля при $j = 5 \cdot 10^6 \text{ A/cm}^2$ $[V_R(t_1)/V_r(t_1)]r = 1,15 R_{20}$). При этом опыт показывает, что превышение $[V_R(t_1)/V_r(t_1)]r$ над R_{20} для начала осциллограмм сильно изменяется при изменении конфигурации проводов участка цепи, расположенного между точками подключения пластин осциллографа. Поэтому мы считаем, что отличие $[V_R(t_1)/V_r(t_1)]r$ от R_{20} не может рассматриваться как признак, характеризующий состояние металла, и утверждение о зависимости сопротивления от плотности тока представляется нам ошибочным. Ошибка, по нашему мнению, получается потому, что в течение некоторого времени, после момента включения тока i , V_R и V_r значительно отличаются от iR и ir вследствие влияния индуктивности L участков цепи между точками подключения пластин осциллографа [1,3]¹². Мы считаем, что по начальным участкам осциллограмм нельзя определять R и E по формулам

$$R = \frac{V_R}{V_r} r$$

и

$$E(t) = \frac{1}{r} \int_{t_1}^t V_R(t) V_r(t) dt.$$

¹¹ При изменении длины вольфрамовой проволоки от одного до нескольких сантиметров ток i_m меняется незначительно. Следовательно, уже при температуре плавления вольфрама потери энергии из-за теплопроводности через концы проволоки малы сравнительно с потерями на излучение.

¹² При охлаждении исследуемой проволоки жидким воздухом при неизменных прочих условиях опыта мы наблюдали увеличение отклонения $[V_R(t_1)/V_r(t_1)]r$ от величины R_{20} . Это объясняется тем, что для начала осциллограмм, когда di/dt велико, отличие величины $V_R/Ri = (L \frac{di}{dt} + Ri) / Ri$ от единицы увеличивается при уменьшении R . Увеличение j при неизменном i увеличивает скорость нагревания и поэтому смещает рабочие участки осциллограмм к области искажений V_R и V_r .

Для последующих частей наших осциллограмм, для которых эти формулы справедливы, не наблюдается признаков отклонения от закона Ома.

В статье [10] делается также заключение, что при достаточном увеличении плотности тока энергия, необходимая для начала плавления, уменьшается, что подтверждается ходом кривой IV (см. [10], рис. 9, стр. 395). Однако сдвиг всей кривой вдоль оси энергии наблюдается только для этой кривой, снятой при $j = 4,2 \cdot 10^6$ А/см². Ее ход резко отличен от хода остальных кривых, приведенных на рис. 9, в том числе и для кривой, снятой при $j = 3,9 \cdot 10^6$ А/см². Для всех этих кривых значения R и E в точке 3 (в наших обозначениях) одинаковы и практически не отличаются от обычного соотношения между R и E перед началом плавления. Значения R и E одинаковы также на этих кривых и в точке 4. Эти результаты совпадают с нашими, полученными при $6 \cdot 10^4 \leq j \leq 5 \cdot 10^6$ А/см² для никеля.

Наблюдаемое авторами работы [10] уменьшение энергии E_3 при переходе к большим j нами никогда не наблюдалось¹³.

Выводы

1. При плотности тока $6 \cdot 10^4 \leq j \leq 5 \cdot 10^6$ А/см² характер зависимости R от E для никеля оказывается таким же, как для вольфрама. Точкой излома 4 кривая $R = R(E)$ разбивается на две части, так что при $t \leq t_4$ зависимость $R(E)$ не меняется при изменении j , а при $t > t_4$ вид кривой $R(E)$ зависит от j : значение энергии $E(t_c)$, при которой R резко нарастает, уменьшается при уменьшении j .

2. В точке излома 3 кривой $R = R(E)$ значения энергии и сопротивления соответствуют началу плавления металла в обычных условиях. Значение энергии в точке 4 соответствует концу плавления металла в обычных условиях. Сопоставление измеренного значения сопротивления R_4 в точке 4 с обычным значением сопротивления металла при температуре плавления в жидком состоянии $R_{пл}^{жл}$ затруднено, так как величина $R_{пл}^{жл}$ нами не контролировалась.

3. На никеле, так же как и на вольфраме, наблюдается повышенная электронная эмиссия. Анодный ток, измеренный при нагревании никелевой проволоки импульсом тока $\sim 10^5$ А/см², в 50 раз превышает эмиссию никеля при температуре плавления, причем проволока не разрушается.

4. На никеле и вольфраме наблюдается падение эмиссии, в то время как поступление энергии в исследуемую проволоку во много раз превышает потери энергии, измеренные при стационарном накали ее в вакууме при температуре плавления.

5. В опытах с вольфрамом после резкого выключения нагревающего тока большой анодный ток I_a уменьшается, приближаясь к величине I_a^* , соответствующей закону Богуславского — Лэнгмюра. При этом скорость убывания I_a/I_a^* оказывается тем больше, чем больше I_a/I_a^* , независимо от величины I_a .

Точки излома кривой $R = R(E)$ (точки 3 и 4) в наших прежних опытах с вольфрамом не удавалось различить ввиду несовершенства осциллограмм. Наличие этих точек показывает, что падение dR/dE , наблюдаемое у вольфрама вблизи $R = R_{пл}^{жл}$, происходит не плавно, а скачками. Эти скачки соответствуют началу и концу плавления, если принять, что изменение сопротивления вольфрама при плавлении со-

¹³ Наши прежние эксперименты по измерению зависимости $R = R(E)$ [1] указывают, скорее, на увеличение этой энергии при увеличении j выше $5 \cdot 10^6$ А/см², но никак не на ее уменьшение.

ставляет около 8% (т. е. очень мало по сравнению с другими металлами). Это предположение тем более естественно, что отношение R_4/R_3 не меняется при изменении плотности тока в широких пределах. Таким образом наше прежнее предположение [1,3], что падение dR/dE у вольфрама вблизи $R = R_{пл}^{тв}$ аномально, повидимому, ошибочно.

Другие явления¹⁴, наблюдаемые в наших прежних опытах с вольфрамом при больших плотностях тока и не наблюдаемые в обычных условиях, существенно зависят от плотности тока. Эти явления рассматривались нами как проявление аномального состояния вольфрама, вызванного протеканием тока большой плотности. Зависимость энергии в момент взрыва — $E(t_c)$ от j и аномалии эмиссии наблюдаются в рассматриваемых в настоящей работе опытах не только для вольфрама, но и для никеля. При этом обнаружены новые особенности эмиссии (пункт 4 Выводов), которые нам также не удалось объяснить, исходя из предположения, что металл находится в нормальном состоянии.

Заметим, что условия экспериментов с никелем и вольфрамом существенно различались ввиду значительной разницы температур плавления (например, измеряемые анодные токи отличались на несколько порядков). Одинаковый характер явлений, наблюдаемых на этих металлах вблизи $R = R_{пл}^{тв}$, показывает, что они вызваны процессами в металлах независимо от величины их температуры плавления.

Физический институт им П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
1 августа 1953 г.

Литература

- [1] С. В. Лебедев и С. Э. Хайкин. ЖЭТФ, 26, 629, 1954.— [2] С. В. Лебедев и С. Э. Хайкин. ЖЭТФ, 26, 723, 1954.— [3] С. В. Лебедев. ЖЭТФ, 27, 605, 1954.— [4] Энциклопедия металлофизики под ред. Мазинга, т. 1, ОНТИ НКТП СССР, 1937.— [5] Ф. Зейтц Современная теория твердого тела, ГИТТЛ, 1949.— [6] Техническая энциклопедия, Справочник физ.-хим. и технологических величин, ОГИЗ РСФСР, 1931.— [7] С. В. Лебедев. ЖЭТФ, 27, 487, 1954.— [8] В. Эспей и М. Кноль. Технология электровакуумных материалов, Оборонгиз, 1939.— [9] С. Э. Хайкин и Н. П. Бене. ДАН СССР, 23, 31, 1939.— [10] Л. А. Игнатьева и С. Г. Калашников, ЖЭТФ, 22, 385, 1952.— [11] Н. П. Мокровский и А. Р. Регель. Журн. техн. физ., 23, 2121, 1953.— [12] В. Г. Большов и Л. Н. Добрецов. ДАН СССР, 98, 193, 1954.

¹⁴ Зависимость энергии $E(t_c)$ от $j(t)$ [1,3], аномалии эмиссии [2,7], особенности плавления в опытах с обрывающимися импульсами [3].

ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

К ТЕОРИИ МНОЖЕСТВЕННОГО ОБРАЗОВАНИЯ ЧАСТИЦ
ПРИ БОЛЬШИХ ЭНЕРГИЯХ

С. З. Белецкий

Совокупность экспериментальных данных, имеющихся до сих пор, позволяет утверждать, что во всех ядерных процессах имеет место сохранение ядерного заряда. При исследовании процесса множественного образования нуклонов в области больших энергий [1] сохранение ядерного заряда учитывается тем, что предполагается образование частиц и античастиц в равных количествах. В действительности при соударении нуклона с ядром принимают участие несколько начальных нуклонов (не меньше двух). Рассмотрим более подробно влияние сохранения ядерного заряда на образование тяжелых частиц при больших энергиях¹.

Теоретическое исследование множественного образования частиц проводится в настоящее время на основе термодинамических и гидродинамических методов [2-4].

При соударении нуклона с нуклоном или нуклона с ядром образуется система, в которой большая энергия сконцентрирована в очень малой области. Эта система затем интенсивно расширяется и, когда размеры системы становятся достаточно большими, происходит ее распад на отдельные частицы. Стадия свободного разлета соответствует температуре системы, равной $kT \approx m_\pi c^2$, где m_π — масса π -мезона. Плотности частиц различного сорта при этом равны

$$n_{\text{нн}} = \frac{g_{\text{н}}}{2\pi^2} \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3 F^+(z, y_{\text{нн}}), \quad (1)$$

$$n_{\text{ан}} = \frac{g_{\text{н}}}{2\pi^2} \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3 F^+(z, y_{\text{ан}}), \quad (2)$$

$$n_\pi = \frac{g_\pi}{2\pi^2} \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3 F^-(z, 0). \quad (3)$$

Здесь $n_{\text{нн}}$ и $n_{\text{ан}}$ — плотности нуклонов и антинуклонов, n_π — плотность π -мезонов, $g_{\text{н}} = 4$, $g_\pi = 3$,

$$F^\pm(z, y) = z^3 \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{\exp\{-y + z\sqrt{1+x^2}\} \pm 1}; \quad (4)$$

$z = Mc^2 / kT$ для нуклонов и $z = m_\pi c^2 / kT$ для π -мезонов, $y = \mu / kT$, где μ — химический потенциал.

Условие равновесия по отношению к образованию и аннигиляции пар будет $y_{\text{нн}} + y_{\text{ан}} = 0$. Таким образом, если обозначить $y_{\text{нн}}$ через y , то $y_{\text{ан}}$ равно $-y$.

В рассматриваемых нами случаях $z > 1$ и $y < z$. Разлагая знаменатель в формуле (4) в ряд по степеням $\exp\{y - z\sqrt{1+x^2}\}$, интегрируя и ограничиваясь первым членом, получим

$$F^+(z, y) = F^+(z, 0) e^y, \quad F^+(z, -y) = F^+(z, 0) e^{-y}. \quad (5)$$

¹ В работе [2] указано, что следует учесть наличие начальных нуклонов в теории множественного образования Ферми; однако автор работы [2] этого не сделал. Напомним, что, согласно Ферми, распад системы на отдельные частицы происходит при температуре $kT > Mc^2$, где M — масса нуклона. Поэтому в рамках теории Ферми влияние начальных нуклонов не существенно.

Теперь нетрудно убедиться в справедливости следующих соотношений:

$$\operatorname{sh} y = \frac{N_{\pi 0}}{N_{\pi 0}} \frac{N_0}{N_{\pi}}; \quad \operatorname{ch} y = \frac{N_{\pi 0}}{N_{\pi 0}} \frac{N_{\pi}}{N_{\pi}}.$$

Здесь $N_{\pi 0}$ и $N_{\pi 0}$ — полное число π -мезонов и образующихся антинуклонов и нуклонов в системе, при условии, что начальные нуклоны отсутствуют; N_0 — число начальных нуклонов, N_{π} и N_{π} — полное число π -мезонов, нуклонов и антинуклонов в системе при наличии начальных нуклонов. Отсюда получаем

$$N_{\pi} / N_{\pi} = \sqrt{(N_{\pi 0} / N_{\pi 0})^2 + (N_0 / N_{\pi})^2}. \quad (6)$$

Числа нуклонов N_{π} и антинуклонов N_{π} равны

$$N_{\pi} / N_{\pi} = 1/2 \left[\sqrt{(N_{\pi 0} / N_{\pi 0})^2 + (N_0 / N_{\pi})^2} + N_0 / N_{\pi 0} \right], \quad (7)$$

$$N_{\pi} / N_{\pi} = 1/2 \left[\sqrt{(N_{\pi 0} / N_{\pi 0})^2 + (N_0 / N_{\pi})^2} - N_0 / N_{\pi 0} \right].$$

Обратимся теперь к энергии нуклонов и π -мезонов. Как легко видеть, суммарная плотность энергии нуклонов и антинуклонов E_{π} , отнесенная к плотности E_{π} энергии π -мезонов, равна

$$E_{\pi} / E_{\pi} = \sqrt{1 + (N_{\pi 0} / N_{\pi 0})^2 (N_0 / N_{\pi})^2} E_{\pi 0} / E_{\pi 0}. \quad (8)$$

где $E_{\pi 0}$ и $E_{\pi 0}$ — плотности энергий нуклонов и π -мезонов при $N_0 = 0$. Величина (8) дает отношение энергии, уносимой нуклонами, к энергии, уносимой π -мезонами.

Пусть критическая температура T_h , при которой происходит распад системы на отдельные частицы, равна $1,2 m_{\pi} c^2$. Тогда, согласно данным работы [6], $E_{\pi 0} / E_{\pi 0} = 0,3$,

$N_{\pi 0} / N_{\pi 0} = 0,13$. Если положить $N_0 / N_{\pi} = 0,15$, то $E_{\pi} / E_{\pi} = 0,42$. Если же $N_0 / N_{\pi} = 1$, то $E_{\pi} / E_{\pi} = 2,3$. Это означает, что при $N_{\pi} = N_0$ нуклоны уносят около 70% всей энергии. Таким образом учет начальных нуклонов приводит к увеличению концентрации энергии на нуклонах. Этот эффект особенно велик при не слишком больших энергиях, когда число образующихся π -мезонов мало. Качественно полученный результат находится в соответствии с экспериментальными выводами, полученными Григоровым [7] для энергий порядка $10^{10} - 10^{11}$ eV. Следует, однако, подчеркнуть, что развиваемая теория при таких энергиях является грубо приближенной.

Формула (8) для отношения энергий содержит два параметра — температуру распада системы на отдельные частицы T_h и величину N_0 / N_{π} . Оба параметра нам

Таблица 1

kT в долях $m_{\pi} c^2$	α	kT в долях $m_{\pi} c^2$	α
$kT \ll m_{\pi} c^2$	6,8	1,5	2,16
0,5	3,76	2	1,83
0,7	3,28	3	1,6
0,8	2,92	4	1,4
1	2,65	$kT \gg m_{\pi} c^2$	1,17*

* Последнее значение вычислено с учетом фермиевского распределения для нуклонов и бозевского — для π -мезонов.

неизвестны. Можно, однако, образовать величину, которая не зависит от N_0 / N_{π} и измерение которой позволило бы непосредственно определить температуру распада системы T_h . Нетрудно видеть, что энергия, приходящаяся на нуклон, не зависит от химического потенциала, т. е. от числа начальных нуклонов. (Это справедливо, если мы используем релятивистское распределение Максвелла вместо распределения Ферми.) Возьмем отношение энергии, приходящейся на один нуклон, к энергии, приходящейся на один π -мезон. Обозначим эту величину через α ; $\alpha = (E_{\pi} / E_{\pi}) (n_{\pi} / n_{\pi})$. Эта величина зависит только от температуры распада T_h . В табл. 1 приводятся значения α для различных температур T_h , вычисленные согласно данным работы [6].

При ядерных соударениях могут образовываться и более тяжелые частицы (Δ -частицы), обладающие ядерным зарядом. Они могут быть включены в наше рассмотрение.

Если предположить, что эти частицы, так же как и нуклоны, имеют спин $1/2$, то мы получим, в частности, что при наличии Λ -частиц формулы (6)–(8) остаются справедливыми, если под N_n понимать сумму нуклонов, антинуклонов, Λ -частиц и анти- Λ -частиц, под $N_{\pi 0}$ понимать сумму нуклонов и Λ -частиц, образующихся при $N_0 = 0$ и т. д. В табл. 2 даны значения N_{nn}/N_π , $N_{\Lambda n}/N_\pi$, N_{an}/N_π , $N_{\Lambda\pi}/N_\pi$, где $N_{\Lambda n}$ — число Λ -частиц, а $N_{a\Lambda}$ — число анти- Λ -частиц для различных значений $N_0/N_{\pi 0}$. При вычислении g_Λ принято равным 4, а M_Λ (масса Λ -частицы) равной $2200 m_p$.

Таблица 2

kT в долях $m_\pi c^2$	$\frac{N_0}{N_\pi}$	$\frac{N_{nn}}{N_\pi}$	$\frac{N_{n\Lambda}}{N_\pi}$	$\frac{N_{an}}{N_\pi}$	$\frac{N_{\Lambda\pi}}{N_\pi}$
1,2	0	0,063	0,027	0,063	0,027
	0,15	0,135	0,057	0,029	0,013
	0,30	0,23	0,096	0,018	0,008

Из табл. 2 видно, что при наличии начальных нуклонов существенно меняется соотношение между числом образующихся Λ -частиц и антинуклонов. Так, при $kT_h = 1,2 m_\pi c^2$ и $N_0 = 0$ число образующихся антинуклонов в 2,3 раза превышает число образующихся Λ -частиц. Однако уже при $N_0/N_\pi = 0,15$ (что соответствует при 20 образующихся π -мезонах трем начальным нуклонам) число образующихся Λ -частиц уже в два раза превышает число антинуклонов. Если спин Λ -частицы больше $1/2$ и частицы образуются при $T > T_h$, то количественные соотношения изменятся, но качественные выводы, повидимому, останутся справедливыми.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
24 июля 1954 г.

Литература

- [1] E. Fermi. Progr. Theor. Phys., 5, 570, 1950. — [2] L. Schiff. Phys. Rev., 86, 663, 1952. — [3] Л. Д. Ландау. Изв. АН СССР, сер. физич., 17, 51, 1953. — [4] И. Л. Розенталь и Д. С. Чернавский. Усп. физ. наук, 52, 185, 1954. — [5] И. Я. Померанчук. ДАН СССР, 78, 889, 1951. — [6] С. З. Беленький. ДАН СССР, 99, 523, 1954. — [7] Н. Л. Григоров и В. С. Мурзин. Изв. АН СССР, сер. физич., 17, 21, 1953.

К РЕЛЯТИВИСТСКИМ ПОПРАВКАМ В ЗАДАЧЕ ДВУХ ТЕЛ

В. Н. Цытович

В последнее время широкое применение получил метод отыскания функций распространения в квантовой электродинамике при помощи вариационных производных по источникам [1]. Этот метод, в частности, был использован для получения релятивистски-ковариантного уравнения движения электрона и позитрона, взаимодействующих через электромагнитное поле [2]. Было показано также [4], что уравнения типа Сальпетера — Бете [3] содержат поправки к энергетическим уровням атома водорода, которые не содержались в уравнениях типа Брейта [5]. В атоме позитрония эти поправки имеют особое значение, так как, в отличие от водорода, они имеют такой же порядок величины, что и вакуумные (радиационные) поправки.

¹ Отличие этого уравнения от уравнения Сальпетера — Бете [3] связано с учетом специфического обменного взаимодействия между электроном и позитроном, обусловленного их виртуальной аннигиляцией.

В настоящем сообщении мы хотим указать на принципиальное значение учета поправок на релятивизацию двух тел в случае взаимодействий позитрония с внешними полями. Прежде чем переходить к этому вопросу, мы остановимся на способе нахождения энергии взаимодействия между частицами при помощи релятивистского уравнения для связанных состояний [2] или [3]. В это уравнение входит оператор взаимодействия I

$$\begin{aligned}(F_2^+ F_1^- - iI) \psi &= 0, \\ F_2^+ &= c p_2 \vec{\alpha}_2 + \beta_2 M_2^+ c^2 + e \alpha_{2\mu} A_\mu(2), \\ F_2^- &= c p_1 \vec{\alpha}_1 + \beta_1 M_1^- c^2 - e \alpha_{1\mu} A_\mu(1)\end{aligned}\quad (1)$$

причем M_1^- и M_2^+ — операторы массы.

Предположим, что мы тем или иным способом решили уравнение (1) для мгновенного взаимодействия, и нас интересует энергия взаимодействия электрона и позитрона между собой или с внешним полем, обусловленная возмущением ΔI члена I , входящего в (1), $I = I_0 + \Delta I$. Для нахождения матричных элементов энергии возмущения можно найти «матрицу рассеяния на ΔI ». Для этого достаточно разложить волновую функцию, подчиняющуюся уравнению (1) с учетом ΔI , по невозмущенным волновым функциям [подчиняющимся (1) без ΔI]. Удобнее, однако, иметь дело с решениями уравнений типа (1), поскольку разложение функции Грина G уравнения (1) по невозмущенной G_0 имеет чрезвычайно простой вид:

$$G = G_0 + G_0 i \Delta I G_0 + G_0 i \Delta I G_0 i \Delta I G_0 + \dots \quad (2)$$

Релятивистски ковариантное уравнение (1) содержит разные времена частиц t_1 и t_2 , причем, если внешние поля стационарны, мы можем перейти к относительно-му $t = t_1 = t_2$ и общему $T = (t_1 + t_2)/2$ времени. Матрица рассеяния, описывающая рассеяние связанной системы от $T = -\infty$ к $T = +\infty$ при адиабатически выключаемом взаимодействии ΔI , равняется

$$S_{-\infty, +\infty} = G(T = +\infty, T = -\infty).$$

При помощи $S_{-\infty, +\infty}$ можно найти амплитуду перехода из состояния n в состояние n' , вызываемого возмущением ΔI . Мы будем считать эффективной энергией возмущения V такую энергию в уравнении для мгновенного взаимодействия

$$(E - H_1 - H_2 - V) \varphi = -(\Lambda_+^{(1)} - \Lambda_-^{(2)}) K(r) \varphi \quad (3)$$

(где $\varphi = \psi|_{t=0}$, H_1 и H_2 — гамильтонианы свободных электрона и позитрона, $K(r)$ — потенциал мгновенного взаимодействия, Λ_+ и Λ_- — проекционные операторы), которая приводит к тем же значениям амплитуд рассеяния, что и получаемые из $S_{-\infty, +\infty}$. Как можно показать, в первом приближении теории возмущений матричные элементы эффективной энергии возмущений имеют вид

$$V_{nn'} = \frac{1}{\hbar} \int \tilde{\psi}_{n'}(x_1 x_2 t) \Delta I \psi_n(x_1 x_2 t) d^3 x_1 d^3 x_2 dt, \quad (4)$$

причем

$$\psi_n = \theta_n(t) \varphi_n; \quad \tilde{\psi} = \theta_n(-t) \varphi_n^*; \quad \varphi_n = \psi_n|_{t=0}. \quad (5)$$

Интегрирование по относительно-му времени в (4) просто проводится при помощи оператора $\theta_n(t)$, описывающего каузальное развитие в относительно-м времени. Его свойства будут рассмотрены в отдельном сообщении.

Найденная нами при помощи (4) энергия взаимодействия между электроном и позитроном в точности совпала с энергией, найденной Ландау и Берестецким [7] в частном случае отсутствия внешнего поля и при ограничении членами порядка α^2 .

Рассмотрим теперь взаимодействие атома позитрония с внешним электромагнитным полем. Мы рассмотрим случай слабых полей, когда взаимодействие с внешним полем можно трактовать как возмущение. Будем считать внешние поля постоянными, т. е. потенциалы линейными функциями координат. Если сохранить лишь линейные по полю члены, то оператор взаимодействия с внешним полем $\Delta I_{\text{вн}}$ имеет вид

$$\begin{aligned}\Delta I_{\text{вн}} &= -e \alpha_{1\mu} A_\mu(1) \left(-\frac{\hbar}{2i} \frac{\partial}{\partial T} + \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - H_2 \right) + \\ &+ e \alpha_{2\mu} A_\mu(2) \left(-\frac{\hbar}{2i} \frac{\partial}{\partial T} - \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial t} - H_1 \right).\end{aligned}\quad (6)$$

Найденная при помощи (6) энергия взаимодействия с внешним полем в первом приближении в точности совпала с энергией, найденной нами обычными методами в первом приближении теории возмущений. Однако важно подчеркнуть, что при помощи (6) получаются поправки к этой энергии, связанные с релятивизацией задачи двух тел и ее влиянием на взаимодействие позитрония с внешними полями. Для $n=1$ они имеют величину

$$(V_{\text{вн}}^{\text{рел}})_{ss'} = -\mu_0 \frac{\alpha^2}{12} \langle \sigma_{1z} - \sigma_{2z} \rangle_{ss'} H_z, \quad (7)$$

где α характеризует спиновые состояния, σ_{1z} , σ_{2z} — матрицы Паули, $\alpha = e^2 / \hbar c$, $\mu_0 = e\hbar/2mc$, H_z — напряженность магнитного поля. Эта энергия вызывает дополнительное смещение орто- и пара-состояний в позитронии.

Поскольку в оператор (6) входит оператор относительной энергии, представляет интерес вопрос о том, в какой мере найденные поправки связаны с оператором $(\hbar/i)(\partial/\partial t)$ и, следовательно, с разными временами частиц. Если отдельно найти энергию взаимодействия, связанную с частью оператора (6), содержащей $(\hbar/i) \times (\partial/\partial t)$, то получим в точности (7).

Таким образом найденные поправки представляют принципиальный интерес, так как они целиком связаны с различными временами частиц.

Приношу мою признательность проф. А. А. Соколову, М. М. Мирнанашивили и проф. Д. Д. Иваненко за обсуждение затронутых вопросов.

Московский государственный
университет

Поступило в редакцию
21 июля 1954 г.

Литература

- [1] J. Schwinger. Proc. National Acad. Sci., 7, 433, 455, 1951. — [2] R. Karplus а. A. Klein. Phys. Rev., 87, 848, 1952. — [3] E. Salpeter а. H. Bethe. Phys. Rev., 84, 1232, 1951. А. Д. Галанин. ЖЭТФ, 23, 488, 1952. — [4] E. Salpeter. Phys. Rev., 87, 328, 1952. — [5] G. Breit. Phys. Rev., 34, 533, 1929. — [6] В. Б. Берестецкий и Л. Д. Ландау. ЖЭТФ, 19, 673, 1949.

ОБ ИССЛЕДОВАНИЯХ АНИЗОТРОПИИ ПОВЕРХНОСТНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ОЛОВА ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

М. С. Хайкин

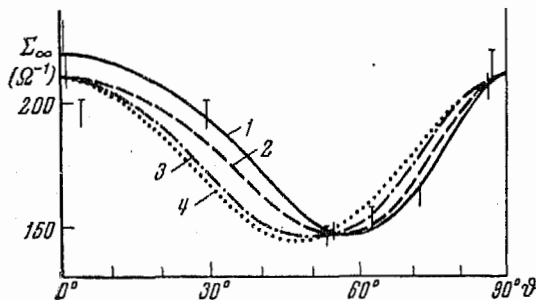
Изучению анизотропии поверхностного сопротивления олова при гелиевых температурах в нормальном и сверхпроводящем состоянии посвящен ряд работ [1-3]. В них экспериментально исследовались (на частоте 9400 мГц) свойства коаксиального резонатора, внутренним (изолированным) проводником которого служили сменные образцы — цилиндрические монокристаллы олова длиной 14 мм, диаметром 0,25 ~ 1 мм, имевшие различный угол наклона Φ главной кристаллической оси по отношению к оси образца. Полученная в [1] зависимость активной поверхностной проводимости образцов (в нормальном состоянии) от угла Φ представлена на рис. 1 (сплошная кривая; вертикальные штрихи — экспериментальные точки). Подобная зависимость от Φ приводится в работе [1] и для реактивной поверхностной проводимости, а также для вычисленной из нее глубины проникновения электромагнитного поля в сверхпроводник. Эти опыты привели автора работ [1-3] к выводу о нетензорном характере анизотропии исследовавшихся величин.

Вследствие принципиальной важности работ [1-3] представляется необходимым внимательное обсуждение этих исследований, в частности методики. Прежде всего интересно выяснить, какие результаты опытов следовало бы ожидать, если предположить нормальный тензорный характер анизотропии поверхностной проводимости олова при гелиевых температурах. Этому вопросу и посвящено настоящее сообщение.

В коаксиальном резонаторе электрические колебания могут происходить как вдоль его оси (обычно применяемая электромагнитная волна), так и в перпендикулярном направлении. Имея в виду только низшие (основные) колебания этих двух типов, такой резонатор следует рассматривать как колебательную систему с двумя

степенями свободы. При этом парциальная частота поперечного колебания на один-два порядка выше парциальной частоты продольного колебания (для реальных геометрических размеров). Если резонатор построен из изотропных проводников, то связи между продольным и поперечным парциальными резонансами нет, и их можно возбуждать независимо. Если же, например, внутренний проводник резонатора анизотропен (причем $\Phi \neq 0^\circ$, $\Phi \neq 90^\circ$), то парциальные резонансы связаны, и резонатор будет возбуждаться как связанная система.

Рассмотрим механизм связи продольного и поперечного резонансов коаксиального резонатора. Пусть продольное внешнее электрическое поле возбуждает низкочастотный резонанс системы.



Зависимость активной поверхностной проводимости образцов от угла Φ . 1 — по [1], вертикальные штрихи — экспериментальные точки; 2 — $f(\Phi; 2)$; 3 — $f(\Phi; 1,4)$; 4 — $f(\Phi; 1,14)$. Масштаб кривых выбран таким, чтобы их максимумы равнялись максимуму кривой, полученной в [1] (Значение $\sigma_{\parallel}/\sigma_{\perp} = 1,14$ приводится в работе [4] для олова и его сплавов с индием).

симум ширина полосы (затухание) низкочастотного резонанса системы и через минимум — его собственная частота.

Этот качественный вывод полностью совпадает с наблюдениями Пиппарда [1], что иллюстрирует рисунок. Активная проводимость образца вычислялась как величина, обратно пропорциональная ширине полосы резонатора, которая, как это видно из рисунка, максимальна для резонатора с образцом, имеющим $\Phi \approx 55^\circ$.

Количественная оценка влияния связи на наблюдаемые свойства низкочастотного резонанса просто может быть проведена лишь в отношении зависимости связи от Φ . Связь увеличивает ширину полосы резонанса (по сравнению с парциальным продольным резонансом) вследствие добавочных потерь, вносимых поперечной компонентой тока смещения; эти потери пропорциональны квадрату поперечного тока. Средний по окружности цилиндрического образца поперечный ток пропорционален поперечной компоненте тока, которая появилась бы на бесконечной плоской поверхности того же металла (при такой же ориентации кристаллической оси относительно поля можно рассмотреть элемент боковой поверхности образца). Зависимость этой компоненты тока от Φ легко находится, если известна анизотропия $\sigma_{\parallel}/\sigma_{\perp}$ проводимости металла. Таким путем определяется функция $f(\Phi; \sigma_{\parallel}/\sigma_{\perp})$, пропорциональная потерям, вносимым в низкочастотный («продольный») резонанс связью с поперечным резонансом. Совпадение вида функции f с полученной в [1] зависимостью $\Sigma(\Phi)$ (см. рисунок) весьма наглядно.

Влияние на продольный резонанс связи с поперечным резонансом можно рассматривать как внесение некоторого комплексного сопротивления, пропорционального сопротивлению резонатора поперечному току, т. е. пропорционального поверхностному сопротивлению образца. Отсюда ясно, что внесенные активное и реактивное сопротивления находятся в таком же соотношении, как активное и реактивное сопротивления резонатора продольным токам, а значит, относительное влияние связи на наблюдаемую величину реактивного поверхностного сопротивления образца (вычисляемого из сдвига собственной частоты резонатора) должно быть таким же, как и на величину активного сопротивления. Этот вывод также хорошо согласуется с результатами работы [1].

Таким образом представляется возможным, что вывод о нетензорном характере анизотропии поверхностной проводимости металла при низких температурах и о нетензорной анизотропии глубины проникновения электромагнитного поля в сверхпроводник, сделанный в [1-3], недостаточно экспериментально обоснован. Наблюдавшиеся явления можно объяснить, по крайней мере, качественно, на основании изложенной выше идеи о связи двух основных колебаний коаксиального резонатора, при помощи обычной тензорной анизотропии проводимости.

Во всяком случае, представляется совершенно ясной необходимость дальнейшего экспериментального исследования анизотропии поверхностной проводимости при низких температурах, прежде чем делать окончательные выводы об ее характере.

Институт физических проблем
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
2 июля 1954 г.

Литература

[1] A. B. Pippard. Proc. Roy. Soc., A, 203, 98, 1950. — [2] A. B. Pippard. Proc. Roy. Soc., A 203, 195, 1950. — [3] A. B. Pippard. Proc. Roy. Soc., A 203, 210, 1950. — [4] T. E. Faber. Proc. Roy. Soc., A, 219, 75, 1953.

К ВОПРОСУ О НЕЗАКОННОСТИ ОДНОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТРАКТОВКИ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Г. П. Дзикант

Вигнером и Спиллардом [1] было предложено распределение вероятностей в фазовом пространстве квантовой частицы

$$F(q; p) = \frac{1}{2\pi} \int \psi^* \left(q - \frac{h\tau}{2} \right) e^{-i\tau p} \psi \left(q + \frac{h\tau}{2} \right) d\tau, \quad (1)$$

удовлетворяющее временному уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial F}{\partial q} = \frac{i}{4\pi^2 h} \int \left[V \left(q - \frac{h\tau}{2} \right) - V \left(q + \frac{h\tau}{2} \right) \right] F(q; \eta) e^{i\tau(\eta - p)} d\eta d\tau. \quad (2)$$

Здесь q, p, m — координата, импульс и масса частицы, $V(q)$ — ее потенциальная энергия, h — постоянная Планка, t — время.

В дальнейшем в работе [2] было дано истолкование уравнения (2), как уравнения некоторого стохастического процесса изменения координаты и импульса частицы, т. е. статистическая трактовка квантовой механики. Для законности такой трактовки необходимо, в первую очередь, чтобы $F(q; p)$, неотрицательная в некоторый момент времени, оставалась неотрицательной и во все последующие моменты времени, доказательство чего дано Бартлеттом (см. [2]). Однако недавно в работе [3] было правильно указано, что F , вообще говоря, не сохраняет знака с течением времени. Отсюда следует сделать вывод о незаконности трактовки квантовой механики, данной в [2].

Необходимо лишь указать на ошибку Бартлетта. Бартлетт предполагает, что квантовая система обладает циклической координатой θ (очевидно, всегда можно формально присоединить к данной системе еще циклическую степень свободы). Общее решение временного уравнения для такой системы он берет в виде

$$F(q, \theta; p, g) = \sum_{\mu} e^{i\mu(t + \theta/\omega)} F_{\mu}(q; p, g), \quad (3)$$

где g и ω — циклические импульс и частота, а F_{μ} — некоторые постоянные функции. Ясно, что если $F > 0$ при некотором t и любом θ , то и при любом t будет то же. Ошибка заключается в том, что на самом деле общим решением временного уравнения является

$$F(q, \theta; p, g) = \sum_{\mu_1, \mu_2} e^{i\mu_1 t + i\mu_2 \theta} F_{\mu_1, \mu_2}(q; p, g). \quad (4)$$

Поэтому рассуждения Бартлетта нужно относить лишь к узкому классу решений, которые действительно сохраняют знак.

Днепропетровский государственный
университет

Поступило в редакции
9 марта 1954 г.

Литература

[1] E. Wigner. Phys. Rev., 40, 749, 1932. — [2] J. Moyal. Proc. Cambr. Phil. Soc., 45, 99, 1949. — [3] T. Takabayasi. Progr. Theor. Phys., 10, 121, 1953.

К ТЕОРИИ ФЕРМИ МНОЖЕСТВЕННОГО ОБРАЗОВАНИЯ ЧАСТИЦ ПРИ СТОЛКНОВЕНИЯХ НУКЛОНОВ

И. Л. Розенталь

1. При вычислении статистических весов различных состояний Ферми [1] учитывал закон сохранения энергии в точной форме, а закон сохранения импульса — приближенно. Целью настоящей работы является точный учет закона сохранения импульса для двух предельных случаев: крайне нерелятивистского и крайне релятивистского.

Статистический вес S_n состояния для n частиц с нулевыми спинами определяется соотношением:

$$S_n = \left(\frac{V}{8\pi^3 \hbar^3} \right)^n \frac{dQ_n(E_0)}{dE_0}, \quad (1)$$

где V — объем в координатном, а Q — объем в импульсном пространстве¹. Наша задача заключается в вычислении

$$dQ_n/dE_0 = W_n(E_0).$$

Вычислим вначале $W_n(E_0, P_0)$, считая, что полный импульс P_0 системы отличен от нуля. В нерелятивистском случае можно написать

$$\begin{aligned} W_n(E_0, P_0) = & \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_{3n} \delta \left(T - \frac{1}{2\mu} \sum_{i=1}^n p_i^2 \right) \delta \left(P_{0x} - \sum_{r=1}^n p_{xr} \right) \times \\ & \times \delta \left(P_{0y} - \sum_{r=1}^n p_{yr} \right) \delta \left(P_{0z} - \sum_{r=1}^n p_{zr} \right) \prod_{r=1}^n dp_{xr} dp_{yr} dp_{zr}, \end{aligned} \quad (2)$$

T — суммарная кинетическая энергия системы.

Используя интегральное представление δ -функции запишем (2) в форме:

$$\begin{aligned} W_n(E_0, P_0) = & \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{-i l \tau_1\} d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{-i P_{0x} \tau_2\} d\tau_2 \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{-i P_{0y} \tau_3\} d\tau_3 \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{-i P_{0z} \tau_4\} d\tau_4 \times \\ & \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i \left[\frac{\tau_1 p^2}{2\mu} + \tau_2 p_x + \tau_3 p_y + \tau_4 p_z \right] \right\} dp_x dp_y dp_z \right]^n. \end{aligned} \quad (3)$$

Вычислим интеграл

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i \left[\frac{\tau_1 p^2}{2\mu} + \tau_2 p_x + \tau_3 p_y + \tau_4 p_z \right] \right\} dp_x dp_y dp_z.$$

Переходя к сферическим координатам и интегрируя по угловым переменным, получаем

$$I_1 = -\frac{2\pi i}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp \{ i [\tau x + \alpha x^2] \} dx = \frac{\pi^{3/4}}{\sqrt{2}} \frac{i(1+i) \exp \{ -i\tau^2/4\alpha \}}{\alpha^{3/4}}; \quad (4)$$

$$\tau = \sqrt{\tau_2^2 + \tau_3^2 + \tau_4^2}, \quad \alpha = \tau_1/2\mu.$$

Подставим выражение (4) в (3) и снова произведем интегрирование по угловым переменным в сферической системе координат

¹ Если частицы тождественны, то правую часть (1) нужно разделить на $n!$

$$W_n(E_0, P_0) = - \frac{(2\pi\mu)^{3/2} n}{(2\pi)^3} \left[\frac{i(1+i)}{a^{1/2}} \right]^n \frac{i}{P_0} \int \frac{\exp\{-iT\tau_1\}}{\tau_1^{3/2} n} d\tau_1 \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \tau \exp\left\{-i\left[\frac{n\mu\tau^2}{2\tau_1} - \tau P_0\right]\right\} d\tau = \frac{(2\pi\mu)^{3/2} (n-1)}{n^{3/2} [3/2(n-1)-1]!} \left(T - \frac{P_0^2}{2n\mu}\right)^{[3/2(n-1)-1]} \quad (5)$$

Эту формулу легко обобщить на случай, когда частицы обладают разными массами $\mu_1 \dots \mu_n$:

$$W_n(E_0, P_0) = \frac{(2\pi)^{3/2} (n-1)}{[3/2(n-1)-1]!} \left(\frac{\mu_1\mu_2 \dots \mu_n}{\mu_1 + \dots + \mu_n}\right)^{3/2} \times \\ \times \left[T - \frac{P_0^2}{2(\mu_1 + \dots + \mu_n)}\right]^{[3/2(n-1)-1]} \quad (6)$$

Вычислим, далее, функцию $W_n(E_0, P_0)$ для крайне релятивистского случая. Аналогично (3) можно написать

$$W_n(E_0, P_0) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-iE_0\tau_1\} d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-iP_{0x}\tau_2\} d\tau_2 \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-iP_{0y}\tau_3\} d\tau_3 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-P_{0z}\tau_4\} d\tau_4 \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i[\tau_1 \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} + \right. \\ \left. + \tau_2 p_x + \tau_3 p_y + \tau_4 p_z]\} dp_x dp_y dp_z \right]^n \quad (7)$$

Найдем I_2 — интеграл, заключенный в квадратные скобки:

$$I_2 = - \frac{2\pi i}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\{i[\tau x + \tau_1 |x|]\} dx = \\ = - \frac{2\pi i}{\tau} \left[\int_0^{\infty} x [\exp\{i(\tau_1 + \tau)x\} - \exp\{i(\tau_1 - \tau)x\}] dx \right] = \\ = - \frac{2\pi^2}{\tau} [\delta'_+(\tau_1 + \tau) - \delta'_+(\tau_1 - \tau)], \quad (8)$$

δ'_+ — производная от δ_+ -функции. Окончательно

$$I_2 = -8\pi i \tau_1 / (\tau^2 - \tau_1^2). \quad (9)$$

После подстановки в (7) и интегрирования по угловым переменным получаем

$$W_n(E_0, P_0) = \frac{(-8\pi i)^n}{i(2\pi)^3 P_0} \int \exp\{-iE_0\tau_1\} \tau_1^n d\tau_1 \int \frac{x \exp\{-iP_{0x}\}}{(\tau_1^2 - x^2)^{2n}} dx. \quad (10)$$

Вводя новые переменные $y = \tau_1 + x$, $z = \tau_1 - x$ и вычисля вычет в точке $y = x = 0$ после простых преобразований можно написать окончательное выражение:

$$W_n(E_0, P_0) = \frac{\pi^{n-1}}{2^{n-2}} \frac{(E_0^2 - P_0^2)^{n-2}}{P_0} \times \\ \times \sum_{r=0}^n C_n^r \frac{(E_0 - P_0)^r (E_0 + P_0)^{n-r}}{(n+r-2)!(2n-r-2)!} \left[\frac{E_0 + P_0}{2n-r-1} - \frac{E_0 - P_0}{n+r-1} \right]. \quad (11)$$

2. Рассмотрим некоторые приложения полученных формул. Часто явления, сопровождающие столкновения частиц, рассматривают в системе координат, связанной с их центром тяжести. В этом случае следует положить $P_0 = 0$. Тогда получаем

$$W_n(E_0, 0) = \frac{(2\pi)^{3/2} (n-1)}{n^{3/2} [3/2(n-1)-1]!} T^{[3/2(n-1)-1]} \quad (12)$$

в крайнем нерелятивистском случае, а в крайнем релятивистском случае имеем

$$W_n(E_0, 0) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} E_0^{3n-4} \sum_{r=0}^{(n-1)/2} \frac{C_n^r [3n-2-(n-2r)^2]}{(n+r-1)! (2n-2-1)!} \quad (n - \text{нечетное})$$

или

$$W_n(E_0, 0) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} E_0^{3n-4} \left\{ \sum_{r=0}^{(n/2)-1} \frac{C_n^r [3n-2-(n-2r)^2]}{(n+r-1)! (2n-r-1)!} + \frac{C_n^{n/2}}{(3/2 n - 1)! (3/2 n - 2)!} \right\} \quad (n - \text{четное}). \quad (13)$$

Важной характеристикой столкновения является вероятность $w_n(E_0, p)$ того, что одна определенная частица, созданная при столкновении, в котором образуется n частиц с общей энергией E_0 , уносит импульс, заключенный в интервале $p, p+dp$. Если ограничиться только статистическими факторами, то, опуская множитель $(V/8\pi^2\hbar^3)^n$, вероятность можно записать в форме:

$$w_n(E_0, p) dp = 4\pi p^2 w_{n-1} \left[\left(T - \frac{p^2}{2\mu} \right), p \right] dp \quad (14)$$

(нерелятивистский случай) и

$$w_n(E_0, p) dp = 4\pi p^2 w_{n-1} [(E_0 - p), p] dp \quad (14')$$

(релятивистский случай).

Используя (5) и (11), получаем

$$w_n(E_0, p) = \frac{4\pi (2\pi\mu)^{3/2} (n-2) p^2}{(n-1)^{3/2} [3/2 (n-2) - 1]!} \left[T - \frac{np^2}{2(n-1)\mu} \right]^{3/2 (n-2) - 1} dp \quad (15)$$

(нерелятивистский случай).

Если частицы имеют разные массы,

$$w_n(E_0, p) = \frac{4\pi (2\pi)^{3/2} (n-2) p^2}{[3/2 (n-2) - 1]!} \left(\frac{\mu_1 \dots \mu_{n-1}}{\mu_1 + \dots + \mu_{n-1}} \right)^{3/2} \times \\ \times \left\{ T - \frac{p^2}{2} \left[\frac{\mu_1 + \dots + \mu_n}{\mu_n (\mu_1 + \dots + \mu_{n-1})} \right] \right\} dp. \quad (16)$$

Наконец,

$$w_n(E_0, p) dp = 2\pi \left(\frac{\pi}{2} \right)^{n-2} [E_0 (E_0 - 2p)]^{n-3} p \times \\ \times \sum_{r=0}^{n-1} \frac{C_{n-1}^r E_0^{n-r-1} (E_0 - 2p)^r}{(n+r-3)! (2n-r-4)!} \left[\frac{E_0}{2n-r-3} - \frac{E_0 - 2p}{n+r-2} \right] dp \quad (17)$$

(релятивистский случай).

Следует отметить, что после окончания настоящей работы появилась статья [2], в которой рассматриваются близкие вопросы.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
7 сентября 1954 г.

Литература

[1] E. Fermi. Progr. Theor. Phys., 5, 570, 1950. — [2] J. V. Lepage and R. N. Stuart. Phys Rev., 94, 1724, 1954.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ФЕРМИ ПРИ АБСОЛЮТНОМ НУЛЕ ПРИ УЧЕТЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОНОВ С НУЛЕВЫМИ КОЛЕБАНИЯМИ РЕШЕТКИ

В. Л. Бонч-Бруевич

Метод функции Грина, разработанный в связи с задачами релятивистской квантовой теории поля [1], может быть использован и в ряде других задач. В частности, существенный интерес представляет исследование функции распределения для электронного газа при учете взаимодействия электронов с фононами. Функция Грина: есть

$$G_{ss'}(x, y) = \frac{i}{\langle S \rangle_0} \langle T \{ \psi_s(x) \psi_{s'}^*(y) S \} \rangle_0. \quad (1)$$

Здесь через S обозначена S -матрица, $x = \{x, x_0\}$, s, s' — спинные индексы, $\psi_s(x)$ — квантованная волновая функция электронного поля в представлении взаимодействия. Функция Грина (1), будучи разложена по какой-либо полной системе функций $\varphi_\lambda(x) \varphi_\lambda^*(y)$, при $x_0 < y_0$ характеризует распределение электронов, а при $x_0 > y_0$ — распределение дырок по значениям параметров λ .

Матрица S дается обычным выражением

$$S = T \exp \left\{ i \int L(x) dx \right\}, \quad (2)$$

где L — лагранжиан взаимодействия (используется система единиц, в которой $\hbar = c = 1$; c — скорость звука). Для системы электронов, взаимодействующих с акустическими колебаниями [2],

$$L = \{ g \psi_s^*(x) \psi_s(x) + \rho(x) \varphi(x) \}; \quad \varphi = \partial A(x) / \partial x_0, \quad (3)$$

где g — константа связи, $\rho(x)$ — «внешняя плотность заряда»,

$$A(x) = \frac{1}{V 2\pi^3} \int \frac{df}{|f|} [b_f \exp \{ i f x - i |f| x_0 \} + b_f^* \exp \{ -i f x + i |f| x_0 \}], \quad (4)$$

b_f^* , b_f — бозевские операторы «рождения» и «уничтожения» фононов; интегрирование по f ограничено дебаевским верхним пределом f_0 . Уравнение для функции Грина легко найти (например, методом, указанным в [3]). Оно имеет вид

$$G_{s_1 s_2}(x, y) = i K_{s_1 s_2}(x, y) - i g \int dz K_{s_1 s'}(x, z) G_{s' s_2}(z, y) a(z) - \\ - \int dz dx' K_{s_1 s'}(x, z) \Delta E_{s' s''}(z, x') G_{s'' s_2}(x', y). \quad (5)$$

Здесь по дважды повторяющимся спинным индексам производится суммирование;

$$a(z) = i \int F(z, z') \rho(z') dz'. \quad (6)$$

$K_{ss'}(x, y)$ и $F(x, y)$ являются функциями распространения «свободных» электронного и фононного полей; ΔE — аналог массового оператора:

$$\Delta E_{s' s''}(z, x') = -i g \int dz' dx'' \frac{\delta a(z')}{\delta \rho(z)} F(z', z) G_{s' s''}(z, x'') \times \\ \times [\delta G_{s'' s''}^{-1}(x'', x') / \delta a(z')]. \quad (7)$$

Для функций $K_{ss'}$ и F имеем (при условии полного вырождения электронного газа)

$$K_{s_1 s_2}(x, y) = \langle T \{ \psi_{s_1}(x) \psi_{s_2}^*(y) \} \rangle_0 = \\ = \delta_{s_1 s_2} \frac{i}{(2\pi)^4} \int dp \int dp_0 \frac{\exp \{ i(p, x - y) - i p_0(x_0 - y_0) \}}{p_0 - (p^2 / 2m)} \equiv \delta_{s_1 s_2} K(x - y). \quad (8)$$

$$F(x, y) = \langle T \{ \varphi(x) \varphi(y) \} \rangle_0 = \\ = \frac{1}{2\pi^3} \int d f |f| \exp \{ i(f, x - y) - i |f| |x_0 - y_0| \} \quad (9)$$

(контур L идет из $-\infty$ ниже вещественной оси, пересекает ее в точке $p_0 = E_\Phi$ и далее идет выше вещественной оси в $+\infty$; $E_\Phi = p_\Phi^2/2m$ — энергия Ферми).

В теории слабой связи естественно произвести разложение по степеням константы g . Существенно, однако, что разлагать надо не саму функцию Грина (это, вообще говоря, недопустимо), а уравнение для нее, т. е. матрицу ΔE . Полагая $\Delta E = \Delta E^{(0)} + g\Delta E^{(1)} + g^2\Delta E^{(2)} + \dots$, находим

$$\Delta E^{(0)} = \Delta E^{(1)} = 0; \Delta E_{s's''}^{(2)} = -iF(x', z) K_{s's''}(z, x'). \quad (10)$$

Уравнение (5) при этом легко решается:

$$G_{s's''}(x, y) = \delta_{s's''} \frac{-1}{(2\pi)^4} \int_L d\mathbf{p} \int dp_0 \frac{\exp\{i(\mathbf{p}, \mathbf{x} - \mathbf{y}) - ip_0(x_0 - y_0)\}}{p_0 - (p^2/2m) + ig^2f(\mathbf{p}, p_0)}, \quad (11)$$

где

$$f(\mathbf{p}, p_0) = \int K(x) F(-x) \exp\{i\mathbf{p}\mathbf{x} - ip_0x_0\} dx \quad (12)$$

(заметим, что f — чисто мнимая функция). Энергетический спектр электрона, взаимодействующего с нулевыми колебаниями решетки, дается формулой

$$W(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m} - ig^2f(\mathbf{p}, p_0^*), \quad (13)$$

где p_0^* — корень уравнения

$$p_0 - \frac{p^2}{2m} + ig^2f(\mathbf{p}, p_0) = 0.$$

Вычисляя интеграл (12) и интегрируя по p_0 в (13) (при $x_0 > y_0$), находим в явном виде энергетический спектр и функцию распределения дырок по импульсам, $\Phi(\mathbf{p})$. Обозначая через p_Φ граничный импульс, получаем приближенно с точностью до малых величин типа m/p_Φ и т. д.:

$$\Phi(\mathbf{p}) = 0, \quad p < p_c, \quad (14)$$

$$\Phi(\mathbf{p}) = \left[1 + \frac{2g^2m^2}{\pi^2} \left\{ \ln \left(1 + \frac{f_0^4}{4p^4} \right) + 2 \left[\arctg \left(1 + \frac{f_0}{p} \right) + \arctg \left(1 - \frac{f_0}{p} \right) - \frac{\pi}{2} \right] + \frac{4}{3} \frac{(4p^2 - f_0^2)f_0^2}{4p^4 + f_0^4} \right\} \right]^{-1}, \quad (15)$$

где

$$p_c = p_\Phi \left\{ 1 + \frac{2g^2m^2}{\pi^2} \left[\frac{2}{3} \frac{f_0^2}{p_\Phi^2} + \frac{f_0^3}{3p_\Phi^3} \ln \frac{f_0^2 + 2f_0p_\Phi + 2p_\Phi^2}{f_0^2 - 2f_0p_\Phi + 2p_\Phi^2} + \frac{4}{3} \ln \left(1 + \frac{f_0^4}{4p_\Phi^4} \right) + \frac{8}{3} \left(\arctg \left(1 + \frac{f_0}{p_\Phi} \right) + \arctg \left(1 - \frac{f_0}{p_\Phi} \right) - \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\}. \quad (16)$$

$$W(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m} - g^2 \frac{m}{\pi^2 p} \left\{ \frac{2}{3} p f_0^2 + \frac{f_0^3}{3} \ln \frac{f_0^2 + 2f_0p + 2p^2}{f_0^2 - 2f_0p + 2p^2} + \frac{4}{3} p^3 \ln \left(1 + \frac{f_0^4}{4p^4} \right) + \frac{8}{3} p^3 \left[\arctg \left(1 + \frac{f_0}{p} \right) + \arctg \left(1 - \frac{f_0}{p} \right) - \frac{\pi}{2} \right] \right\}. \quad (17)$$

Эти формулы применимы при $m \ll p < E_\Phi + \frac{1}{2}m$ (т. е., в частности, вблизи сферы Ферми, $p = p_\Phi$). Таким образом благодаря взаимодействию с фононами распределение Ферми при абсолютном нуле несколько «размазывается». Подробные вычисления, связанные с применением функции Грина для нахождения функции распределения, будут опубликованы в специальной статье.

Выражаю глубокую благодарность Н. Н. Боголюбову за обсуждение результатов и ряд ценных советов.

Московский электротехнический
институт связи

Поступило в редакцию
6 октября 1954 г.

Литература

- [1] J. Schwinger. Proc. Nat. Ac. Sci., **37**, 452, 1951. — [2] A. Salam. Progr. Theor. Phys., **9**, 550, 1953. — [3] J. Anderson. Phys. Rev., **94**, 703, 1954.

ПО ПОВОДУ СТАТЬИ В. И. КАРПМАНА «К ВОПРОСУ О СВЯЗИ МЕЖДУ
МЕТОДОМ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ И ТЕОРИЕЙ ЧАСТИЦ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ
СПИНОМ»^[1]

Ю. А. Яппа

Указанная в заглавии работа Карпмана посвящена критике нашей заметки «О связи между теорией регуляризации и теорией частиц с произвольным спином»^[2]. Карпман утверждает в своей работе, что результаты, содержащиеся в ^[2], ошибочны. Настоящее письмо имеет своей целью показать, что упомянутое утверждение Карпмана является, в основном, следствием недоразумения. В самом деле, в ^[2] было показано, что инвариантная δ -функция, входящая в определение перестановочных соотношений вторичного квантования для полей, описываемых релятивистски инвариантными уравнениями в конечномерном случае, удовлетворяет ряду условий, частным видом которых являются условия регуляризации, введенные Паули и Вилларсом. Этот факт, установление которого является основным результатом заметки ^[2], работой Карпмана ^[1] не опровергается, но подтверждается. Можно думать, что это обстоятельство представляет известный физический интерес, так как теория частицы, обладающей спектром масс, является пока единственным случаем в теории квантовых полей, для которого показано, что «регуляризационные» условия получаются как следствие некоторой единой концепции о свойствах частицы (следствие представления о том, что частица имеет спектр масс). В этом смысле условия регуляризации получаются здесь более естественным, с физической точки зрения, путем, чем в теории с высшими производными, и даже в теории «компенсирующих» полей. Именно на эту сторону дела нами и было обращено внимание в ^[2].

Карпманом было показано ^[1], что перестановочные соотношения, несмотря на наличие упомянутых регуляризационных условий, следующих из самой структуры теории, содержат все же некоторые расходящиеся выражения. Этим фактом, однако, само наличие условий регуляризации в случае частиц со спектром масс ни в коей мере не отрицается. Под словом «регуляризация» в заметке ^[2] подразумевалось только присутствие ряда условий регуляризации. Для того чтобы иметь возможность рассматривать конкретные выражения для физических величин, нужно разрешить весь комплекс вопросов о перенормировке и регуляризации для частиц со спектром масс. Это никак не могло служить целью заметки ^[2], как видно по самому характеру изложения. Автор сожалеет, что имеющаяся в ^[2] неверная фраза: «... разложение функции $C(x)$ отличается от разложения функции Δ_R рядом членов, исчезающих при $x_s x^s \rightarrow 0$, и, таким образом, функция $C(x)$ сама является регуляризованной...», могла ввести в заблуждение относительно смысла, в котором в ^[2] применяется термин «регуляризация». Вся критика Карпмана относится именно к этому месту.

Следует, в заключение, указать, что к результатам ^[2] относится не только установление существования правил регуляризации в теории частиц со спектром масс, но и новый вывод перестановочных соотношений вторичного квантования в этой теории. Эти перестановочные соотношения выведены в ^[2] иным и более простым методом, чем ранее применявшиеся в работе ^[3]; результат несколько отличается от результата, приведенного в ^[3]. Это различие связано с тем обстоятельством, что в ^[2] перестановочные соотношения подчиняются естественному требованию, чтобы они были совместны как с уравнениями первого порядка, так и с уравнениями более высокого порядка, которым удовлетворяет волновая функция. В работе Карпмана нет никаких указаний на его точку зрения по этому поводу, что кажется странным, так как для получения условий регуляризации перестановочные соотношения в работе ^[1] оказывается необходимым привести к виду, данному в нашей работ ^[2], с некоторыми отличиями, по причине указанной выше. Неясно также; почему, принимая основной результат работы ^[2] и вывод ее вторично, Карпман считает возможным не упомянуть о ней в основном тексте своей работы и лишь в подстрочном примечании объявляет ее результаты ошибочными, не поясняя, какие именно.

В заключение приведем вывод формулы (9) заметки ^[2], определяющей оператор F , входящий в перестановочные соотношения вторичного квантования для частиц со спектром масс. Пусть уравнение для нахождения собственных значений матрицы L^0 имеет вид:

$$L^0 \psi_r^{(0)} = \lambda_r \psi_r^{(0)}. \quad (1)$$

Тогда, применяя условие $S^{-1} L^0 S = L^0$, получим

$$L^0 S \psi_r^{(0)} = \lambda_r S \psi_r^{(0)}; \quad (2)$$

$$S \psi_r^{(0)} \equiv \psi_r; \quad L^0 \psi_r = \lambda_r \psi_r; \quad (2')$$

или, так как можно положить $t_\mu^0 = p_\mu / \sqrt{p^\lambda p_\lambda}$ (ср. [3]),

$$L^\mu p_\mu \psi_r = \lambda_r \sqrt{p^\lambda p_\lambda} \psi_r. \quad (3)$$

Выражение (3) имеет вид уравнения, служащего для определения собственных значений и собственных функций матрицы $L^\mu p_\mu$. Величины $\lambda_r = \lambda_r \sqrt{p^\lambda p_\lambda}$ будут, соответственно, корнями того характеристического уравнения, которое можно построить при помощи матрицы $L^\mu p_\mu$. В дальнейшем будем иметь в виду факт, установленный Гельфандом и Ягломом и состоящий в том, что каждому значению $+\lambda_r$ соответствует значение $-\lambda_r$ в спектре матриц L^μ , и, следовательно, каждому $+\lambda_r \sqrt{p^\lambda p_\lambda}$ должно соответствовать $-\lambda_r \sqrt{p^\lambda p_\lambda}$ в спектре матрицы $L^\mu p_\mu$. В согласии с этим минимальный полином матрицы $L^\mu p_\mu$ должен иметь вид:

$$\Delta(x) = \prod_{i=1}^s (x^2 - \lambda_i p^\lambda p_\lambda) \quad (4)$$

или

$$\Delta(x) = x^{2s} + a_2 p^\lambda p_\lambda x^{2s-2} + \dots + a_{2s-2} (p^\lambda p_\lambda)^{s-1} x^2 + a_{2s} (p^\lambda p_\lambda)^s. \quad (5)$$

Для вывода формулы, определяющей оператор F , можно, таким образом, повторить с соответствующими изменениями, вывод формул, определяющих вид «присоединенной матрицы». Будем сначала считать, что нулевые собственные значения отсутствуют. Рассмотрим выражение $\varphi(x)$, определяемое формулой

$$\varphi(x) = \frac{\Delta(x) - \Delta(x)}{x - x}. \quad (6)$$

После деления в формуле (6) получим

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & x^{2s-1} + x x^{2s-2} + (x^2 + a_2 p^\lambda p_\lambda) x^{2s-3} + \dots \\ & \dots + [x^{2s-1} + a_2 p^\lambda p_\lambda x^{2s-3} + \dots + a_{2s-2} (p^\lambda p_\lambda)^{s-1} x]. \end{aligned} \quad (7)$$

Матрица $L^\mu p_\mu$ является корнем своего минимального полинома

$$\Delta(L^\mu p_\mu) = \Delta(-L^\mu p_\mu) = 0. \quad (8)$$

По (6) и (8) имеем

$$(L^\mu p_\mu + x) \varphi(x, -L^\mu p_\mu) = \Delta(x), \quad (9)$$

т. е. (см. [2], формула (8)) можно положить

$$F = \varphi(x, -L^\mu p_\mu) \quad (10)$$

или

$$\begin{aligned} F = & (-L^\mu p_\mu)^{2s-1} + x (-L^\mu p_\mu)^{2s-2} + (x^2 + a_2 p^\lambda p_\lambda) (-L^\mu p_\mu)^{2s-3} + \dots \\ & \dots [x^{2s-1} + a_2 p^\lambda p_\lambda x^{2s-3} + \dots + a_{2s-2} (p^\lambda p_\lambda)^{s-1} x] E. \end{aligned} \quad (11)$$

Легко видеть, что в том случае, когда имеется n -кратное нулевое собственное значение, уравнение (9) решается при помощи оператора $F' = (L^\mu p_\mu)^n F$.

Оператор F подлежит исследованию в отношении выполнимости теоремы Паули для перестановочных соотношений вторичного квантования, получаемых при его помощи. Автор надеется возвратиться к рассмотрению этого вопроса. Следует упомянуть о том, что в настоящее время в работах как советских (например, [3]), так и зарубежных (Баба, Ле Кутер) авторов, имеется несколько точек зрения на вопрос о вторичном квантовании полей частиц со спектром масс, так что физическое содержание соответствующих проблем далеко не является ясным.

Ленинградский государственный
университет

Поступило в редакцию
23 января 1954 г.

Литература

- [1] В. И. Карпман. ДАН СССР, 89, 257, 1953. — [2] Ю. А. Яппа. ДАН СССР, 86, 51, 1952. — [3] В. Паули. Релятивистская теория элементарных частиц, ИИЛ, 1947.

ПОВЕРХНОСТНОЕ НАТЯЖЕНИЕ ЖИДКОГО He^3 В ИНТЕРВАЛЕ ТЕМПЕРАТУР $0,93\text{--}3,34^\circ\text{K}$

К. Н. Зиновьева

Измерения поверхностного натяжения жидкого He^3 производились методом поднятия жидкости в капиллярах. В работе были использованы три капилляра разных диаметров (0,360, 0,224, 0,183 мм), длиной 2 см. Капилляры тщательно проверялись на отсутствие в них конусности. Калибровка капилляров производилась с точностью до 1% обычным способом — заполнением их ртутью и измерением длины и веса ртутного столбика. Капилляры укреплялись в стеклянной пробирке диаметром 6 мм и длиной 30 мм, в дно которой на платиновых вводах впаивался термометр сопротивления из проволоки фосфористой бронзы диаметром 40 м. Пробирка через переход медь—стекло соединялась с мельхиеровой трубкой внутренним диаметром 1,4 мм. По этой трубке, выходящей через капку дьюара наружу, в пробирку конденсировался He^3 , чистота которого, определенная масспектрометрическим способом, была не ниже 99,8%. Пробирка помещалась в гелиевый прибор, устроенный аналогично описанному в работе [1], который состоял из двух вставленных один в другой дьюаров. Понижение температуры достигалось откачкой.

Наблюдение уровней жидкости в капиллярах и пробирке производилось при помощи катетометра, позволившего отсчитывать разность высот с точностью до 0,01 мм. В действительности разброс отдельных измерений при одной и той же температуре был в несколько раз большим. Поскольку наблюдение менисков велось через 7 стеклянных стенок, форма менисков в капиллярах не была полностью различима, и установка визира производилась на некоторое среднее положение границы раздела. Искажения, вносимые неоднородностью стекол, определялись специальными измерениями при помощи линейки высотой 6,5 мм с делениями через каждые 0,5 мм, расположенной в одном из опытов внутри пробирки. Абсолютная ошибка отдельных измерений не превышала 0,05 мм.

Коэффициент поверхностного натяжения рассчитывался по формуле

$$\alpha = \rho g r h / 2.$$

Значения плотности ρ жидкого He^3 были взяты из работы [2]. Результаты трех экспериментов, усредненные при каждой температуре для всех трех капилляров, приведены на рисунке. В области самых низких температур средняя ошибка измерений составляет $\pm 5\%$, максимальная $\pm 7\%$. Максимальный разброс отдельных измерений указан на графике стрелкой.

Температура жидкого He^3 определялась термометром сопротивления, прокалиброванным предварительно по упругости паров He^3 (данные [3]) и отдельно He^4 (шкала Монловской лаборатории) с точностью до $0,01^\circ\text{K}$. Обе градуировки в пределах ошибок совпадают. С целью проверки методики наряду с He^3 были проведены измерения коэффициента поверхностного натяжения He^4 . Полученные результаты хорошо согласуются с данными работ [4, 5].

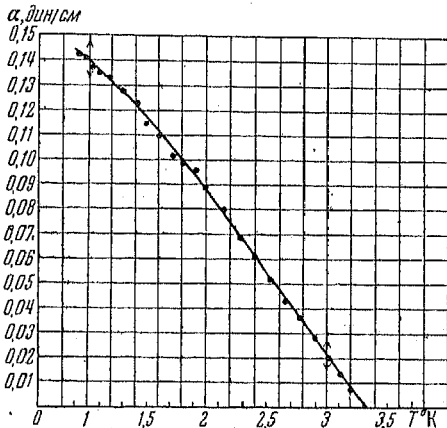
Сравнение коэффициентов поверхностного натяжения He^3 и He^4 показывает, что характер температурной зависимости α в исследованной области один и тот же, однако для He^3 кривая смещена влево на разность критических температур ($5,2^\circ\text{--}3,34^\circ\text{K}$) и имеет меньший наклон. При $T = 1^\circ\text{K}$ поверхностное натяжение He^3 в 2,5 раза меньше, чем у He^4 .

Институт физических проблем
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
4 октября 1954 г.

Литература

- [1] В. П. Пешков, ЖЭТФ, 23, 686, 1952. — [2] E. R. Grilly, E. F. Hammel a. S. G. Sydorjak. Phys. Rev., 75, 1103, 1949. — [3] B. M. Abraham, D. W. Osborne a. B. Weinstock. Phys. Rev., 80, 366, 1950. — [4] A. Th. van Urk, W. H. Keesom a. Kamerlingh Onnes. Leid. Comm., № 179-a; Proc. Roy. Acad. Amsterdam, 28, 958, 1925. — [5] J. F. Allen a. A. D. Misener. Proc. Cambr. Phil. Soc., 34, 290, 1938.



ВРАЩЕНИЕ ГЕЛИЯ II ПРИ БОЛЬШИХ СКОРОСТЯХ

Э. Л. Андроникашвили и И. П. Каверкин

1. При равномерном вращении всякая жидкость образует параболический мениск: глубина которого зависит только от угловой скорости ω и от радиуса сосуда r

$$h = r^2 \omega^2 / 2g, \quad (1)$$

где h — глубина мениска, а g — ускорение силы тяжести.

Поскольку сверхтекучая компонента, как это утверждает теория Ландау [1], не может совершать движений, при которых $\text{rot } v_s \neq 0$, то гелий II должен был бы представлять собой единственную жидкость, мениск которой зависит от плотности его нормальной компоненты, т. е., в конечном счете, от температуры. Действительно, в этом случае сила, действующая на элемент объема жидкости радиально, зависит от плотности нормальной компоненты ρ_n , тогда как сила тяжести, действующая на тот же элемент объема, продолжает оставаться пропорциональной ρ — плотности жидкости как целого. Поэтому глубина мениска в случае гелия II должна выражаться формулой

$$h = \frac{\rho_n}{\rho} \frac{r^2 \omega^2}{2g}. \quad (2)$$

2. Для проверки этого предположения нами был поставлен следующий опыт [2]. Цилиндрический стакан из органического стекла, имевший внутренний диаметр 27 мм и высоту 70 мм, вытачивался на станке и затем тщательно полировался. Ось стакана укреплялась в миниатюрных шариковых подшипнике и подпятнике, зажатых в соответствующие держатели. (Стакан и его ось представляли собой одно целое, так как вытачивались из одного куска материала, причем положение детали в патроне токарного станка не менялось в течение всего процесса обработки.) Прибор помещался внутри гелиевого дьюара. В стакан зачерпывался жидкий гелий, после чего он при помощи механических передач, соединявших его с мотором, приводился во вращение. Опыты охватывали интервал скоростей от 0,5 до 5 об./сек., что при данном радиусе составляло приблизительно от 4 до 40 см/сек. для линейной скорости вращения стакана. Глубина мениска измерялась катетометром, а его форма фиксировалась при помощи фотографического аппарата.

В этом интервале скоростей глубина мениска оказалась не зависящей от температуры и не отличалась от глубины мениска нормальных жидкостей. Это дало повод думать, что искомое явление не было найдено из-за перехода через критические скорости. К таким же результатам пришел и Осборн [3], который, спустя некоторое время и независимо от нас, произвел совершенно аналогичный эксперимент для интервала скоростей от 35 до 70 см/сек.

Однако внимательное рассмотрение формы мениска разрешило нам обнаружить некоторые детали, повидимому, не отмеченные Осборном. Эти детали говорят о том, что даже в области закритических скоростей гелий II представляет собой далеко не нормальную жидкость.

Так, например, было установлено, что мениск, соответствующий скоростям вращения в 5 об./сек., имел в своем центре коническое углубление (рис. 1), не наблюдавшееся на нормальных жидкостях, включая и гелий I. Были отмечены два случая, когда мениск на короткое время переходил в вихрь, прораставший до самого дна стакана. Однако зафиксировать эти случаи на киноплёнку не удалось. Также не удалось определить точные условия, которые приводили к возникновению такого вихря, оказавшегося вследствие этого почти не воспроизводимым. Не совсем обычно протекает процесс раскручивания, при котором периферические части жидкости быстро увлекаются стаканом и поднимаются вверх, тогда как средняя часть жидкости около 120 сек. продолжает оставаться плоской. При торможении центральные участки жидкости образуют конический мениск, который держится на поверхности гелия II в течение 30 сек. (рис. 2).

3. Все эти факты заставляют думать, что в закритической области сверхтекучее состояние хотя и искажается, но не исчезает как таковое. Поэтому для дальнейшего изучения этого явления было важно выбрать такой эксперимент, в котором с наглядностью проявилось бы одно из характерных свойств сверхтекучего состояния. С этой целью нами был выбран эффект фонтанирования.

Опыт проводился на приборе, уже описанном выше, с той разницей, что вдоль оси цилиндрического стакана укреплялся стеклянный капилляр длиной 148 мм, внутренним диаметром 1,2 мм, нижний конец которого набивался крокусом. Капилляр вращался вместе со стаканом.

При погружении прибора в жидкий гелий на пробку из крокуса направлялся луч света, благодаря чему между уровнем жидкости в капилляре и ее уровнем в стакане устанавливалась определенная разность, измерявшаяся катетометром. Затем стакан приводился во вращение. В этих условиях наблюдалось понижение

К статье Э. Л. Андроникашвили и И. П. Каверкина
«Вращение гелия II при больших скоростях»

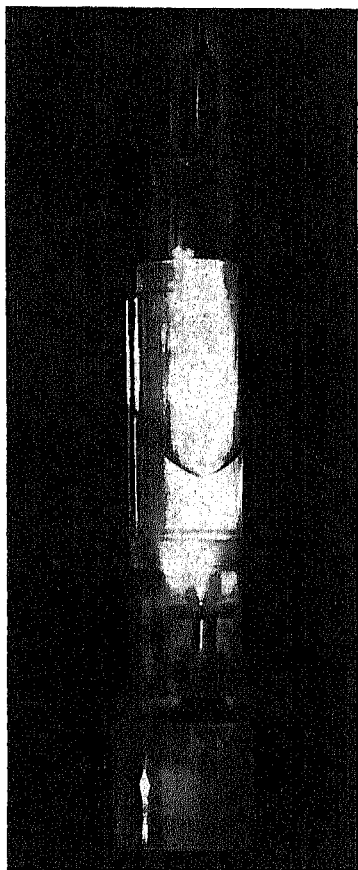


Рис. 1. Мениск вращающегося
гелия II

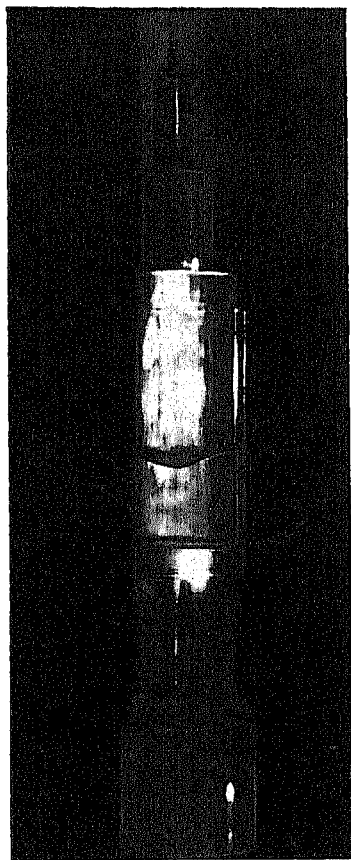


Рис. 2. Мениск вращающегося
гелия II в процессе торможения

уровня гелия II в капилляре на величину, которая в пределах ошибок эксперимента не отличалась от величины смещения центральной части мениска, происходившего под влиянием вращения. Описываемый эксперимент охватывал область скоростей от 0,25 до 22 об./сек. и был повторен при разных температурах. Подводимый поток тепла (интенсивность света) подбирался в каждом случае отдельно. Как видно из таблицы, зависимость термомеханического эффекта от скорости вращения не обнаруживается вплоть до скоростей 16 об./сек., что соответствует линейным скоростям в 136 см/сек.

Зависимость величины термомеханического эффекта от скорости вращения при различных температурах *

p давление в мм рт. ст.	$T^{\circ}K$	n_1	h_1	n_2	h_2	n_3	h_3	n_4	h_4	n_5	h_5	n_6	h_6
30	2,1	0,24	135	1,6	134	3,3	135	6,8	135	12	135	16,2	135
20	1,95	0,24	120	2,2	120	4,8	120	7,1	120	10,5	120	17,2	120
10	1,74	0,24	105	1,6	105	5,2	105	8,5	105	10,8	105	15,5	105

* n — число оборотов в секунду; h — высота столба He в миллиметрах ртутного столба.

В другом опыте тот же капилляр, неподвижно закрепленный независимо от стакана, смещался вдоль его радиуса, играя, таким образом, роль мешалки. Однако и в этом случае высота поднятия уровня гелия II в капилляре при изменении скорости до 160 см/сек. менялась незначительно.

Из описанных экспериментов следует, что при переходе через критическую скорость явление сверхтекучести не только не исчезает, но что и количественные характеристики, как, например, термомеханический эффект и связанная с ним величина p_n/p , вплоть до весьма больших скоростей, в пределах ошибок измерения остаются неизменными и независимыми от скорости вращения. Можно также утверждать, что в области закритических скоростей сверхтекучая компонента совершает движения, при которых $\text{rot } v_s$ отличен от нуля.

Институт физических проблем
Академии наук СССР
Институт физики
Академии наук Грузинской ССР

Поступило в редакцию
24 июня 1954 г.

Литература

[1] Л. Д. Ландау. ЖЭТФ, 11, 596, 1941. — [2] Э. Л. Андроникашвили. Диссертация, Ин-т физ. пробл. АН СССР, М., 1948. — [3] D. V. Osborne. Proc. Phys. Soc. A, 63, 909, 1950.

Академия наук СССР
Физический Ин-т
БИБЛИОТЕКА

ПОПРАВКА

к статье Н. П. Клепикова «Излучение фотонов и электронно-позитронных пар в магнитном поле» (ЖЭТФ, 26, 19, 1954)

В формулы (3.7) и (3.8) моей статьи вкрались неточности:

в (3.7) вместо $\frac{V\overline{l+p+r'}}{V\overline{l+p}-\sin^2\theta V\overline{q}}$ следует читать:

$$\frac{V\overline{l'+p+r'}}{V\overline{l+p}-\sin\theta V\overline{q}};$$

первую строку формулы (3.8) следует читать:

$$J = \frac{ce^2}{4\pi} \sum_{n=0}^l \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{2\gamma q V\overline{l'+p+r'}}{\sin^2\theta [V\overline{l+p}-\sin\theta V\overline{q}]} \sum_{s,s'=\pm 1} \{ |\overline{\alpha}_x|^2 (1 - \sin^2\theta \cos^2\varphi) +$$

$$+ |\overline{\alpha}_y|^2 (1 - \sin^2\theta \sin^2\varphi) + \dots$$

Кроме того, в статье допущены следующие опечатки:

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
27	Формула (4.1)	$K_{1/2}^2(t)$	$K_{1/2}^2(t)$
28	Формула (4.6)	$Z^{-1/2}$	$Z^{-2/3}$
30	Формула (5.2)	$K_{2/2}^2$	$K_{1/2}^2$
30	6-я снизу	$2^{1/2}$	$2^{1/3}$
33	5-я снизу	очень мал	очень мал,

Н. П. Клепикова

К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция ЖЭТФ просит авторов при направлении статей в печать руководствоваться изложенными ниже правилами. СТАТЬИ, ПРИСЛАННЫЕ БЕЗ СОБЛЮЖДЕНИЯ ПЕРЕЧИСЛЕННЫХ ПРАВИЛ, К РАССМОТРЕНИЮ РЕДАКЦИЕЙ ПРИНИМАТЬСЯ НЕ БУДУТ.

1. Статьи, являющиеся результатом работ, проведенных в институтах, должны обязательно иметь направление от соответствующего института.

2. Редакция в особенности обращает внимание авторов на то, что статьи должны быть изложены с предельной краткостью, совместимой с ясностью изложения, и окончательно обработаны. Следует избегать повторения данных таблиц или графиков в тексте статьи, а также представления численных результатов в виде таблиц и графиков одновременно.

Статьи объемом свыше 1 печ. листа (т. е. 21—22 стр. текста на пишущей машинке) вообще не допускаются. Как текст, так и графический материал должны представляться обязательно в двух экземплярах.

3. Статья должна иметь краткую аннотацию, указывающую цель и результаты работы. Аннотация и раздел «Выводы» (если таковой имеется в статье) не должны, однако, дублировать друг друга.

4. Статьи должны быть напечатаны на пишущей машинке с одной стороны листа; рукописные вставки не допускаются. Формулы должны быть вписаны четко чернилами. Все страницы рукописи должны быть пронумерованы. Таблицы должны быть напечатаны на отдельных от текста страницах.

СТАТЬИ ДОЛЖНЫ БЫТЬ ОБЯЗАТЕЛЬНО ПОДПИСАНЫ АВТОРОМ, А ПРИ НАЛИЧИИ НЕСКОЛЬКИХ АВТОРОВ — ВСЕМИ СОАВТОРАМИ.

5. Во избежание недоразумений и ошибок следует делать ясное различие между заглавными и строчными буквами в формулах. В тех случаях, когда заглавные и строчные буквы одинаковы по начертанию и отличаются только своим размером (*V* и *v*, *U* и *u*, *W* и *w*, *O* и *o*, *K* и *k*, *S* и *s*, *I* и *i*, *C* и *c*, *P* и *p*), — необходимо заглавные буквы подчеркивать снизу двумя черточками (например, S), а строчные помечать двумя черточками сверху (например, s). Необходимо делать различие между *O* (большой), *o* (малой) и 0 (нулем), для чего букву *O* и *o* подчеркивать двумя черточками: O и o, а нуль оставлять без подчеркивания. Необходимо также различать буквы *I* и *J*, для чего в рукописи букву *I* писать как римскую единицу с точкой вверх.

Греческие буквы должны подчеркиваться красным карандашом. Векторы подчеркивать синим или черным карандашом.

6. Подстрочные примечания должны иметь сплошную нумерацию по всей статье. Цитируемая литература должна даваться не в виде подстрочных примечаний, а общим списком в конце статьи, с указанием в тексте статьи ссылки порядковой цифрой над строкой, в прямых скобках (например, [1]). Цитируемая литература должна быть оформлена в следующем порядке: а) для журнальных статей указываются инициалы и фамилия авторов, название журнала, номер тома (подчеркнуть снизу), страница и год; б) для книг надо указывать инициалы и фамилию авторов, полное название книги, год и место издания (для книг иностранного происхождения — указывать данные русского перевода, если таковой имеется).

7. Все рисунки и чертежи должны быть представлены отдельно от рукописи и ни в коем случае не должны приклеиваться к оригиналу. Рисунки желательно снабжать разъясняющими подписями, которые должны быть собраны на отдельном листе. На обороте рисунков должны быть указаны фамилия автора, название статьи и номер рисунка. Надписи на рисунках следует по возможности заменять цифрами или буквенными обозначениями в подписи к рисунку или в тексте.

Редакция просит авторов ограничиваться минимальным числом рисунков к статьям.

8. Редакция просит авторов отмечать на полях рукописи места, которые могут быть набраны петитом.

9. Редакция посылает автору одну корректуру. Изменения и дополнения в тексте не допускаются. Корректурa с подписью автора должна быть выслана обратно в редакцию в течение суток с момента ее получения.

10. К рукописи должен быть приложен точный адрес, фамилия, имя и отчество автора, а также номер телефона, служебного или домашнего (для авторов, проживающих в Москве).

11. РУКОПИСИ, НЕ ПРИНЯТЫЕ РЕДАКЦИЕЙ, АВТОРУ НЕ ВОЗВРАЩАЮТСЯ.

Адрес редакции, Москва, Подсосенский пер., 21, Изд-во АН СССР.