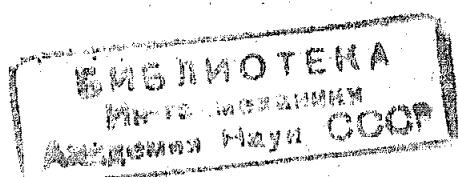


ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ



Том 27

Вып. 6 (12)

ДЕКАБРЬ 1954 г.

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

СОДЕРЖАНИЕ

Виталий Иванович Данилов (1902—1954 гг.)	657
В. И. Ритус. Образование π -мезонов фотонами и пуклонные изобары	660
В. И. Скобелкин. О двойном лучепреломлении в нелинейной электродинамике	677
И. Р. Юхновский. Бинарная функция распределения для систем взаимодействующих заряженных частиц. I	690
С. А. Каплан. Спектральная теория газомангнитной изотропной турбулентности	699
Б. Л. Тиман. Влияние взаимодействия ионов на их равновесные концентрации в случае многократной термической ионизации газа	708
Л. А. Вайнштейн и Б. М. Яворский. О приближенном вычислении сил осцилляторов и эффективных сечений фотоионизации	712
Л. Л. Коренблит. К теории магнитных свойств атомных полупроводников. I	719
С. П. Дьяков. Ударные волны в релаксирующей среде	728
Г. И. Сканава и В. В. Маслов. Диэлектрические свойства и структура поликристаллов системы $ZnO \cdot TiO_2 - 1,5 MgO \cdot TiO_2$	735
Г. И. Сканава и А. Н. Губкин. Исследование диэлектрической поляризации дипольных органических кристаллов	742

Письма в редакцию

В. П. Силин. О модифицированном методе Тамма	754
Дуань И-Ши. Обобщение регулярных решений уравнений гравитации Эйнштейна и электромагнетизма Максвелла для точечного заряда	756
Г. Е. Пустовалов. Влияние объема на поляризационный сдвиг уровней в мезоатомах	758
Г. А. Аскаръян. О генерации радиоволн миллиметрового диапазона при прохождении электронного сгустка через тормозящую среду	761
М. И. Каганов и М. Я. Азбель. Прочность тонких металлических пленок	762
Г. А. Воробьев. Замечания на «Предпробивные токи в жидкостях»	764
Алфавитный указатель	765

Главный редактор *Н. Н. АНДРЕЕВ*

Зам. главного редактора *М. М. СУЩИНСКИЙ*

Редколлегия

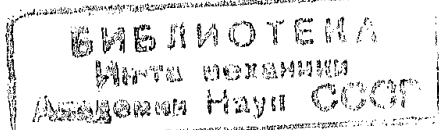
Н. А. КАПЦОВ, В. П. ПЕШКОВ, Д. В. СКОБЕЛЬЦЫН,
Н. Н. СОВОЛЕВ, М. М. СУЩИНСКИЙ, И. Е. ТАММ,
Я. П. ТЕРЛЕЦКИЙ, Е. Л. ФЕЙНБЕРГ

Подписано к печати 15.XII 1954 г. Т-08542 Формат бум. $70 \times 108^{1/16}$. Бум. л. $3^{1/2}$
Печ. л. 9,59+1 вклейка Уч.-изд. л. 11,6 Тираж 3100 экз. Зак. 763

2-я типография Издательства Академии наук СССР. Москва, Шубинский пер., 10



ВИТАЛИЙ ИВАНОВИЧ ДАНИЛОВ
(1902—1954)

**ВИТАЛИЙ ИВАНОВИЧ ДАНИЛОВ**

(1902 — 1954 гг.)

19 марта 1954 г., на 52-м году жизни, в расцвете творческих сил скончался выдающийся советский ученый, лауреат Сталинской премии, действительный член АН УССР Виталий Иванович Данилов.

В. И. Данилов родился 10 апреля 1902 г. в г. Желтое Ворошиловградской области. По окончании гимназии работал учителем сельской школы. В 1923 г. поступил на физико-математический факультет Института народного образования в Днепропетровске, окончил его в 1926 г. и был оставлен ассистентом кафедры физики. В 1934 г. В. И. Данилову было присвоено звание профессора, а в 1940 г. он защитил диссертацию на ученую степень доктора физико-математических наук. С 1935 по 1941 г. Виталий Иванович руководил кафедрой молекулярной физики Днепропетровского государственного университета. В 1931 г. он принимал деятельное участие в организации нового научного учреждения — Днепропетровского физико-технического института, где создал лабораторию кристаллизации, которой и руководил до конца своей жизни. В 1945 г. В. И. Данилов был избран членом-корреспондентом, а в 1951 г. — действительным членом АН УССР. С 1946 г. он руководил отделом кристаллизации лаборатории металлофизики АН УССР, а в 1951 г. был назначен директором этой лаборатории и оставался на этом посту до последнего дня своей жизни.

Виталий Иванович Данилов — создатель и руководитель советской школы физиков в области рентгенографического изучения атомного строения жидкостей и физической теории кристаллизации. Разработке этих двух направлений была посвящена вся его научная деятельность.

Теория строения кристаллов возникла еще до появления рентгеноструктурного анализа кристаллов, в то время как физической теории жидкого состояния не существовало. По словам С. И. Вавилова, «учение о жидком состоянии оставалось темным пятном в области физики, мало изученным и мало понятным». Существовало даже мнение о невозможности построения теории жидкостей, ввиду отсутствия для них достаточно общих закономерностей. Виталий Иванович был пионером разработки отечественной науки о строении жидкости и приобрел широкую известность как автор многочисленных работ по созданию методов исследования жидкостей и по изучению их структуры.

В результате появившихся в конце двадцатых и начале тридцатых годов работ по изучению структуры жидкой ртути в литературе наметилась тенденция приписывать одноатомным жидкостям структуру плотно упакованных шаров. В работах, проведенных в 1933—1934 гг. в Днепропетровском физико-техническом институте, В. И. Данилов показал, что вблизи точки кристаллизации жидкая ртуть имеет структуру, отличающуюся от плотной упаковки: взаимное расположение атомов приближается к тому, какое имеет место в твердом состоянии.

В дальнейшем исследования ряда легкоплавких металлов с различной кристаллической структурой (свинец, олово, висмут) и сплавов, проведенные в лаборатории, руководимой Виталием Ивановичем, показали, что: 1) различные жидкие металлы могут обладать различной упаковкой атомов; 2) характер упаковки в небольших областях жидких металлов оказывается близким к упаковке атомов в их кристаллах; координационное число при плавлении сохраняется; 3) в жидких сплавах эвтектического типа существуют области с двумя типами упаковки атомов, близкими к расположению атомов компонентов в твердом состоянии.

В. И. Даниловым был проведен ряд исследований по изучению структуры растворов электролитов и определению строения молекул из рентгенограмм жидкостей. В иностранной литературе в послевоенные годы появились работы по определению функции атомного размещения жидких металлов, результаты которых находились в противоречии с выводами Виталия Ивановича о сохранении координации атомов при плавлении. В книге «Структура атомов» Баррета были подвергнуты сомнению результаты работ В. И. Данилова по жидким эвтектическим сплавам. В последние годы Виталием Ивановичем с сотрудниками было вновь проведено исследование ряда жидких металлов, эвтектических сплавов и других эвтектических жидких систем с применением более совершенной методики. Результаты этих работ полностью совпадают с данными, полученными в довоенных исследованиях. Последние работы по нейтронографии жидких металлов подтверждают выводы Виталия Ивановича о сохранении координационного числа при плавлении.

Большое научное значение работ В. И. Данилова по кристаллизации жидкостей определяется тем, что в них решен ряд принципиальных вопросов перехода вещества из жидкого в твердое состояние, установлена физическая сущность явления зарождения центров кристаллизации и влияния на этот процесс различных факторов. Об этих работах с полным правом можно сказать, что они наполнили термодинамическую и статистическую теорию кристаллизации физическим содержанием и создали экспериментальную базу теории. Было установлено, что большое влияние на скорость зарождения центров кристаллизации оказывают нерастворимые примеси, что скорость кристаллизации обычно обуславливается не спонтанным зарождением центров, а их образованием на частичках нерастворимых примесей. Тщательная очистка от примесей в некоторых случаях приводила к невозможности закристаллизовать вещество даже при очень медленном охлаждении. В связи с этим некоторыми исследователями ставилась под сомнение вообще возможность наблюдения спонтанной кристаллизации. Путем применения усовершенствованных способов очистки веществ от нерастворимых примесей и использования закономерностей процесса их дезактивации В. И. Данилову впервые удалось показать возможность исключения влияния примесей и экспериментально решить вопрос о возможности наблюдения так называемого «спонтанного» зарождения центров кристаллизации. Установлены критерии, позволяющие отличать спонтанную кристаллизацию от кристаллизации на примесях. Изучение спонтанной кристаллизации на большом числе органических веществ и легкоплавких металлов позволило проверить теорию флуктуационного зарождения центров кристаллизации. В. И. Даниловым даны способы определения физических констант (поверхностное натяжение, энергия активации), характеризующих кинетику кристаллизации. Были получены экспериментальные данные о величине поверхностного натяжения на границе жидкость-кристалл для ряда веществ, изучен механизм влияния растворимых примесей на кристаллизацию жидкостей.

Выяснение физической сущности процессов кристаллизации и механизма влияния растворимых и нерастворимых примесей открыло новые возможности воздействия на структуру и свойства литого металла путем рационального выбора модификаторов, воздействия звуковых колебаний и создания специальных условий кристаллизации.

Указанными направлениями не исчерпывается научная деятельность В. И. Данилова. Значительное место в его работах занимает исследование строения углей и коксов. Применение методов рентгенографии для изучения структуры аморфных углей позволило обнаружить важные детали тонкого строения углей и коксов.

Влияние работ В. И. Данилова на металлургическую практику будет возрастать по мере того, как, с одной стороны, будут развиваться работы по использованию теоретических обобщений для решения различных технических задач, а, с другой стороны, металлурги-исследователи и инженеры будут овладевать физической теорией.

Работы Виталия Ивановича по теории кристаллизации оказали глубокое влияние на физическое металловедение, так как основные закономерности кристаллизации жидкостей справедливы и для фазовых превращений в твердом состоянии, для таких важнейших явлений термической обработки, как распад пересыщенных твердых растворов, распад аустенита и, в определенной мере, мартенситное превращение. Труды его по строению жидкостей и кристаллизации являются в настоящее время неотъемлемой частью курсов металлографии, физического металловедения и молекулярной физики.

В. И. Данилов был не только крупным ученым, но и замечательным педагогом, с большой любовью и талантом воспитывавшим научную молодежь. Все свои силы и знания он отдавал развитию советской науки и служил примером того, как нужно шаг за шагом проникать в сущность явлений, открывая все новые и новые закономерности, и связывать их с практическими вопросами; примером того, как надо критически относиться к результатам собственных исследований, твердо отстаивая проверенные опытом теоретические положения. В Виталии Ивановиче сочетались светлый ум, изобретательность тонкого экспериментатора и широкая эрудиция. Общение с ним всегда оказывало плодотворное влияние на творческую деятельность работников самых различных областей науки и техники.

Заслуги В. И. Данилова неоднократно отмечались Правительством. Его работы по кристаллизации жидкостей получили высокую оценку и удостоены Сталинской премии в 1950 г. За проведение ряда работ в период Великой Отечественной войны он был награжден орденом Красной Звезды. В 1951 г. награжден орденом Трудового Красного Знамени.

Велики заслуги В. И. Данилова и в активной пропаганде передовых научных идей. Доклады Виталия Ивановича на научных совещаниях и конференциях отличались богатством содержания и совершенством формы. Ему принадлежит заслуга организации и проведения двух Всесоюзных совещаний по физике жидкого состояния, превратившихся в яркую демонстрацию успехов передовой советской науки.

Товарищи, ученики, сотрудники—все, соприкасавшиеся с Виталием Ивановичем, сохраняют светлую память о замечательном ученом и человеке, горячем советском патриоте, отдавшем все силы и знания служению науке, советскому народу.

ОБРАЗОВАНИЕ π -МЕЗОНОВ ФОТОНАМИ И НУКЛОННЫЕ ИЗОБАРЫ

В. И. Ритус

Поперечные сечения фоторождения мезонов на нуклонах вычисляются с учетом возбужденных состояний нуклонов (изобаров) и затухания. Возбужденное состояние нуклонов описывается релятивистским уравнением для частицы с механическим спином $3/2$ и изотопическим спином $3/2$. Две константы связи, входящие в лагранжиан, описывающий переходы из основного состояния нуклона в возбужденное, и обратно, с поглощением или испусканием фотона, подбираются из сравнения с экспериментом. Остальные постоянные взяты из работы [1] по рассеянию мезонов на нуклонах. Получено удовлетворительное согласие с опытом.

1. Введение

Недавние эксперименты по рассеянию [2] и фоторождению [3-10] мезонов на протонах показали, что ход экспериментальных сечений и угловое распределение рассеянных частиц сильно отличаются от того, что дает обычная теория для псевдоскалярных мезонов с псевдоскалярной и псевдовекторной связями. Резонансный характер экспериментальных сечений и фазовый анализ угловых распределений показали, что существенную роль в процессе рассеяния и фоторождения мезонов на нуклонах играет промежуточное состояние системы, механический и изотопический спины которого равны $3/2$. Такие и подобные им состояния системы будут автоматически учитываться в будущей теории взаимодействия мезонов и нуклонов. Можно, однако, попытаться приблизиться к этой будущей теории, построив полуфеноменологическую теорию взаимодействия мезонов и нуклонов, основанную на рассмотрении возбужденного состояния нуклона (изобара) с механическим и изотопическим спином $3/2$ [1, 11]. Сравнение с экспериментом будет основным критерием правильности такого приближения. Таким образом нуклоны, взаимодействуя с внешним или своим собственным полем, могут совершать переходы из обычного состояния в возбужденное, испуская или поглощая при этом мезон или фотон. Невозбужденное состояние нуклона описывается обычным уравнением Дирака для частицы с механическим и изотопическим спином $1/2$ и массой m . Возбужденное состояние нуклона описывается уравнением для частицы с механическим и изотопическим спином $3/2$ и массой M , величина которой подбирается на основании экспериментальных данных. Лагранжиан взаимодействия содержит, помимо обычных членов, еще новые члены, приводящие к виртуальным переходам из основного состояния в возбужденное и из возбужденного в основное с поглощением или испусканием мезона или фотона. На лагранжиан взаимодействия, в том числе и на новые члены, накладывается требование зарядовой независимости. Кроме того, при построении новых членов взаимодействия предполагается, что возбужденное состояние нуклонов имеет четность, противоположную четности обычного нуклона. В самом деле, если предположить, что изобар имеет четность, совпадающую с четностью нуклона, то лагранжиан взаимодействия, описывающий переходы нуклона из основного состояния в возбужденное (или обратно) с испусканием или поглощением мезона, должен содержать матрицу γ_5 , и взаимодействие

будет исчезать при малых энергиях возбуждения. На самом же деле возбужденное состояние нуклона играет роль уже при малых энергиях возбуждения, и, следовательно, оно должно иметь четность, противоположную четности основного состояния нуклона.

После того как общий лагранжиан записан, проводится вычисление матричных элементов фоторождения с применением техники Фейнмана^[12]. Амплитуды рассеянных волн и эффективные сечения находятся при помощи теории рассеяния Гайтлера^[13], учитывающей затухание. Получающиеся при этом интегральные уравнения решаются методом разложения функций в ряды по ортогональной системе угловых полиномов-матриц. Дифференциальные поперечные сечения вычисляются с учетом только s и p рассеянных мезонных волн.

Фоторождение мезонов на нуклонах с учетом возбужденных состояний нуклонов было ранее вычислено в работе^[11]. Однако затухание в этой работе учтено очень грубо введением его лишь в резонансный член матрицы рассеяния. Кроме того, основные лагранжианы взаимодействия (4,5), (4,6) в^[11] зарядово неинвариантны, и поэтому матрица рассеяния для фоторождения мезонов также зарядово неинвариантна¹. Получаемые в^[11] поперечные сечения плохо согласуются с экспериментом, особенно, при больших энергиях фотонов. В данной работе затухание введено последовательно во все члены матрицы рассеяния методом Гайтлера^[13], а лагранжианы записаны зарядово инвариантным образом. Полученный результат удовлетворительно согласуется с экспериментом.

В настоящей работе выполняется часть программы, предложенной И. Е. Таммом и направленной на создание полуфеноменологической теории, единым образом описывающей различные процессы взаимодействия мезонов и нуклонов и использующей единую систему констант. В частности, здесь используются результаты работы^[1] и константы f, g, G и M , полученные там для процесса рассеяния мезонов.

2. Лагранжиан нуклона, взаимодействующего с мезонным и электромагнитным полями

Будем использовать систему единиц, в которой $\hbar = 1$, $c = 1$, и обозначения Фейнмана. В этих обозначениях метрический тензор $\delta_{\mu\nu}$ имеет вид

$$\delta_{00} = 1, \delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = -1, \delta_{\nu\mu} = 0, \text{ если } \mu \neq \nu.$$

Скалярное произведение двух четырехмерных векторов a_μ и b_μ равно

$$a_\mu b_\mu = (ab) = a_4 b_4 - a_1 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_3.$$

x_μ и $\partial/\partial x_\mu$ означают соответственно

$$x_4 = t, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z; \frac{\partial}{\partial x_4} = \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_1} = -\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x_2} = -\frac{\partial}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial x_3} = -\frac{\partial}{\partial z}.$$

Матрицы γ_μ , γ_5 имеют вид

$$\gamma_4 = \beta, \gamma_k = \beta \alpha_k, \gamma_5 = i\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$$

и удовлетворяют условиям

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}.$$

¹ Заметим, что непонятным образом матрица рассеяния для процесса рассеяния мезонов оказалась в^[11] зарядово-инвариантной, несмотря на зарядовую неинвариантность выражений (4,5), (4,6)!

Скалярное произведение четырехмерного вектора a_μ на матрицу γ_μ будем обозначать $\hat{a} = a_\mu \gamma_\mu$.

Полный лагранжиан системы $\mathcal{L}$ представим в виде суммы $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{вз}}$. Лагранжиан свободного движения $\mathcal{L}_0$ есть сумма лагранжианов свободного движения нуклонного, изобарного, мезонного и электромагнитного полей:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_N^0 &= \bar{\psi} \left(i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} - m \right) \psi, \\ \mathcal{L}_B^0 &= -\bar{B}_\mu \left(i\gamma_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} - M \right) B_\mu + i \left(\bar{B}_\mu \frac{\partial D}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \bar{D}}{\partial x_\mu} B_\mu \right) - \frac{3}{2} i \bar{D} \gamma_\mu \frac{\partial D}{\partial x_\mu} - 3M \bar{D} D, \\ \mathcal{L}_M^0 &= \frac{\partial \varphi^+}{\partial x_\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} - \mu^2 \varphi^+ \varphi + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_\mu} \right)^2 - \mu^2 \varphi_0^2 \right], \\ \mathcal{L}_\Phi^0 &= \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \right) \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \right).\end{aligned}\quad (2.1)$$

Здесь ψ , B_μ , D — волновые функции нуклонов в основном и возбужденном состояниях, φ^+ , φ , φ_0 — комплексные функции мезонного поля, A_μ — четырехмерный потенциал электромагнитного поля. m , M , μ — массы нуклона, изобара и мезона, $\bar{\psi} = \psi^\dagger \beta$. Операторы φ и A_μ разложены, как обычно,

$$\begin{aligned}\varphi &= \sqrt{\frac{1}{2\varepsilon}} (a_+ e^{-i(qx)} + a_-^+ e^{i(qx)}), \\ \varphi^+ &= \sqrt{\frac{1}{2\varepsilon}} (a_+^+ e^{i(qx)} + a_- e^{-i(qx)}), \\ \varphi_0 &= \sqrt{\frac{1}{2\varepsilon}} (a_0 e^{-i(qx)} + a_0^+ e^{i(qx)}), \\ A_\mu &= e_\mu \sqrt{\frac{2\pi}{k}} (c e^{-i(kx)} + c^+ e^{i(kx)}).\end{aligned}\quad (2.2)$$

a_+ , a_- , a_0 и a_+^+ , a_-^+ , a_0^+ — операторы поглощения и рождения положительных, отрицательных и нейтральных мезонов; c и c^+ — операторы поглощения и рождения фотонов; $q_\mu = (\varepsilon, \mathbf{q})$ и $k_\mu = (k, \mathbf{k})$ — четырехмерные импульсы мезона и фотона. Лагранжиан взаимодействия $\mathcal{L}_{\text{вз}}$ есть сумма лагранжианов:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{нф}} &= -e \bar{\psi} \tau_p \hat{A} \psi, \\ \mathcal{L}_{\text{нм}} &= i f \sqrt{4\pi} \bar{\psi} \gamma_5 (\tau \varphi + \tau^+ \varphi^+ + \tau_0 \varphi_0) \psi + \\ &+ \frac{g \sqrt{4\pi}}{\mu} \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\mu \left(\tau \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} + \tau^+ \frac{\partial \varphi^+}{\partial x_\mu} + \tau_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_\mu} \right) \psi, \\ \mathcal{L}_{\text{мф}} &= -ie A_\mu \left(\varphi^+ \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \varphi^+}{\partial x_\mu} \varphi \right) + e^2 A_\mu^2 \varphi^+ \varphi, \\ \mathcal{L}_{\text{нмф}} &= i \frac{eg \sqrt{4\pi}}{\mu} \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\mu A_\mu (\tau \varphi - \tau^+ \varphi^+) \psi, \\ \mathcal{L}_{\text{инм}} &= \frac{G \sqrt{4\pi}}{\mu} \bar{B}_\mu \left(S \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} + S^+ \frac{\partial \varphi^+}{\partial x_\mu} + S_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_\mu} \right) \psi + \\ &+ \frac{G \sqrt{4\pi}}{\mu} \bar{\psi} \left(S \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} + S^+ \frac{\partial \varphi^+}{\partial x_\mu} + S_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_\mu} \right) B_\mu, \\ \mathcal{L}_{\text{инф}} &= i \frac{e}{m} \bar{B}_\mu N F_{\mu\nu} \gamma_\nu \gamma_5 \psi - i \frac{e}{m} \bar{\psi} N F_{\mu\nu} \gamma_\nu \gamma_5 B_\mu.\end{aligned}\quad (2.3)$$

Лагранжианы взаимодействия написаны в предположении, что мезонное поле псевдоскалярное, а поле B_μ , описывающее состояние со спином $3/2$, — псевдоспинвекторное. Лагранжиан $\mathcal{L}_{\text{нм}}$ соответствует переходам нуклона из основного состояния в изобарное, и обратно, с поглощением или испусканием мезона; G — константа связи таких переходов размерности заряда; S , S^+ , S_0 — шестирядные матрицы в изотопическом пространстве, определенные из требования зарядовой независимости выражения $\mathcal{L}_{\text{нм}}$ и являющиеся аналогом изотопических матриц τ , τ^+ , τ_0 :

$$\begin{aligned} \tau = \tau_+ = \tau_-^+ &= \frac{1}{2}(\tau_1 + i\tau_2), \quad \tau^+ = \tau_+^+ = \tau_- = \frac{1}{2}(\tau_1 - i\tau_2), \quad \tau_0 = \tau_0^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\tau_3; \\ S = S_+ = S_-^+ &= \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & & 0 & 1 & 0 \\ & & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ \hline -\sqrt{3} & 0 & & & \\ 0 & -1 & & & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \end{array} \right); \\ S^+ = S_+^+ = S_- &= \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & & -\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & & & & 0 \\ 1 & 0 & & & & \\ 0 & \sqrt{3} & & & & \end{array} \right); \quad (2.4) \\ S_0 = S_0^+ &= \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & & & & \\ \sqrt{2} & 0 & & & & \\ 0 & \sqrt{2} & & & & 0 \\ 0 & 0 & & & & \end{array} \right). \end{aligned}$$

Лагранжиан $\mathcal{L}_{\text{нф}}$ соответствует переходам из нуклонного состояния в изобарное, и обратно, с поглощением или испусканием фотона. Интенсивность таких переходов определяется постоянной связи $(e/m)N$ размерности магнитного момента, где N — шестирядная эрмитова матрица в изотопическом пространстве, определенная из требования сохранения проекции изотопического спина при переходах нуклона из основного состояния в изобарное. Вследствие этого

$$N = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & & 0 & a & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & b & 0 \\ \hline 0 & 0 & & & & \\ a^+ & 0 & & & & \\ 0 & b^+ & & & & 0 \\ 0 & 0 & & & & \end{array} \right); \quad (2.5)$$

a^+ и a соответствуют переходам из состояния протона в состояние изобара с $I_z = 1/2$, и обратно, b^+ и b соответствуют переходам из состояния нейтрона в состояния изобара с $I_z = -1/2$, и обратно. Представляя B_μ и ψ в виде

$$B_\mu = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_\mu^{3/2} \\ B_\mu^{1/2} \\ B_\mu^{-1/2} \\ B_\mu^{-3/2} \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_P \\ \psi_N \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

можно записать $\mathcal{L}_{\text{ннм}}$ и $\mathcal{L}_{\text{ннф}}$ в форме:

$$\mathcal{L}_{\text{ннм}} = \frac{G V \sqrt{4\pi}}{\mu} \left\{ -\sqrt{3} \bar{B}_\mu^{3/2} \psi_P \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} - \bar{B}_\mu^{1/2} \left(\psi_N \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} - V \sqrt{2} \psi_P \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_\mu} \right) + \right. \\ \left. + \bar{B}_\mu^{-1/2} \left(\psi_P \frac{\partial \varphi^+}{\partial x_\mu} + V \sqrt{2} \psi_N \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_\mu} \right) + \sqrt{3} \bar{B}_\mu^{-3/2} \psi_N \frac{\partial \varphi^+}{\partial x_\mu} \right\} + \text{компл. сопр.} \quad (2.6)$$

$$\mathcal{L}_{\text{ннф}} = i \frac{e}{m} \{ a^+ \bar{B}_\mu^{1/2} F_{\mu\nu} \gamma_\nu \gamma_5 \psi_P + b^+ \bar{B}_\mu^{-1/2} F_{\mu\nu} \gamma_\nu \gamma_5 \psi_N + a \bar{\psi}_P F_{\mu\nu} \gamma_5 \gamma_\nu B_\mu^{1/2} + \\ + b \bar{\psi}_N F_{\mu\nu} \gamma_5 \gamma_\nu B_\mu^{-1/2} \}.$$

3. Матрица рассеяния и вычисление матричных элементов

Для вычисления матрицы перехода системы из начального состояния — нуклон и фотон с четырехмерными импульсами $p_{1\mu}$ и k_μ — в конечное — нуклон и мезон с четырехмерными импульсами $p_{2\mu}$ и q_μ — воспользуемся методом Фейнмана [12]. Ограничимся вычислением матрицы перехода второго порядка. Легко видеть, что все возможные матричные элементы переходов второго порядка, допустимые лагранжианами взаимодействия (2.3), исчерпываются следующими шестью диаграммами Фейнмана (рис. 1):

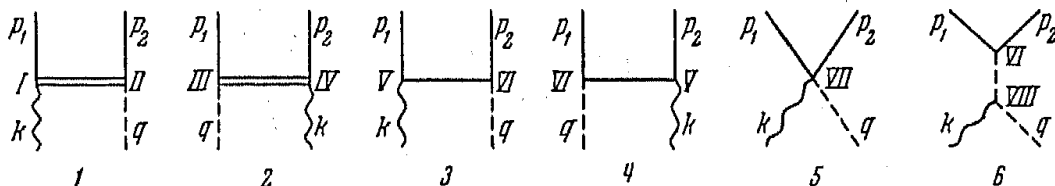


Рис. 1. Диаграммы Фейнмана матричных элементов второго порядка для процесса $\gamma + N \rightarrow \pi + N'$; $\equiv$ — изобар, — — нуклон, — — мезон, --- — фотон

Каждой вершине такой диаграммы соответствует оператор взаимодействия, вид которого может быть просто получен, как правая часть соответствующих уравнений движения изобара, нуклона и мезона. В импульсном представлении эти операторы имеют вид (под a_r и c понимаются $a_r e^{-i(qx)}$ и $c e^{-i(kx)}$ соответственно):

I. Переход нуклона в изобар с поглощением или испусканием фотона:

$$- \frac{e}{m} N \sqrt{\frac{2\pi}{k}} (c - c^+) [e_\mu \hat{k} - k_\mu \hat{e} - \frac{1}{4} \gamma_\mu (\hat{e} \hat{k} - \hat{k} \hat{e})] \gamma_5.$$

II. Переход изобара в нуклон с испусканием или поглощением мезона сорта r :

$$- i \frac{G}{\mu} \sqrt{\frac{2\pi}{\epsilon}} (S_r^+ a_r^+ - S_r a_r) q_\mu.$$

III. Переход нуклона в изобар с испусканием или поглощением мезона сорта r :

$$i \frac{G}{\mu} \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon}} (S_r^+ a_r^+ - S_r a_r) \left(q_\mu - \frac{1}{4} \gamma_\mu \hat{q} \right).$$

IV. Переход изобара в нуклон с поглощением или испусканием фотона:

$$- \frac{e}{m} N \sqrt{\frac{2\pi}{k}} (c - c^+) (e_\mu \hat{k} - k_\mu \hat{e}) \gamma_5.$$

V. Переход нуклона в нуклон с поглощением или испусканием фотона:

$$e \sqrt{\frac{2\pi}{k}} (c + c^+) \tau_p \hat{e}.$$

VI. Переход нуклона в нуклон с испусканием или поглощением мезона сорта r :

$$- i f \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon}} (\tau_r^+ a_r^+ + \tau_r a_r) \gamma_5 - i \frac{g}{\mu} \sqrt{\frac{2\pi}{\varepsilon}} (\tau_r^+ a_r^+ - \tau_r a_r) \gamma_5 \hat{q}.$$

VII. Переход нуклона в нуклон с поглощением или испусканием фотона и испусканием или поглощением мезона сорта r одновременно:

$$i \frac{eg}{\mu} \sqrt{\frac{2\pi}{k\varepsilon}} (c + c^+) [(\tau_r^+ \tau_p - \tau_p \tau_r^+) a_r^+ - (\tau_r \tau_p - \tau_p \tau_r) a_r] \gamma_5 \hat{q}.$$

VIII. Поглощение или испускание фотона положительным, или отрицательным мезоном:

$$e_r \sqrt{\frac{2\pi}{k}} 2(eq)(c + c^+), \quad e_+ = e, \quad e_- = -e, \quad e_0 = 0.$$

Каждой внутренней линии на диаграмме соответствует определенный оператор распространения. В импульсном представлении операторы распространения изобара [14], нуклона и мезона с импульсами $\hat{p}$ равны соответственно

$$K_{\mu\nu}(p) = (\hat{p} - M)^{-1} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{\gamma_\mu \hat{p} p_\nu}{6M^2} - \frac{p_\mu p_\nu}{3M^2} - \frac{\gamma_\mu p_\nu}{2M} \right), \quad (3.1)$$

$$(\hat{p} - m)^{-1}, \quad (p^2 - \mu^2)^{-1}.$$

Матричные элементы, соответствующие диаграммам рис. 1, равны тогда $\bar{\psi}_2(II) K_{\mu\nu}(I) \psi_1$, $\bar{\psi}_2(IV) K_{\mu\nu}(III) \psi_1$, $\bar{\psi}_2(VI) (\hat{p} - m)^{-1}(V) \psi_1$ и т. д. Для реакции $\gamma + N \rightarrow \pi + N'$ нужно оставить в операторах взаимодействия I—VIII члены, соответствующие поглощению фотона и испусканию мезона, и воспользоваться законом сохранения энергии-импульса:

$$p_{1\mu} + k_\mu = p_{2\mu} + q_\mu; \quad W = E_1 + k = E_2 + \varepsilon, \quad p_1 + k = p_2 + q. \quad (3.2)$$

Тогда, представив волновые функции ψ_1, ψ_2 в виде произведения $\psi = \chi u$ — функции изотопического спина χ на функцию механического спина и координат u и используя соотношения $(\hat{p}_1 - m) u_1 = \bar{u}_2 (\hat{p}_2 - m) = 0$, можно упростить вид матричных элементов и записать матрицу перехода U для поглощения фотона и испускания мезона сорта r в виде:

$$U = \bar{\chi}_2 S_r^+ N \chi_1 A + \bar{\chi}_2 N S_r^+ \chi_1 B + \bar{\chi}_2 \tau_r^+ \tau_p \chi_1 (C + E) + \bar{\chi}_2 \tau_p \tau_r^+ \chi_1 (D - E), \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}
A &= i \frac{eG}{m\mu} \frac{2\pi}{V\sqrt{k\varepsilon}} \bar{u}_2 q_\mu K_{\mu\nu}(p_3) \left[e_\nu \hat{k} - k_\nu \hat{e} - \frac{1}{4} \gamma_\nu (\hat{e} \hat{k} - \hat{k} \hat{e}) \right] \gamma_5 u_1, \\
B &= -i \frac{eG}{m\mu} \frac{2\pi}{V\sqrt{k\varepsilon}} \bar{u}_2 (e_\mu \hat{k} - k_\mu \hat{e}) \gamma_5 K_{\mu\nu}(p_4) \left(q_\nu - \frac{1}{4} \gamma_\nu \hat{q} \right) u_1, \\
C + E &= -ie \left(f + \frac{2m}{\mu} g \right) \frac{2\pi}{V\sqrt{k\varepsilon}} \bar{u}_2 \left(\frac{\hat{q} \hat{e} \gamma_5}{2(kp_1)} - \frac{(eq)}{(kq)} \gamma_5 \right) u_1, \\
D - E &= -ie \left(f + \frac{2m}{\mu} g \right) \frac{2\pi}{V\sqrt{k\varepsilon}} \bar{u}_2 \left(\frac{\hat{e} \hat{q} \gamma_5}{2(kp_2)} + \frac{(eq)}{(kq)} \gamma_5 \right) u_1, \\
p_3 &= p_1 + k = p_2 + q, \quad p_4 = p_1 - q = p_2 - k.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Матричные элементы $\bar{\chi}_2 S_r^+ N \chi_1$, $\bar{\chi}_2 N S_r^+ \chi_1$, $\bar{\chi}_2 \tau_r^+ \tau_p \chi_1$ и $\bar{\chi}_2 \tau_p \tau_r^+ \chi_1$ приведены в таблице для всех возможных процессов образования π -мезонов на нуклонах.

Т а б л и ц а

Процесс	$\bar{\chi}_2 S_r^+ N \chi_1$	$\bar{\chi}_2 N S_r^+ \chi_1$	$\bar{\chi}_2 \tau_r^+ \tau_p \chi_1$	$\bar{\chi}_2 \tau_p \tau_r^+ \chi_1$
$\gamma + p \rightarrow \pi^+ + n$	$-a^+$	b	0	0
$\gamma + p \rightarrow \pi^0 + p$	$V\sqrt{2} a^+$	$V\sqrt{2} a$	$\frac{1}{V\sqrt{2}}$	$\frac{1}{V\sqrt{2}}$
$\gamma + n \rightarrow \pi^- + p$	b^+	$-a$	0	1
$\gamma + n \rightarrow \pi^0 + n$	$V\sqrt{2} b^+$	$V\sqrt{2} b$	0	0

Матричные элементы A, B, C, D, E в системе центра масс имеют вид:

$$\begin{aligned}
A &= i \frac{eG}{m\mu} Q \left\{ \frac{km(m+W)(m+W-\varepsilon)(m+4\varepsilon-W)(2M+W)}{12M^2W} L_0^{\text{мф}} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{kqm(m+W)(m+W-4\varepsilon)(2M-W)}{12M^2W} L_1^{\text{мф}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{kq(m+W)(m+W-\varepsilon)(m+3W)}{12W(M-W)} L_2^{\text{мф}} + \frac{k^2q(m+W-\varepsilon)}{2V\sqrt{3}(M-W)} L_3^{\text{мф}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{kq^2(m+W)(m+3W)}{12W(M+W)} L_4^{\text{мф}} + \frac{k^2q^2}{2V\sqrt{3}(M+W)} L_5^{\text{мф}} \right\}, \\
B &= -i \frac{eG}{m\mu} Q \left\{ \frac{\sum_{i=0}^5 b_i L_i^{\text{мф}}}{2(kp_2) + M^2 - m^2} + \sum_{i=0}^5 \beta_i L_i^{\text{мф}} \right\}, \\
C &= -ie \left(f + \frac{2m}{\mu} g \right) Q \left\{ \frac{(m+W)(m+W-\varepsilon)}{2W} L_0^{\text{мф}} + \frac{q(m+W)}{2W} L_1^{\text{мф}} \right\}, \\
D &= -ie \left(f + \frac{2m}{\mu} g \right) Q \frac{1}{2(kp_2)} \left\{ \frac{(m+W)^2(m+W-\varepsilon)(m-W-2\varepsilon)}{6W} L_0^{\text{мф}} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{3} kq(m+W+2\varepsilon) L_1^{\text{мф}} - \frac{1}{3} kq(m+W-\varepsilon) L_2^{\text{мф}} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{V\sqrt{3}} kq(m+W-\varepsilon) L_3^{\text{мф}} + \frac{q^2(m+W)^2}{3W} L_4^{\text{мф}} \right\}, \\
E &= -ie \left(f + \frac{2m}{\mu} g \right) Q \frac{1}{(kq)} \left\{ -\frac{q^2(m+W)^2}{6W} L_0^{\text{мф}} - \frac{1}{3} kq(m+W-\varepsilon) L_1^{\text{мф}} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{6} kq(m+W-\varepsilon) L_2^{\text{мф}} + \frac{1}{2V\sqrt{3}} kq(m+W-\varepsilon) L_3^{\text{мф}} - \frac{q^2(m+W)^2}{6W} L_4^{\text{мф}} \right\};
\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
b_0 &= k(m+W)(m+W-\varepsilon) \left[\frac{1}{2}(m+M)(W-m) - \frac{m(4\varepsilon W - 4\varepsilon m - \mu^2)}{6W} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{m^2(2M^2 + Mm + \mu^2 - m^2)(m+4\varepsilon - W)}{18M^2W} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{m(M^3 + mM^2 - m^2M - m^3 + \mu^2m + 2M^2\mu)}{6M^2} \right], \\
b_1 &= -kq(m+W) \left[\frac{1}{2}(m+M)(m+W) - \frac{m(4\varepsilon W + 4\varepsilon m - \mu^2)}{6W} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{m^2(2M^2 + Mm + \mu^2 - m^2)(m+W-4\varepsilon)}{18M^2W} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{m(M^3 + M^2m - m^2M - m^3 + \mu^2m + 2M^2\mu)}{6M^2} \right], \\
b_2 &= -\frac{kq(m+W)(m+W-\varepsilon)(m+3W)}{12W} \left[W - \frac{m}{3M^2}(M^2 - Mm + m^2 - \mu^2) \right], \\
b_3 &= -\frac{k^2q(m+W-\varepsilon)}{2V^3} \left[W - \frac{m}{3M^2}(M^2 - Mm + m^2 - \mu^2) \right], \\
b_4 &= \frac{kq^2(m+W)(m+3W)}{12W} \left[W + \frac{m}{3M^2}(M^2 - Mm + m^2 - \mu^2) \right], \\
b_5 &= \frac{k^2q^2}{2V^3} \left[W + \frac{m}{3M^2}(M^2 - Mm + m^2 - \mu^2) \right]; \\
\beta_0 &= -\frac{km(m+W)(m+W-\varepsilon)(6MW + 7mW - 4\varepsilon m - m^2)}{36M^2W}, \\
\beta_1 &= -\frac{kqm(m+W)(6MW + 7mW - 4\varepsilon m + m^2)}{36M^2W}, \\
\beta_2 &= \frac{kqm(m+W)(m+W-\varepsilon)(m+3W)}{72M^2W}, \quad \beta_3 = \frac{k^2qm(m+W-\varepsilon)}{12V^3M^2}, \\
\beta_4 &= \frac{kq^2m(m+W)(m+3W)}{72M^2W}, \quad \beta_5 = \frac{k^2q^2m}{12V^3M^2}; \\
Q &= \frac{\pi}{V k \varepsilon (m+W-\varepsilon)(m+W-k)(W-\varepsilon)(W-k)}.
\end{aligned} \tag{3.5'}$$

Явный вид угловых полиномов-матриц $L_k^{\text{мф}}$ приведен в Дополнении.

4. Эффективные сечения фоторождения

Начиная с этого раздела, для простоты мы будем вести рассмотрение в системе центра масс. Для определения дифференциального поперечного сечения фоторождения мезонов на нуклонах с учетом затухания обратимся к интегральному уравнению Гайтлера [13], которое связывает амплитуды $F(\mathbf{p}, \xi)$ с матрицей рассеяния $U(\mathbf{p}, \xi; \mathbf{p}', \xi')$, зависящей в импульсном представлении в системе центра масс от импульсов $\mathbf{p}$ мезонов или фотонов и от ξ , символически обозначающей сорт мезона или поляризацию фотона, спин и изотопический спин нуклона:

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{p}, \xi) &= U(\mathbf{p}, \xi; \mathbf{p}_0, \xi_0) - \\
&- \frac{i}{8\pi^2} \sum_{\xi'} (p'^2 \frac{dp'}{dW(p')}) \int_{W(p')} d\Omega' U(\mathbf{p}, \xi; \mathbf{p}', \xi') F(\mathbf{p}', \xi'). \tag{4.1}
\end{aligned}$$

Интегральное уравнение (4.1) решается разложением расходящейся волны $F(\mathbf{p}, \xi)$ и матрицы $U(\mathbf{p}, \xi; \mathbf{p}', \xi')$ в ряд по ортогональным угло-

вым полиномам-матрицам L_k . Угловые полиномы-матрицы являются функциями векторов, характеризующих падающую и рассеянную частицы и ядро, и матрицами по проекциям углового момента ядра в начальном и конечном состояниях. Каждый угловой полином соответствует процессу, характеризующемуся определенными угловыми моментами частиц и всей системы в целом и определенным типом взаимодействия. Определение и свойства угловых полиномов для различных реакций и их явный вид для процессов рассеяния мезонов, фотонов и фоторождения мезонов на нуклонах даны в математическом Дополнении.

Для процесса фоторождения мезонов на протонах уравнения (4.1) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} F(+n) &= (+n, \gamma p) - \frac{i}{8\pi^2} \left\{ q^2 \frac{dq}{dW} \int \left[(+n, +n) F(+n) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (+n, 0p) F(0p) \right] d\Omega + k^2 \frac{dk}{dW} \int (+n, \gamma p) F(\gamma p) d\Omega \right\}, \\ F(0p) &= (0p, \gamma p) - \frac{i}{8\pi^2} \left\{ q^2 \frac{dq}{dW} \int \left[(0p, 0p) F(0p) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (0p, +n) F(+n) \right] d\Omega + k^2 \frac{dk}{dW} \int (0p, \gamma p) F(\gamma p) d\Omega \right\}, \\ F(\gamma p) &= (\gamma p, \gamma p) - \frac{i}{8\pi^2} \left\{ q^2 \frac{dq}{dW} \int \left[(\gamma p, 0p) F(0p) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\gamma p, +n) F(+n) \right] d\Omega + k^2 \frac{dk}{dW} \int (\gamma p, \gamma p) F(\gamma p) d\Omega \right\}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $(+n, \gamma p)$ и $F(+n)$ обозначают матричный элемент и амплитуду расходящейся волны процесса $\gamma + p \rightarrow \pi^+ + n$ и т. д., q, k — абсолютные величины импульсов мезона и фотона в системе центра масс.

Положим

$$\begin{aligned} F(0p) &= \frac{\sqrt{2}}{3} (F^{3/2} - F^{1/2}), \\ -F(+n) &= \frac{1}{3} F^{3/2} + \frac{2}{3} F^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Тогда, благодаря существованию следующих соотношений (4.4) между матричными элементами рассеяния мезонов [15] [матричные элементы в (4.4), как и всюду в этой работе, содержат константу связи]

$$\begin{aligned} (+n, 0p) &= (0p, +n) = -(0n, -p) = -(-p, 0n), \\ (+p, +p) &= (-n, -n), \quad (-p, -p) = (+n, +n), \\ (0p, 0p) &= (0n, 0n), \\ (-p, -p) + \frac{1}{\sqrt{2}}(-p, 0n) &= (0p, 0p), \\ (+p, +p) + \frac{1}{\sqrt{2}}(+n, 0p) &= (0p, 0p), \end{aligned} \quad (4.4)$$

уравнения (4.2) сводятся к

$$\begin{aligned} F^{3/2} &= V^{3/2} - \frac{i}{8\pi^2} q^2 \frac{dq}{dW} \int U^{3/2} F^{3/2} d\Omega - \frac{i}{8\pi^2} k^2 \frac{dk}{dW} \int V^{3/2} F(\gamma p) d\Omega, \\ F^{1/2} &= V^{1/2} - \frac{i}{8\pi^2} q^2 \frac{dq}{dW} \int U^{1/2} F^{1/2} d\Omega - \frac{i}{8\pi^2} k^2 \frac{dk}{dW} \int V^{1/2} F(\gamma p) d\Omega, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$F(\gamma p) = (\gamma p, \gamma p) - \frac{i}{8\pi^2} q^2 \frac{dq}{dW} \int \left[\frac{1}{3} V^{3/2} F^{3/2} + \frac{2}{3} V^{1/2} F^{1/2} \right] d\Omega - \\ - \frac{i}{8\pi^2} k^2 \frac{dk}{dW} \int (\gamma p, \gamma p) F(\gamma p) d\Omega, \quad (4.5')$$

где

$$U^{3/2} = (+p, +p), \quad U^{1/2} = {}^{3/2}(-p, -p) - {}^{1/2}(+p, +p), \quad (4.6)$$

$$V^{3/2} = -(+n, \gamma p) + \sqrt{2} (0p, \gamma p), \quad V^{1/2} = -(+n, \gamma p) - \frac{1}{\sqrt{2}} (0p, \gamma p).$$

Из (4.5) видно, что в первых двух уравнениях первые члены порядка eg , вторые — порядка $g^2 eg$, а третьи — порядка $e^2 eg$. Поэтому третьи члены представляют собой малую величину $\sim e^2/\hbar c$ по отношению к величинам $F^{3/2, 1/2}$ и величину $\sim e^2/g^2$ по отношению к члену затухания. В связи с этим без большой погрешности необходимые нам амплитуды $F^{3/2, 1/2}$ можно находить из уравнений

$$F^{3/2} = V^{3/2} - \frac{i}{8\pi^2} q^2 \frac{dq}{dW} \int U^{3/2} F^{3/2} d\Omega, \quad (4.7)$$

$$F^{1/2} = V^{1/2} - \frac{i}{8\pi^2} q^2 \frac{dq}{dW} \int U^{1/2} F^{1/2} d\Omega.$$

Разлагая теперь F и V по полиномам $L_k^{M\Phi}$, а U по полиномам $L_k^{M'M}$;

$$F^{3/2, 1/2} = \sum_k f_k^{3/2, 1/2} L_k^{M\Phi}, \\ V^{3/2, 1/2} = \sum_k v_k^{3/2, 1/2} L_k^{M\Phi}, \quad (4.8) \\ U^{3/2, 1/2} = \sum_k u_k^{3/2, 1/2} L_k^{M'M},$$

учитывая условия ортогональности (Д.8), получим, что

$$f_l^{3/2, 1/2} = v_l^{3/2, 1/2} / (1 + \frac{i}{2\pi} q^2 \frac{dq}{dW} u_k^{3/2, 1/2}), \quad (4.9)$$

где k равно целому из чисел $(l+1)/2$ и $(l+2)/2$ и равно нулю, если l равно нулю. Коэффициенты $u_k^{3/2, 1/2}$ были взяты из [1]; коэффициенты $v_k^{3/2, 1/2}$ получены нами. При разложении в ряды матричных элементов (3.5), через которые выражаются $V^{3/2, 1/2}$, полезно иметь в виду следующее: если некоторая функция $\mathcal{A}$ представима в виде

$$\mathcal{A} = \sum_{k=0}^5 a_k L_k^{M\Phi} / (1 + \tau \cos \theta),$$

где $\cos \theta = (kq)/kq$, то первые четыре коэффициента ряда

$$\mathcal{A} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k L_k^{M\Phi} \quad \text{связаны с } a_k \text{ формулами:}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= I_0 (1/2 a_0 + 1/4 a_4 - (\sqrt{3}/4) a_5) + I_1 (1/2 a_1 - 1/2 a_2 + (\sqrt{3}/2) a_3) + \\
&\quad + I_2 (-3/4 a_4 + (3\sqrt{3}/4) a_5), \\
\alpha_1 &= I_0 (1/2 a_1 + 1/4 a_2 - (\sqrt{3}/4) a_3) + I_1 (1/2 a_0 - 1/2 a_4 - (\sqrt{3}/2) a_5) + \\
&\quad + I_2 (-3/4 a_2 + (3\sqrt{3}/4) a_3), \\
\alpha_2 &= I_0 (1/8 a_1 + 5/8 a_2 + (\sqrt{3}/8) a_3) + I_1 (-1/4 a_0 + 1/4 a_4 + (\sqrt{3}/2) a_5) + \\
&\quad + I_2 (-3/8 a_1 - 3/8 a_2 - (3\sqrt{3}/8) a_3) - I_3 (3\sqrt{3}/4) a_5, \\
\frac{\alpha_3}{\sqrt{3}} &= I_0 (-1/8 a_1 + 1/8 a_2 + (\sqrt{3}/8) a_3) + I_1 (1/4 a_0 + 1/2 a_4 - (\sqrt{3}/4) a_5) + \\
&\quad + I_2 (3/8 a_1 - 3/8 a_2 + (\sqrt{3}/8) a_3) + I_3 (-3/4 a_4 + (\sqrt{3}/2) a_5),
\end{aligned} \tag{4.10}$$

где

$$I_k(\tau) = \int_{-1}^1 \frac{x^k dx}{1 + \tau x}.$$

Таким образом амплитуды рассеянных волн $F^+ = F(+n)$ и $F^0 = F(0p)$ реакций $\gamma + p \rightarrow \pi^+ + n$ и $\gamma + p \rightarrow \pi^0 + p$ представляются в виде рядов

$$F^\lambda = \sum_{l=0}^{\infty} f_l^\lambda L_l^{\text{МФ}}, \tag{4.11}$$

где λ принимает значения $+$ или 0 , а коэффициенты f_l^λ связаны с коэффициентами $f_l^{3/2, 1/2}$ формулами типа (4.3).

Дифференциальное поперечное сечение $d\sigma/d\Omega$ после суммирования по спинам конечного состояния нуклона и усреднения по спинам начального состояния нуклона и поляризациям фотона связано с амплитудой рассеянной волны F обычным образом

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{J} \frac{1}{4\pi^2} q^2 \frac{dq}{dW} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{2} \text{Sp} |F|^2, \tag{4.12}$$

где J — плотность потока падающих частиц, равная производной от полной энергии системы по импульсу падающей частицы, так что в нашем случае $J = dW/dk$; φ — угол между вектором поляризации фотона ϵ и плоскостью $\mathbf{k}, \mathbf{q}$. При вычислении дифференциальных поперечных сечений реакций $\gamma + p \rightarrow \pi^+ + n$, $\gamma + p \rightarrow \pi^0 + p$ в (4.11) были оставлены только s и p мезонные волны. Тогда

$$d\sigma^\lambda/d\Omega = A^\lambda + B^\lambda \cos \theta + C^\lambda \cos^2 \theta, \tag{4.13}$$

где $A^\lambda, B^\lambda, C^\lambda$ зависят от энергии фотона, а θ — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{q}$ в системе центра масс. $A^\lambda, B^\lambda, C^\lambda$ выражаются через коэффициенты ряда (4.11) формулами

$$\begin{aligned}
A &= \frac{q\epsilon(W-k)(W-\epsilon)}{4\pi^2 W^2} \left[a - \frac{1}{2} c \right], \\
B &= \frac{q\epsilon(W-k)(W-\epsilon)}{4\pi^2 W^2} b, \\
C &= \frac{q\epsilon(W-k)(W-\epsilon)}{4\pi^2 W^2} \frac{3}{2} c; \\
a &= a_{00} + a_{11} + 2a_{22} + 2a_{33}, \\
b &= 2a_{01} - 2a_{02} + 2\sqrt{3} a_{03}, \\
c &= -2a_{12} + 2\sqrt{3} a_{13} - 2\sqrt{3} a_{23} - a_{22} + a_{33}, \quad 2a_{ik} = f_i^* f_k + f_k^* f_i.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Дифференциальное поперечное сечение под углом 90° в лабораторной системе координат связано с (4.13) следующим образом:

$$\left(\frac{d\sigma^\lambda}{d\Omega_{\text{лаб}}} \right)_{\pi/2} = \left[A^\lambda - B^\lambda \frac{V}{v} + C^\lambda \left(\frac{V}{v} \right)^2 \right] V \sqrt{(1-V^2)(1-\frac{V^2}{v^2})}, \quad (4.15)$$

где V — скорость системы центра масс и v — скорость мезона в системе центра масс.

5. Сравнение результатов с экспериментом и выводы

Согласование теории с опытом проводилось путем подбора постоянных a и b , входящих в матрицу N лагранжиана (2.3). Остальные постоянные f , g , G и M взяты из [1]. Константы a , b являются, вообще говоря, комплексными числами, и, таким образом, в распоряжении имеются четыре постоянных. Однако для простоты были рассмотрены только случаи чисто действительных и чисто мнимых констант, причем оказалось, что мнимые константы не могут правильно описать углового распределения мезонов в рассматриваемом диапазоне энергий фотонов (150—500 MeV). На рис. 2 и 3 для параметров

$$f^2 = 0,80; \quad g^2 = 0,20; \quad G^2 = 0,12;$$

$$M = 1,316m; \quad a = +1,61;$$

$$b = -1,61 \quad (5.1)$$

построены дифференциальные поперечные сечения фоторождения π^+ - и π^0 -мезонов под углом 90° к пучку фотонов в лабораторной системе координат в зависимости от энергии фотонов и дифференциальные поперечные сечения в системе центра масс для ряда энергий фотонов. На этих же рисунках приведены соответствующие экспериментальные сечения. Угловое распределение π^0 -мезонов на рис. 3 нормировано так,

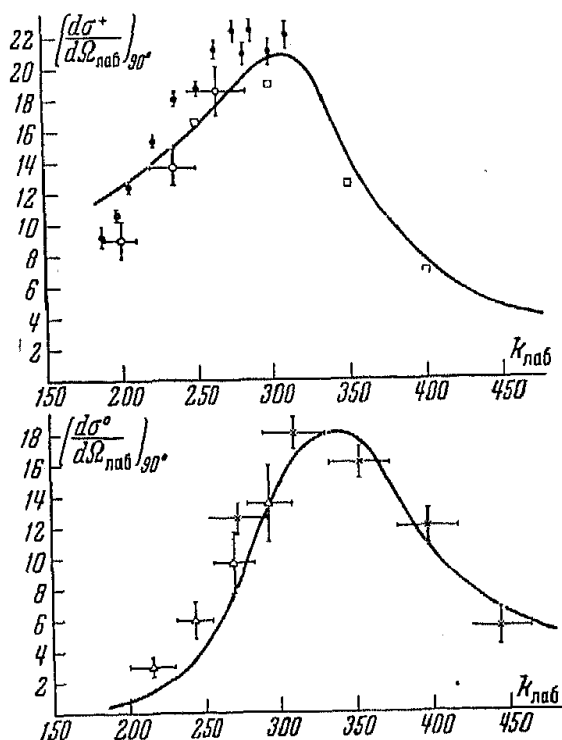


Рис. 2. Дифференциальные сечения $(d\sigma/d\Omega_{\text{лаб}})_{\pi/2}$ (10^{-30} см²/стерад.) под углом 90° в лабораторной системе координат в зависимости от энергии фотонов $k_{\text{лаб}}$ (MeV) в лабораторной системе координат для процессов $\gamma + p \rightarrow \pi^+ + n$, $\gamma + p \rightarrow \pi^0 + p$; $\bullet$ — [9], $\circ$ — [7], $\square$ — [4], $\times$ — [6], $\triangle$ — [5]

что полные экспериментальное и теоретическое сечения равны. Эксперименты показывают [8–10], что угловое распределение π^0 -мезонов в системе центра масс подчиняется закону $a + b \sin^2 \theta$, где b/a слабо зависит от энергии и равно ~ 1 в [9], $2,9 \pm 1$ в [9], 5 ± 3 в [8] для энергий 280, 252, 320 MeV. В теоретическом угловом распределении b/a растет от 2,16 при 250 MeV до 2,9 при 350 MeV, а затем слабо падает к 2,45 при энергии 470 MeV.

Проведенное сравнение показывает, что теория удовлетворительно согласуется с опытом. Заметим, что приведенная здесь система постоянных (5.1) фактически совпадает с системой (II) работы [1]. Система постоянных (I) работы [1] оказывается непригодной. В дальнейшем совместно с авторами [1] будет выбрана оптимальная система

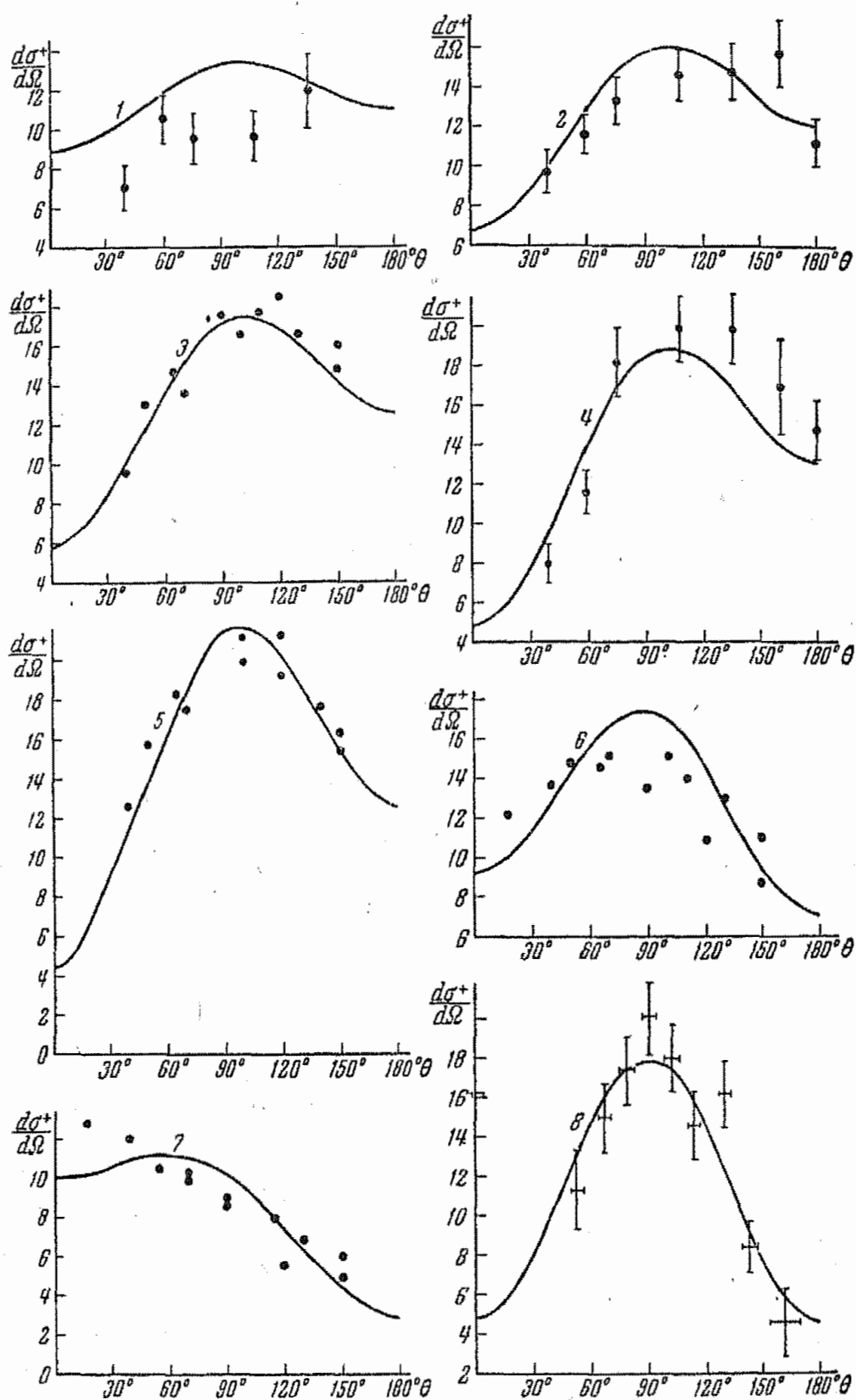


Рис. 3. Дифференциальные сечения $d\sigma/d\Omega$ ($10^{-30} \text{ см}^2/\text{стерад.}$) в системе центра масс в зависимости от угла рассеяния θ в системе центра масс для процессов $\gamma + p \rightarrow \pi^+ + n$, $\gamma + p \rightarrow \pi^0 + p$. Энергия фотонов и ссылка на литературу: 1—200, 2—235, 4—265 MeV [7], 3—250, 5—300, 6—350, 7—400 MeV [4]; 8—320 MeV [8]

констант, наилучшим образом описывающая опыты по рассеянию и фоторождению мезонов на нуклонах и ядерные силы.

В заключение выражаю глубокую благодарность И. Е. Тамму, руководившему работой, В. Я. Файнбергу и Ю. А. Гольфанду за обсуждение и Л. Е. Дзюба и М. П. Бронниковой, выполнившим большую вычислительную работу.

ДОПОЛНЕНИЕ

Рассмотрим реакцию $a + A \rightarrow b + B$ частиц a, b с ядрами A, B . Будем предполагать, что гамильтонианы взаимодействия H_a, H_b инвариантны относительно трехмерных вращений и представимы в виде суммы членов, соответствующих поглощению или испусканию частиц с определенными угловыми моментами. Тогда H_a и H_b можно представить в форме [16]:

$$\begin{aligned} H_a &= \sum S_a(T_{j_a m_a}(A_i)) \sum_{m_a=-j_a}^{j_a} T_{j_a m_a}(a_i) T_{j_a m_a}(A_i), \\ H_b &= \sum S_b(T_{j_b m_b}(B_i)) \sum_{m_b=-j_b}^{j_b} T_{j_b m_b}(b_i) T_{j_b m_b}(B_i), \end{aligned} \quad (\text{Д.1})$$

где T_{jm} — тензор преобразующийся по $(2j+1)$ -мерному неприводимому представлению трехмерной группы вращения и имеющий $2j+1$ независимых компонент, различающихся индексом m ; a_i, b_i, A_i, B_i — векторы, описывающие частицы a, b и ядра A, B ; j_a, j_b — угловые моменты частиц a, b , являющиеся суммой спинов и орбитальных моментов частиц; m_a, m_b — проекции угловых моментов частиц. Заметим, что при заданном j тензор $T_{jm}(a_i)$ может зависеть от нескольких совокупностей векторов a_i , и, следовательно, одному j в (Д.1) может соответствовать несколько членов, как это имеет место, например, для электрического и магнитного излучений. В дальнейшем будем рассматривать в (Д.1) один из таких членов, а под тензорами T_{jm} будем понимать поляризованные телесные гармоники Y_{jm} [16], связанные с обычными телесными гармониками $Y_{jm}(\mathbf{r})$ операцией поляризации:

$$Y_{jm}(a, b, c, \dots, h) = \frac{1}{j!} \sum_{i_1, i_2, i_3, \dots, i_j=1}^3 a_{i_1} b_{i_2} c_{i_3} \dots h_{i_j} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \frac{\partial}{\partial x_{i_3}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_j}} Y_{j0}(\mathbf{r}) \quad (\text{Д.2})$$

Так как $(jm | Y_{j_a m_a} | j_1 m_1) = (j | Y_{j_a} | j_1) (j_1 j_a jm | j_1 j_a m_1 m_a)$, где $(j | Y_{j_a} | j_1)$

не зависит от m и m_1 , а $(j_1 j_a jm | j_1 j_a m_1 m_a)$ — коэффициент Клебша — Жордана, то матричные элементы переходов $a + A \rightarrow 0, 0 \rightarrow b + B$ пропорциональны выражениям

$$\begin{aligned} (j_1 j_a jm | j_1 j_a m_1 m_a) Y_{j_a m_a}^*(a_i), \\ (j_2 j_b m_2 m_b | j_2 j_b jm) Y_{j_b m_b}(b_i). \end{aligned} \quad (\text{Д.3})$$

В таком случае матричный элемент перехода $a + A \rightarrow b + B$ пропорционален выражению

$$L_{m_2 m_1}(j_2 j_b j j_1 j_a) = \sum_m (j_2 j_b m_2 m_b | j_2 j_b j m) (j_1 j_a j m | j_1 j_a m_1 m_a) \times \\ \times Y_{j_b m_b}(\mathbf{b}_i) Y_{j_a m_a}^*(\mathbf{a}_i). \quad (\text{Д.4})$$

Матрицу $L(j_2 j_b j j_1 j_a)$, зависящую от полных угловых моментов системы, частиц и ядер и от углов рассеяния, с элементами (Д.4) будем называть угловым полиномом реакции $a + A \rightarrow b + B$.

Рассмотрим две реакции $a + A \rightarrow b + B$ и $c + C \rightarrow b + B$, кончающиеся одинаковыми частицами и ядрами. Угловые моменты частиц b в этих реакциях, вообще говоря, различны из-за возможности иметь различные орбитальные моменты. Обозначения угловых моментов и проекций частиц ядер и систем таковы:

$$(j_a m_a) + (j_1 m_1) \rightarrow (j m) \rightarrow (j_b m_b) + (j_2 m_2),$$

$$(j_c m_c) + (j_3 m_3) \rightarrow (j' m') \rightarrow (j_b m'_b) + (j_2 m_2).$$

Матричные элементы угловых полиномов реакции имеют вид

$$L_{m_2 m_1}(j_2 j_b j j_1 j_a) = \\ = \sum_m (j_2 j_b m_2 m_b | j_2 j_b j m) (j_1 j_a j m | j_1 j_a m_1 m_a) Y_{j_b m_b}(\mathbf{b}_i) Y_{j_a m_a}^*(\mathbf{a}_i), \quad (\text{Д.5}) \\ L_{m_2 m_3}(j_2 j'_b j' j_3 j_c) = \\ = \sum_{m'} (j_2 j'_b m_2 m'_b | j_2 j'_b j' m') (j_3 j_c j' m' | j_3 j_c m_3 m_c) Y_{j'_b m'_b}(\mathbf{b}_i) Y_{j_c m_c}^*(\mathbf{c}_i).$$

Эти угловые полиномы ортогональны и нормированы следующим образом ($\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ — единичные векторы направлений движения частиц a , b , c):

$$\int L_{m_2 m_3}^+(j_2 j'_b j' j_3 j_c) L_{m_2 m_1}(j_2 j_b j j_1 j_a) d\mathbf{b} = \\ = \int L_{m_2 m_3}(j_2 j'_b j' j_3 j_c) L_{m_2 m_1}(j_2 j_b j j_1 j_a) d\mathbf{b} = \sum_{m_2 m m'} (j_2 j'_b m_2 m'_b | j_2 j'_b j' m') \times \\ \times (j_3 j_c j' m' | j_3 j_c m_3 m_c) (j_2 j_b m_2 m_b | j_2 j_b j m) (j_1 j_a j m | j_1 j_a m_1 m_a) \times \\ \times Y_{j_c m_c}(\mathbf{c}_i) Y_{j_a m_a}^*(\mathbf{a}_i) \int Y_{j'_b m'_b}^*(\mathbf{b}_i) Y_{j_b m_b}(\mathbf{b}_i) d\mathbf{b}.$$

Последний интеграл равен $4\pi \delta_{j'_b j_b} \delta_{m'_b m_b}$. Поэтому мы можем положить $j'_b = j_b$, $m'_b = m_b$. Далее, так как

$$\sum_{m_2} (j_2 j_b m_2 m_b | j_2 j_b j' m) (j_2 j_b m_2 m_b | j_2 j_b j m) = \delta_{j' j},$$

то

$$\int L_{m_2 m_3}^+ L_{m_2 m_1} d\mathbf{b} = 4\pi \delta_{j_b j_b} \delta_{j' j} \sum_m (j_3 j_c m_3 m_c | j_3 j_c j m) \times \\ \times (j_1 j_a j m | j_1 j_a m_1 m_a) Y_{j_c m_c}(\mathbf{c}_i) Y_{j_a m_a}^*(\mathbf{a}_i) = 4\pi \delta_{j'_b j_b} \delta_{j' j} L_{m_2 m_1}(j_3 j_c j j_1 j_a).$$

Таким образом

$$\int L^+(j_2 j'_b j' j_3 j_c) L(j_2 j_b j j_1 j_a) d\mathbf{b} = 4\pi \delta_{j'_b j_b} \delta_{j' j} L(j_3 j_c j j_1 j_a). \quad (\text{Д.6})$$

По (Д.4) были построены угловые полиномы $L^{m'm}$, $L^{m\phi}$, $L^{\phi\phi}$ реакций $\pi + N \rightarrow \pi' + N'$, $\gamma + N \rightarrow \pi + N'$, $\gamma + N \rightarrow \gamma' + N'$:

$$\begin{aligned}
L_0^{M'M} (0 \frac{1}{2} 0) &= 1, \\
L_1^{M'M} (1 \frac{1}{2} 1) &= (\vec{\sigma} \mathbf{q}') (\vec{\sigma} \mathbf{q}), \\
L_2^{M'M} (1 \frac{3}{2} 1) &= 3 (\mathbf{q}' \mathbf{q}) - (\vec{\sigma} \mathbf{q}') (\vec{\sigma} \mathbf{q}), \\
L_3^{M'M} (2 \frac{3}{2} 2) &= 3 (\vec{\sigma} \mathbf{q}') (\vec{\sigma} \mathbf{q}) (\mathbf{q}' \mathbf{q}) - 1, \\
L_4^{M'M} (2 \frac{5}{2} 2) &= \frac{3}{2} [5 (\mathbf{q}' \mathbf{q})^2 - 2 (\vec{\sigma} \mathbf{q}') (\vec{\sigma} \mathbf{q}) (\mathbf{q}' \mathbf{q}) - 1]; \\
L_{0,0}^{M\Phi} (0 \frac{1}{2} 1 \vartheta) &= (\vec{\sigma} \mathbf{e}), \\
L_{1,1}^{M\Phi} (1 \frac{1}{2} 1 M) &= i (\vec{\sigma} \mathbf{q}) (\vec{\sigma} \mathbf{s}), \\
L_{2,2}^{M\Phi} (1 \frac{3}{2} 1 M) &= i [3 (\mathbf{q} \mathbf{s}) - (\vec{\sigma} \mathbf{q}) (\vec{\sigma} \mathbf{s})], \\
L_{2,3}^{M\Phi} (1 \frac{3}{2} 2 \vartheta) &= \sqrt{3} [(\vec{\sigma} \mathbf{e}) (\mathbf{k} \mathbf{q}) + (\vec{\sigma} \mathbf{k}) (\mathbf{e} \mathbf{q})], \\
L_{3,4}^{M\Phi} (2 \frac{3}{2} 1 \vartheta) &= 3 (\vec{\sigma} \mathbf{q}) (\mathbf{e} \mathbf{q}) - (\vec{\sigma} \mathbf{e}), \\
L_{3,5}^{M\Phi} (2 \frac{3}{2} 2 M) &= i \sqrt{3} [(\vec{\sigma} \mathbf{q}) (\vec{\sigma} \mathbf{s}) (\mathbf{k} \mathbf{q}) + (\vec{\sigma} \mathbf{q}) (\vec{\sigma} \mathbf{k}) (\mathbf{q} \mathbf{s})], \\
L_{4,6}^{M\Phi} (2 \frac{5}{2} 2 M) &= i \sqrt{3} [5 (\mathbf{q} \mathbf{s}) (\mathbf{k} \mathbf{q}) - (\vec{\sigma} \mathbf{q}) (\vec{\sigma} \mathbf{s}) (\mathbf{k} \mathbf{q}) - (\vec{\sigma} \mathbf{q}) (\vec{\sigma} \mathbf{k}) (\mathbf{q} \mathbf{s})], \\
L_{4,7}^{M\Phi} (2 \frac{5}{2} 3 \vartheta) &= \sqrt{\frac{3}{8}} [5 (\vec{\sigma} \mathbf{e}) (\mathbf{k} \mathbf{q})^2 + 10 (\vec{\sigma} \mathbf{k}) (\mathbf{e} \mathbf{q}) (\mathbf{k} \mathbf{q}) - 2 (\vec{\sigma} \mathbf{q}) (\mathbf{e} \mathbf{q}) - (\vec{\sigma} \mathbf{e})]; \\
L_{0,0}^{\Phi'\Phi} (1 \vartheta \frac{1}{2} 1 \vartheta) &= (\vec{\sigma} \mathbf{e}') (\vec{\sigma} \mathbf{e}), \\
L_{1,1}^{\Phi'\Phi} (1 M \frac{1}{2} 1 M) &= (\vec{\sigma} \mathbf{s}') (\vec{\sigma} \mathbf{s}), \\
L_{2,2}^{\Phi'\Phi} (1 M \frac{3}{2} 1 M) &= 3 (\mathbf{s}' \mathbf{s}) - (\vec{\sigma} \mathbf{s}') (\vec{\sigma} \mathbf{s}), \\
L_{2,3}^{\Phi'\Phi} (1 M \frac{3}{2} 2 \vartheta) &= -i \sqrt{3} [(\vec{\sigma} \mathbf{e}) (\mathbf{s}' \mathbf{k}) + (\vec{\sigma} \mathbf{k}) (\mathbf{s}' \mathbf{e})], \\
L_{3,3}^{\Phi'\Phi} (2 \vartheta \frac{3}{2} 2 \vartheta) &= (\vec{\sigma} \mathbf{e}') (\vec{\sigma} \mathbf{e}) (\mathbf{k}' \mathbf{k}) + (\vec{\sigma} \mathbf{k}') (\vec{\sigma} \mathbf{e}) (\mathbf{e}' \mathbf{k}) + (\vec{\sigma} \mathbf{e}') (\vec{\sigma} \mathbf{k}) (\mathbf{k}' \mathbf{e}) + \\
&\quad + (\vec{\sigma} \mathbf{k}') (\vec{\sigma} \mathbf{k}) (\mathbf{e}' \mathbf{e}), \\
L_{4,4}^{\Phi'\Phi} (1 \vartheta \frac{3}{2} 1 \vartheta) &= 3 (\mathbf{e}' \mathbf{e}) - (\vec{\sigma} \mathbf{e}') (\vec{\sigma} \mathbf{e}), \\
L_{4,5}^{\Phi'\Phi} (1 \vartheta \frac{3}{2} 2 M) &= -i \sqrt{3} [(\vec{\sigma} \mathbf{s}) (\mathbf{e}' \mathbf{k}) + (\vec{\sigma} \mathbf{k}) (\mathbf{e}' \mathbf{s})], \\
L_{5,5}^{\Phi'\Phi} (2 M \frac{3}{2} 2 M) &= (\vec{\sigma} \mathbf{s}') (\vec{\sigma} \mathbf{s}) (\mathbf{k}' \mathbf{k}) + (\vec{\sigma} \mathbf{k}') (\vec{\sigma} \mathbf{s}) (\mathbf{s}' \mathbf{k}) + \\
&\quad + (\vec{\sigma} \mathbf{s}') (\vec{\sigma} \mathbf{k}) (\mathbf{k}' \mathbf{s}) + (\vec{\sigma} \mathbf{k}') (\vec{\sigma} \mathbf{k}) (\mathbf{s}' \mathbf{s}).
\end{aligned} \tag{Д.7}$$

Здесь $\mathbf{s} = [\mathbf{k} \mathbf{e}]$, $\mathbf{s}' = [\mathbf{k}' \mathbf{e}']$. Эти полиномы являются двухрядными матрицами, элементы которых соответствуют различным проекциям спина начального и конечного состояний нуклона, и зависят от волновых векторов мезонов $\mathbf{q}$, фотонов $\mathbf{k}$ и векторов поляризации фотонов $\mathbf{e}$ (все векторы единичные). Угловые моменты падающей частицы, всей системы и рассеянной частицы указаны в скобках справа налево. Характер мультипольности квантов (электрический и магнитный) указан индексом ε или m при угловом моменте кванта. Угловые моменты нуклонов, равные $\frac{1}{2}$, не выписываются. Полиномы-матрицы (Д.7) нормированы согласно (Д.6), так что

$$\begin{aligned}
\int L_k^{M'M} L_l^{MM''} dq &= 4\pi L_k^{M'M''} \delta_{kl}, \\
\int L_k^{M'M} L_{l,m}^{M\Phi} dq &= 4\pi L_{k,m}^{M'\Phi} \delta_{kl}, \\
\int L_{k,l}^{M'\Phi} L_{m,n}^{\Phi M} dk &= 4\pi L_k^{M'M} \delta_{lm} \delta_{kn}, \\
\int L_{k,l}^{\Phi'M} L_{m,n}^{M\Phi} dq &= 4\pi L_{k,n}^{\Phi'\Phi} \delta_{lm}, \\
\int L_{k,l}^{\Phi'\Phi} L_{m,n}^{\Phi\Phi''} dk &= 4\pi L_{k,n}^{\Phi'\Phi''} \delta_{lm}, \\
\int L_{k,l}^{M\Phi} L_{m,n}^{\Phi\Phi'} dk &= 4\pi L_{k,n}^{M\Phi'} \delta_{lm},
\end{aligned} \tag{Д.8}$$

с равно целому из чисел $(l+1)/2$, $(l+2)/2$ и равно нулю, если $l=0$.

Заметим, что у полиномов $L_{k,l}^{M\Phi}$ $l=0$ для $k=0$, $l=1$ для $k=1$ и $l=2k-2$, $2k-1$ для остальных k ; у полиномов $L_{k,l}^{\Phi'\Phi}$ $l=0$ для $k=0$, $l=1$ для $k=1$ и для остальных k $l=k$, $k+1$ при k четном и $l=k$, $k-1$ при k нечетном. В тексте у полиномов $L_{k,l}^{M\Phi}$ для сокращения письма сохранялся лишь индекс l . Наконец, $(L_{k,l}^{\alpha\beta})^+ = L_{l,h}^{\beta\alpha}$.

Поступила в редакцию
4 сентября 1954 г.

Литература

- [1] И. Е. Тамм, Ю. А. Гольфанд и В. Я. Файнберг. ЖЭТФ, 26, 649, 1954. — [2] Н. L. Anderson и др. Phys. Rev., 85, 936, 1952. Н. L. Anderson и др. Phys. Rev., 86, 793, 1952. С. Е. Angell a. J. P. Perry. Phys. Rev., 90, 724, 1953; 91, 1289, 1953. Н. L. Anderson и др. Phys. Rev., 91, 155, 1953. Е. Fermi и др. Phys. Rev., 92, 161, 1953. L. C. L. Yuan a. S. J. Steinberger. Phys. Rev., 92, 1578, 1953. W. B. Fowler и др. Phys. Rev., 92, 832, 1953. — [3] J. Steinberger a. A. S. Bishop. Phys. Rev., 86, 171, 1952. — [4] М. Ross. Phys. Rev., 94, 454, 1954 (данные R. L. Walker и др.). — [5] A. Silverman a. M. Stearns. Phys. Rev., 88, 1225, 1952. — [6] R. L. Walker, D. C. Oakley a. A. V. Tollestrup. Phys. Rev., 89, 1301, 1953. — [7] T. L. Jenkins, D. Luckey, T. R. Palfrey a. R. R. Wilson. Phys. Rev., 95, 179, 1954. — [8] Y. Goldschmidt-Clermont, L. S. Osborne a. M. B. Scott. Phys. Rev., 89, 329, 1953. — [9] G. Cocconia. A. Silverman. Phys. Rev., 88, 1230, 1952. — [10] C. G. Andre. Nucl. Sci. Abs., 8, 2237, 1954. — [11] S. Minami, T. Nakano, K. Nishijima, H. Okonogi a. E. Yamada. Progr. Theor. Phys., 8, 531, 1952. — [12] R. P. Feynman. Phys. Rev., 76, 749, 1949. — [13] W. Heitler. Proc. Cambr. Phil. Soc., 37, 291, 1941. — [14] В. Я. Файнберг. ЖЭТФ, 25, 644, 1953. — [15] W. Heitler. Proc. Roy. Irish Acad., 51, 33, 1946. — [16] D. L. Falkoff a. G. E. Uhlenbeck. Phys. Rev., 79, 323, 1950.

О ДВОЙНОМ ЛУЧЕПРЕЛОМЛЕНИИ В НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

В. И. Скобелкин

Показано, что среди всех нелинейных электродинамик электродинамика Борна—Инфельда является единственной, в которой отсутствует двойное лучепреломление в направлениях нормальных к коллинеарным электромагнитным полям. Этот результат представляет большой интерес для экспериментальной физики. Показано также, что свет в нелинейной электродинамике в общем случае может быть разложен на четыре компоненты, линейно поляризованные в четырех различных плоскостях.

Введение

Для описания свойств вакуума, поляризованного электромагнитным полем, существуют нелинейные уравнения поля, которые являются обобщением уравнений Максвелла и могут быть получены следующим образом.

Пусть x, y, z и t — координаты пространства и время, E и B — векторы электрического поля и магнитной индукции. Обозначим

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict$$

и введем антисимметричный тензор

$$F = \begin{vmatrix} 0 & F_{12} & F_{13} & F_{14} \\ -F_{12} & 0 & F_{23} & F_{24} \\ -F_{13} & -F_{23} & 0 & F_{34} \\ -F_{14} & -F_{24} & -F_{34} & 0 \end{vmatrix},$$

где

$$E_x = iF_{14}, \quad E_y = iF_{24}, \quad E_z = iF_{34};$$

$$B_x = F_{23}, \quad B_y = F_{31}, \quad B_z = F_{12}.$$

Выразим F_{ik} через компоненты четырехмерного векторного потенциала $A_1, A_2, A_3, A_4 = i\varphi$:

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k}.$$

Из компонент антисимметричного тензора F можно составить два независимых инварианта:

$$\xi = (E^2 - B^2) \frac{1}{8\pi}, \quad \eta = (EB)^2.$$

Третий инвариант $\gamma = \varphi^2 - A^2$ в электродинамике не рассматривается, так как при наличии этого инварианта не удовлетворяется требование калибровочной инвариантности.

Если ξ и η инварианты, то $L(\xi, \eta)$ также инвариант. Обобщение линейной электродинамики Максвелла состоит в том, что вместо лагранжиана Лармора $L = \xi$ рассматривается произвольная функция $L(\xi, \eta)$. Тогда уравнение нелинейной электродинамики без зарядов

может быть получено из вариационного принципа

$$\delta \int L(\xi, \eta) d\omega = 0.$$

Эти уравнения в абсолютной системе единиц с учетом зарядов имеют вид, совпадающий по форме с уравнениями Максвелла [1]:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi, \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= 4\pi \rho, \quad \operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ (\partial \rho / \partial t) + \operatorname{div} \mathbf{j} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где ρ — плотность распределения зарядов;

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= 4\pi \frac{\partial L}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial L}{\partial \xi} \mathbf{E} + 8\pi (\mathbf{E}\mathbf{B}) \frac{\partial L}{\partial \eta} \mathbf{B}, \\ \mathbf{H} &= -4\pi \frac{\partial L}{\partial \mathbf{B}} = \frac{\partial L}{\partial \xi} \mathbf{B} - 8\pi (\mathbf{E}\mathbf{B}) \frac{\partial L}{\partial \eta} \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (2)$$

Векторы $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ называются векторами электрической и магнитной индукции.

Из (2) следует, что в нелинейной электродинамике вакуум поляризован, при этом электрическая и магнитная поляризации взаимно связаны и зависят как от $\mathbf{E}$, так и от $\mathbf{H}$. Относительно электромагнитного поля свойства вакуума изотропны. Многие физические явления, связанные с взаимодействием сильных полей вблизи элементарных частиц, как то: рассеяние света на свете, нелинейное рассеяние света на зарядах, отражение света от света, видоизменение планковского закона для равновесного излучения, порождение пары частиц электрон — позитрон при столкновении двух фотонов или двух электромагнитных волн и т. д., не подчиняются принципу суперпозиции, характерному для линейной электродинамики Максвелла. В максвелловской электродинамике, кроме того, не выполняется условие равновесия заряда (теорема Лауэ), а электромагнитная энергия не дает конечной величины.

Все это привело к необходимости нелинейных обобщений электродинамики Максвелла, содержащихся в уравнениях (1) и (2).

1. Поляризованный вакуум

Ограничимся малыми электромагнитными возмущениями. Следуя общему методу Ляпунова в теории устойчивости, выведем уравнения малых возмущений с точностью до квадратичных членов. Обозначим возмущения электромагнитного поля соответственно через $\vec{\delta}$, $\mathbf{h}$, $\vec{\beta}$. Очевидно, что возмущенное поле

$$\mathbf{H}' = \mathbf{H} + \mathbf{h}, \quad \mathbf{D}' = \mathbf{D} + \vec{\delta}, \quad \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \vec{\varepsilon}, \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B} + \vec{\beta} \dots \quad (3)$$

удовлетворяет уравнениям (1), (2). Подставляя (3) в (1), (2) и учитывая, что невозмущенное поле также удовлетворяет уравнениям (1), (2), получим систему уравнений малых электромагнитных возмущений:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{h} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\delta}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{\varepsilon} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{\delta} &= 0, \quad \operatorname{div} \vec{\beta} = 0; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \vec{\delta} &= p \vec{\varepsilon} + 8 \pi q (\mathbf{E} \mathbf{B}) \vec{\beta} + \{ (r/4 \pi) [(\mathbf{E} \vec{\varepsilon}) - (\mathbf{B} \vec{\beta})] + \\ &+ 2g(\mathbf{E} \mathbf{B})[(\mathbf{E} \vec{\beta}) + (\mathbf{B} \vec{\varepsilon})] \} \mathbf{E} + \{ 8 \pi q [(\mathbf{E} \vec{\beta}) + (\mathbf{B} \vec{\varepsilon})] + \\ &+ 2g(\mathbf{E} \mathbf{B})[(\mathbf{E} \vec{\varepsilon}) - (\mathbf{B} \vec{\beta})] + 16 \pi s (\mathbf{E} \mathbf{B})^2 [(\mathbf{E} \vec{\beta}) + (\mathbf{B} \vec{\varepsilon})] \} \mathbf{B}; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \vec{h} &= p \vec{\beta} - 8 \pi q (\mathbf{E} \mathbf{B}) \vec{\varepsilon} - \{ 8 \pi q [(\mathbf{E} \vec{\beta}) + (\mathbf{B} \vec{\varepsilon})] + \\ &+ 2g(\mathbf{E} \mathbf{B})[(\mathbf{E} \vec{\varepsilon}) - (\mathbf{B} \vec{\beta})] + 16 \pi s (\mathbf{E} \mathbf{B})^2 [(\mathbf{E} \vec{\beta}) + (\mathbf{B} \vec{\varepsilon})] \} \mathbf{E} + \\ &+ \left\{ \frac{r}{4 \pi} [(\mathbf{E} \vec{\varepsilon}) - (\mathbf{B} \vec{\beta})] + 2g(\mathbf{E} \mathbf{B})[(\mathbf{E} \vec{\beta}) + (\mathbf{B} \vec{\varepsilon})] \right\} \mathbf{B}; \\ p &= \partial L / \partial \xi, \quad q = \partial L / \partial \eta, \quad r = \partial^2 L / \partial \xi^2, \\ s &= \partial^2 L / \partial \eta^2, \quad g = \partial^2 L / \partial \xi \partial \eta. \end{aligned} \quad (6)$$

Из (5) получаем линейные соотношения для компонент электромагнитного возмущения $\vec{\delta}$, $\vec{h}$ в поляризованном вакууме

$$\delta_i = \delta_{ik}^{(\varepsilon)} \varepsilon_k + \delta_{ik}^{(\beta)} \beta_k, \quad (7)$$

$$h_i = h_{ik}^{(\varepsilon)} \varepsilon_k + h_{ik}^{(\beta)} \beta_k;$$

$$\begin{aligned} \delta_{ik}^{(\varepsilon)} &= (r/4 \pi) E_k E_i + \gamma_{ik} p + 2g(\mathbf{E} \mathbf{B})(B_k E_i + E_k B_i) + \\ &+ 8 \pi (q + 2s \eta) B_k B_i = \delta_{ki}^{(\varepsilon)}; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \delta_{ik}^{(\beta)} &= -(r/4 \pi) B_k E_i + 8 \pi q \gamma_{ik} (\mathbf{E} \mathbf{B}) + 2g(\mathbf{E} \mathbf{B})(E_k E_i - B_k B_i) + \\ &+ 8 \pi (q + 2 \eta s) E_k B_i = -h_{ki}^{(\varepsilon)}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} h_{ik}^{(\beta)} &= -(r/4 \pi) B_k B_i + p \gamma_{ik} + 2g(\mathbf{E} \mathbf{B})(E_k B_i + B_k E_i) - \\ &- 8 \pi (q + 2s \eta) E_k E_i = h_{ki}^{(\beta)}. \end{aligned} \quad (10)$$

В соотношениях (8)–(10) γ_{ik} есть символ Кронекера

$$\gamma_{ik} = \begin{cases} 0 & (i \neq k), \\ 1 & (i = k). \end{cases}$$

Коэффициенты линейного соотношения (7) являются компонентами некоторого полуантисимметричного тензора поляризации вида:

$$(\delta, h) = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} \delta_{11}^{(\varepsilon)} & \delta_{12}^{(\varepsilon)} & \delta_{13}^{(\varepsilon)} & \delta_{11}^{(\beta)} & \delta_{12}^{(\beta)} & \delta_{13}^{(\beta)} \\ \delta_{21}^{(\varepsilon)} & \delta_{22}^{(\varepsilon)} & \delta_{23}^{(\varepsilon)} & \delta_{21}^{(\beta)} & \delta_{22}^{(\beta)} & \delta_{23}^{(\beta)} \\ \delta_{31}^{(\varepsilon)} & \delta_{32}^{(\varepsilon)} & \delta_{33}^{(\varepsilon)} & \delta_{31}^{(\beta)} & \delta_{32}^{(\beta)} & \delta_{33}^{(\beta)} \\ \hline h_{11}^{(\varepsilon)} & h_{12}^{(\varepsilon)} & h_{13}^{(\varepsilon)} & h_{11}^{(\beta)} & h_{12}^{(\beta)} & h_{13}^{(\beta)} \\ h_{21}^{(\varepsilon)} & h_{22}^{(\varepsilon)} & h_{23}^{(\varepsilon)} & h_{21}^{(\beta)} & h_{22}^{(\beta)} & h_{23}^{(\beta)} \\ h_{31}^{(\varepsilon)} & h_{32}^{(\varepsilon)} & h_{33}^{(\varepsilon)} & h_{31}^{(\beta)} & h_{32}^{(\beta)} & h_{33}^{(\beta)} \end{array} \right\|, \quad (11)$$

в котором имеют место соотношения:

$$h_{ik}^{(\beta)} = h_{ki}^{(\beta)}, \quad \delta_{ik}^{(\varepsilon)} = \delta_{ki}^{(\varepsilon)}, \quad \delta_{ik}^{(\beta)} = -h_{ki}^{(\varepsilon)}. \quad (12)$$

Из (11) следует, что поляризованный вакуум по отношению к малым электромагнитным возмущениям, в частности по отношению к свету, обладает свойством анизотропии и ведет себя как своеобразная активная среда. В то время как в обычных активных средах тензоры (δ) и (h) независимы, в поляризованном вакууме эти тензоры связаны и представляют единый тензор (δ, h) . Далее, в активных средах тензор электрического и магнитного полей всегда симметричен, тензор поляризованного вакуума обладает тем свойством, что для электрического поля $\vec{\delta}$ электрическая часть тензора симметрична, а для магнитного поля $\vec{h}$ симметрична магнитная часть тензора. Магнитная часть тензора электрического поля $\vec{\delta}$ антисимметрична по отношению к электрической части тензора магнитного поля $\vec{h}$.

Анизотропия поляризованного вакуума относительно электрического возмущения зависит как от величины и направления полей $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, так и от вида лагранжиана L . Тензор электрической индукции электромагнитного возмущения, как это следует из (7), определяется 18 элементами и представляет прямоугольную матрицу с 6 номерами в строке и 3 номерами в столбце.

Электрическая индукция возмущения в поляризованном вакууме определяется как электрическим полем возмущения, так и его магнитным полем; те же свойства имеют место и в отношении магнитной индукции возмущения.

Если $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ параллельны, то, выбирая ось x_1 вдоль поля, имеем

$$\begin{aligned}
 \delta_{11}^{(e)} &= \frac{r}{4\pi} E^2 + p + 4gE^2B^2 + 8\pi(q + 2s\eta)B^2, \\
 \delta_{22}^{(e)} &= \delta_{33}^{(e)} = p, \\
 \delta_{ik}^{(e)} &= 0 \quad (i \neq k), \\
 \delta_{11}^{(B)} &= -h_{11}^{(e)} = \left(-\frac{r}{4\pi} + 16\pi q + 16\pi\eta s\right)EB + 2gEB(E^2 - B^2), \\
 \delta_{22}^{(B)} &= \delta_{33}^{(B)} = 8\pi qEB, \quad h_{22}^{(e)} = h_{33}^{(e)} = -8\pi qEB, \\
 h_{11}^{(B)} &= -\frac{r}{4\pi} B^2 + p + 4gE^2B^2 - 8\pi(q + 2s\eta)E^2, \\
 h_{22}^{(B)} &= h_{33}^{(B)} = p, \quad \delta_{ik}^{(B)} = h_{ik}^{(e)} = h_{ik}^{(B)} = 0 \quad (i \neq k).
 \end{aligned} \tag{13}$$

Тензор поляризации в этом случае имеет вид

$$(\delta, h) = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} \delta_{11}^{(e)} & 0 & 0 & \delta_{11}^{(B)} & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 & 8\pi qEB & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & 0 & 8\pi qEB \\ \hline -\delta_{11}^{(B)} & 0 & 0 & h_{11}^{(e)} & 0 & 0 \\ 0 & -8\pi qEB & 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & -8\pi qEB & 0 & 0 & p \end{array} \right\|. \tag{14}$$

При $B=0$ тензор (δ, h) распадается на два независимых тензора

$$(\delta) = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{r}{4\pi} E^2 + p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{array} \right\|, \quad (h) = \left\| \begin{array}{ccc} p - 8\pi qE^2 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{array} \right\|. \tag{15}$$

В этом случае индукция электрического возмущения $\vec{\delta}$ определяется только электрическим полем $\vec{\varepsilon}$, а магнитная индукция только магнитным полем $\vec{\beta}$. Из (15) также следует, что если вакуум поляризован однородным электрическим полем $\vec{E}$, то поляризованный вакуум не изотропен относительно возмущений $\vec{\delta}$ и $\vec{\beta}$. Аналогичные свойства получаются, когда $E = 0$.

В этом случае

$$(\delta) = \begin{vmatrix} p + 8\pi q B^2 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{vmatrix}, \quad (h) = \begin{vmatrix} p - \frac{r}{4\pi} B^2 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{vmatrix}. \quad (16)$$

Из (15) и (16) следует, что поляризационные свойства вакуума относительно электромагнитных возмущений в присутствии поля $\vec{E}$ или $\vec{H}$ различны, если даже эти поля одинаковы.

Пусть $\vec{E} \perp \vec{B}$. Направим ось x_1 вдоль $\vec{E}$, а ось x_2 вдоль $\vec{B}$. Тогда

$$\delta_{11}^{(\varepsilon)} = \frac{r}{4\pi} E^2 + p, \quad \delta_{ik}^{(\varepsilon)} = h_{ik}^{(\beta)} = 0 \quad (i \neq k),$$

$$\delta_{22}^{(\varepsilon)} = p + 8\pi q B^2, \quad \delta_{31}^{(\beta)} = -h_{13}^{(\varepsilon)} = 0,$$

$$\delta_{33}^{(\varepsilon)} = p, \quad \delta_{23}^{(\beta)} = -h_{32}^{(\varepsilon)} = 0,$$

$$\delta_{12}^{(\beta)} = -h_{21}^{(\varepsilon)} = -\frac{r}{4\pi} BE, \quad \delta_{32}^{(\beta)} = -h_{23}^{(\varepsilon)} = 0,$$

$$\delta_{21}^{(\beta)} = -h_{12}^{(\varepsilon)} = 8\pi q EB, \quad \delta_{13}^{(\beta)} = -h_{31}^{(\varepsilon)} = 0,$$

$$h_{11}^{(\beta)} = p - 8\pi q E^2, \quad \delta_{22}^{(\beta)} = -h_{22}^{(\varepsilon)} = 0,$$

$$h_{22}^{(\beta)} = p - \frac{r}{4\pi} B^2, \quad \delta_{33}^{(\beta)} = -h_{33}^{(\varepsilon)} = 0,$$

$$h_{33}^{(\beta)} = p, \quad \delta_{11}^{(\beta)} = -h_{11}^{(\varepsilon)} = 0.$$

Тензор поляризации будет иметь вид

$$(\delta, h) = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} \delta_{11}^{(\varepsilon)} & 0 & 0 & 0 & \delta_{12}^{(\beta)} & 0 \\ 0 & \delta_{22}^{(\varepsilon)} & 0 & \delta_{21}^{(\beta)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{33}^{(\varepsilon)} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\delta_{21}^{(\beta)} & 0 & h_{11}^{(\beta)} & 0 & 0 \\ -\delta_{12}^{(\beta)} & 0 & 0 & 0 & h_{22}^{(\beta)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h_{33}^{(\beta)} \end{array} \right\|.$$

В частности, если $\vec{E} \perp \vec{B}$ и $E = B$, то, хотя оба инварианта равны нулю, поляризация электромагнитных возмущений в вакууме существует.

2. Плоские линейно поляризованные электромагнитные волны в вакууме

Расположим оси x_1, x_2 в плоскости волны, а ось x_3 — нормально к плоскости волны.

Рассмотрим плоскую линейно поляризованную волну вида

$$\begin{aligned}\vec{\varepsilon} &= \vec{\varepsilon}_0 f(x_3 - vt), \quad \vec{h} = \vec{h}_0 f(x_3 - vt), \\ \vec{\delta} &= \vec{\delta}_0 f(x_3 - vt), \quad \vec{\beta} = \vec{\beta}_0 f(x_3 - vt),\end{aligned}\quad (17)$$

где v — скорость распространения волны; $\vec{\delta}_0, \vec{h}_0, \vec{\varepsilon}_0, \vec{\beta}_0$ — постоянные векторы, при этом

$$\varepsilon_{03} = \delta_{03} = h_{03} = \beta_{03} = 0.$$

Плоская волна (17) должна удовлетворять уравнениям (4) и (7) при условиях (8) — (10). Последние два уравнения (4) удовлетворяются тождественно, так как дивергенция всякой плоской волны тождественно исчезает.

Подставляя (17) в уравнения (4) и (7), получим

$$\begin{aligned}\delta_{01} &= -\lambda h_{02}, \quad \beta_{01} = \lambda \varepsilon_{02}, \\ \delta_{02} &= \lambda h_{01}, \quad \beta_{02} = -\lambda \varepsilon_{01},\end{aligned}\quad (18)$$

$$\begin{aligned}\delta_{03} &= 0, \quad \beta_{03} = 0; \\ \delta_{0i} &= \delta_{ih}^{(\varepsilon)} \varepsilon_{0h} + \delta_{ih}^{(\beta)} \beta_{0h},\end{aligned}\quad (19)$$

$$h_{0i} = h_{ih}^{(\varepsilon)} \varepsilon_{0h} + h_{ih}^{(\beta)} \beta_{0h},$$

где $\lambda = -c/v$.

Подставляя в (18) вместо δ_{0i}, h_{0i} их выражения из (19), найдем

$$\begin{aligned}\delta_{1h}^{(\varepsilon)} \varepsilon_{0h} + \delta_{1h}^{(\beta)} \beta_{0h} &= -\lambda (h_{2h}^{(\varepsilon)} \varepsilon_{0h} + h_{2h}^{(\beta)} \beta_{0h}), \\ \delta_{2h}^{(\varepsilon)} \varepsilon_{0h} + \delta_{2h}^{(\beta)} \beta_{0h} &= \lambda (h_{1h}^{(\varepsilon)} \varepsilon_{0h} + h_{1h}^{(\beta)} \beta_{0h}), \\ \delta_{3h}^{(\varepsilon)} \varepsilon_{0h} + \delta_{3h}^{(\beta)} \beta_{0h} &= 0.\end{aligned}\quad (20)$$

Подставляя в (20) вместо β_{0i} их выражения из (18), получим систему уравнений относительно $\varepsilon_{01}, \varepsilon_{02}$:

$$\begin{aligned}[\delta_{11}^{(\varepsilon)} - \lambda (\delta_{12}^{(\beta)} - h_{21}^{(\varepsilon)} + \lambda h_{22}^{(\beta)})] \varepsilon_{01} + [\delta_{12}^{(\varepsilon)} + \lambda (\delta_{11}^{(\beta)} + h_{22}^{(\varepsilon)} + \lambda h_{21}^{(\beta)})] \varepsilon_{02} &= 0, \\ [\delta_{21}^{(\varepsilon)} - \lambda (\delta_{22}^{(\beta)} + h_{11}^{(\varepsilon)} - \lambda h_{12}^{(\beta)})] \varepsilon_{01} + [\delta_{22}^{(\varepsilon)} + \lambda (\delta_{21}^{(\beta)} - h_{12}^{(\varepsilon)} - \lambda h_{11}^{(\beta)})] \varepsilon_{02} &= 0, \\ [\delta_{31}^{(\varepsilon)} - \lambda \delta_{32}^{(\beta)}] \varepsilon_{01} + [\delta_{32}^{(\varepsilon)} + \lambda \delta_{31}^{(\beta)}] \varepsilon_{02} &= 0.\end{aligned}\quad (21)$$

Обозначим

$$\begin{aligned}A_{11} &= \delta_{11}^{(\varepsilon)} - \lambda (\delta_{12}^{(\beta)} - h_{21}^{(\varepsilon)} + \lambda h_{22}^{(\beta)}), \\ A_{12} &= \delta_{12}^{(\varepsilon)} + \lambda (\delta_{11}^{(\beta)} + h_{22}^{(\varepsilon)} + \lambda h_{21}^{(\beta)}), \\ A_{21} &= \delta_{21}^{(\varepsilon)} - \lambda (\delta_{22}^{(\beta)} + h_{11}^{(\varepsilon)} - \lambda h_{12}^{(\beta)}), \\ A_{22} &= \delta_{22}^{(\varepsilon)} + \lambda (\delta_{21}^{(\beta)} - h_{12}^{(\varepsilon)} - \lambda h_{11}^{(\beta)}), \\ A_{31} &= \delta_{31}^{(\varepsilon)} - \lambda \delta_{32}^{(\beta)}, \\ A_{32} &= \delta_{32}^{(\varepsilon)} + \lambda \delta_{31}^{(\beta)}.\end{aligned}\quad (22)$$

Тогда (21) примет вид

$$\begin{aligned}
A_{11}\varepsilon_{01} + A_{12}\varepsilon_{02} &= 0, \\
A_{21}\varepsilon_{01} + A_{22}\varepsilon_{02} &= 0, \\
A_{31}\varepsilon_{01} + A_{32}\varepsilon_{02} &= 0.
\end{aligned}
\tag{23}$$

Условия совместности системы (23) выражаются уравнениями, которые соответствуют условиям существования плоских электромагнитных волн

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} = 0.
\tag{24}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Пусть $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ коллинеарны. В этом случае существуют плоские волны, распространяющиеся вдоль поля и нормально к полю. Действительно, направим ось x_3 вдоль поля $\mathbf{E}$. Тогда

$$\begin{aligned}
A_{11} &= p(1 - \lambda^2), & A_{21} &= A_{12} = 0, \\
A_{22} &= p(1 - \lambda^2), & A_{31} &= A_{32} = 0.
\end{aligned}$$

Условия (24) приводят к уравнению

$$p(1 - \lambda^2) = 0,$$

откуда, так как $p \neq 0$, находим $\lambda = \pm 1$; следовательно, скорость распространения плоской волны вдоль поля равна скорости света: $v = \pm c$.

Этот результат замечателен тем, что скорость распространения света вдоль поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ не зависит ни от полей, ни от вида лагранжиана: в любой нелинейной электродинамике скорость света вдоль поля равна скорости света в пустоте. Амплитуды волны ε_{01} и ε_{02} произвольны, а $\vec{\delta}$, $\vec{h}$ и $\vec{\beta}$ определяются через ε_{01} , ε_{02} .

Рассмотрим плоскую электромагнитную волну, распространяющуюся нормально к полю. Направим ось x_1 вдоль поля, а ось x_3 — нормально к полю. В этом случае

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \delta_{11}^{(\varepsilon)} - p\lambda^2 = p + \frac{r}{4\pi}E^2 + 4gE^2B^2 + 8\pi(q + 2sE^2B^2)B^2 - p\lambda^2, \\
A_{12} &= \lambda(\delta_{11}^{(\beta)} + h_{22}^{(\varepsilon)}) = \lambda \left[-\frac{r}{4\pi}EB + 2gEB(E^2 - B^2) + \right. \\
&\quad \left. + 8\pi(q + 2sE^2B^2)EB \right] = A_{21}, \\
A_{22} &= p - \lambda^2 h_{11}^{(\beta)} = p - \lambda^2 \left[p - \frac{r}{4\pi}B^2 + 4gE^2B^2 - 8\pi(q + 2sE^2B^2)E^2 \right], \\
A_{31} &= A_{32} = 0.
\end{aligned}
\tag{25}$$

Условия (24) приводят к уравнению

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{11}^{(\varepsilon)} - p\lambda^2 & \lambda(\delta_{11}^{(\beta)} + h_{22}^{(\varepsilon)}) \\ \lambda(\delta_{11}^{(\beta)} + h_{22}^{(\varepsilon)}) & p - \lambda^2 h_{11}^{(\beta)} \end{vmatrix} = 0.
\tag{26}$$

Обозначая $\lambda^2 = Z$, получим квадратное уравнение относительно Z :

$$aZ^2 + bZ + d = 0,
\tag{27}$$

где

$$a = ph_{11}^{(\beta)}, \quad b = -\delta_{11}^{(\varepsilon)}h_{11}^{(\beta)} - (\delta_{11}^{(\beta)} + h_{22}^{(\varepsilon)}) - p^2, \quad d = p\delta_{11}^{(\varepsilon)};
\tag{28}$$

$$\Delta = b^2 - 4ad = [h_{11}^{(\beta)}\delta_{11}^{(\varepsilon)} + (\delta_{11}^{(\beta)} + h_{22}^{(\varepsilon)})^2]^2 - 4p^2\delta_{11}^{(\varepsilon)}h_{11}^{(\beta)}.
\tag{29}$$

Решение уравнения (27) при $\Delta > 0$ дает два значения для Z и соответственно четыре значения для λ , отвечающие двум скоростям распространения линейно поляризованных волн нормально к полю; при этом скорости распространения в противоположных направлениях по нормали к полю одинаковы.

2. Рассмотрим случай $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ ($E_2 = E_3 = 0$; $B_1 = B_3 = 0$).

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{r}{4\pi} E^2 + p - \frac{\lambda}{2} \left[-\frac{r}{\pi} BE + \lambda \left(2p - \frac{r}{2\pi} B^2 \right) \right], \\ A_{12} &= A_{21} = A_{31} = A_{32} = 0, \\ A_{22} &= p + 8\pi q B^2 + [32\pi q EB - \lambda (2p - 16\pi q E^2)] \lambda / 2. \end{aligned}$$

Исследуем волны, распространяющиеся вдоль оси x_3 нормально к $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$. В этом случае $A_{11} = A_{22} = 0$

$$\begin{aligned} v_{12} &= -c \frac{4p - (r/\pi) B^2}{(r/\pi) BE \pm \sqrt{16p^2 + 32\pi r p}}, \\ v_{34} &= -c \frac{p - 8\pi q E^2}{8\pi q BE \pm \sqrt{p^2 - 8\pi q p (E^2 - B^2)}}. \end{aligned} \quad (30)$$

Знак плюс перед корнем в (30) соответствует распространению света вдоль оси x_3 , а знак минус — в обратном направлении, при этом скорости распространения в противоположных направлениях неодинаковы. Если ввести вектор Умова — Пойнтинга

$$\mathbf{P} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{B}],$$

то распространение света вдоль вектора $\mathbf{P}$ будет происходить с большей скоростью, а распространение света против вектора $\mathbf{P}$ — с меньшей скоростью.

В общем случае поляризации вакуума и произвольного направления различие по величине скорости распространения в противоположных направлениях было показано также в работе [2]. В частности, когда $E = B$, скорость света в направлении вектора $\mathbf{P}$ равна c , а против вектора $\mathbf{P}$

$$v = c \frac{4p - (r/\pi) E^2}{4p + (r/\pi) E^2}.$$

3. Двойное лучепреломление. Оптические оси поляризации вакуума

Рассмотрим поляризацию вакуума коллинеарными полями $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. В этом случае двум скоростям распространения λ в данном направлении, нормальном к полям $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, отвечают две линейно поляризованные плоские волны $(\vec{\epsilon}, \vec{h}, \vec{\delta}, \vec{\beta})$, удовлетворяющие уравнениям (4) и (7) при условиях (8)—(10). Эти две волны, как это следует из (23), поляризованы в различных плоскостях. Угол между плоскостями поляризации определяется значениями отношения $A_{11}/A_{12} = A_{21}/A_{22}$, вычисленного для различных значений λ_1 и λ_2 .

Такое явление, когда в данном направлении существуют две различные скорости распространения электромагнитных волн, линейно поляризованных в двух различных плоскостях, можно назвать (подобно тому, как это имеет место в кристаллах) двойным лучепреломлением в вакууме. То направление, вдоль которого существует лишь одна скорость распространения плоской волны, назовем оптической осью

поляризации вакуума. Как было показано выше, направление, параллельное полям $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, является оптической осью поляризации, так как в этом направлении все скорости распространения электромагнитных волн равны скорости света в пустоте, независимо от вида нелинейной электродинамики. Что касается направления, нормального к полям $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, то в общем случае нелинейной электродинамики в нем всегда имеется двойное лучепреломление, так как $\Delta \geq 0$. Отсутствие двойного лучепреломления выражается условием $\Delta = 0$. В этом случае направление, нормальное к полям $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, является также оптической осью поляризации. Так как Δ зависит от двух инвариантов поля и от частных производных от лагранжиана по этим двум инвариантам, то условие $\Delta = 0$, выражающее отсутствие двойного лучепреломления, эквивалентно дифференциальному уравнению в частных производных. Решение этого уравнения соответствует таким электродинамикам, в которых двойное лучепреломление отсутствует и всякое направление, нормальное к полю, является оптической осью поляризации вакуума.

Если $\Delta = 0$, то легко вычислить скорость распространения плоской волны, распространяющейся поперек поля.

Из (27) имеем

$$Z = \lambda^2 = -\frac{b}{2a} = \frac{p^2 + \delta_{11}^{(\varepsilon)} h_{11}^{(\beta)} + (\delta_{11}^{(\beta)} + h_{22}^{(\varepsilon)})^2}{2\rho h_{11}^{(\beta)}}; \quad (31)$$

$$b = 16g^2\eta(\eta + 16\pi^2\xi^2) + 2\xi rp - 128\pi^2\xi\eta ps - 64\pi^2\xi pq + \\ + 8\eta pg - 8(\eta + 16\pi^2\xi^2)rq - 16\eta(\eta + 16\pi^2\xi^2)rs + 2p^2, \quad (32)$$

$$a = \rho h_{11}^{(\beta)}.$$

Скорость распространения определится из уравнения

$$v^2 = c^2 / \lambda^2.$$

Вычислим в этом случае дискриминант

$$\Delta = b^2 - 4\rho^2\delta_{11}^{(\varepsilon)}h_{11}^{(\beta)}.$$

Из (13) имеем

$$\delta_{11}^{(\varepsilon)}h_{11}^{(\beta)} = \left(\frac{r}{4\pi}E^2 + p + 4gE^2B^2 + 8\pi qB^2 + 16\pi s\eta B^2\right) \times \\ \times \left(-\frac{r}{4\pi}B^2 + p + 4gE^2B^2 - 8\pi gE^2 - 16\pi s\eta E^2\right) = \\ = -\frac{r^2}{16\pi^2}\eta + 2\xi rp + 8\xi\eta rg - 4(\eta + 32\pi^2\xi^2)rq - 8\eta(\eta + \pi^2\xi^2)rs + \\ + p^2 + 8pg\eta - 64\pi^2\xi pq - 128\pi^2\xi\eta ps + 16\eta^2g^2 - \\ - 256\pi^2\xi\eta qg - 512\pi^2\eta^2\xi gs - 64\pi^2\eta q^2 - 256\pi^2\eta^2qs - 256\pi^2\eta^3s^2.$$

Производя вычисления, найдем

$$\Delta = 16^3(\eta + 16\pi^2\xi^2) \sum a_{mnikj} p^m q^n r^i s^k g^j, \quad (33)$$

где суммирование ведется по всем целым индексам, включая нуль, которые удовлетворяют уравнению

$$m + n + i + k + j = 4.$$

Коэффициенты a_{mnikj} вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
a_{11101} &= -\frac{1}{2}\eta, & a_{21100} &= -\frac{1}{16}, \\
a_{10111} &= -\eta^2, & a_{20110} &= -\frac{1}{8}\eta, \\
a_{02200} &= \frac{1}{4}(\eta + 16\pi^2\xi^2), & a_{20020} &= 4\pi^2\eta^2, \\
a_{00004} &= \eta^2(\eta + 16\pi^2\xi^2), & a_{21010} &= 4\pi^2\eta, \\
a_{00220} &= \eta^2(\eta + 16\pi^2\xi^2), & a_{22000} &= \pi^2, \\
a_{01102} &= -\eta(\eta + 16\pi^2\xi^2), & a_{10102} &= \frac{1}{4}\xi\eta, \\
a_{20002} &= \frac{1}{4}\eta, & a_{11002} &= -8\pi^2\xi\eta, \\
a_{00112} &= -2\eta^2(\eta + 16\pi^2\xi^2), & a_{10003} &= \eta^2, \\
a_{20200} &= 1/1024\pi^2, & a_{10210} &= -\frac{1}{4}\xi\eta, \\
a_{11200} &= -\frac{1}{8}\xi, & a_{11110} &= 16\pi^2\xi\eta, \\
a_{10012} &= -16\pi^2\xi\eta^2, & a_{10120} &= 16\pi^2\xi\eta^2, \\
a_{12100} &= 4\pi^2\xi, & a_{01210} &= \eta(\eta + 16\pi^2\xi^2).
\end{aligned} \tag{34}$$

Остальные коэффициенты равны нулю.

Рассмотрим два предельных случая:

1) $B = 0$ ($\eta = 0$, $\xi = E^2/8\pi$).

Тогда

$$\begin{aligned}
b &= (rp/4\pi)E^2 - 8\pi E^2 pq - 2E^4 rq + 2p^2, \\
\delta_{11}^{(s)} h_{11}^{(\beta)} &= (rp/4\pi)E^2 - 2E^2 rq + p^2 - 8E^2 pq, \\
\Delta &= [p(1/2 r\xi - 16\pi^2\xi q) - 32\pi^2\xi^2 rq]^2.
\end{aligned}$$

В этом случае Δ есть полный квадрат квадратичной формы относительно p , q , r , s , g . В общем случае нельзя представить Δ как полный квадрат некоторой квадратичной формы относительно тех же переменных. Условие $\Delta = 0$ приводит к соотношению

$$p(r - 32\pi^2 q) = 64\pi^2 \xi r q. \tag{35}$$

При этом квадрат скорости распространения

$$v^2 = \left(1 - 8\pi \frac{q}{p} E^2\right) c^2 = \frac{c^2}{1 + (r/4\pi p) E^2}. \tag{36}$$

2) $E = 0$ ($\eta = 0$, $\xi = -B^2/4\pi$).

Здесь условие (35) также сохраняется, а скорость распространения плоской волны определяется формулой

$$v^2 = \left(1 - \frac{r}{4\pi p} B^2\right) c^2 = \frac{1}{1 + (8\pi q/p) B^2} c^2. \tag{37}$$

При $E = 0$ или $B = 0$, как следует из (25), $A_{12} = A_{21} = 0$. Отсюда видно, что (24) сводится к двум условиям:

$$A_{11} = A_{22} = 0. \tag{38}$$

Эти условия означают, что ϵ_{01} и ϵ_{02} являются независимыми. Во всех других случаях, когда (38) не выполняется, независимой является лишь одна компонента, например, ϵ_{01} . Все остальные компоненты электромагнитного возмущения зависят от ϵ_{02} и от полей $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$.

Докажем следующую важную теорему о двойном лучепреломлении в вакууме.

Теорема. Во всякой нелинейной электродинамике, отличной от электродинамики Борна — Инфельда, в направлении, нормальном к коллинеарным полям $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, всегда существует двойное лучепреломление. Оно отсутствует лишь в электродинамике Борна — Инфельда, в которой всякое направление, нормальное к коллинеарным полям $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, является оптической осью поляризации.

Из теоремы следует, что в нелинейной электродинамике, получающейся из теории пар Дирака и хотя и слабо, но отличающейся от электродинамики Борна — Инфельда, должно наблюдаться двойное лучепреломление. Этот результат представляет большой интерес для экспериментальной физики, так как явление двойного лучепреломления можно обнаружить качественно. Если бы удалось наблюдать двойное лучепреломление, то этот экспериментальный результат подтверждал бы теорию пар Дирака. В противном случае оказалось бы, что в природе реализуется лишь электродинамика Борна — Инфельда.

Доказательство теоремы. Условие исчезновения дискриминанта (33) приводит к нелинейному дифференциальному уравнению в частных производных вида

$$\sum a_{mnikj} p^m q^n r^i s^k g^j = \\ = \sum a_{mnikj} \left(\frac{\partial L}{\partial \xi} \right)^m \left(\frac{\partial L}{\partial \eta} \right)^n \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \xi^2} \right)^i \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \eta^2} \right)^k \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \xi \partial \eta} \right)^j = 0, \quad (39)$$

где суммирование происходит по всем m, n, i, k, j , удовлетворяющим соотношению $m + n + i + k + j = 4$, а коэффициенты a_{mnikj} вычисляются по формулам (34). Всякое решение уравнения (39) в классе аналитических функций можно представить в виде $L = \sum_m \sum_n A_{mn} \xi^m \eta^n$. Под-

ставляя L в уравнение (39), получим двойной степенной ряд относительно ξ, η , коэффициенты которого должны обращаться в нуль.

Общий коэффициент B_{mn} при произведении $\xi^m \eta^n$, который должен быть приравнен нулю, представляется в виде

$$B_{mn} = \sum_{r=1}^{r=20} L_r = 0, \quad (40)$$

где

$$L_r = \sum \sum \alpha(r) \prod_{r=1}^{r=1} (i_r, k_r) A_{n_r i_r}; \quad (41)$$

$\alpha(r)$ — константа, зависящая только от r . Символ (i_r, k_r) представляет одну из следующих комбинаций:

$$(i_r, k_r) = i_r k_r, i_r(i_r - 1), k_r(k_r - 1), i_r, k_r.$$

Двойное суммирование в выражении L_r происходит по всем i_r и k_r , удовлетворяющим условиям

$$\sum_{r=1}^{r=1} i_r = M, \quad \sum_{r=1}^{r=1} k_r = N, \quad (42)$$

где M, N — целые числа, удовлетворяющие неравенствам

$$m \leq M \leq m + 4, \quad 1 + n \leq N \leq n + 6. \quad (43)$$

Например,

$$L_1 = \sum \sum \frac{1}{4} i_1 A_{h_1 i_1} i_2 A_{h_2 i_2} k_3 (k_3 - 1) A_{h_3 i_3} k_4 (k_4 - 1) A_{h_4 i_4},$$

$$\sum_{r=1}^{r=4} i_r = m + 1, \quad \sum_{r=1}^{r=4} k_r = n + 4;$$

$$L_{11} = -32\pi^2 \sum \sum k_1 (k_1 - 1) A_{h_1 i_1} i_2 (i_2 - 1) A_{h_2 i_2} k_3 i_3 A_{h_3 i_3} k_4 i_4 A_{h_4 i_4},$$

$$\sum i_r = m + 2, \quad \sum k_r = n + 2;$$

$$L_{20} = - \sum \sum k_1 A_{h_1 i_1} k_2 (k_2 - 1) A_{h_2 i_2} i_3 (i_3 - 1) A_{h_3 i_3} i_4 k_4 A_{h_4 i_4},$$

$$\sum i_r = m + 1, \quad \sum k_r = n + 4.$$

Структура коэффициентов B_{mn} , определяемая соотношением (41) и условиями (42) и (43), указывает на то, что для достаточно больших m, n коэффициент A_{mn} , определяемый из уравнения (40), выражается однозначно через коэффициенты A_{ij} , где $i < m, j < n$, так как уравнение (40) становится линейным относительно A_{mn} . Это свойство справедливо при $m \geq 4, n \geq 4$. Что касается определения коэффициентов A_{mn} , для $m < 4, n < 4$, то непосредственное вычисление показывает, что уравнение (40) распадается на множители и что могут быть три случая:

- 1) $A_{00} \neq 0$; тогда все $A_{mn} \equiv 0$ ($m, n \neq 0$).
- 2) $A_{00} = 0$; тогда, если $A_{01} = 0$, то $A_{10} \neq 0$, а все $A_{mn} \equiv 0$ ($m \neq 1, n \neq 0$). Если же $A_{10} = 0$, то $A_{01} \neq 0$, но все $A_{mn} \equiv 0$ ($\begin{smallmatrix} m \neq 0 \\ n \neq 1 \end{smallmatrix}$).

Приведенные случаи соответствуют решениям $L_1 = A_{00}, L_2 = A_{10}\eta$ и $L_3 = A_{01}\xi$. Решения L_1 и L_2 не имеют физического смысла, так как противоречат принципу соответствия. Третье решение соответствует линейной электродинамике Максвелла. Как известно, в электродинамике Максвелла двойное лучепреломление в вакууме отсутствует.

3) $A_{00} = 0$, но $A_{01} \neq 0$ и $A_{10} \neq 0$. В этом случае вычисления коэффициентов A_{mn} для $m < 4, n < 4$ показывают, что A_{01}, A_{10} произвольны, а остальные коэффициенты являются однозначными функциями этих двух:

$$A_{mn} = f_{mn}(A_{01}, A_{10}).$$

Следовательно, в силу однозначности решения уравнения (40) относительно A_{mn} для $m \geq 4, n \geq 4$, все коэффициенты A_{mn} являются однозначными функциями A_{01} и A_{10} . Таким образом существует лишь единственное решение, зависящее от двух произвольных констант.

Найти общий закон для вычисления коэффициентов A_{mn} , ввиду исключительной сложности уравнения (39), не представляется возможным. Однако непосредственной подстановкой выражения

$$L_4 = \frac{C_1}{4\pi} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{8\pi\xi}{C_2} - \frac{\eta}{C_2^2}} \right), \quad (44)$$

в уравнение (39) можно убедиться, что функция L_4 , зависящая от двух произвольных констант, тождественно удовлетворяет уравнению (39). В силу единственности решения, зависящего от двух произвольных констант, лагранжиан (44), являющийся лагранжианом Борна —

Инфельда, представляет единственную нелинейную электродинамику, в которой отсутствует двойное лучепреломление в вакууме.

Значение константы C_1 в выражении (44) согласно принципу соответствия должно быть равно C_2 . Коэффициент $C_1 = C_2 = E_0^2$ в этом случае имеет физический смысл квадрата максимального поля E_0 , равного $4 \cdot 10^{15}$ абс. электростат. ед. Лагранжиан (44), как известно, обеспечивает выполнение теоремы Лауэ об устойчивости заряда и дает согласующиеся с экспериментом значения электромагнитной массы электрона и его радиуса.

Для лагранжиана (44) формула (36) для скорости распространения света нормально к полю E принимает вид

$$v = \pm c \sqrt{1 - (E^2/E_0^2)}. \quad (45)$$

Закон распространения света, определяемый формулой (45), аналогичен закону распространения света в гравитационном поле. Формула (45) другим путем была получена в работе [3].

Формула (37) для случая $E = 0$ дает значение скорости распространения света нормально к магнитному полю B :

$$v = \pm \frac{c}{\sqrt{1 + (B^2/E_0^2)}}. \quad (46)$$

Формулы (30) принимают вид

$$v_{12} = v_{34} = v = - \frac{1 - (E^2/E_0^2)}{(BE/E_0^2) \pm \sqrt{1 - (E^2 - B^2)/E_0^2}} c, \quad (47)$$

при этом $v \leq c$.

Блохинцевым и Орловым [2] исследовалось распространение электромагнитных возмущений (сигналов) как поверхностей слабого разрыва, при этом в общем случае было показано существование четырех скоростей распространения сигналов в данном направлении.

Из настоящей работы следует, что в общем случае нелинейной электродинамики существуют четыре линейно поляризованных плоских волны, распространяющихся в данном направлении с различными скоростями. Таким образом свет в нелинейной электродинамике может быть разложен на четыре компоненты, линейно поляризованные в четырех различных плоскостях.

В заключение автор приносит глубокую благодарность проф. Я. П. Терлецкому, проф. Д. Д. Иваненко и Л. Пал за ценные замечания.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
10 февраля 1954 г.

Литература

- [1] M. Born and L. Infeld. Proc. Roy. Soc. A, 144, 425, 1934. —
[2] Д. И. Блохинцев и В. В. Орлов. ЖЭТФ, 25, 513, 1953. — [3] М. Свирский.
Вестн. МГУ, 5, 43, 1951.

БИНАРНАЯ ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ. I

И. Р. Юхновский

Решается уравнение Боголюбова для нейтральной в целом системы заряженных частиц. Взаимодействие между частицами описывается потенциалом, качественно учитывающим короткодействующие силы и снимающим расходимость в нуле. Получено общее выражение для первого, второго, ..., k -го приближения бинарной функции распределения.

1. Общее решение уравнения для k -го приближения

Как известно, система N заряженных частиц может быть описана последовательностью s -х функций распределения $F_s(q_1, \dots, q_s)$, для каждой из которых $\frac{1}{V} F_s(q_1, \dots, q_s) dq_1 \dots dq_s$ определяет вероятность того, что положения заданной группы s молекул лежат в соответственно бесконечно малых объемах $dq_1, \dots, dq_s$ около точек $q_1, \dots, q_s$ при произвольном распределении остальной совокупности $n - s$ частиц.

Общее уравнение для определения $F_s(q_1, \dots, q_s)$, найденное Боголюбовым [1], имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial q_1^\alpha} F_{a_1 \dots a_s}(q_1, \dots, q_s) + \frac{1}{\Theta} \sum_{\substack{a_i, a_j \\ i, j}} \frac{\partial \Phi_{a_i a_j}(|q_i - q_j|)}{\partial q_1^\alpha} F_{a_1 \dots a_s}(q_1, \dots, q_s) + \\ + \frac{1}{\Theta v} \sum n_{a_{s+1}} \int \frac{\partial \Phi_{a_1 a_{s+1}}}{\partial q_1^\alpha} F_{a_1 \dots a_{s+1}}(q_1, \dots, q_{s+1}) dq_{s+1} = 0, \quad (1.1)$$

где $a_1, \dots, a_s$ — сорта ионов, $\Theta = kT$, $v = V/N$, q_1^α — α -компонента q_1 , $\Phi_{a_i a_j}$ — потенциал взаимодействия между ионами a_i и a_j .

Уравнение это можно решать, применяя метод производящего функционала с последующим разложением функций $F_{a_1 \dots a_s}(q_1, \dots, q_s)$ (или соответствующих им функционалов) по степеням малого параметра [1]. Для заряженных (ионных) систем взаимодействующих частиц таким параметром является величина

$$\epsilon = v / r_d^3, \quad (1.2)$$

где r_d — дебаевский радиус.

Если описывать взаимодействие между частицами законом Кулона, то полученное при этом нулевое приближение бинарной функции распределения расходится на малых расстояниях. Нахождение высших приближений лишено смысла, так как свойства расходимости усиливаются [1]¹. Трудности, связанные с расходимостью нулевого

¹ В недавно опубликованной работе Стрельцовой — Сталинской [2] вычисляется первое приближение для бинарной функции распределения в случае чисто кулоновского потенциала взаимодействия. Эта попытка, в силу сказанного выше, не может считаться убедительной.

и высших приближений бинарной функции распределения вызваны незаконной экстраполяцией кулоновского закона взаимодействия, справедливого для больших r , на расстояния порядка ионных радиусов.

Общие квантово-механические соображения, с одной стороны, и полуэмпирические данные, — с другой, приводят к потенциалу вида

$$\Phi(r) = \frac{e^2}{r} (1 - A(r) e^{-\alpha r}), \quad (1.3)$$

удовлетворительно описывающему взаимодействие двух ионов, причем $\alpha \sim 10^8 \text{ см}^{-1}$; $A(r)$ — функция, стремящаяся к единице при $r \rightarrow 0$. При r , достаточно далеких от нуля (однако, вообще говоря, малых) этот потенциал учитывает обменное и поляризационное взаимодействия. На расстояниях порядка ионного радиуса ($1/\alpha$) он обеспечивает отсутствие чисто кулоновского члена и, следовательно, качественно учитывает силы отталкивания. Для простоты можно использовать предельную форму этого потенциала при $A = 1$, т. е.

$$\Phi(r) = (1 - e^{-\alpha r}) / r. \quad (1.4)$$

С математической точки зрения для устранения расходимостей достаточно потребовать при заданном параметре разложения, чтобы потенциальная функция удовлетворяла определенным граничным условиям

$$\Phi(r) = \begin{cases} \sim 1/r & \text{для достаточно больших } r \text{ (больших нескольких диаметров иона).} \\ A = \text{const} < +\infty & \text{при } r \rightarrow 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Этим требованиям удовлетворяет (1.3).

Для ионных систем, взаимодействующих по закону (1.3), вместо параметра $\varepsilon = v/r_a^3$ удобно формально пользоваться величиной $v = V/N$ в качестве параметра разложения, при этом нужно, однако, считать потенциал Φ_{ab} пропорциональным v и заменить Φ_{ab} на $v\psi_{ab}$:

$$\frac{1}{\Theta} \Phi_{ab} = v\psi_{ab}. \quad (1.6)$$

Эквивалентные системе (1.1) уравнения в функциональных производных записываются, как обычно для унарной функции распределения, и имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial q_1^\alpha} \frac{\delta A}{\delta y_a(q)} + \sum n_b \int \frac{\partial \psi_{ab}}{\partial q_1^\alpha} \left(\frac{\delta A}{\delta y_a} \frac{\delta A}{\delta y_b} + v \frac{\delta^2 A}{\delta y_a \delta y_b} \right) dq_b = 0, \quad (1.7)$$

где $A(y_1, \dots, y_N)$ — функционал, связанный с гиббсовской функцией соотношением

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q_N} \int \exp \left\{ - \frac{\sum \Phi_{a_i a_j}(r_{ij})}{\Theta} \right\} \prod_a [1 + v u_a(q)] dq_1 \dots dq_N = \\ = \exp \left\{ \frac{1}{v} A(y_1, \dots, y_N) \right\}, \end{aligned}$$

$y = v u$, $u = u(q)$ — регулярные быстро убывающие функции, Q_N — конфигурационный интеграл.

Из функциональных производных функционала $A(y_1, \dots, y_N)$ при всех $u_{a_i} = 0$

$$\left(\frac{\delta A}{\delta u_a(q)} \right)_{u=0} = g_a(q_1); \quad \left(\frac{\delta^2 A}{\delta y_a \delta y_b} \right)_{u=0} = g_{ab}$$

и т. д., строятся s -е функции распределения

$$F_a = g_a; \quad F_{ab} = g_a g_b + v g_{ab};$$

$$F_{abc} = g_a g_b g_c + v(g_{ab} g_c + g_{ac} g_b + g_{bc} g_a) + v^2 g_{abc} \quad (1.8)$$

и т. д.

Чтобы получить уравнение для s -й функции распределения, достаточно функционально продифференцировать (1.7) по y , а затем положить $y=0$. Подставляя тогда вместо функций g их разложения

$$g_a = g_a^0 + v g_a^1 + v^2 g_a^2 + \dots;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$g_{a_1 \dots a_s} = g_{a_1 \dots a_s}^0 + v g_{a_1 \dots a_s}^1 + \dots \quad (1.9)$$

и собирая члены при v^i , получим уравнение для i -х приближений s -х функций распределения:

$$g_{a_1 \dots a_s}^i + \sum n_x \int \psi_{a_1 x} g_{x a_2 \dots a_s}^i dq_x = l_{a_1 \dots a_s}^i \quad (1.10)$$

(после освобождения от производных).

Запишем теперь соответствующую (1.10) алгебраическую систему

$$K_{a_1 \dots a_s}^i(|v|, q_3, \dots, q_s) + 2\pi^2 \sum n_x e_{a_1} e_x d(|v|) K_{x a_2 \dots a_s}^i(|v|, q_3, \dots, q_s) =$$

$$= L_{a_1 \dots a_s}^i(|v|, q_3, \dots, q_s), \quad (1.11)$$

решение которой, как нетрудно убедиться, имеет вид:

$$K_{a_1 \dots a_s}^i = L_{a_1 \dots a_s}^i + 2\pi^2 \sum n_x \frac{e_{a_1} e_{a_s} d}{1 + 2\pi^2 \sum e_c^2 n_c d} L_{x a_2 \dots a_s},$$

где

$$g_{a_1 \dots a_s}^i = \int K_{a_1 \dots a_s}^i(|v|, q_3, \dots, q_s) e^{i\vec{v}\vec{q}_1 - \vec{q}_2} d\varphi \sin \theta d\theta v^2 dv;$$

$$l_{a_1 \dots a_s}^i = \int L_{a_1 \dots a_s}^i(|v|, q_3, \dots, q_s) e^{i\vec{v}\vec{q}_1 - \vec{q}_2} d\varphi \sin \theta d\theta v^2 dv;$$

$$\psi_{a_1 a_2}(|q_1 - q_2|) = \frac{1}{4\pi} \int e_{a_1} e_{a_2} d(|v|) e^{i\vec{v}\vec{q}_1 - \vec{q}_2} d\varphi \sin \theta d\theta v^2 dv.$$

Ввиду того что $e_a e_x d / (1 + 2\pi^2 \sum e_c^2 n_c d)$ является ядром g_{ax}^0 , по обратным формулам преобразования Фурье имеем

$$g_{a_1 \dots a_s}^i = l_{a_1 \dots a_s}^i + \sum n_x \int g_{a_1 x}^0 l_{x a_2 \dots a_s}^i dq_x. \quad (1.12)$$

Мы получили общее решение уравнения (1.10) для любого приближения s -й функции распределения.

2. Высшие приближения бинарной функции распределения

При рассмотрении вопроса о нахождении высших приближений s -х функций распределения рассмотрим наряду с (1.10) уравнение для i -го приближения унарной функции распределения:

$$\frac{\partial}{\partial q_1^\alpha} \frac{\delta A^i}{\delta y_a(q_1)} + \sum_b \int \frac{\partial \psi_{ab}}{\partial q_1^\alpha} (n_b + y_b(q_2)) \times \\ \times \left(\frac{\delta A^i}{\delta y_a(q_1)} \frac{\delta A^0}{\delta y_b(q_2)} + \dots + \frac{\delta A^0}{\delta y_a(q_1)} \frac{\delta A^i}{\delta y_b(q_2)} + \frac{\delta^2 A^{i-1}}{\delta y_a(q_1) \delta y_c(q_2)} \right) dq_2 = 0. \quad (2.1)$$

Переход к s -м функциям распределения совершается путем $(s-1)$ -кратного функционального дифференцирования.

В уравнении (2.1) при $i=0$ последний член отсутствует, и в правую сторону выносятся известные нулевые приближения функций порядка меньше s . Принимая во внимание формулу (1.12), убеждаемся, что

$$g_{a_1 \dots a_s}^0 = f(g_{a_1 a_s}^0, \dots, g_{a_{s-1} a_s}^0, \dots, g_{kl}^0). \quad (2.2)$$

Прежде чем решать уравнение для первого приближения s -й функции распределения, нужно знать нулевое приближение $(s+1)$ -й функции распределения. Продолжение подобных рассуждений для i -х приближений s -х функций приводит к выводу, что каждое из них выражается только через нулевые приближения бинарных функций распределения.

Перейдем теперь к нахождению первого и второго приближений F_{ab} . Чтобы решить уравнение для g_{ab}^1 нужно знать g_{abc}^0 .

Уравнение для g_{abc}^0 имеет вид:

$$g_{abc}^0 + \sum n_d \int \psi_{ad} g_{abc}^0 dq_d = g_{ab}^0 g_{ac}^0 - g_{bc}^0 (\psi_{ac} + \psi_{ab}), \quad (2.3)$$

с решением, согласно (1.12):

$$g_{abc}^0 = g_{ab}^0 g_{ac}^0 - g_{bc}^0 (\psi_{ac} + \psi_{ab}) + \sum n_x \int g_{ax}^0 g_{bx}^0 g_{cx}^0 dq_x - \\ - \sum n_x \int g_{ax}^0 g_{bc}^0 (\psi_{xc} + \psi_{xb}) dq_x. \quad (2.4)$$

Если воспользоваться тем, что

$$g_{ab}^0 + \sum n_c \int \psi_{ac} g_{ab}^0 dq_c = -\psi_{ab}, \quad (2.5)$$

то для (2.4) получится

$$g_{abc}^0 = g_{ab}^0 g_{ac}^0 + g_{ab}^0 g_{cb}^0 + g_{ac}^0 g_{bc}^0 + \sum n_x \int g_{ax}^0 g_{bx}^0 g_{cx}^0 dq_x. \quad (2.6)$$

Теперь рассмотрим уравнение для первого приближения F_{ab}

$$\frac{\partial}{\partial q_1^\alpha} g_{ab}^1 + \frac{\partial \psi_{ab}}{\partial q_1^\alpha} g_{ab}^0 + \sum n_c \int \frac{\partial \psi_{ac}}{\partial q_1^\alpha} g_{cb}^1 dq_c + \\ + \sum n_c \int \frac{\partial \psi_{ac}}{\partial q_1^\alpha} g_{acb}^0 dq_c = 0 \quad (2.7)$$

и подставим выражение (2.6) вместо g_{acb}^0 ; тогда

$$g_{ab}^1 + \sum n_c \int \psi_{ac} g_{cb}^0 dq_c = \frac{1}{2!} g_{ab}^{02} + \sum_c n_c \int \frac{g_{ac}^{02}}{2} g_{cb}^0 dq_c. \quad (2.8)$$

Решением этого уравнения является функция

$$g_{ab}^1 = \frac{1}{2!} g_{ab}^{02} + \sum n_c \int \frac{1}{2} g_{ac}^{02} g_{cb}^0 dq_c + \sum n_c \int g_{ac}^0 \frac{1}{2!} g_{cb}^{02} dq_c + \\ + \sum \sum n_c n_d \int g_{ac}^0 \frac{g_{cd}^{02}}{2} g_{db}^0 dq_c dq_d. \quad (2.9)$$

Первый член $\frac{1}{2!}g_{ab}^{02}$ представляет собой соответствующий член разложения $\exp\{vg_{ab}^0\}$ в ряд по степеням vg_{ab}^0 . Остальные три члена являются «корреляциями»², описывающими в первом приближении влияние остальных $n-2$ частиц на вероятность нахождения избранной пары a и b в точках q и q' .

Если бы корреляции отсутствовали, бинарную функцию распределения можно было бы записать в виде ряда, абсолютно сходящегося к экспоненте, т. е. $\exp\{vg_{ab}^0\}$. С увеличением концентрации значение корреляций должно возрастать; от их величины может существенно зависеть поведение F_{ab} . В связи с этим возникает необходимость определения величины и характера соответствующих корреляций в дальнейших приближениях бинарной функции распределения.

Уравнение для второго приближения F_{ab} имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_1^\alpha} g_{ab}^2 + \sum n_d \int \frac{\partial \psi_{ad}}{\partial q_1^\alpha} g_{ab}^2 dq_d = \\ = - \frac{\partial \psi_{ab}}{\partial q_1^\alpha} g_{ab}^1 - \sum n_c \int \frac{\partial \psi_{ac}}{\partial q_1^\alpha} g_{abc}^1 dq_c. \end{aligned} \quad (2.10)$$

В это уравнение входит первое приближение тройной функции распределения, и для того чтобы знать последнее, нужно найти g_{abcd}^0 .

Выкладки, необходимые для решения уравнений для нулевого приближения четверной, первого приближения тройной и, наконец, второго приближения бинарной функций распределения, весьма громоздки. В связи с этим были введены схематические обозначения корреляций и схематический способ применения формулы (1.12). Уравнение (2.10) удалось решить, и мы приведем окончательное выражение для второго приближения бинарной функции распределения:

$$\begin{aligned} g_{ab}^2 = \frac{1}{3!} g_{ab}^{03} + \sum n_x \int \left\{ \frac{g_{ax}^{03}}{3} g_{xb}^0 + \frac{g_{ax}^{02}}{2} \frac{g_{xb}^0}{2} + g_{ax}^0 \frac{g_{xb}^{03}}{3!} + \right. \\ \left. + g_{ab}^0 \left(\frac{g_{ax}^{03}}{2} g_{xb}^0 + g_{ax}^0 \frac{g_{xb}^{03}}{2} \right) \right\} dq_x + \sum \sum n_1 n_2 \iint \left\{ \frac{g_{12}^{03}}{3} g_{a1}^0 g_{2b}^0 + \right. \end{aligned}$$

² Последняя корреляция в (2.9) происходит от последнего члена (2.6), если вместо g_{acb}^0 подставить $\sum n_x \int g_{ax}^0 g_{bx}^0 g_{cx}^0 dq_x$; действительно:

$$\begin{aligned} \sum n_c \int \frac{\partial \psi_{ac}}{\partial q_1^\alpha} \sum n_x \int g_{ax}^0 g_{bx}^0 g_{cx}^0 dq_x dq_c = - \sum n_x \int \frac{\partial g_{ax}^0}{\partial q_1^\alpha} g_{ax}^0 g_{bx}^0 dq_x - \\ - \sum n_x \int \frac{\partial \psi_{ax}}{\partial q_1^\alpha} g_{ax}^0 g_{bx}^0 dq_x. \end{aligned}$$

Второе выражение в правой части сокращается с другими членами, входящими в состав g_{abc}^0 . В первом же выражении можно вынести производную

$$\frac{\partial}{\partial q_1^\alpha} \sum n_x \int \frac{g_{ax}^{02}}{2} g_{bx}^0 dq_x,$$

«сократить» ее и, применив формулу общего решения, получить

$$\sum n_c \int \frac{g_{ac}^{02}}{2} g_{cb}^0 dq_c + \sum \sum n_c n_d \int g_{ac}^0 \frac{g_{cd}^{02}}{2} g_{db}^0 dq_c dq_d,$$

т. е. первую и последнюю корреляции в (2.9).

$$\begin{aligned}
 & + \frac{g_{12}^{0^2}}{2} \left(\frac{1}{2} g_{a1}^0 g_{b2}^0 + g_{a1}^0 \frac{g_{2b}^0}{2} + g_{a1}^0 g_{a2}^0 g_{b2}^0 + g_{a1}^0 g_{b1}^0 g_{b2}^0 + g_{a1}^0 g_{b2}^0 g_{ab}^0 \right) + \\
 & + g_{12}^0 \left(\frac{g_{a1}^0}{2} \frac{g_{b2}^0}{2} + \frac{g_{a2}^0}{2} g_{a2}^0 g_{b2}^0 + g_{a1}^0 g_{b1}^0 \frac{g_{b2}^0}{2} + \frac{1}{2} g_{a1}^0 g_{a2}^0 g_{b1}^0 g_{b2}^0 \right) \Big\} dq_1 dq_2 + \\
 & + \sum \sum \sum n_1 n_2 n_3 \int \int \int \left\{ \frac{g_{12}^{0^2}}{2} g_{23}^0 \left(g_{a1}^0 \frac{g_{b3}^0}{2} + \frac{g_{a3}^0}{2} g_{b1}^0 + g_{a1}^0 g_{a3}^0 g_{b3}^0 + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + g_{a3}^0 g_{b1}^0 g_{b3}^0 + g_{a1}^0 g_{b3}^0 g_{13}^0 + g_{a3}^0 g_{b1}^0 g_{13}^0 \right) + \frac{g_{12}^{0^2}}{2} \frac{g_{23}^{0^2}}{2} g_{a1}^0 g_{b3}^0 + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{g_{12}^0 g_{13}^0 g_{23}^0}{2} (g_{a1}^0 g_{a2}^0 g_{b3}^0 + g_{a1}^0 g_{b2}^0 g_{b3}^0) \right\} dq_1 dq_2 dq_3 + \\
 & + \sum \sum \sum \sum n_1 n_2 n_3 n_4 \int \int \int \int \left(\frac{g_{43}^{0^2}}{2} g_{32}^0 \frac{g_{21}^0}{2} + g_{43}^0 \frac{g_{32}^0}{2} g_{21}^0 g_{41}^0 + \right. \\
 & \quad \left. + g_{43}^0 g_{42}^0 g_{23}^0 g_{31}^0 g_{21}^0 \right) g_{a1}^0 g_{b4}^0 dq_1 dq_2 dq_3 dq_4. \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

Во втором приближении F_{ab} корреляции начинаются с членов, имеющих одну сумму (корреляции первого порядка), и кончаются членами, имеющими четыре суммы (корреляции четвертого порядка). Эти последние схематически изображаются следующим образом, соответственно:

где отрезок (a4) обозначает g_{a4}^0 , двойной отрезок (43) обозначает $g_{43}^{0^2}$ и т. д. Нижние индексы — индексы функции распределения, верхние — индексы суммирования. Каждая из корреляций (2.12) получается из самой высокой корреляции в нулевом приближении четверных функций распределения (их там тоже три), имеющих по два индекса суммирования.

Для случая симметричных систем

$$\sum n_c e_c^{2h+1} = 0, \quad h \geq 0$$

имеем

$$g_{ab}^1 = \frac{g_{ab}^{0^2}}{2}; \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned}
 g_{ab}^2 = & \frac{g_{ab}^{0^3}}{3!} + \sum n_1 \int \left(\frac{1}{3!} g_{a1}^0 g_{1b}^0 + g_{a1}^0 \frac{g_{1b}^{0^2}}{3!} + \frac{g_{a1}^{0^2}}{2!} \frac{g_{1b}^{0^2}}{2!} \right) dq_1 + \\
 & + \sum \sum n_1 n_2 \int \int g_{a1}^0 \frac{g_{12}^{0^2}}{2} g_{2b}^0 dq_1 dq_2. \quad (2.14)
 \end{aligned}$$

k -е приближение F_{ab} начинается выражением

$$v^{h+1} \frac{g_{ab}^{0^{h+1}}}{k+1}, \quad (2.15)$$

являющимся $(k+1)$ -м членом в разложении $\exp\{vg_{ab}^0\}$. Далее идут корреляции первого порядка — с одной суммой по сортам ионов

$$\sum n_c \int \left\{ \frac{g_{ac}^{0^{k+1}}}{(k+1)!} g_{cb}^0 + \dots + g_{ac}^0 \frac{g_{cb}^{0^{k+1}}}{(k+1)!} + \right. \\ \left. + g_{ab}^0 \left(\frac{g_{ac}^{0^k}}{k!} g_{cb}^0 + \dots + g_{ac}^0 \frac{g_{cb}^{0^k}}{k!} \right) \right\} dq_c \quad (2.16)$$

и дальше более высокие корреляции.

Порядок самых высоких корреляций можно определить следующим путем. Если известна l_{ab}^k — правая сторона уравнения для g_{ab}^k , то применение к ней формулы общего решения³ может прибавить к уже имевшимся в l_{ab}^k суммам не более одной суммы. В правой стороне уравнения для g_{ab}^k наибольшее число сумм имеется в члене, содержащем g_{abc}^{k-1} . Чтобы найти самые высокие корреляции в g_{abc}^{k-1} , нужно обратиться к самым высоким корреляциям в g_{abcd}^{k-2} и т. д. Мы приходим, таким образом, к заключению, что корреляции с наибольшим числом сумм (и интегралов) в g_{ab}^k происходят от высших корреляций в нулевом приближении $(k+2)$ -й функции распределения.

Можно показать, что самыми высокими корреляциями в $g_{a_1 \dots a_{k+2}}^0$ являются члены с k суммами типа:

$$\sum_1 \sum_2 \dots \sum_k n_1 n_2 \dots n_k \int g_{a_1 h}^0 g_{a_2 h}^0 g_{a_3 h-1}^0 g_{a_4 h-1}^0 g_{a_5 h-2}^0 \dots \\ \dots g_{a_{k+1} 1}^0 g_{a_{k+2} 1}^0 dq_1 \dots dq_k. \quad (2.17)$$

Выражение (2.17) наглядно изображается простой схемой:

(2.17a)

Напомним, что отрезки $\nearrow_{a_i}^h$ обозначают функции $g_{a_i h}^0$, верхние индексы — индексы суммирования (каждый из них соответствует сумме), нижние индексы — индексы функций распределения.

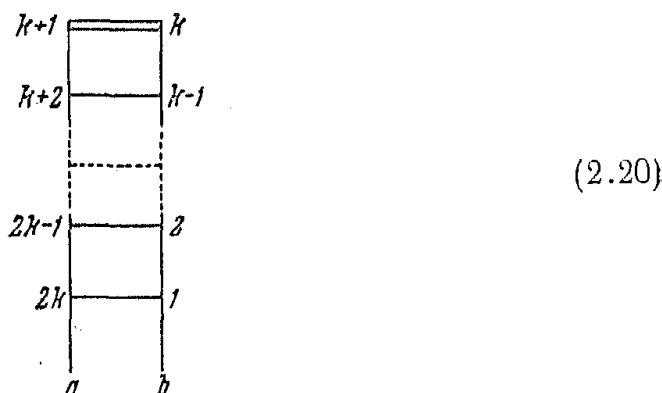
Другие высшие корреляции в $g_{a_1 \dots a_{k+2}}^0$ получаются из (2.17a) перестановкой нижних индексов (перестановки двух нижних индексов, относящихся к одному и тому же верхнему индексу, тождественны). Переход от (2.17) к самым высоким корреляциям в g_{ab}^k наглядно изображается соответствующими схемами. Так, в первом приближении $(k+1)$ -й функции распределения из (2.17) получаются два члена:

(2.18)

³ Первый член формулы общего решения не прибавляет числа сумм, второй член общего решения может добавить одну сумму.

У второй из них на один верхний индекс (т. е. на одну сумму) больше, чем в (2.17).

Переход на каждую ступеньку к более высоким приближениям на единицу низшей функции распределения связан каждый раз с добавлением не более одного верхнего индекса к уже имевшимся верхним индексам и сокращением одного нижнего индекса. Этот ступенчатый переход от нулевого приближения $(k+2)$ -й функции распределения к k -му приближению бинарной функции имеет k ступенек, а поэтому самая высокая корреляция в k -м приближении F_{ab} будет иметь $2k$ сумм (и интегралов). Она изображается следующей схемой:



что соответствует

$$\sum_1 \sum_2 \cdots \sum_{2k} n_1 n_2 \cdots n_{2k} \int g_{a, 2k}^0 g_{2k, 1}^0 g_{1b}^0 \cdots \cdot g_{k+2, k+1}^0 \frac{g_{k+1, k}^0}{2} g_{k, k-1}^0 dq_1 \cdots dq_{2k}. \quad (2.20a)$$

Таким образом каждое k -е приближение F_{ab} представляет собою сумму последовательно возрастающих корреляций, начиная с (2.16) и кончая членами типа (2.20).

Ряд для F_{ab} будет иметь теперь следующий вид:

$$\begin{aligned} F_{ab} = & 1 + v g_{ab}^0 + \\ & + v^2 \left\{ \frac{g_{ab}^{02}}{2} + \sum n_c \int \left(\frac{g_{ac}^{02}}{2} g_{cb}^0 + g_{ac}^0 \frac{g_{cb}^{02}}{2} \right) dq_c + \right. \\ & + \sum \sum n_c n_d \int g_{ac}^0 \frac{g_{cd}^{02}}{2} g_{ab}^0 dq_c dq_d \left. \right\} + \cdots \\ & \cdots + v^{k+1} \left\{ \frac{g_{ab}^{0^{k+1}}}{(k+1)!} + \sum n_c \int \left(\frac{g_{ac}^{0^{k+1}}}{(k+1)!} g_{cb}^0 + \cdots \right) dq_c + \cdots \right. \\ & \left. \cdots + \sum \cdots \sum_{2k} n_1 n_{2k} \int \cdots \int g_{a, 2k}^0 \cdots \frac{g_{k+1, k}^{02}}{2} dq_1 \cdots dq_{2k} \cdots \right\} + \cdots \quad (2.21) \end{aligned}$$

В (2.21) явно выражены члены, обозначавшиеся в [3] символом f^n .

С увеличением номера приближения резко возрастает число корреляционных членов, и в практических расчетах обычно приходится ограничиваться нулевым и первым приближением F_{ab} . Но, как уже указывалось, корреляции растут с концентрацией: они могут стать главными членами в разложении для F_{ab} и влиять на сходимость всего ряда. Поэтому в практических вычислениях нужно знать, какими приближениями бинарной функции распределения можно пользоваться, и вообще законно ли пользоваться, скажем, несколькими

первыми членами ряда (2.21), отбрасывая последние. С этой точки зрения, представляется весьма важным описать поведение корреляций в зависимости от концентрации и расстояния между частицами a и b и сопоставить их затем с нулевым приближением по порядку величины. Такое исследование выходит за рамки настоящей статьи и будет рассмотрено отдельно.

В заключение автор выражает глубокую благодарность А. Е. Глауберману за руководство работой.

Львовский государственный
университет

Поступила в редакцию
7 января 1954 г.

Литература

- [1] Н. Н. Боголюбов. Проблемы динамической теории в статистической физике, ГТТИ, 1946.—[2] Е. А. Стрельцова—Сталинская. ЖЭТФ, 26, 179, 1954.—[3] А. Е. Глауберман и И. Р. Юхновский. ЖЭТФ, 22, 562, 1952.
-

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ГАЗОМАГНИТНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

С. А. Каплан

Исследуется решение системы спектральных уравнений газоманитной турбулентности, предложенной в [1]. В случае стационарного состояния имеет место равномерное распределение энергии по спектру и подобие спектров кинетической и магнитной энергии. Спектры имеют степенной характер. Показатель степени, несколько превышающий значение $5/3$, слабо зависит от масштаба движения, скорости звука, диссипации энергии в ударных волнах и т. п. При $\lambda > \nu$ имеет место и другое решение, при котором показатель степени спектра кинетической энергии близок к $5/3$, а магнитной — к $1/3$. Указываются методы исследования нестационарной турбулентности при помощи спектральной теории.

Теории изотропной газоманитной турбулентности, т. е. турбулентности электропроводящего сжимаемого газа, находящегося в магнитном поле, в последнее время было посвящено много работ, что объясняется практическими применениями этой теории при исследовании многих проблем астрофизики и геофизики [2, 3]. Однако, в то время как теория изотропной и локально-изотропной турбулентности несжимаемой жидкости достигла известной степени совершенства благодаря работам Колмогорова, Обухова, Гейзенберга и др., в теории газоманитной турбулентности не удалось получить сколько-нибудь удовлетворительных результатов. Например, в работах [4, 5] содержатся только качественные, не всегда достаточно обоснованные, соображения. В работе [6] сделана попытка применить к случаю гидромагнитной турбулентности (т. е. турбулентности электропроводящей жидкости в магнитном поле) так называемый корреляционный метод. Однако, поскольку полученная в [6] система двух уравнений содержит пять неизвестных функций и, следовательно, не может быть решена без привлечения каких-либо пока не известных гипотез, то этот метод не привел к существенным результатам. В работе [7] предлагается сравнительно сложная система уравнений для определения параметров газоманитной турбулентности, также пока не поддающаяся решению.

В работе автора [1] была предложена система спектральных уравнений изотропной газоманитной турбулентности. Для этой системы, обладающей известными недостатками, связанными с неоднозначностью ее вывода (общий недостаток, свойственный спектральным теориям турбулентности), удастся довести до конца решение и, следовательно, определить основные количественные характеристики газоманитной турбулентности — спектры кинетической и магнитной энергий. При помощи системы [1] можно изучать также и нестационарную турбулентность. В настоящей работе мы приводим решение системы [1].

1. Система спектральных уравнений изотропной газоманитной турбулентности

В современной теории изотропной турбулентности существуют два, вообще говоря, взаимосвязанных метода — корреляционный и спектральный. В корреляционном методе основными характеристиками тур-

булентности являются так называемые корреляционные тензоры, представляющие собой усредненные произведения компонент турбулентной скорости в двух точках. В спектральном методе основной характеристикой является спектральная функция $F(k)$, представляющая собой коэффициент разложения энергии турбулентного движения в интеграл Фурье.

Исследование газомангнитной турбулентности корреляционным методом вряд ли может рассчитывать на успех по следующим причинам. Во-первых, все компоненты корреляционных тензоров можно свести к одной для тензора каждого ранга корреляционной функции только тогда, когда векторные поля скорости $\mathbf{v}$ и напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$ удовлетворяют условиям: $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ и $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$. При учете сжимаемости газа первое из этих условий не выполняется. Во-вторых, число неизвестных корреляционных тензоров в гидромагнитной турбулентности растет быстрее, чем число уравнений, служащих для их определения, благодаря большому числу всех возможных комбинаций произведения компонент $\mathbf{v}$ и $\mathbf{H}$. Например, одно уравнение Кармана—Говарта (или соответствующее уравнение Колмогорова) содержит две неизвестные корреляционные функции (компоненты тензоров корреляции второго и третьего ранга), а система двух уравнений Чандрасекара [6] для изотропной гидромагнитной турбулентности содержит уже пять неизвестных корреляционных функций (по две компоненты от тензоров корреляции второго ранга и по три компоненты от тензоров корреляции третьего ранга). Переход к корреляционным тензорам высших рангов еще более усугубит трудности с незамкнутостью системы уравнений в этом методе.

В спектральной теории газомангнитной турбулентности, наряду со спектральной функцией $F(k)$ кинетической энергии, следует ввести спектральную функцию $M(k)$ магнитной энергии, приходящейся на единицу массы, являющейся коэффициентом разложения в интеграл Фурье величины $H^2/4\pi\rho$, где ρ — плотность. Величины $F(k)$ и $M(k)$ допускают наглядное истолкование, если принять, что волновое число k связано с размером вихря l соотношением $k = 2\pi/l$, а именно: $F(k)dk$ и $M(k)dk$ — количества кинетической и, соответственно, магнитной энергии на единицу массы, переносимой вихрями с волновыми числами в интервале от k до $k + dk$. Основная задача этой теории сводится к нахождению системы спектральных уравнений для определения функций $F(k)$ и $M(k)$. Такая система и была предложена в работе [1]. Здесь она приводится с небольшим изменением (см. ниже):

$$\begin{aligned} \varepsilon_f(k) = & 2 \left(\nu + \kappa \int_k^\infty \frac{dk}{k^{3/2}} \sqrt{F(k)} \right) \int_0^k F(k) k^2 dk + \\ & + 2 \int_0^k [F(k) k^3]^{1/2} [\zeta_f(k) F(k) + \mu(k) M(k)] dk, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_m(k) = & 2 \left(\lambda + \kappa \int_k^\infty \frac{dk}{k^{3/2}} \sqrt{F(k)} \right) \int_0^k M(k) k^2 dk - \\ & - 2 \int_0^k [F(k) k^3]^{1/2} [\zeta_m(k) + \mu(k)] M(k) dk. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь приняты следующие обозначения: ν — вязкость, $\lambda = c^2/4\pi\sigma$, где σ — электропроводность, а c — скорость света; $\varepsilon_f(k)$ и $\varepsilon_m(k)$ — полные диссипации кинетической и, соответственно, магнитной энергии в вихрях с волновыми числами в интервале от нуля до k ; $\mu(k)$, $\zeta_f(k)$ и $\zeta_m(k)$ — безразмерные, медленно меняющиеся функции, обычно меньшие

единицы. Соображения, на основании которых была постулирована система (1) и (2), были приведены в [1]. Здесь мы сделаем только несколько дополнительных замечаний.

Для инерционного члена в [1] мы приняли выражение Гейзенберга [8], являющееся несколько более простым, чем соответствующие выражения Обухова [9], Кармана [10] и др. Далее, мы считаем, что присутствие магнитного поля, с одной стороны, не вносит принципиальных изменений в известную картину турбулентного движения как «потока» энергии через последовательность вихрей, а, с другой стороны, не влияет существенно на турбулентную вязкость ν , для которой мы поэтому сохранили значение Гейзенберга [8]

$$\nu = \kappa \int_k^{\infty} \frac{dk}{k^{3/2}} \sqrt{F(k)}. \quad (3)$$

Очевидно также, что наряду с «поток» кинетической энергии через последовательность вихрей имеет место и аналогичный «поток» магнитной энергии, вероятно, с тем же значением турбулентной вязкости (3). Эти предположения обосновываются, с одной стороны, тем, что присутствие магнитного поля не влияет на инерционные члены уравнений Навье—Стокса, а, с другой стороны, тем, что в уравнении, определяющем изменение магнитного поля при движении газа, также имеется член, аналогичный инерционному [2, 6, 11]. Что же касается вообще выбора выражения для инерционных членов (являющегося в современной теории изотропной турбулентности, как известно, неоднозначным), то не составляет никакой трудности записать их в (1) и (2) и в форме Обухова [9]. Поскольку в [12] была показана известная равноценность формулировок Обухова и Гейзенберга, то выбор последней объясняется только соображениями простоты получения решения (1) и (2).

Форма членов, описывающих диссипацию энергии при образовании разрывов и переход энергии из кинетической формы в магнитную, и обратно, была истолкована в [1]. Здесь мы добавим также несколько замечаний. Поскольку диссипация кинетической и магнитной энергии при образовании разрывов в движении масштаба $l = 2\pi/k$:

$$\frac{v^2}{2} \frac{v}{l} \sim [F(k)]^{1/2} k^{1/2}, \quad \frac{H^2}{8\pi\rho} \frac{v}{l} \sim M(k) [F(k)]^{1/2} k^{1/2}, \quad (4)$$

не зависит от соответствующих диссипаций энергии в движениях других масштабов, то представление этих членов в виде однократных интегралов от (4) является единственным. Аналогичное соображение применимо и к члену, описывающему переход магнитной энергии в кинетическую, и обратно.

Величины ζ_f и ζ_m положительны, так как при образовании разрывов или ударных волн кинетическая энергия уменьшается, а магнитная увеличивается [13]. Поэтому сделанное в [1] предположение $\zeta_f = -\zeta_m$ является ошибочным. Величина $\mu > 0$, если имеет место переход кинетической энергии в магнитную, и обратно. Введение безразмерных функций $\mu(k)$, $\zeta_f(k)$ и $\zeta_m(k)$, зависящих от формы вихрей, условий возникновения разрывов, скорости звука и т. п., делает систему (1) и (2) в достаточной степени общей. Из введенных в [1] предположений о характере этих функций мы оставим здесь только одно очевидное условие — функции $\mu(k)$, $\zeta_f(k)$ и $\zeta_m(k)$ ограничены во всей области спектра волновых чисел. Повидимому, значения этих функций меняются в пределах от 0 до 0,1—0,3. Наконец, как мы увидим ниже, целый ряд результатов теории, в частности форма спектров в области малых волновых чисел, вообще не зависят от выбора конкретной формы этих функций.

Все изложенные выше соображения позволяют нам сделать заключение, что система (1) и (2) вполне пригодна для исследования газомангнитной турбулентности. Нужно, конечно, отметить, что проведение более строгого обоснования системы (1) и (2) является желательным.

2. Решение системы спектральных уравнений газомангнитной турбулентности в стационарном случае

Для случая стационарной турбулентности в уравнениях (1) и (2) нужно положить

$$\varepsilon_f(k) = \text{const}, \quad \varepsilon_m(k) = \text{const}. \quad (5)$$

Эти условия вытекают из представления состояния движения при изотропной турбулентности как «потока» энергии от больших вихрей к малым через всю их последовательность [8–10, 14]. Как уже отмечалось, это представление применимо и к случаю газомангнитной турбулентности, когда как кинетическая, так и магнитная энергия передается от больших вихрей к малым (ε_f и ε_m — соответствующие «потоки» энергий).

Интегральную систему (1), (2), (5) можно превратить в дифференциальную, если вместо k за независимую переменную принять турбулентную вязкость y [формула (3)], а вместо $F(k)$ и $M(k)$ ввести две новые неизвестные функции

$$f(y) = \kappa \sqrt{F(k)/k}, \quad g(y) = \kappa \sqrt{M(k)/k}. \quad (6)$$

Первая из этих функций есть vl , т. е. является числом Рейнольдса данного масштаба движения с точностью до постоянного множителя κ/ν .

Переход от дифференцирования по k к дифференцированию по y совершается по формуле

$$\frac{d}{dy} = -\frac{f}{k} \frac{d}{dy}, \quad (7)$$

непосредственно вытекающей из (2) и (6). Дважды дифференцируя систему (1), (2), (5), используя соотношения (2), (6) и (7), после ряда упрощений получим исходную дифференциальную систему спектральных уравнений, которую удобнее записать в виде

$$\begin{aligned} f(y) \frac{dA(y)}{dy} - \left(4 - 2 \frac{df(y)}{dy}\right) A(y) + 1 &= 0; \\ f(y) \frac{dB(y)}{dy} - \left(4 - 2 \frac{f(y)}{g(y)} \frac{dg(y)}{dy}\right) B(y) + 1 &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где $A(y)$ и $B(y)$ выражаются через $f(y)$ и $g(y)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} A(y) &= \frac{\nu + y}{f(y)} + \frac{\zeta_f(y) f^2(y) + \mu(y) g^2(y)}{\kappa f^2(y)}, \\ B(y) &= \frac{\lambda + y}{f(y)} - \frac{\zeta_m(y) + \mu(y)}{\kappa}. \end{aligned} \quad (9)$$

Система (8), (9) включает в себя пять неизвестных функций: $f(y)$, $g(y)$, $\zeta_f(y)$, $\zeta_m(y)$, $\mu(y)$, и, следовательно, для полного ее решения две из них, а именно $\zeta_f(y)$ и $\zeta_m(y)$, должны быть заданы. Что же касается пятой функции $\mu(y)$, то она может быть, по крайней мере частично, определена из условий совместимости уравнений.

Систему (8), (9) можно решать методом последовательных приближений, представляя все пять входящих в нее функций в виде рядов.

Если допустить, что в области малых волновых чисел (т. е. в области спектра Колмогорова для обычной турбулентности) спектральные функции должны иметь степенной характер, то, как нетрудно убедиться по (7), в первом приближении $f(y) \sim y$. Функция $g(y)$ может быть пропорциональна y в некоторой степени. Поэтому в первом приближении мы примем

$$g(y) = \beta [f(y)] , \quad (10)$$

где β и γ — постоянные величины. Здесь мы ограничимся только первым приближением. В этом же приближении мы можем пренебречь производными функций ζ_f , ζ_m и μ .

Рассмотрим сначала случай $\gamma = 1$, соответствующий подобию спектров кинетической и магнитной энергии. Тогда из (8) и (10) вытекает, что $A(y) = B(y)$, т. е.

$$\frac{\nu}{f(y)} + \frac{\zeta_f(y) + \mu(y)\beta^2}{\kappa} = \frac{\lambda}{f(y)} - \frac{\zeta_m(y) + \mu(y)}{\kappa} . \quad (11)$$

Так как $\nu/f = 1/Re$, где Re — число Рейнольдса, то в области спектра с малыми волновыми числами можно пренебречь членами ν/f и λ/f . Поэтому:

$$\mu(y) = - \frac{\zeta_f(y) + \zeta_m(y)}{\kappa(1 + \beta^2)} . \quad (12)$$

Подставляя (12) в (8) и (9), учитывая, что в первом приближении $y/f = 1/f'$, где $f' = df/du$, получим

$$\frac{1}{4 - 2f'(y)} = \frac{1}{f'(y)} + \frac{\zeta_f(y) - \zeta_m(y)\beta^2}{\kappa(1 + \beta^2)} . \quad (13)$$

Здесь мы пренебрегли второй производной f'' и первыми производными ζ'_f , ζ'_m и μ' по y . Решение (13):

$$\begin{aligned} f' &= \frac{-3 + 4 \frac{\zeta_f - \zeta_m \beta^2}{\kappa(1 + \beta^2)} + \sqrt{9 + 8 \frac{\zeta_f - \zeta_m \beta^2}{\kappa(1 + \beta^2)} + 16 \left(\frac{\zeta_f - \zeta_m \beta^2}{\kappa(1 + \beta^2)} \right)^2}}{4(\zeta_f - \zeta_m \beta^2) / \kappa(1 + \beta^2)} \approx \\ &\approx \frac{4}{3} + \frac{16}{27} \frac{\zeta_f - \zeta_m \beta^2}{\kappa(1 + \beta^2)} + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

Комбинируя (2), (6) и (7), находим для спектральных функций

$$F(k) = F(k_0)(k_0/k)^{2f'-1}, \quad M(k) = \beta^2 F(k_0)(k_0/k)^{2f'-1}. \quad (15)$$

Здесь $F(k_0)$ и k_0 — две произвольные постоянные.

Таким образом спектры газомангнитной турбулентности также имеют степенной характер. Однако здесь показатель степени зависит от сжимаемости газа, скорости звука и других параметров и в общем случае не является постоянным вдоль спектра. Формула (12) показывает, что в газомангнитной турбулентности имеет место переход энергии из магнитной формы в кинетическую вследствие того, что при образовании ударных волн кинетическая энергия уменьшается, а магнитная увеличивается.

В приведенных выше выражениях параметр β оставался произвольным. Из общих соображений о характере газомангнитных движений мы можем, однако, вывести заключение, что в равновесном состоянии имеет место не только подобие, но и полное равенство спектров, т. е. $\beta = 1$.

Так как величины ζ_f и ζ_m малы, то величина f' близка к $4/3$, а следовательно, показатели степени спектров газомангнитной турбулентности в рассматриваемом равновесном случае весьма близки к значению $5/3$, имеющему место в случае турбулентности несжимаемой жидкости. Отметим, что формулы (12) — (15) справедливы и при учете зависимости ζ_f и ζ_m от y , если можно пренебречь производными этих величин.

Аналогично можно рассмотреть и область больших волновых чисел. В силу того что мы приняли для турбулентной вязкости выражение Гейзенберга (2), спектр оказывается вида $F(k) \sim M(k) \sim 1/k^7$. Поскольку в настоящее время у нас нет уверенности в справедливости этого результата, то мы не будем здесь заниматься более подробно исследованием высокочастотной области спектра.

Выше мы рассмотрели случай подобия спектров магнитной и кинетической энергий. Теперь посмотрим, допускает ли система (8), (9) какое-либо другое, отличное от (15) решение. Нетрудно убедиться непосредственной подстановкой, что при $\gamma \neq 1$ и $\gamma \neq 1/2$ система (8), (9) оказывается противоречивой с условием (16). Однако при $\gamma = 1/2$ существует решение системы (8), (9) и (10). Для нахождения этого решения запишем $f(y)$ в виде ряда

$$f(y) = \alpha y + \alpha_1 + \dots, \quad f'(y) = \alpha + \dots \quad (16)$$

по нисходящим степеням y . Подставляя (16) в (8), (9) и (11) и приравнявая нулю коэффициенты при старших степенях y , получим систему

$$\begin{aligned} (4 - 2\alpha) \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{\zeta_f}{\kappa} \right) &= 1, \quad (4 - \alpha) \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\zeta_m + \mu}{\kappa} \right) = 1, \\ (4 - \alpha) \left(\nu - \frac{\alpha_1}{\alpha} + \frac{\mu \beta^2}{\kappa} \right) &= 0, \quad \lambda - \frac{\alpha_1}{\alpha} = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь мы также пренебрегли производными ζ_f' и ζ_m' и μ' . Из (17) следует

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{-3 + 4 \frac{\zeta_f}{\kappa} + \sqrt{9 + 8 (\zeta_f / \kappa) + 16 (\zeta_f / \kappa)^2}}{4 \zeta_f / \kappa} = \frac{4}{3} + \frac{16}{27} \frac{\zeta_f}{\kappa} + \dots, \\ \frac{\mu}{\kappa} &= \frac{4 - 2\alpha}{(4 - \alpha) \alpha} - \frac{\zeta_m}{\kappa} = \frac{3}{8} - \frac{5}{12} \frac{\zeta_f}{\kappa} - \frac{\zeta_m}{\kappa} + \dots, \\ \beta^2 &= \frac{\kappa}{\mu} (\lambda - \nu). \end{aligned} \quad (18)$$

Спектры кинетической и магнитной энергии в этом случае имеют вид:

$$F(k) = F(k_0) \left(\frac{k_0}{k} \right)^{2\alpha-1}, \quad M(k) = \frac{\kappa (\lambda - \nu)}{\mu} \sqrt{F(k_0) k_0} \left(\frac{k_0}{k} \right)^{\alpha-1}. \quad (19)$$

Таким образом это решение имеет место только при $\lambda > \nu$. Если эффектами сжимаемости можно пренебречь (гидромагнитная турбулентность), то

$$F(k) = F(k_0) \left(\frac{k_0}{k} \right)^{5/3}, \quad M(k) = \frac{8(\lambda - \nu)}{3} \sqrt{F(k_0) k_0} \left(\frac{k_0}{k} \right)^{1/3}. \quad (20)$$

Таким образом мы видим, что в то время как при $\nu > \lambda$ возможно только одно решение спектральных уравнений газомангнитной турбулентности в стационарном состоянии, а именно, решение соответ-

ствующее равномерному распределению энергии, при $\lambda > \nu$ возможны два решения. Выбор между этими решениями не может быть сделан только на основании исследования уравнений (1) и (2), поскольку и (15) и (19) являются внутренне непротиворечивыми решениями этих уравнений. Поэтому здесь мы должны привлекать дополнительные соображения. В настоящей работе мы не будем заниматься анализом этих соображений, оставив вопрос о выборе спектра магнитной энергии при $\lambda > \nu$ открытым.

Отметим, что в условиях межзвездного пространства и туманностей $\lambda \ll \nu$, а в звездных атмосферах $\lambda \gg \nu$.

3. Нестационарная газомангнитная турбулентность

В теории нестационарной изотропной турбулентности наибольший интерес в смысле практических применений представляет случай так называемого вырождения турбулентности, когда энергия больших вихрей, идущая на поддержание турбулентных движений малых вихрей, уже не возобновляется источниками турбулизации. Очевидно, что аналогичный процесс может иметь место и в случае газомангнитной турбулентности. Для исследования вырождения турбулентности также можно использовать систему (1) и (2), где теперь нужно положить

$$\varepsilon_f(k, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^k F(k, t) dk; \quad \varepsilon_m(k, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^k M(k, t) dk, \quad (21)$$

а функции F и M в (1) и (2) также считать зависящими от времени t . Система (1), (2), (21) при заданных начальных условиях определяет спектры вырождающейся газомангнитной турбулентности в любой момент времени.

Кроме случая одновременного вырождения «кинетической» и «магнитной» турбулентности, большой практический интерес представляет случай вырождения кинетической энергии с одновременным ростом магнитной, если последняя в начальный момент была мала. Этот процесс также можно исследовать при помощи системы (1), (2) и (21), но, разумеется, с другими начальными условиями.

Исследование вырождения турбулентности в первом случае в принципе не отличается от решения соответствующей задачи в теории изотропной турбулентности несжимаемой жидкости [8, 15]. В частности, в области спектра сравнительно больших волновых чисел (но меньших, чем соответствующие внутреннему масштабу турбулентности) спектры кинетической и магнитной энергии на определенной стадии вырождения остаются подобными и определяются формулами типа (15), где теперь параметры $F(k_0)$ и k_0 оказываются зависящими от времени. В области спектра очень малых волновых чисел и в газомангнитной турбулентности имеет место спектр $F(k) = \frac{\Lambda}{3\pi} k^4 + \dots$, где Λ — инвариант Лойцянского. Для спектра магнитной энергии аналог инварианта Лойцянского, повидимому, обращается в нуль [6]. Здесь, вероятно, $M(k) \sim \text{const} \cdot k^6 + \dots$. Таким образом при вырождении газомангнитной турбулентности полная равномерность распределения кинетической и магнитной энергии, вообще говоря, не имеет места. Это обстоятельство приводит к некоторым, однако, не принципиальным усложнениям при решении (1), (2) и (21). Ради экономии места мы здесь не будем останавливаться на подробном и довольно громоздком исследовании этой задачи.

Вторую задачу — расчет роста магнитной энергии при одновременном вырождении кинетической — можно решать методом последова-

тельных приближений, по крайней мере, для начальной стадии процесса. В самом деле, пока $M(k, t) \ll F(k, t)$, последним членом в уравнении (1), которое теперь будет нулевым приближением, можно пренебречь, а в уравнение (2) (первое приближение) — подставить вместо $F(k, t)$ решение первого уравнения в нулевом приближении. Подобным образом можно получить и высшие приближения.

Дифференцируя (2) при условии (21) по k , находим

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial \ln M(k, t)}{\partial t} = \left(\lambda + \kappa \int_k^\infty \frac{dk}{k^{3/2}} \sqrt{F(k, t)} \right) k^2 - \\ - [\zeta_m + \mu] [F(k, t) k^3]^{1/2} - \kappa \frac{[F(k, t)]^{1/2}}{k^3 M(k, t)} \int_0^k M(k, t) k^2 dk. \quad (22)$$

Если $M(k, t)$ в любой момент времени имеет степенной характер, т. е. $M(k, t) \sim k^n$, то последний член в (22) может быть записан в виде

$$-\frac{\kappa}{3-n} [F(k, t) k^3]^{1/2}.$$

Пренебрегая величиной λ , окончательно получим

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \ln M(k, t)}{\partial t} = [F(k, t) k^3]^{1/2} \left[\zeta_m + \mu + \frac{\kappa}{3-n} \right] - \kappa k^2 \int_k^\infty \frac{dk}{k^{3/2}} \sqrt{F(k, t)}. \quad (23)$$

Здесь функция $F(k, t)$ считается известной из уравнения (1). Аппроксимационное решение этого уравнения для случая вырождения кинетической энергии мы запишем в виде

$$F(k, t) = \frac{A_0 (k/k_0)^4}{[1 + (k/k_0)^{3/2} (t/t_0)^{3/2}]^{2(2\alpha+3)/3}}. \quad (24)$$

Вывод этой формулы, на котором мы здесь не будем останавливаться, основан на изучении асимптотического поведения (1) и (21) при малых и больших k . Здесь α определяется первой формулой (18), A_0 , k_0 и t_0 — некоторые постоянные. Очевидно, что k_0 — порядка волнового числа основного масштаба турбулентности в момент времени $t = t_0$ и $A_0 = \Lambda k_0^4 / 3\pi$, т. е. выражается через инвариант Лойцянского (основной масштаб меняется со временем). Формула (24) отличается от аналогичной формулы, предложенной Карманом^[10], учетом сжимаемости газа (за счет отличия α от $4/3$), наличием явной зависимости $F(k, t)$ от времени t (полученной методом работы^[15]) и заменой показателя у k/k_0 в знаменателе (24) на $3/2$ (у Кармана этот показатель выбран равным 2). Последняя замена объясняется удобством вычисления интеграла в (23). Подставляя (24) в (23), получаем

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \ln M(k, t)}{\partial t} = \frac{(A_0 k_0^3)^{1/2}}{[1 + (k/k_0)^{3/2} (t/t_0)^{3/2}]^{(2\alpha+3)/3}} \times \\ \times \left[\left(\zeta_m + \mu + \frac{\kappa}{3-n} - \frac{\kappa}{\alpha} \right) \left(\frac{k}{k_0} \right)^{3/2} - \frac{\kappa}{\alpha} \left(\frac{t_0}{t} \right)^{3/2} \right]. \quad (25)$$

Эта формула и определяет изменение магнитной энергии со временем. Отсюда следует, в частности, что при $t > t_0$ и $k < k_0$, $\partial \ln M / \partial t$ всегда отрицательна. Таким образом в области спектра малых волновых чисел магнитная энергия расти не может. Магнитная энергия может возрастать за счет уменьшения кинетической только в области спектра, соответствующего движениям в масштабах, меньших основ-

ного. Этот результат подтверждает заключение [6] об обращении в нуль аналога инварианта Лойцянского в случае магнитной энергии. В области спектра $k > k_0$ при $t > t_0$ (25) можно упростить

$$\frac{1}{\tau(k)} = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln M(k, t)}{\partial t} = (A_0 k_0^3)^{1/2} \left(\frac{t_0}{t} \right)^{(2\alpha+3)/3} \left(\frac{k_0}{k} \right)^{2-\alpha} \left(\zeta_m + \mu + \frac{\alpha}{3-\alpha} - \frac{\alpha}{\alpha} \right). \quad (26)$$

Здесь $\tau(k)$ — характерное время роста магнитного поля. Из (26) следует, что скорость роста магнитного поля пропорциональна $k^{1/3} t^{-1/3}$. Кроме того, условие роста магнитного поля требует положительности скобки в (26). Отсюда вытекают некоторые ограничения, налагаемые на n и μ .

Таким образом мы видим, что система спектральных уравнений (1), (2) вместе с условиями (5) или (21) действительно позволяет качественно, а частью и количественно, изучить основные закономерности изотропной газомангнитной турбулентности. Для развития количественной теории следует прежде всего оценить значения функций ζ_l , ζ_m и μ , которые здесь оставались произвольными. Для этого необходимо детальное рассмотрение процессов, происходящих при движении газа в магнитных полях.

Львовский государственный
университет

Поступила в редакцию
28 января 1954 г.

Литература

- [1] С. А. Каплан. ДАН СССР, 94, 33, 1954.— [2] В. Л. Гинзбург. Усп. физ. наук, 51, 343, 1953.— [3] Сб. «Проблемы космической аэродинамики», ИИЛ, 1953.— [4] С. Б. Пикельнер. Изв. Крымск. астроф. обсерв., 10, 74, 1953.— [5] G. Batchelor. Proc. Roy. Soc. London, A, 201, 405, 1950.— [6] S. Chandrasekhar. Proc. Roy. Soc. London, A, 204, 435, 207, 301, 1951.— [7] M. Krzywicki. Acta phys. austriaca, 6, 1954, 1925.— [8] W. Heisenberg. ZS. f. Phys., 124, 628, 1948.— [9] А. М. Обухов. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 4—5, 1951.— [10] Т. von Карман. Proc. Nat. Acad. Sci., 34, 530, 1948.— [11] Х. Альфвен. Космическая электродинамика, ИИЛ, 1952.— [12] Chau-Mou Then. Phys. Rev., 93, 4, 1954.— [13] F. de Hoffman a. E. Teller. Phys. Rev., 80, 692, 1950.— [14] А. Н. Колмогоров. ДАН СССР, 30, 209, 1941.— [15] N. R. Sen. Bull. Calcutta math. soc., 43, I, 1951.

ВЛИЯНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ИОНОВ НА ИХ РАВНОВЕСНЫЕ КОНЦЕНТРАЦИИ В СЛУЧАЕ МНОГОКРАТНОЙ ТЕРМИЧЕСКОЙ ИОНИЗАЦИИ ГАЗА

Б. Л. Тиман

При помощи метода Дебая—Гюккеля для полностью ионизованного газа рассматривается влияние кулоновского взаимодействия ионов на ионизационное равновесие при многократной термической ионизации.

Введение

В астрофизике одним из методов определения различных физических величин в атмосферах звезд является метод [1], основанный на измерении равновесных концентраций атомов, ионизованных до различной кратности вследствие термической ионизации, и использовании уравнения Саха, которое может быть записано в виде [2]:

$$c_{n-1} / c_n c = p K_p^{(n)}(T). \quad (1)$$

Здесь c_{n-1} , c_n и c соответственно равновесные концентрации атомов $(n-1)$ - и n -кратно ионизованных, и электронов, $p K_p^{(n)}(T)$ — константа соответствующего ионизационного равновесия. Это уравнение, как известно, выведено без учета взаимодействия частиц газа.

В работе [3] был произведен учет взаимодействия ионов и электронов с атомами газа при малых концентрациях ионов. Этот случай соответствует сравнительно низкой температуре газа, при которой степень однократной ионизации невелика. Однако в случае очень высоких температур газ может быть термически полностью ионизован, и кулоновское взаимодействие ионов должно оказывать влияние на их равновесный состав. Это влияние должно быть, очевидно, тем больше, чем больше давление газа. Поэтому представляет интерес, воспользовавшись термодинамическими величинами, определенными методами Дебая—Гюккеля для полностью ионизованного газа, рассмотреть влияние взаимодействия атомов ионизованных до различной кратности на их равновесные концентрации. Этому вопросу посвящена настоящая работа.

Учет влияния взаимодействия ионов

Рассмотрим газ при такой температуре, при которой установилось ионизационное равновесие между атомами ионизованными до n -й и $(n-1)$ -й кратности. При таком равновесии должно иметь место следующее равенство для химических потенциалов ионов:

$$\mu_n + \mu = \mu_{n-1}, \quad (2)$$

где μ_{n-1} , μ_n и μ — соответственно химические потенциалы $(n-1)$ - и n -кратно ионизованных атомов и электронов.

Для вычисления химических потенциалов частиц полностью ионизованного газа используем формулу свободной энергии, которая была

получена методом Дебая—Гюккеля [2]

$$F = F_{ид} - \frac{2e^3}{3} \sqrt{\frac{\pi}{kTV}} \left(\sum_n N_n Z_n^2 \right)^{1/2}. \quad (3)$$

Как известно, химические потенциалы могут быть получены из свободной энергии по формуле

$$\mu_n = (\partial F / \partial N_n)_{V, T}, \quad (4)$$

где производная по числу частиц n -го сорта берется при постоянном объеме и температуре. Произведя дифференцирование (3) по числу частиц N_n и переходя от числа частиц N_n и объема V к парциальным давлениям p_n , получим

$$\mu_n = \mu_{ид} - \frac{e^3 Z_n^2 \sqrt{\pi}}{kT} \left(\sum_n p_n Z_n^2 \right)^{1/2}. \quad (5)$$

Здесь

$$\mu_{ид} = kT \ln p_n - kT \ln \left\{ \left(\frac{m_n kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \sum_{k_1} \exp[-\varepsilon_{k_1} / kT] \right\} - kT \ln kT,$$

$$\mu_{(n-1)ид} = kT \ln p_{n-1} - kT \ln \left\{ \left(\frac{m_{n-1} kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \sum_{k_1} \exp[-\varepsilon_{k_1} / kT] \right\} - kT \ln kT,$$

$$\mu_{ид} = kT \ln p_e - kT \ln \left\{ \left(\frac{m_e kT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} 2 \right\} - kT \ln kT,$$

— соответственно химические потенциалы идеальных газов атомов, ионизованных до n -й и $(n-1)$ -й кратности и электронов. Величины m_n , m_{n-1} , m_e — соответственно массы атомов, ионизованных до n -й и $(n-1)$ -й кратности, и электронов, ε_{k_1} — уровни энергии ионов (исключая кинетическую энергию движения). В дальнейших расчетах будем считать ионы находящимися в основном состоянии, так как энергии ионизации и возбуждения мало отличаются друг от друга.

Подставляя выражение (5) в (2) и переходя от парциальных давлений к концентрациям по формулам $p_n = c_n p$, получим следующее уравнение для равновесных концентраций $(n-1)$ - и n -кратно ионизованных атомов:

$$\frac{c_{n-1}}{c_n c} = p K_p^{(n)}(T) \exp \left\{ -(Z_n^2 - Z_{n-1}^2 + 1) \left[e^3 \sqrt{\pi} \left(\sum_n p_n Z_n^2 \right)^{1/2} / (kT)^2 \right] \right\}. \quad (6)$$

Пусть температура газа такова, что, в основном, в газе будут находиться атомы, ионизованные до $(n-1)$ -й кратности. В этом случае сумма $\sum_n p_n Z_n^2$ по всем сортам ионов, имеющимся в газе, может быть

приблизительно заменена выражением $p_{n-1} Z_{n-1}^2 + p_e$, где p_e — парциальное давление электронов. Если считать, что $p_e = (n-1) p_{n-1}$, то можно записать

$$\sum_n p_n Z_n^2 = p_{n-1} (Z_{n-1}^2 + n - 1) = \frac{p}{n} (Z_{n-1}^2 + n - 1)$$

так как

$$p \approx p_{n-1} + p_e,$$

где p — общее давление газа. Подставляя это выражение в формулу (6), получим

$$\frac{c_{n-1}}{c_n c} = p K_p^{(n)}(T) \exp \left\{ -(Z_n^2 - Z_{n-1}^2 + 1) \left[e^3 \sqrt{\frac{\pi p}{n} (Z_{n-1}^2 + n - 1)} / (kT)^2 \right] \right\}. \quad (7)$$

Рассмотрим теперь для определенности конкретный случай равновесия между одно- и двукратно ионизованными атомами. В этом случае уравнение (7) можно записать в виде

$$\frac{c_1}{c_2 c} = p K_p^{(2)}(T) \exp \{ -4e^3 \sqrt{\pi p} / (kT)^2 \}. \quad (8)$$

Это уравнение отличается от уравнения (1) экспоненциальным множителем правой части, который существенно зависит от давления. Эта зависимость показывает, что с ростом давления даже при небольших давлениях равновесное число двукратно ионизованных атомов будет уменьшаться не так, как это следует из формулы (1), а значительно медленнее. Легко показать, что это уменьшение будет происходить до определенного давления $p_{\min}$, которое определяется из следующего выражения:

$$p_{\min} = (kT)^4 / 4\pi e^6.$$

Для температуры $T = 10^4$ вычисление дает $p_{\min} = 19$ атм. При значениях $p = p_{\min}$ число двукратно ионизованных атомов с ростом давления, согласно уравнению (8), должно увеличиваться. Такая зависимость от давления качественно отличается от той, которая получается из уравнения (1).

Рассмотрим для примера зависимость от давления степени двукратной ионизации атомарного кислорода (потенциал двукратной ионизации 35,1 В) при 20000° . При такой температуре газ будет почти полностью однократно ионизован, а число двукратно ионизованных атомов очень мало. Определяя степень α_2 двукратной ионизации как отношение N_2/N , где N_2 и N — соответственно число двукратно ионизованных атомов и число атомов до ионизации, и замечая, что $\alpha_2 \ll 1$, можем записать

$$\frac{c_1}{c_2 c} = \frac{2(1 - \alpha_2)}{\alpha_2}. \quad (9)$$

Из выражений (8) и (9) можно найти, что

$$\alpha_2 = 2 / p K_p^{(2)}(T) \exp \{ -4e^3 \sqrt{\pi p} / (kT)^2 \}. \quad (10)$$

На рис. 1 проведено сравнение зависимости степени двукратной ионизации α_2 от давления, соответствующей уравнению (1) (кривая 1) и уравнению (10) (кривая 2). Это сравнение показывает, что степень двукратной ионизации за счет взаимодействия частиц газа становится больше, чем это следует из формулы Саха. Как следует из рис. 1, при давлении около 400 атм взаимодействие ионов увеличивает α_2 почти в 10 раз. При давлении 380 атм кривая 2 достигает минимума, кривая же 1, соответствующая формуле Саха, не достигает минимума, а монотонно убывает с ростом давления.

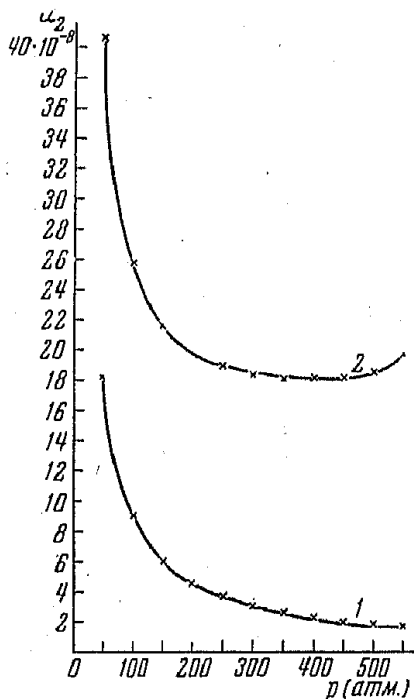


Рис. 1. Зависимость степени двукратной ионизации от давления. 1 — без учета взаимодействия ионов; 2 — с учетом взаимодействия

достигает минимума, кривая же 1, соответствующая формуле Саха, не достигает минимума, а монотонно убывает с ростом давления.

Заметим, что при выводе наших соотношений мы пользовались методом Дебая—Гюккеля, который для очень высоких давлений, даже при рассматриваемых температурах, может оказаться неприменимым. Однако при очень высоких давлениях, очевидно, взаимодействие будет играть еще большую роль, и рассматриваемое влияние будет еще более эффективным. Поэтому следует ожидать, что в настоящей работе получено в учете взаимодействия ионов только лишь первое приближение.

Таким образом, как и в случае взаимодействия ионов с атомами при однократной термической ионизации [3], кулоновское взаимодействие ионов между собой при многократной ионизации газа смещает ионизационное равновесие в сторону увеличения числа атомов ионизованных до наибольшей кратности.

В заключение выражаю благодарность И. Л. Аптекарю за обсуждение настоящей работы.

Днепропетровский горный
институт

Поступила в редакцию
14 февраля 1954 г.

Литература

- [1] В. А. Амбарцумян, Э. Р. Мустель, А. Б. Северный, В. В. Со-
болев. Теоретическая астрофизика, ГИТТЛ, М., 1952.—[2] Л. Д. Ландау и
Е. М. Лифшиц. Статистическая физика, ГИТТЛ, М., 1951.—[3] Б. Л. Тиман.
ЖЭТФ, 25, 733, 1953.
-

О ПРИБЛИЖЕННОМ ВЫЧИСЛЕНИИ СИЛ ОСЦИЛЛЯТОРОВ И ЭФФЕКТИВНЫХ СЕЧЕНИЙ ФОТОИОНИЗАЦИИ

Л. А. Вайнштейн и Б. М. Яворский

Силы осцилляторов для оптических переходов, а также эффективные сечения фотоионизации и рекомбинации с излучением вычисляются при помощи приближенных одноэлектронных аналитических волновых функций. Результаты вычислений сопоставлены с некоторыми расчетами по методу самосогласованного поля и с экспериментальными данными. Приводится выражение для числа актов рекомбинации с излучением.

1. Введение

При изучении процессов, происходящих в плазме газового разряда и в верхних слоях атмосферы, а также в ряде проблем астрофизики большую роль играют величины, характеризующие элементарные процессы: силы осцилляторов, эффективные сечения ионизации и рекомбинации и т. п. Так, для изучения состава ионосферы важно знать эффективное сечение фотоионизации атомарного кислорода. Для исследования физических явлений, происходящих в солнечной короне, необходимы сведения о сечениях фотоионизации и рекомбинации с излучением для кальция, никеля и других элементов. Трудности расчета указанных атомных характеристик, связанные с большой вычислительной работой при получении и использовании сравнительно точных волновых функций, заставляют прибегать к использованию грубых, но более простых волновых функций. Целью настоящей работы является выбор таких функций и применение их к вычислению сил осцилляторов и эффективных сечений фотоионизации.

Сила осциллятора для перехода из состояния 1 в состояние 2 определяется выражением

$$f_{12} = \frac{1}{3g_1} (E_2 - E_1) \sum_{M_1 M_2} \left| \int \Psi_1 \sum_i \mathbf{r}_i \Psi_2 d\tau \right|^2, \quad (1)$$

где Ψ_1 и Ψ_2 — волновые функции исходного и конечного состояний, E_1 и E_2 — энергии этих состояний, отсчитываемые от границы ионизации и выраженные в единицах Ридберга, g_1 — статистический вес исходного состояния. Для всех величин, кроме энергии, используются атомные единицы.

Формула (1) применима и для переходов в непрерывный спектр. При этом $E_2 = k^2$, где k — волновое число электрона в непрерывном спектре. Если функция Ψ_2 нормирована на $\delta(E - E')$, то сила осциллятора f_{12} относится к переходам в единичный интервал энергии непрерывного спектра.

Эффективное сечение фотоионизации выражается через силу осциллятора (для непрерывного спектра)

$$a_\nu = \frac{4\pi^2}{137} a_0^2 g_1 \sum_{l, L, J} f_{12}. \quad (2)$$

Здесь a_0 — радиус первой водородной орбиты и суммирование производится по всем l_2, L_2, J_2 , допускаемым правилами отбора (в частности $l_2 = l_1 \pm 1$).

Для вычисления матричного элемента воспользуемся приближением центрального поля и схемой $L-S$ -связи. В этом случае волновые функции можно представить в виде определителя из одноэлектронных функций и переменные полностью разделяются. После интегрирования по угловым переменным и суммирования по спинам и магнитным квантовым числам, получим

$$\sum_{M_1 M_2} \left| \int \Psi_1 \sum_l r_l \Psi_2 d\tau \right|^2 = \frac{Q_{12}}{4 l_{\text{макс}}^2 - 1} \rho_{12}^2. \quad (3)$$

Здесь $l_{\text{макс}}$ — наибольшее из значений l_1 и l_2 , ρ_{12} — радиальный интеграл вида:

$$\rho_{12} = \int P_1(r) P_2(r) r dr, \quad (4)$$

в котором $P(r)$ — умноженная на r радиальная часть волновой функции оптического электрона.

Множитель Q_{12} получается в результате интегрирования по углам и суммирования в соответствии с правилами векторной модели. Общий метод вычисления Q_{12} основан на принципе спектроскопической устойчивости [1]. Величины $\sum_{J_1 J_2} Q_{12}$ для большинства представляющих интерес переходов табулированы в [2]. На основании этих данных можно получить Q_{12} по общим формулам относительных сил линий для компонент мультиплета [3].

Таким образом окончательно сила осциллятора принимает вид

$$f_{12} = \frac{1}{3g_1} (E_2 - E_1) \frac{Q_{12}}{4 l_{\text{макс}}^2 - 1} \rho_{12}^2. \quad (5)$$

Задача сводится к вычислению радиального интеграла ρ_{12} .

2. Выбор радиальных волновых функций

Для вычисления ρ_{12} использованы приближенные радиальные функции, позволяющие определить силы осцилляторов и эффективные сечения фотоионизации в аналитической форме. Следует подчеркнуть, что вычисления такого рода не могут претендовать на большую точность и позволяют получить лишь грубое приближение для искоемых величин. Тем не менее такие вычисления, дающие возможность для всех переходов и для всех атомов сравнительно просто получить важные характеристики элементарных процессов возбуждения и ионизации, представляют известный интерес.

Выбор радиальных волновых функций основан на следующих соображениях. Точная радиальная часть волновой функции для электрона в состоянии $n l$ содержит $n - l - 1$ узлов. Однако первые $n_0 - l - 1$ узлов (n_0 — главное квантовое число низшего состояния оптического электрона при данном l) сосредоточены в узкой области малых r и не играют существенной роли при вычислении радиального интеграла (4). Поэтому в дальнейшем выбираются радиальные функции, содержащие $n - n_0$ узлов. В частности, для основного состояния (и вообще при $n = n_0$) используются функции, не содержащие узлов.

Далее, радиальные функции для основного состояния многих атомов были вычислены методом самосогласованного поля. Эти функции

приводятся в виде таблиц, но могут быть приближенно представлены в аналитической форме вида:

$$P_{n_0 l}(r) = Ar^\nu (e^{-\alpha' r} + be^{-\alpha'' r}), \quad \alpha' > \alpha''. \quad (6)$$

Эффективное квантовое число ν принимает следующие значения:

истинное главное квантовое число $n_0 = 1; 2; 3; 4; \quad 5; 6,$

эффективное квантовое число $\nu = 1; 2; 3; 3, 5; 4; 4. \quad (7)$

Параметры α', α'', b можно определить из радиальных функций $f(r)$, полученных методом самосогласованного поля следующим образом. График $\lg[f(r)/r^\nu]$ асимптотически приближается к прямой при больших r , когда членом $e^{-\alpha' r}$ в (6) можно пренебречь. Если обозначить через φ угол между асимптотой и осью r , то

$$\alpha'' = 2,30 \lg \varphi. \quad (8')$$

Пусть теперь r_1 — любая точка, в которой график $\lg[f(r)/r^\nu]$ практически совпадает с асимптотой, а r_m — точка, где $f(r)$ достигает максимума. Потребовав, чтобы $P_{n_0 l}(r_1) = f(r_1)$ и $P_{n_0 l}(r_m) = f(r_m)$, можно получить

$$\alpha' = \alpha'' + \frac{(\nu / r_m) - \alpha''}{1 - [f(r_1) / f(r_m)] (r_m / r_1)^\nu \exp \{ \alpha'' (r_1 - r_m) \}}, \quad (8'')$$

$$b = \frac{\alpha' - (\nu / r_m)}{(\nu / r_m) - \alpha''} \exp \{ -(\alpha' - \alpha'') r_m \}. \quad (8''')$$

Постоянная A определяется из условий нормировки¹.

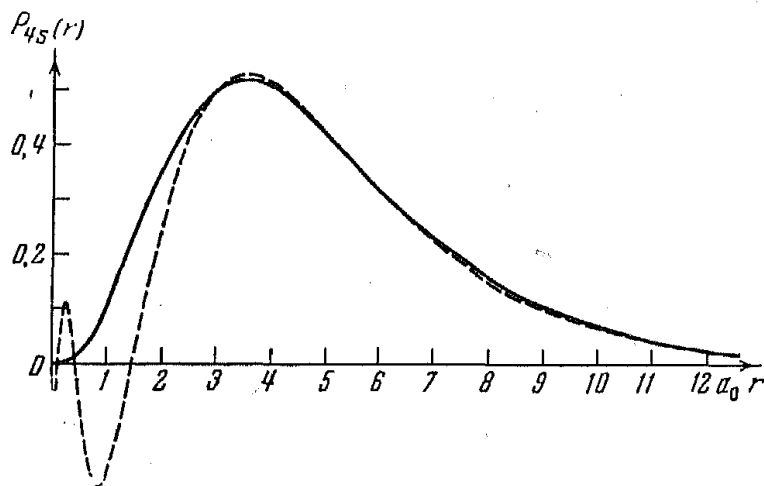


Рис. 1. Радиальная функция P_{4s} для Са. Сплошная кривая — вычисленная в настоящей работе, пунктир — вычисленная методом самосогласованного поля с учетом обмена

На рис. 1 сопоставлены функции P_{4s} для основного состояния Са, вычисленные по формулам (6)—(8) и по методу самосогласованного поля [5].

Приближенные радиальные функции возбужденных состояний дискретного спектра выберем в виде

¹ В недавней работе [4] предлагается более точная аналитическая аппроксимация функций самосогласованного поля, в которой учитываются все узлы функций. Однако увеличение точности достигается за счет использования большого числа параметров и значительного усложнения расчетов.

$$P_{nl}(r) = Ar^v (r^{n-n_0} + a_1 r^{n-n_0-1} + \dots + a_{n-n_0}) e^{-\alpha r}. \quad (9)$$

Коэффициенты $a_1, \dots, a_{n-n_0}$ определяются из условия ортогональности функции P_{nl} ко всем $P_{n'l'}$, для которых $n_0 \leq n' < n$. Параметр α можно определить через энергию данного состояния следующим образом:

$$\alpha = \sqrt{-E}. \quad (10)$$

Несколько лучший результат дает выражение:

$$\alpha = \sqrt{-E} \left(1 + \frac{2 \sqrt{-E}}{N\alpha_c} \right), \quad (11)$$

где α_c — значение α для электронов с тем же l и главным квантовым числом $n_0 - 1$, определенное методом Слетера [6,7], N — число эквивалентных электронов в состоянии $n_0 l$.

Функцию (9) с параметром α , определяемым выражением (11), можно использовать и для основного состояния в тех случаях, когда отсутствуют радиальные функции, вычисленные методом самосогласованного поля, и аппроксимация вида (6) невозможна. При этом в качестве E следует брать среднюю энергию в слетеровской группе электронов (слетеровская группа совпадает с группой nl , но ns - и np -электроны относятся к одной группе).

Радиальную функцию непрерывного спектра выбираем в виде

$$P_{kl}(r) = \frac{(2z)^{v-1/2}}{[(2v-1)!]^{1/2}} \frac{\prod_{s=1}^{v-1} [1 + (s^2 k^2 / z^2)]^{1/2}}{(1 - \exp \{-2\pi z / k\})^{1/2}} r^v e^{lkr} F\left(v + \frac{lz}{k}, 2v, 2ikr\right), \quad (12)$$

где F — вырожденная гипергеометрическая функция.

Параметр z является функцией от r . Эта функция монотонно убывает от некоторого значения до значения заряда иона Z . Функцию $z(r)$ можно приближенно построить следующим образом.

Рассмотрим последовательность функций $P_{n'l}$ типа (9) с различными $n' \geq n_0$ и обозначим через $r_{n'}$ координаты главных максимумов этих функций. Тогда можно положить

$$z(r_{n'}) = (n' - n'_0 + v') \alpha_{n'}$$

и таким образом по ряду точек $r_{n'}$ построить функцию $z(r)$. Следует отметить, что функция $z(r)$ существенно зависит от l .

В интеграл ρ_{12} входит произведение $P_{nl_1} P_{nl_2}$. Исследование функции $z(r)$ показывает, что она мало меняется на протяжении области, где P_{nl_1} существенно отлична от нуля. Поэтому при вычислении ρ_{12} можно положить $z = z(r_m)$, где r_m — координата главного максимума функции P_{nl_1} . Такая замена приводит к большой погрешности только в области малых r для s -состояний непрерывного спектра атомов со многими валентными электронами (типа O — Ne). Однако эффективное сечение для перехода $p \rightarrow s$, как правило, много меньше сечения для перехода $p \rightarrow d$, и поэтому указанный случай не представляет большого интереса.

3. Вычисление радиальных интегралов

Все интегралы ρ_{12} могут быть вычислены аналитически. Рассмотрим сначала простейший случай, когда состояния дискретного спектра определяются функциями вида

$$P_{n_0 l}(r) = Ar^v e^{-\alpha r}. \quad (13)$$

В этом случае для переходов в дискретном спектре получим

$$\rho_{12} = \rho(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\Gamma(v_1 + v_2 + 1)}{\Gamma^{1/2}(2v_1 + 1) \Gamma^{1/2}(2v_2 + 1)} \frac{v_1 + v_2 + 1}{\alpha_1 + \alpha_2} \times \\ \times \left[1 - \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \right)^2 \right]^{(v_1 + v_2 + 1)/2} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^{(v_1 - v_2)/2} \quad (14)$$

и для переходов в непрерывный спектр

$$\rho_{12} = \rho(\alpha, k) = \rho^0(\alpha) \Phi(\alpha, k), \quad (15)$$

где

$$\rho^0(\alpha) = \rho(\alpha, 0) = 2^{v_1 + v_2 + 1} \frac{v_2}{[(2v_1)!]^{1/2}} \left(\frac{z}{\alpha} \right)^{v_1 - 1/2} e^{-2z/\alpha} \frac{F_p}{\alpha^2}, \quad (16')$$

$$\Phi(\alpha, k) = (1 - e^{-2\pi z/k})^{-1/2} \prod_{s=1}^{v_2-1} \left(1 + \frac{s^2 k^2}{z^2} \right) \times \\ \times \frac{1 - g_p(k^2/\alpha^2)}{(1 - k^2/\alpha^2)^{v_1+2}} \exp \left\{ \frac{2z}{\alpha} \left(1 - \frac{\alpha}{k} \arctg \frac{k}{\alpha} \right) \right\}. \quad (16'')$$

Здесь введено обозначение $p = v_1 - v_2 + 2$. При $p < 0$ $F_p = g_p = 0$. При $p = 0, 1, 2, 3$, F_p и g_p определяются следующим образом:

$$F_0 = 1/2 v_2; F_1 = 1 - \xi; g_0 = g_1 = 0; \\ F_2 = (2v_2 + 1)(1 - \xi)^2 - \xi^2; g_2 = 1/F_2; \\ F_3 = 4(v_2 + 1)v_2(1 - \xi)^3 + 4v_2\xi^3 - 2(v_2 + 1)(3\xi - 1), \\ g_3 = \frac{1}{F_3} [3(v_2 + 1)(1 - \xi) - 2\xi], \quad (16''')$$

где

$$\xi = z/v_2\alpha.$$

Полученные результаты легко обобщить на случаи, когда используются радиальные функции вида (6) и (9). Если, например, нижнее состояние определяется функцией (6), то

$$\rho_{12} = \frac{1}{B_1} \left[\rho(\alpha'_1, \alpha_2) + b_1 \left(\frac{\alpha'_1}{\alpha_1} \right)^{v_1+1/2} \rho(\alpha''_1, \alpha_2) \right] \quad (17)$$

для переходов в дискретном спектре. Для переходов в непрерывный спектр в формулу (17) надо подставить $\rho(\alpha', k)$ и $\rho(\alpha'', k)$. Величина B_1 определяется соотношением

$$B_1^2 = 1 + 2b_1 \left(\frac{2\alpha'_1}{\alpha'_1 + \alpha''_1} \right)^{2v_1+1} + b_1^2 \left(\frac{\alpha'_1}{\alpha''_1} \right)^{2v_1+1}. \quad (18)$$

4. Результаты вычислений

В табл. 1 приведены значения сил осцилляторов для некоторых переходов в дискретном спектре. Во всех случаях, кроме Cd, для основного состояния использовались функции вида (6), а для возбужденного состояния — функции вида (9). Для основного состояния Cd расчеты методом самосогласованного поля отсутствуют, и поэтому использовалась также функция вида (9). В этой же таблице приведены для сравнения экспериментальные данные.

В табл. 2 приведены эффективные сечения фотоионизации из основного состояния для ряда элементов при $k=0$. Для исходного

состояния использовались функции вида (6). Следует отметить, что параметры α' , α'' , b для этих функций были во всех случаях, кроме В и Ne, вычислены по функциям самосогласованного поля с учетом обмена. Для В и Ne использовались функции, полученные без учета обмена. С этим в значительной степени связана ошибка в a_v для В и Ne. В табл. 2 приведены также значения a_v , вычисленные непосредственно по волновым функциям самосогласованного поля численным интегрированием [8,9]. Заметим, что в работах [8,9] используются неверные данные для Q_{12} . В нашей таблице приведены исправленные значения a_v .

Таблица 1

Силы осцилляторов для некоторых оптических переходов

Атом	Нижний и верхний термы	$\lambda(\text{Å})$	f_{12}	
			Вычислено в настоящ. раб.	Эксперим.
Li	$2^2S - 2^2P$	6707	0,75	0,75
Li	$2^2S - 3^2P$	3233	0,011	0,006
Na	$3^2S - 3^2P$	5890	1,05	0,98
		5896		
Na	$3^2P - 4^2S$	11404	0,16	0,16
		11382		
K	$4^2S - 4^2P$	7699	1,17	1,07
		7644		
Cd	$5^1S - 5^1P$	2288	1,5	1,2
Hg	$6^1S - 6^1P$	1849	1,98	1,2

Таблица 2

Эффективные сечения фотоионизации из основного состояния для ряда атомов при $k=0$

Атом	$a_v \cdot 10^{18} \text{ см}^2$	
	Вычислено в настоящ. работе	По [8, 9]
В	110	64
С	93,5	92
N	28	35
O	25	32
Ne	6,8	3,8
Ca	10	24
Na	0,15	0,20

Как видно из таблиц, ошибка в вычислении составляет обычно 20—40%, но в некоторых случаях может достигать порядка самой искомой величины.

Зависимость a_v от волнового числа электрона в непрерывном спектре иллюстрируется на примерах N и Na (рис. 2 и 3). Тот же

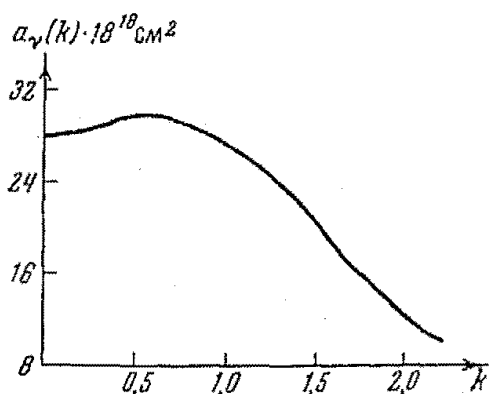


Рис. 2. Сечение фотоионизации для азота (переход $2p \rightarrow kd$)

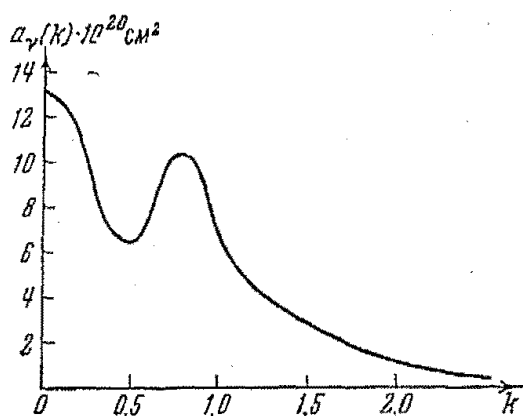


Рис. 3. Сечение фотоионизации для натрия (переход $3s \rightarrow kp$)

характер носит зависимость эффективного сечения от частоты падающего излучения. Вид кривой для Na вообще характерен для щелочных металлов. Начальная часть кривой подтверждается экспериментальными измерениями [10]. Для больших k экспериментальные данные отсутствуют. Для достаточно больших k ($k \gg z$ и α) для всех атомов

$$\begin{aligned} \alpha_\nu &\sim k^{-4(\nu_1-2\nu_2+7)} \quad \text{при } p > 1, \\ \alpha_\nu &\sim k^{-4(\nu_1-2\nu_2+3)} \quad \text{при } p = 1. \end{aligned} \quad (19)$$

5. Эффективные сечения рекомбинации с излучением

Эффективное сечение рекомбинации с излучением a_e связано с α_ν соотношением Милна [11]

$$a_e = 2[(-E + k^2)/m\upsilon c]^2 \alpha_\nu, \quad (20)$$

где $-E$ — энергия ионизации, υ — скорость падающего электрона. Число актов рекомбинации с излучением в единице объема плазмы за единицу времени равно $N_0 N_e S_r$. Здесь N_0 и N_e — концентрации нейтральных атомов и электронов. Величина S_r определяется выражением

$$S_r = \int_0^\infty a_e(\upsilon) \upsilon f(\upsilon) d\upsilon. \quad (21)$$

$f(\upsilon)$ — нормированная на единицу функция распределения электронов по скоростям. Предполагая распределение максвелловским, используя (2) и (5), получим

$$S_r = 2,2 \cdot 10^{-6} T^{-3/2} \sum_{l_2} \int_0^\infty (-E + k^2)^3 \rho_{12}^2(k) e^{-k^2/\gamma T} k dk \sum_{L_2 J_2} \frac{Q_{12}}{4 l_{\text{макс}}^2 - 1}. \quad (22)$$

где $\gamma = 6,37 \cdot 10^{-6}$, T — абсолютная температура, E — в единицах Ридберга. Интегралы, входящие в (22), берутся только численно.

Поступила в редакцию
2 марта 1953 г.;
после переработки
17 мая 1954 г.

Литература

- [1] E. Condon and J. Ufford. Phys. Rev., 44, 740, 1933. — [2] L. Goldberg. Astroph. Journ., 82, 1, 1935. — [3] Е. Кондон и Г. Шортли. Теория атомных спектров, ИИЛ, 1949, стр. 232. — [4] Р. О. Löwdin, Phys. Rev., 90, 120, 1953. — [5] D. R. Hartree. Proc. Roy. Soc., A 164, 167, 1938. — [6] J. Slater. Phys. Rev., 36, 57, 1930. — [7] P. Gombas. Acta Phys. Hung., 1, 285, 1952. — [8] J. Seaton, Proc. Roy. Soc., A208, 408, 418, 1950. — [9] D. R. Bates. Proc. Roy. Soc., A177, 329, 1941. — [10] R. W. Ditchburn. Proc. Roy. Soc., A181, 386, 1943. — [11] В. Л. Грановский. Электрический ток в газе, ГИТТЛ, 1952.

К ТЕОРИИ МАГНИТНЫХ СВОЙСТВ АТОМНЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВ. I

Л. Л. Коренблит

Вычисляется магнитная восприимчивость атомных полупроводников без примесей, исходя из полярной модели кристалла Шубина—Вонсовского [4]. Приводится сравнение с результатами, вытекающими из рассмотрения магнитных свойств полупроводников в рамках зонной теории [2].

Магнитные свойства полупроводников — парамагнетизм и диамагнетизм — могут быть рассчитаны, если принять за основу одноэлектронную зонную модель твердых тел в применении к полупроводникам [2]. При расчете диамагнетизма и парамагнетизма полупроводников без примесей можно легко получить наблюдаемую на опыте [3] температурную зависимость $\chi_{\text{дн}} \sim \exp(-\Delta\varepsilon/2kT)$, где $\Delta\varepsilon/2$ — полуширина запретной зоны, совпадающая с энергией активации носителей тока в формуле для электросопротивления. Однако в отличие от случая металлов, когда теория может дать не только правильную температурную зависимость, но также и правильный порядок величины для $\chi_{\text{дн}}$ (в силу того, что число носителей магнетизма — порядка числа атомов кристаллической решетки), в случае полупроводников, когда число носителей на много порядков отличается от числа атомов в решетке, такое согласование экспериментальных и теоретических результатов может быть достигнуто лишь на основе искусственного предположения о чрезвычайной малости эффективной массы носителей.

В настоящей работе делается попытка на основе полярной модели кристалла рассчитать магнитные свойства полупроводников без примесей. Результаты расчета показывают, что несмотря на то, что трудность, связанная с малостью числа носителей в полупроводниках до известной степени остается, предположение о малости эффективной массы носителей все же не обязательно. При этом применение более общей (полярной) многоэлектронной модели кристалла позволяет вложить новый физический смысл в некоторые выводы, которые могут быть получены и в рамках зонной модели.

1. Гамильтониан атомного кристалла в полярной модели при наличии магнитного поля

Рассмотрим атомный кристалл, помещенный в магнитном поле, направленном по оси z , и предположим, что на каждый атом приходится по одному валентному s -электрону. Гамильтониан системы валентных электронов может быть записан в форме

$$H = \int \Psi^+(q) H(q) \Psi(q) dq + \\ + \frac{1}{2} \iint \Psi^+(q) \Psi^+(q') G(q, q') \Psi(q') \Psi(q) dq dq', \quad (1.1)$$

где Ψ — квантованные функции поля, q — совокупность пространственных и спиновой координат электрона $(\mathbf{r}, s_z)$,

$$H(q) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - 2i\mu_B \mathcal{H} x \frac{\partial}{\partial y} + \frac{e^2 \mathcal{H}^2}{2mc^2} x^2 + \sum_n V(|\mathbf{r} - \mathbf{R}_n|) - \mu_B \mathcal{H} \sigma_z, \quad (1.2)$$

$$G(q, q') = G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = e^2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1},$$

e, m — заряд (по абсолютной величине) и масса электрона; $\mu_B = (e\hbar/2mc)$, σ_z — оператор проекции спина на ось z ; $V(|\mathbf{r} - \mathbf{R}_n|)$ — потенциальная энергия электрона в поле атомного остатка (иона) в n -м узле решетки, $\mathbf{R}_n$ — координата последнего; $G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ — кулоновская энергия взаимодействия между двумя электронами.

Путем разложения операторов $\Psi(q), \Psi^+(q)$ в ряды при помощи какой-либо полной ортонормированной системы функций $\eta_\alpha(q)$ оператор (1.1) может быть выражен через операторы Ферми. В качестве системы функций, по которым ведется разложение, здесь берутся индивидуальные волновые функции основного стационарного состояния валентного электрона в изолированном атоме при наличии магнитного поля (при этом пренебрегается их неортогональностью и неполнотой [1]; кроме того, считается, что энергия возбуждения атомов больше энергии образования полярного состояния невозбужденных атомов)

$$\eta_\alpha(q) = \psi_m(\mathbf{r}) u_f(s_z), \quad m = 0, 1, \dots, N, \quad f = \pm 1/2, \quad (1.3)$$

где $\psi_m(\mathbf{r}) = \psi_m(\mathbf{r} - \mathbf{R}_m)$ является решением уравнения

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(|\mathbf{r} - \mathbf{R}_m|) - 2i\mu_B \mathcal{H} x \frac{\partial}{\partial y} + \frac{e^2 \mathcal{H}^2}{2mc^2} x^2 \right\} \psi_m(\mathbf{r}) = \varepsilon_0(\mathcal{H}) \psi_m(\mathbf{r}), \quad (1.4)$$

где

$$\varepsilon_0(\mathcal{H}) = \varepsilon^0 - 1/2 \chi_a \mathcal{H}^2 \quad (\chi_a < 0),$$

$u_f(s_z)$ — спиновая функция, χ_a — атомная диамагнитная восприимчивость, N — число атомов (а также электронов) в кристалле. Заметим, кроме того, что при наличии магнитного поля (см., например, [4]) $\psi_m(\mathbf{r})$ должны быть записаны в следующем виде:

$$\psi_m(\mathbf{r}) = \exp\{-i\alpha y R_{mx}\} \varphi(\mathbf{r} - \mathbf{R}_m), \quad (1.5)$$

где $\alpha = (e\mathcal{H}/\hbar c)$, $\varphi(\mathbf{r})$ — волновая функция электрона в атоме, служащем началом отсчета, R_{mx} — x -компонента вектора $\mathbf{R}_m$. Итак, при помощи (1.3) гамильтониан (1.1) может быть записан в виде

$$H = N\varepsilon_0 - \mu_B \mathcal{H} \sum_h (a_{h,1/2}^+ a_{h,1/2} - a_{h,-1/2}^+ a_{h,-1/2}) + \sum_{h,h',f} \left(k \left| \sum_{p \neq h'} V(|\mathbf{r} - \mathbf{R}_p|) \right| k' \right) a_{h,f}^+ a_{h',f} + 1/2 \sum_{\substack{h,h',l,l' \\ f,f'}} (k, k' | G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) | l, l') a_{h,f}^+ a_{h',f}^+ a_{l',f'} a_{l,f}, \quad (1.6)$$

где a, a^+ — операторы (амплитуды) Ферми,

$$\begin{aligned} \left(k \left| \sum_{p \neq h'} V(|\mathbf{r} - \mathbf{R}_p|) \right| k' \right) &= \int \psi_h^*(\mathbf{r}) \sum_{p \neq h'} V(|\mathbf{r} - \mathbf{R}_p|) \psi_{h'}(\mathbf{r}) d\tau, \\ (k, k' | G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) | l, l') &= \iint \psi_h^*(\mathbf{r}) \psi_{h'}^*(\mathbf{r}') G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \times \\ &\times \psi_l(\mathbf{r}) \psi_{l'}(\mathbf{r}') d\tau d\tau'. \end{aligned} \quad (1.7)$$

В полярной модели кристалла гамильтониан выражен не через ферми-операторы для электронов в узлах решетки, а через бозе-операторы состояния узлов. При этом, в отличие от обычного приближения, принимается во внимание возможность полярных состояний узлов, т. е. состояний, когда в некоторых узлах вовсе нет электронов (дырки), а в других имеются по два электрона с противоположно направленными спинами (двойки). Соответствующие операторы обозначены через $\Psi_h, \Psi_h^+; \Phi_h, \Phi_h^+$. Кроме того, узлы решетки могут находиться в неполярных состояниях с одним («правым» либо «левым») электроном. Операторы простых правых и левых узлов обозначим соответственно через $\varphi_h, \varphi_h^+; \psi_h, \psi_h^+$. Эти операторы связаны условием нормировки: $\varphi_h \varphi_h^+ + \psi_h \psi_h^+ + \Phi_h \Phi_h^+ + \Psi_h \Psi_h^+ = 1$. Выражение для гамильтониана системы через операторы Бозе — Вонсовского для случая $\mathcal{H} \neq 0$ может быть легко найдено вполне аналогично случаю $\mathcal{H} = 0$, рассмотренному в [1]. Мы поэтому приведем лишь окончательный его вид:

$$\begin{aligned} H = & -1/2 N \chi_a \mathcal{H}^2 + 1/2 (A + D) \sum_h (\Phi_h \Phi_h^+ + \Psi_h \Psi_h^+) - \\ & - \mu_B \mathcal{H} \sum_h (\varphi_h \varphi_h^+ - \psi_h \psi_h^+) + \\ & + 1/2 \sum_{h \neq h'} (B_{h,h'} - J_{h,h'}) (\Phi_h \Phi_h^+ \Phi_{h'} \Phi_{h'}^+ + \Psi_h \Psi_h^+ \Psi_{h'} \Psi_{h'}^+) - \\ & - 1/2 \sum_{h \neq h'} B_{h,h'} (\Phi_h \Phi_h^+ \Psi_{h'} \Psi_{h'}^+ + \Psi_h \Psi_h^+ \Phi_{h'} \Phi_{h'}^+) + \\ & + 1/2 \sum_{h \neq h'} J_{h,h'} (\varphi_h \psi_{h'} - \psi_h \varphi_{h'}) (\varphi_h^+ \psi_{h'}^+ - \psi_h^+ \varphi_{h'}^+) - \\ & - 1/2 \sum_{h \neq h'} I_{h,h'} (\Phi_h \Phi_{h'}^+ \Psi_{h'} \Psi_h^+ + \Phi_{h'}^+ \Phi_h \Psi_h \Psi_{h'}^+) + \\ & + 1/2 \sum_{h \neq h'} L_{h,h'} \{(\varphi_{h'} \varphi_h^+ + \psi_{h'} \psi_h^+) (\Phi_h \Phi_{h'}^+ - \Psi_h \Psi_{h'}^+) + \text{сопр. член}\} + \\ & + 1/2 \sum_{h \neq h'} L_{h,h'} \{(\varphi_h \psi_{h'} - \psi_h \varphi_{h'}) (\Phi_h^+ \Psi_{h'}^+ - \Psi_h^+ \Phi_{h'}^+) + \text{сопр. член}\}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

где

$$A = \iiint |\varphi(\mathbf{r})|^2 G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) |\varphi(\mathbf{r}')|^2 d\tau d\tau' \quad (1.9)$$

— интеграл кулоновского взаимодействия электронов в двойке,

$$D = \sum_h J_{h,h} = \sum_{h'} J_{h,h'}$$

— обменная энергия какого-либо электрона со всеми электронами решетки; $J_{h,h'}$ — интеграл обмена:

$$J_{h,h'} = \iint \varphi^*(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r} - \mathbf{R}_h) G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \varphi^*(\mathbf{r}' - \mathbf{R}_{h'}) \varphi(\mathbf{r}') d\tau d\tau', \quad (1.10)$$

$$B_{h,h'} = \iint |\varphi(\mathbf{r})|^2 G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) |\varphi(\mathbf{r}' - \mathbf{R}_{h'})|^2 d\tau d\tau', \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} I_{h,h'} &= \exp \{2i\alpha R_{h'y} R_{h'x}\} I_{h,h'}^0(R_h) = \exp \{2i\alpha R_{h'y} R_{h'x}\} \times \\ &\times \iint \varphi^*(\mathbf{r} - \mathbf{R}_h) \varphi(\mathbf{r}) G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \varphi^*(\mathbf{r}' - \mathbf{R}_{h'}) \varphi(\mathbf{r}') d\tau d\tau', \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned}
 L_{h,h'} &= \exp \{i\alpha R_{h'y} R_{hx}\} \mathcal{L}(\mathbf{R}_h) = \\
 &= \exp \{i\alpha R_{h'y} R_{hx}\} \int \varphi^*(\mathbf{r} - \mathbf{R}_h) \varphi(\mathbf{r}) \times \\
 &\times \left\{ \sum_{p \neq h} \left[\int \frac{|\varphi(\mathbf{r}' - \mathbf{R}_p)|^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\tau' + V(|\mathbf{r} - \mathbf{R}_p|) \right] \right\} d\tau, \quad (1.13)
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{R}_h = \mathbf{R}_i - \mathbf{R}_{h'}.$$

При выводе (1.8) за начало отсчета энергии принята такая энергия кристалла, когда все узлы решетки находятся в состоянии простых правых узлов. Таким образом появление простых левых, а также полярных (двойных и пустых) узлов можно трактовать как появление некоторых «возбуждений» кристалла. Заметим еще, что интегралы $L_{h,h'}$ могут считаться не зависящими от состояния кристалла лишь приближенно (в пределе, когда нет двойных и пустых узлов). Кроме того, в (1.8) учтены, в основном, лишь члены с одноэлектронными переходами; оставшиеся операторные члены отброшены, так как соответствующие интегралы малы. Наконец, мы пренебрегли зависимостью интегралов $J_{h,h'}, I_{h,h'}, \mathcal{L}$ от магнитного поля, так как учет этой зависимости практически никакого влияния на магнитные свойства полупроводников не оказывает.

В целях вычисления магнитной восприимчивости полупроводников можно гамильтониан (1.8) намного упростить, переходя к так называемому квазиклассическому приближению, суть которого состоит в следующем: множитель $A + D$, стоящий перед $\sum_h (\Phi_h \Phi_h^+ + \Psi_h \Psi_h^+)$ и

имеющий, очевидно, смысл энергии активации двоек и дырок, достаточно велик (он содержит кулоновскую энергию взаимодействия двух электронов в двойке) для того, чтобы при не очень высоких температурах среднее число пустых и двойных узлов было небольшим по сравнению с общим числом простых неполярных узлов. Поэтому в указанном приближении можно, во-первых, отбросить в гамильтониане как малые более высокого порядка члены, учитывающие взаимодействие между двойками, дырками, а также двоек с дырками. Во-вторых, можно произвести в (1.8) усреднение по состояниям простых узлов, заменив в нем соответствующие операторы некоторыми s -числами, так как это равносильно предположению о том, что изменение числа и состояния полярных узлов почти не сказывается (в силу малости их числа) на состоянии неполярных узлов. При этом, если в случае $\mathcal{H} = 0$ необходимо положить $\varphi_h = \varphi_h^+ = \psi_h = \psi_h^+ = (1/\sqrt{2})$, то в случае $\mathcal{H} \neq 0$

$$\begin{aligned}
 \varphi_h &= \varphi_h^+ = \left(1 - 2 \frac{s}{N}\right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{\mu_B \mathcal{H}}{2kT} \right\} \left[\exp \left(\frac{\mu_B \mathcal{H}}{kT} \right) + \exp \left(-\frac{\mu_B \mathcal{H}}{kT} \right) \right]^{-1/2}, \\
 \psi_h &= \psi_h^+ = \left(1 - 2 \frac{s}{N}\right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{\mu_B \mathcal{H}}{2kT} \right\} \left[\exp \left(\frac{\mu_B \mathcal{H}}{kT} \right) + \exp \left(-\frac{\mu_B \mathcal{H}}{kT} \right) \right]^{-1/2}, \quad (1.14)
 \end{aligned}$$

где $2s$ — оператор $\sum_h (\Phi_h \Phi_h^+ + \Psi_h \Psi_h^+)$, причем $\text{Spur } 2s \ll N$. Подставив (1.14) в (1.8) и оставляя лишь члены, линейные относительно s , имеем (при $(\mu_B \mathcal{H} / kT) \ll 1$)

$$\begin{aligned}
 H' &= -1/2 N \chi_a \mathcal{H}^2 + 1/2 (A + D) \sum_h (\Phi_h \Phi_h^+ + \Psi_h \Psi_h^+) + \\
 &+ \sum_{h \neq h'} L_{h,h'} (\Phi_h \Phi_{h'}^+ - \Psi_h \Psi_{h'}^+) - \left[N - \sum_h (\Phi_h \Phi_h^+ + \Psi_h \Psi_h^+) \right] \frac{(\mu_B \mathcal{H})^2}{kT}. \quad (1.15)
 \end{aligned}$$

Необходимо подчеркнуть, что гамильтониан H' является квантовой динамической величиной лишь в отношении состояний полярных узлов. Что касается неполярных (правых и левых) состояний, то относительно них H' является уже обыкновенной макроскопической термодинамической функцией (внутренняя энергия). Иначе говоря,

$$H' = H'(\Phi, \Psi; \mathcal{H}, T) = \text{Spur}_{\varphi, \psi} H(\Phi, \Psi; \varphi, \psi; \mathcal{H}).$$

В дальнейшем для расчета магнитных свойств нам необходимо будет вычислить след оператора $\exp\{-H/kT\}$. Очевидно,

$$\begin{aligned} \text{Spur} \exp\{-H/kT\} &= \text{Spur}_{\Phi, \Psi} \left\{ \text{Spur}_{\varphi, \psi} \exp\left[\frac{-H(\Phi, \Psi; \varphi, \psi; \mathcal{H})}{kT}\right] \right\} = \\ &= \text{Spur}_{\Phi, \Psi} \exp\left\{-\frac{F'(\Phi, \Psi; \mathcal{H}, T)}{kT}\right\}, \end{aligned}$$

где $F'(\Phi, \Psi; \mathcal{H}, T)$ — оператор «свободной энергии», соответствующий оператору «внутренней энергии» $H'(\Phi, \Psi; \mathcal{H}, T)$. Таким образом нам понадобится, вообще говоря, для расчетов оператор F' , а не H' . Из соотношения Гиббса — Гельмгольца сразу следует, что

$$\begin{aligned} F'(\Phi, \Psi; \mathcal{H}, T) &= -\frac{1}{2} N \chi_a \mathcal{H}^2 - \frac{1}{2} N (\mu_B \mathcal{H})^2 / kT + \\ &+ \sum_{h, h'} \{ \frac{1}{2} \Delta \varepsilon_0 \delta_{h, h'} + L_{h, h'} (1 - \delta_{h, h'}) \} \Phi_h \Phi_{h'}^+ + \\ &+ \sum_{h, h'} \{ \frac{1}{2} \Delta \varepsilon_0 \delta_{h, h'} - L_{h, h'} (1 - \delta_{h, h'}) \} \Psi_h \Psi_{h'}^+, \end{aligned}$$

где

$$\Delta \varepsilon_0 = A + D + (\mu_B \mathcal{H})^2 / kT,$$

или, вводя обозначения

$$A_{h, h'}^\pm = \frac{1}{2} \Delta \varepsilon_0 \delta_{h, h'} \pm L_{h, h'} (1 - \delta_{h, h'}), \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} F'(\Phi, \Psi; \mathcal{H}, T) &= -\frac{1}{2} N \chi_a \mathcal{H}^2 - \frac{1}{2} N (\mu_B \mathcal{H})^2 / kT + \\ &+ \sum_{h, h'} \{ A_{h, h'}^+ \Phi_h \Phi_{h'}^+ + A_{h, h'}^- \Psi_h \Psi_{h'}^+ \}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Первые два члена в правой части (1.17) не зависят от возбуждений кристалла и дают диамагнетизм и парамагнетизм кристаллической решетки:

$$\begin{aligned} \chi_{\text{диа}}^{\text{реш}} &= N \chi_a \quad (\chi_a < 0), \\ \chi_{\text{пара}}^{\text{реш}} &= N \mu_B^2 / kT. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Мы их поэтому в дальнейших расчетах опустим и будем оперировать только с той частью «свободной энергии», которая связана с наличием полярных состояний:

$$F''(\Phi, \Psi; \mathcal{H}, T) = \sum_{h, h'} \{ A_{h, h'}^+ \Phi_h \Phi_{h'}^+ + A_{h, h'}^- \Psi_h \Psi_{h'}^+ \}. \quad (1.19)$$

2. Диамагнитная восприимчивость двоек и дырок

Прежде чем диагонализировать оператор F'' , мы перейдем в нем сначала к пространству импульсов, разложив операторы $\Phi_h, \Phi_{h'}^+, \Psi_h, \Psi_{h'}^+$ в ряды Фурье по формулам:

$$\begin{aligned}\Phi_h &= N^{-1/2} \sum_{\alpha} \exp \{-i(\mathbf{k}_{\alpha} \mathbf{R}_h)\} \tilde{\Phi}_{\alpha}; \Psi_h = N^{-1/2} \sum_{\beta} \exp \{-i(\vec{x}_{\beta} - \pi \mathbf{b}, \mathbf{R}_h)\} \tilde{\Psi}_{\beta}, \\ \Phi_{h'}^+ &= N^{-1/2} \sum_{\alpha'} \exp \{i(\mathbf{k}_{\alpha'} \mathbf{R}_{h'})\} \tilde{\Phi}_{\alpha'}^+; \Psi_{h'}^+ = N^{-1/2} \sum_{\beta'} \exp \{i(\vec{x}_{\beta'} - \pi \mathbf{b}, \mathbf{R}_{h'})\} \tilde{\Psi}_{\beta'}^+, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\tilde{\Phi}_{\alpha}, \tilde{\Psi}_{\beta}$ — операторные амплитуды Фурье, $\mathbf{k}_{\alpha}, \vec{x}_{\beta}$ — импульсы двоек и дырок, соответственно, $\mathbf{b}$ — основной вектор обратной решетки: $|\mathbf{b}| = a^{-1}$, где a — период решетки. Подставляя (2.1) в (1.19) и учитывая (1.13) и (1.16), имеем

$$\begin{aligned}F''(\tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}; \mathcal{H}, T) &= 1/2 \Delta \varepsilon_0 \left\{ \sum_{\alpha} \tilde{\Phi}_{\alpha} \tilde{\Phi}_{\alpha}^+ + \sum_{\beta} \tilde{\Psi}_{\beta} \tilde{\Psi}_{\beta}^+ \right\} + \\ &+ \sum_{\alpha, \alpha'} A_{\alpha, \alpha'} \tilde{\Phi}_{\alpha} \tilde{\Phi}_{\alpha'}^+ + \sum_{\beta, \beta'} B_{\beta, \beta'} \tilde{\Psi}_{\beta} \tilde{\Psi}_{\beta'}^+, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$A_{\alpha, \alpha'} = \sum_{h>0} \mathcal{L}(\mathbf{R}_h) \exp \{-i(\mathbf{k}_{\alpha} \mathbf{R}_h)\} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha R_{hx})^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial k_{\alpha y}^n} \delta(\mathbf{k}_{\alpha} - \mathbf{k}_{\alpha'}), \quad (2.3)$$

$$B_{\beta, \beta'} = - \sum_{h>0} \mathcal{L}(\mathbf{R}_h) \exp \{-i(\vec{x}_{\beta} - \pi \mathbf{b}, \mathbf{R}_h)\} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha R_{hx})^m}{m!} \frac{\partial^m}{\partial x_{\beta y}^m} \delta(\vec{x}_{\beta} - \vec{x}_{\beta'}). \quad (2.4)$$

Диагонализация оператора (2.2) в общем виде представляет собой сложную математическую задачу. Простое решение ее получается, если ряд производных от δ -функций оборвать на третьем члене, что означает разложение по степеням $\mathcal{H}$ до члена с $\mathcal{H}^2$, и, кроме того, ограничиться в суммировании по $h>0$ только членами $|\mathbf{R}_h| = a$. Это соответствует приближению эффективной массы. Тогда получаем

$$\begin{aligned}A_{\alpha, \alpha'} &= \left(6\mathcal{L}(a) + \frac{\hbar^2 \mathbf{k}_{\alpha}^2}{2m_{xx}^*} \right) \delta(\mathbf{k}_{\alpha} - \mathbf{k}_{\alpha'}) + \\ &+ i \frac{\alpha \hbar}{m_{xx}^*} k_{\alpha x} \frac{\partial}{\partial k_{\alpha y}} \delta(\mathbf{k}_{\alpha} - \mathbf{k}_{\alpha'}) - \frac{\alpha^2 \hbar^2}{2m_{xx}^*} \frac{\partial^2}{\partial k_{\alpha y}^2} \delta(\mathbf{k}_{\alpha} - \mathbf{k}_{\alpha'}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

и аналогичное уравнение для $B_{\beta, \beta'}$.

При этом эффективные массы

$$m_{xx}^* = - \frac{\hbar^2}{\partial^2 \mathcal{L}'(\vec{\gamma}) / \partial \gamma_x^2}, \quad (2.6)$$

где $\mathcal{L}'(\vec{\gamma}) = 6\mathcal{L}(a) - a^2 \mathcal{L}(a) \vec{\gamma}^2$ для случая двоек и дырок совпадают между собой.

Введем новые операторы $\xi_v, \xi_v^+; \gamma_{\mu}, \gamma_{\mu}^+$, связанные с $\tilde{\Phi}_{\alpha}, \tilde{\Phi}_{\alpha}^+, \tilde{\Psi}_{\beta}, \tilde{\Psi}_{\beta}^+$ соотношениями:

$$\tilde{\Phi}_{\alpha} = \sum_v u_v(\mathbf{k}_{\alpha}) \xi_v; \tilde{\Psi}_{\beta} = \sum_{\mu} v_{\mu}^*(\vec{x}_{\beta}) \gamma_{\mu}, \quad (2.7)$$

$$\tilde{\Phi}_{\alpha'}^+ = \sum_{v'} u_{v'}^*(\mathbf{k}_{\alpha'}) \xi_{v'}^+; \tilde{\Psi}_{\beta'}^+ = \sum_{\mu'} v_{\mu'}(\vec{x}_{\beta'}) \gamma_{\mu'}^+,$$

где $u_v(\mathbf{k})$ и $v_{\mu}(\vec{x})$ — некоторые полные ортонормированные системы функций, и потребуем, чтобы

$$\sum_{\alpha} A_{\alpha, \alpha'} u_{\nu}(\mathbf{k}_{\alpha}) = \lambda_{\nu} u_{\nu}(\mathbf{k}_{\alpha'}), \quad (2.8)$$

$$\sum_{\beta} B_{\beta, \beta'} v_{\mu}^{*}(\vec{x}_{\beta}) = \lambda_{\mu} v_{\mu}^{*}(\vec{x}_{\beta'}).$$

Легко убедиться в том, что операторы ξ_{ν} , η_{μ} также являются операторами Бозе и что при выполнении условий (2.8) F'' диагонализует, так что λ_{ν} , λ_{μ} дают просто спектр энергии (или свободной энергии — это в данном случае безразлично) двоек (дырок). Подставив (2.5) в (2.8) и производя суммирование по частям, мы получаем следующие дифференциальные уравнения для определения $u_{\nu}(\mathbf{k})$, $v_{\mu}(\vec{x})$, λ_{ν} , λ_{μ} :

$$\left\{ \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m_{xx}^{*}} - 2i\mu_{\text{Б}}^{*} \mathcal{H} k_x \frac{\partial}{\partial k_y} - \frac{e^2 \mathcal{H}^2}{2m_{xx}^{*} c^2} \frac{\partial^2}{\partial k_y^2} \right\} u_{\nu}(\mathbf{k}) =$$

$$= [\lambda_{\nu} - 6\mathcal{L}(a)] u_{\nu}(\mathbf{k}), \quad (2.9)$$

$$\left\{ \frac{\hbar^2 \vec{x}^2}{2m_{xx}^{*}} + 2i\mu_{\text{Б}}^{*} \mathcal{H} x_x \frac{\partial}{\partial x_y} - \frac{e^2 \mathcal{H}^2}{2m_{xx}^{*} c^2} \frac{\partial^2}{\partial x_y^2} \right\} v_{\mu}(\vec{x}) = [\lambda_{\mu} - 6\mathcal{L}(a)] v_{\mu}(\vec{x}),$$

где

$$\mu_{\text{Б}}^{*} = e\hbar / 2m_{xx}^{*} c^2,$$

которые являются уравнениями Шредингера для свободной частицы с зарядом $\pm e$ и массой m_{xx}^{*} в магнитном поле в p -представлении. Таким образом [5]

$$\lambda_{\nu} = 6\mathcal{L}(a) + \frac{\hbar^2 k_{yz}^2}{2m_{xx}^{*}} + \hbar\omega_0^{*} \left(n_{\nu} + \frac{1}{2} \right) = 6\mathcal{L}(a) + \varepsilon_{\nu}, \quad (2.10)$$

$$\lambda_{\mu} = 6\mathcal{L}(a) + \frac{\hbar^2 x_{\mu z}^2}{2m_{xx}^{*}} + \hbar\omega_0^{*} \left(n_{\mu} + \frac{1}{2} \right) = 6\mathcal{L}(a) + \varepsilon_{\mu},$$

$$(n_{\nu}, n_{\mu} = 0, 1, \dots),$$

где

$$\omega_0^{*} = (e\mathcal{H} / m_{xx}^{*} c). \quad (2.11)$$

Интересно отметить, что осцилляторы Ландау в случае двоек и дырок появляются в определенном приближении вследствие того, что дырки и двойки отражают движение электронов в кристаллической решетке. Таким образом мы получаем

$$F''(\xi, \eta; \mathcal{H}, T) = \sum_{\nu} (1/2 \Delta \varepsilon + \varepsilon_{\nu}) (\xi_{\nu} \xi_{\nu}^{+} + \eta_{\nu} \eta_{\nu}^{+}), \quad (2.12)$$

где

$$\Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon_0 + 12 \mathcal{L}(a).$$

Оператор F'' есть оператор энергии системы, состоящей из смеси идеальных газов из «квазичастиц» Бозе (двойки и дырки). Однако, принимая во внимание тот факт, что энергия активации этих квазичастиц — большая, сравнительно с kT , величина, мы можем в полном соответствии с рассматриваемым квазиклассическим приближением пользоваться здесь статистикой Больцмана. При этом в связи с тем, что число квазичастиц не определено, мы должны химический потенциал системы положить равным нулю. Итак,

$$F = -kT(Z_{\text{дв}} + Z_{\text{дыр}}) = -2kTZ,$$

где

$$\begin{aligned} Z &= \text{Spur} \exp - \left\{ \frac{F''(\xi; \eta, T)}{kT} \right\} = \\ &= \exp \left\{ - \frac{\Delta \epsilon}{2kT} \right\} \sum_v \exp \left\{ - \frac{\epsilon_v}{kT} \right\} = \\ &= \frac{e\mathcal{H}}{2h^2 c} (2\pi m_{xx}^* kT)^{1/2} \text{cosech} \frac{\hbar \omega_0^*}{2kT} \exp \left\{ - \frac{\Delta \epsilon}{2kT} \right\}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

причем при выводе (2.13) учтено отсутствие спина у квазичастиц и, кроме того, объем системы взят равным единице. Разложив в (2.13) $\text{cosech}(\hbar \omega_0^*/2kT)$ по степеням аргумента и подставляя в F , мы получаем следующее выражение для свободной энергии с точностью до членов $\sim \mathcal{H}^2$:

$$F = -2kT \left(\frac{2\pi m_{xx}^* kT}{h^2} \right)^{1/2} \exp \left\{ - \frac{\Delta \epsilon}{2kT} \right\} \left[1 - \frac{1}{6} \left(\frac{\mu_B^* \mathcal{H}}{kT} \right)^2 \right],$$

откуда

$$\chi_{\text{диа}}^{\text{возб}} = -2 \left(\frac{2\pi m_{xx}^* kT}{f h^2} \right)^{1/2} \exp \left\{ - \frac{\Delta \epsilon}{2kT} \right\} \frac{\mu_B^2}{kT} \left(1 + \frac{f^2}{3} \right), \quad (2.14)$$

где $f = (m/m_{xx}^*)$.

Так как

$$(2\pi m_{xx}^* kT h^{-2})^{1/2} \exp \left\{ - \frac{\Delta \epsilon}{2kT} \right\}$$

есть среднее (при данной температуре) число двоек (либо дырок) $\bar{s}(T)$, — мы можем (2.14) переписать в следующем виде:

$$\chi_{\text{диа}}^{\text{возб}} = -2\bar{s}(T) \mu_B^2 / kT - 2/3 \bar{s}(T) \mu_B^{*2} / kT. \quad (2.15)$$

Первый член (2.15) появляется вследствие того, что спин дырок и двоек равен нулю, отчего рост среднего числа возбуждений с температурой соответственно уменьшает парамагнетизм решетки — это дает некоторый „квазидиамагнитный“ эффект. Второй член есть собственный диамагнетизм возбуждений кристалла. Аналогичный член появляется и в обыкновенной зонной теории магнитных свойств полупроводников [2], хотя входящие в него величины имеют там несколько иной смысл. Интересно отметить, что зависимость $\chi_{\text{диа}}^{\text{возб}}$ от f , т. е. от величины эффективной массы носителей, имеет вид

$$\chi_{\text{диа}}^{\text{возб}} \sim f^{-1/2} + 1/3 f^{1/2},$$

так что большие значения диамагнитной восприимчивости в полупроводниках следует ожидать не столько при малых эффективных массах, сколько при больших. При этом $\chi_{\text{диа}}^{\text{возб}}$ гораздо чувствительнее к величине эффективной массы во втором случае, нежели в первом, не говоря уже о том, что величины $m_{xx}^* \sim 10^{-2} m$, которые необходимо принять в зонной теории магнитных свойств полупроводников для объяснения наблюдаемых на опыте величин диамагнетизма полупроводников без примеси [3], повидимому, не реальны.

Заключение

Из хода вычислений видно, что в квазиклассическом случае (большая энергия активации возбуждений, невысокие температуры) для описания магнитных свойств атомных полупроводников без примеси

вполне пригодна обыкновенная зонная схема, согласно которой энергетический спектр этих полупроводников состоит из зоны проводимости, основной зоны и энергетического зазора ширины Δz между ними. Однако получают несколько иную интерпретацию некоторые величины и понятия зонной теории.

1. Ширина энергетического зазора связывается не с энергией активации электронов и дырок, а с энергией активации двоек и дырок.

2. Носителями электрических и магнитных свойств полупроводников являются не свободные электроны и дырки, в эффективной массе которых учтено лишь взаимодействие электронов с атомными остатками, а некоторые — в первом приближении свободные — квазичастицы, эффективные массы которых наряду с взаимодействием электронов с решеткой учитывают также до некоторой степени и взаимодействие между собой [см. (2.6) и (1.13)]. Таким образом зонный спектр больше связан с квазиклассическим приближением, нежели с пренебрежением взаимодействием между электронами.

3. Член «квазидиамагнитной восприимчивости» — $\bar{s}(T) \mu_B^2 / kT$ не появляется в зонной теории магнетизма полупроводников не потому, что этот член описывает явления, выходящие за ее рамки, а только в связи с тем, что в зонной теории носители магнетизма отождествляются с электронами, а не с возбуждениями, как это делается в полярной модели.

4. Формула (2.15) может объяснить наблюдаемые порядки величин для диамагнетизма полупроводников без примеси, не предполагая малой эффективную массу возбуждений. При этом необходимо предположить, что среднее число возбуждений достаточно велико [$\chi_{\text{диа}}^{\text{возб}} \sim 10^{-7}$ абс. ед. для комнатных температур получается при $\bar{s}(T) \sim 2 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$]. Несомненно, что при таких концентрациях возбуждений квазиклассическое приближение, лежащее в основе вывода формулы (2.15), находится на грани своей применимости. Однако может вполне оказаться, что это приближение вовсе не является необходимым для вывода этой формулы, и что она обладает более широкими границами применимости, нежели само квазиклассическое приближение. Ответ на этот вопрос может дать расчет, основанный на отказе от квазиклассического приближения и на учете взаимодействия между возбуждениями. Мы надеемся вернуться к этому вопросу в ближайшем будущем.

Автор выражает искреннюю благодарность проф. А. Г. Самойловичу за большую помощь, оказанную при выполнении настоящей работы.

Черновицкий государственный
университет

Поступила в редакцию
1 февраля 1954 г.

Литература

- [1] С. Шубин и С. Вонсовский. Phys. ZS. d. Sow. Un., 7, 292, 1935. — [2] А. Г. Самойлович. Доповіді АН УРСР, 5, 1954. — [3] G. Busch и E. Mooser. ZS. f. phys. Chem., 198, 23, 1951. — [4] R. Peierls. ZS. f. Phys., 80, 763, 1933. — [5] Л. Ландау и Е. Лифшиц. Квантовая механика, ч. I. Гостехиздат, М. — Л., 1948.

УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В РЕЛАКСИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ

С. П. Дьяков

Рассмотрен вопрос о возможности существования ударных волн в релаксирующей среде.

Как известно, сжатие вещества во фронте ударной волны происходит в течение весьма небольшого промежутка времени; в сильной ударной волне, распространяющейся в газе, это время — порядка времени между молекулярными соударениями. При таком резком сжатии в веществе нарушается термодинамическое равновесие и начинаются внутренние процессы, стремящиеся восстановить это равновесие (релаксация). Если, как мы будем предполагать в дальнейшем, время релаксации значительно больше времен молекулярных соударений, это приводит к существенному изменению структуры ударной волны, в частности к значительному увеличению ширины переходного слоя. Распространение ударной волны в релаксирующей среде было впервые изучено Зельдовичем [1].

1. Возможные типы ударных волн в релаксирующей среде

Для описания ударных волн в релаксирующей среде целесообразно ввести две адиабаты Гюгонио, имеющие общую начальную точку. Одна из этих адиабат (неравновесная адиабата) соответствует полностью «замороженным» релаксационным процессам, и для ее нахождения необходимо пользоваться термодинамическими функциями состояния частичного равновесия. Другая адиабата строится в предположении полного равновесия вещества в конечном состоянии (равновесная адиабата). Легко видеть, что взаимное расположение адиабат вблизи начальной точки таково, что неравновесная адиабата идет круче равновесной; это обстоятельство уже непосредственно следует из принципа Ле-Шателье.

В самом деле, в релаксирующей среде имеет место дисперсия звука [2, 3], причем при частоте, малой по сравнению с обратным временем релаксации $\omega \ll 1/\tau$, вещество среды успевает в звуковой волне прийти в состояние полного термодинамического равновесия, и скорость звука (u_0) минимальна, в то время как в звуковой волне высокой частоты $\omega \gg 1/\tau$ релаксационные процессы полностью «заморожены», вещество находится в состоянии лишь частичного равновесия, и скорость звука (u_∞) максимальна. Поскольку наклоны касательных к равновесной и неравновесной адиабатам в начальной точке пропорциональны скоростям звука u_0 и u_∞ соответственно, отсюда непосредственно следует высказанное утверждение.

Если скорость ударной волны D меньше скорости высокочастотного звука, $D < u_\infty$, и прямая Михельсона лежит ниже неравновесной адиабаты и не пересекает ее вторично (рис. 1), нарушается одно из условий механической устойчивости ударной волны [4]. Ударная волна перестает существовать как резкий разрыв и превращается в переходный слой толщиной порядка $D\tau$, в котором состояние вещества

плавно меняется от начального до конечного состояния I , отвечающего полному термодинамическому равновесию (рис. 2).

Если $D > u_\infty$ (рис. 3), критерии механической устойчивости волны выполнены, и ударная волна состоит из резкого разрыва, переводя-

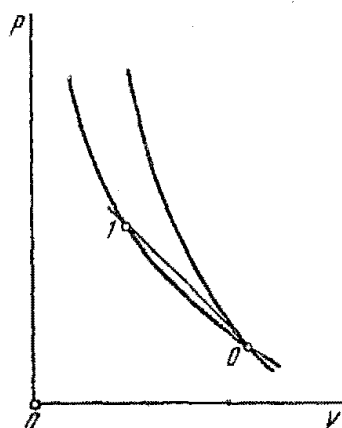


Рис. 1

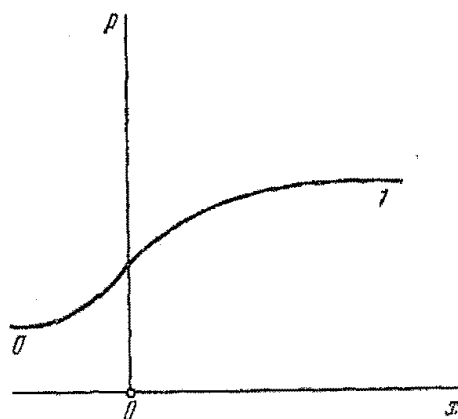


Рис. 2

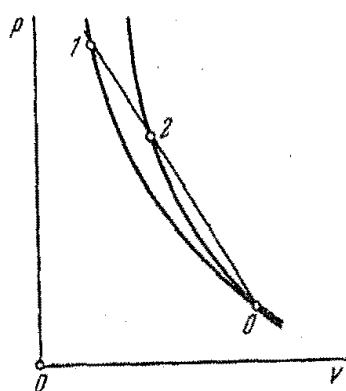


Рис. 3

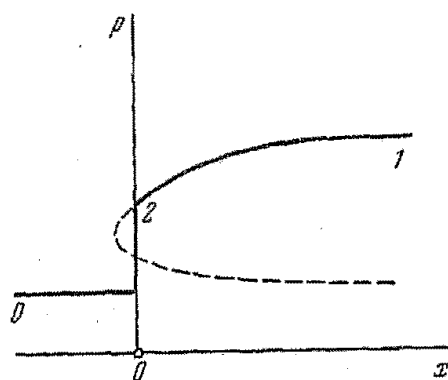


Рис. 4

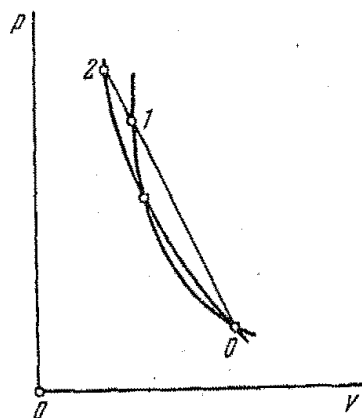


Рис. 5

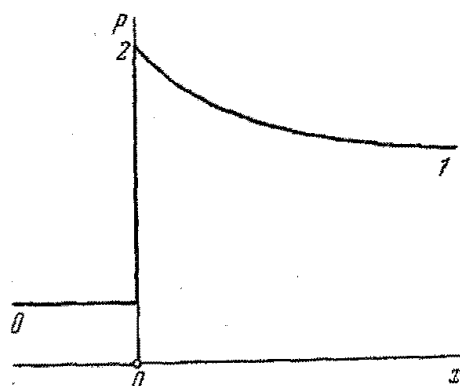


Рис. 6

щего вещество в состояние частичного равновесия (точка 2 на неравновесной адиабате), и последующей переходной области толщиной $\sim D\tau$, в которой состояние плавно меняется до конечного полностью равновесного состояния I . Эта релаксация сопровождается дополнительным возрастанием давления (рис. 4; профиль давления изображен сплошной линией; по поводу пунктирной линии см. ниже). Вышеприведенные рассуждения принадлежат Зельдовичу и заимствованы из его работы [1].

В том случае, если равновесная и неравновесная адиабаты пересекаются (рис. 5), появляется возможность существования ударных волн третьего типа. В самом деле, если скорость ударной волны такова, что прямая Михельсона пересекает адиабаты выше точки их взаимного пересечения (рис. 5), релаксация будет сопровождаться понижением давления (рис. 6).

Примером релаксирующей среды, в которой возможны ударные волны такого типа, является идеальный двух- или многоатомный газ. В достаточно сильной ударной волне состоянию равновесия будет отвечать заметная степень диссоциации газа. Установление химического равновесия по отношению к термической диссоциации представляет собой относительно медленный релаксационный процесс. Предельное сжатие на неравновесной адиабате, являющейся адиабатой для многоатомного газа, превышает предельное сжатие на равновесной адиабате, соответствующее одноатомным продуктам диссоциации, откуда следует необходимость пересечения адиабат. Взаимное расположение адиабат представлено на рис. 5. Таким образом диссоциация газа, сжатого достаточно сильной ударной волной, будет сопровождаться падением давления.

Определение хода величин в зоне релаксации требует знания кинетики процесса релаксации. Задавшись уравнением кинетики, легко путем численного интегрирования определить ход всех интересующих величин. Пример такого численного расчета применительно к возбуждению колебательных степеней свободы в молекулярном водороде был дан Степановым [5]. Для случая ударных волн малой интенсивности возможно аналитическое решение задачи в общем виде, к нахождению которого мы и приступим.

2. Слабые ударные волны в релаксирующей среде

Для описания релаксации в слабых ударных волнах введем величину c , характеризующую состояние неполного термодинамического равновесия; ее равновесное значение обозначим через c_e . В слабых ударных волнах изменения всех величин малы, в частности мало отклонение от состояния термодинамического равновесия, характеризуемое разностью $c - c_e$. Будем считать, что скорость изменения величины c при приближении ее к равновесию $\dot{c}$ зависит только от значения самого c ; тогда $\dot{c}$ можно разложить в ряд по степеням параметра неравновесности $c - c_e$ и ограничиться линейным членом $\dot{c} = (c - c_e)/\tau$, где τ имеет смысл времени релаксации.

Рассмотрим слабую ударную волну в системе координат, движущейся вместе с волной в отрицательном направлении оси x ; тогда наше уравнение для изменения c переписывается следующим образом:

$$v \frac{dc}{dx} = -\frac{1}{\tau} (c - c_e), \quad (1)$$

где v — скорость вещества. Решение уравнения (1) совместно с гидродинамическими уравнениями сохранения определит структуру ударной волны. Для очень слабых ударных волн, однако, решение можно написать сразу. Действительно, как мы увидим ниже, ширина очень слабой ударной волны обратно пропорциональна амплитуде; поэтому состояние вещества в переходном слое можно считать меняющимся медленно по отношению к установлению равновесия, что допускает трактовку процесса релаксации в духе метода Мандельштама и Леонтовича [6]. Согласно последнему, наличие процессов релаксации при достаточно медленных изменениях состояния эквивалентно аномально

большому второму коэффициенту вязкости среды:

$$\zeta = \tau \rho (u_{\infty}^2 - u_0^2). \quad (2)$$

Поэтому можно пользоваться обычными формулами гидродинамической теории переходного слоя ударной волны в которых следует пренебречь теплопроводностью и первой вязкостью (см., например, [4]).

Считая, что перепад давления в ударной волне $\Delta p = p_1 - p_0$ мал по сравнению с самим давлением, имеем для хода давления в переходном слое известную формулу

$$p = \frac{p_1 + p_0}{2} + \frac{p_1 - p_0}{2} \operatorname{th} \frac{x}{\delta}; \quad (3)$$

здесь δ — ширина переходного слоя, равная

$$\delta = \frac{2V^2 \zeta}{u_0^3 (\partial^2 V / \partial p^2)_s \Delta p}, \quad (4)$$

где ζ определяется формулой (2).

Как указывалось выше, эти формулы применимы в том случае, когда состояние меняется медленно по отношению к установлению равновесия, т. е. когда

$$\delta \gg u_0 \tau. \quad (5)$$

Пользуясь формулами (2) и (4), можно соотношение (5) представить в виде:

$$\Delta p \ll \frac{2V^2 (u_{\infty}^2 - u_0^2)}{u_0^4 (\partial^2 V / \partial p^2)_s}. \quad (6)$$

В случае, когда $u_{\infty}^2 - u_0^2$ порядка величины самих u_{∞}^2 и u_0^2 , условие $\Delta p \ll p$ обеспечивает выполнение неравенства (6) и, следовательно, применимость формул обычной гидродинамической теории.

Если же скорости u_{∞} и u_0 близки, так что $u_{\infty}^2 - u_0^2 \ll u_0^2$, условие (6) уже не является, вообще говоря, следствием условия $\Delta p \ll p$ и представляет собой более сильное ограничение, налагаемое на величину интенсивности ударной волны. В случае, когда обе величины в обеих частях неравенств (5) и (6) одного порядка, описание процесса при помощи введения второго коэффициента вязкости не применимо, и требуется особое исследование, излагаемое в следующем параграфе. Условие $\Delta p \ll p$ будем считать попрежнему выполненным.

3. Случай $u_{\infty}^2 - u_0^2 \ll u_0^2$

В рассматриваемом случае необходимо решить уравнение (1) совместно с уравнениями адиабаты Гюгонио

$$w - w_0 = 1/2 (p - p_0) (V + V_0), \quad (7)$$

и прямой Михельсона

$$p - p_0 = j^2 (V_0 - V); \quad (8)$$

здесь w — энтальпия единицы массы, $j = v/V = v_0/V_0$ — поток вещества через фронт волны, индекс нуль относится к состоянию вещества перед фронтом волны (при $x \rightarrow -\infty$). Выберем в качестве независимых переменных энтропию s , давление p и величину $\mu = (\partial w / \partial s)_p, s$; в качестве термодинамического потенциала при таком выборе независимых переменных удобно взять величину $\chi = w - \mu s$, удовлетворяю-

щую следующему термодинамическому тождеству

$$d\chi = Tds + Vdp - cd\mu. \quad (9)$$

В том случае, если роль процесса релаксации играет процесс установления химического равновесия в веществе, а в качестве c выбрана концентрация одного из компонентов, μ будет представлять собою надлежащим образом определенный химический потенциал. При полном термодинамическом равновесии, очевидно, $\mu = 0$; μ отлично от нуля только в переходном слое, достигая экстремума где-то внутри него.

Разложим уравнения (1), (7), (8) по степеням малых величин $p - p_0$, $s - s_0$, μ , сохраняя члены второго порядка малости по $p - p_0$. Сделаем оправдывающееся в дальнейшем допущение, что величины μ и $s - s_0$ более высокого порядка малости, чем первый. Тогда из (7) после разложения сразу следует, что $s - s_0$ — порядка малости выше второго, т. е. в нашем приближении уравнение (7) эквивалентно условию

$$s - s_0 = 0. \quad (10)$$

Далее разложение (8) дает с учетом (10)

$$p - p_0 = -j^2 \left[\left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_{\mu, s} (p - p_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_{\mu, s} (p - p_0)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \mu} \right)_{p, s} \mu \right],$$

что можно переписать следующим образом

$$\frac{j^2}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_{\mu, s} (p - p_0) (p - p_1) = -j^2 \left(\frac{\partial V}{\partial \mu} \right)_{p, s} \mu, \quad (11)$$

откуда видно, что величина $(\partial V / \partial \mu)_{p, s} \mu$ — второго порядка малости.

Заметим теперь следующее термодинамическое соотношение:

$$u_\infty^2 - u_0^2 = V^2 \left[\left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_{\mu, s} - \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_{c, s} \right] = \rho^2 u_\infty^4 \left(\frac{\partial V}{\partial \mu} \right)_{p, s}^2 \left(\frac{\partial \mu}{\partial c} \right)_{V, s}. \quad (12)$$

В соответствии со сказанным в конце предыдущего параграфа мы считаем, что $u_\infty^2 - u_0^2 \sim u_0^2 \Delta p / p$, т. е. что $u_\infty^2 - u_0^2$ — величина первого порядка малости. Легко видеть, что нет никаких специальных причин, чтобы $(\partial \mu / \partial c)_{V, s}$ была малой величиной; отсюда заключаем, что в правой части уравнения (12) сомножителем первого порядка малости является $(\partial V / \partial \mu)_{p, s}^2$, т. е. величина $(\partial V / \partial \mu)_{p, s}$ имеет порядок малости $1/2$. Поскольку $(\partial V / \partial \mu)_{p, s} \mu$ — второго порядка малости, заключаем, что μ — порядка малости $3/2$.

Разложим теперь уравнение (1). Предварительно заметим, что дифференцирование по x не меняет порядка малости величин, поскольку в интересующем нас случае ширина $\delta \sim u\tau$ и не зависит существенно от интенсивности ударной волны. Имеем

$$\frac{dc}{dx} = \left(\frac{\partial c}{\partial \mu} \right)_{p, s} \frac{d\mu}{dx} + \left(\frac{\partial c}{\partial p} \right)_{\mu, s} \frac{dp}{dx}.$$

Здесь мы отбросили член, пропорциональный ds/dx , как более высокого порядка. Замечаем, что в силу соотношения $(\partial c / \partial p)_{\mu, s} = -(\partial V / \partial \mu)_{p, s}$, оба слагаемых в правой части этого соотношения имеют порядок малости $3/2$. Далее, поскольку c_e есть значение c в состоянии полного термодинамического равновесия, т. е. при $\mu = 0$, разность в правой части (1) равна

$$c - c_e = (\partial c / \partial \mu)_{p, s} \mu.$$

Таким образом уравнение (1) переписывается в виде

$$\left(\frac{\partial c}{\partial \mu}\right)_{p,s} \frac{d\mu}{dx} + \left(\frac{\partial c}{\partial p}\right)_{\mu,s} \frac{dp}{dx} = \frac{1}{u\tau} \left(\frac{\partial c}{\partial \mu}\right)_{p,s} \mu. \quad (13)$$

Исключая отсюда μ при помощи соотношения (11), получим после простых преобразований следующее дифференциальное уравнение для p :

$$\left[p - \frac{p_1 + p_0}{2} + \frac{u_\infty^2 - u_0^2}{2(D^2 - u_0^2)} \Delta p\right] \frac{dp}{dx} = -\frac{1}{2u\tau} (p - p_0)(p - p_1). \quad (14)$$

Интегрирование уравнения (14) элементарно и приводит к следующему результату

$$x = u\tau \ln \frac{\alpha^{\alpha+1} (\Delta p)^2 (p - p_0)^{\alpha-1}}{|1 - \alpha|^{\alpha-1} (p_1 - p)^{\alpha+1}}, \quad (15)$$

где через α обозначена величина

$$\alpha = (u_\infty^2 - u_0^2) / (D^2 - u_0^2). \quad (16)$$

Выбор постоянной интегрирования будет объяснен ниже. Уравнение (15) определяет p как неявную функцию x . При $\alpha > 1$, т. е. $u_0^2 < D^2 < u_\infty^2$, давление, определяемое уравнением (15), представляет собой непрерывную функцию, монотонно меняющуюся от p_0 при $x = -\infty$ до p_1 при $x = +\infty$, как это и следовало ожидать в соответствии с общими рассуждениями раздела 1. Заметим, что в предельном случае $\alpha \gg 1$ решение (15) стремится к решению (3). При $\alpha < 1$, т. е. $D^2 > u_\infty^2$, уравнение (15), в полном соответствии с рассуждениями раздела 1, не дает непрерывного перехода, так как $x \rightarrow +\infty$ как при $p \rightarrow p_0$, так и при $p \rightarrow p_1$, т. е. кривая имеет форму типа изображенной на рис. 4 пунктиром. Физический смысл имеет, конечно, ее верхняя часть до точки, где находится разрыв; по левую сторону от разрыва повсюду $p = p_0$. Величина и положение разрыва определяются из следующих соображений. Непосредственно за разрывом $c = c_0$, поэтому величина μ непосредственно за разрывом равна

$$\mu = \left(\frac{\partial \mu}{\partial p}\right)_{c,s} (p - p_0) = \left(\frac{\partial \mu}{\partial c}\right)_{p,s} \left(\frac{\partial V}{\partial \mu}\right)_{p,s} (p - p_0).$$

Подставляя это значение μ в формулу (11), найдем значение давления непосредственно за разрывом p_2 :

$$p_2 - p_0 = (1 - \alpha)(p_1 - p_0) = \frac{D^2 - u_\infty^2}{D^2 - u_0^2} \Delta p. \quad (17)$$

Подставляя теперь это значение p_2 в (15), убедимся, что при нашем выборе постоянной интегрирования положение разрыва совпадает с началом координат.

При $x > 0$ состояние вещества плавно меняется, давление возрастает от p_2 до p_1 по верхней ветви кривой (15).

Выводы

1. Обнаружена возможность существования ударных волн в релаксирующей среде, в которых процесс релаксации сопровождается падением давления. Указан конкретный пример среды, в которой возможны ударные волны такого типа.

2. Аналитически рассмотрена слабая ударная волна в релаксирующей среде.

Автор благодарит акад. Л. Д. Ландау за указания и интерес к работе.

Институт физических проблем
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
9 февраля 1954 г.

Литература

- [1] Я. Б. Зельдович. ЖЭТФ, 16, 365, 1946. — [2] A. Einstein. Sitz. Akad. Wiss., 380, 1920. — [3] H. Kneser. Ann. d. Phys., 11, 761, 1931. — [4] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред, ГТТИ, Л.—М., 1944, § 65, 67. — [5] П. Е. Степанов. ЖЭТФ, 14, 377, 1947. — [6] Л. И. Мандельштам и М. А. Леонтович. ЖЭТФ, 7, 438, 1937.
-

ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА И СТРУКТУРА ПОЛИКРИСТАЛЛОВ
СИСТЕМЫ $\text{ZnO} \cdot \text{TiO}_2 - 1,5 \text{MgO} \cdot \text{TiO}_2$

Г. И. Сканави и В. В. Маслов

Исследованы диэлектрические свойства (диэлектрическая проницаемость и угол потерь) поликристаллических диэлектриков системы $\text{MgO} \cdot \text{TiO}_2 - \text{ZnO} \cdot \text{TiO}_2$ в связи с их составом и кристаллической структурой.

Диэлектрические свойства титанатов магния достаточно хорошо известны (см., например, [1, 2]). Соединение двуокиси титана с окисью цинка изучалось сравнительно мало. В работах [2, 3] было установлено, что диэлектрик, получаемый спеканием ZnO и TiO_2 при эквимолярном соотношении, так называемый «метатитанат цинка» обладает повышенной диэлектрической проницаемостью (около 25) и повышенной по сравнению с другими титанатами электрической прочностью ($E_{\text{пр}} \approx 300 \text{ kV/cm}$). Диэлектрики системы $\text{TiO}_2 - \text{MgO}$ имеют диэлектрическую проницаемость в пределах 12—17, которая сравнительно мало изменяется при изменении соотношения компонентов [4].

Кристаллическая структура метатитаната магния изучена; кристаллы MgTiO_3 имеют структуру так называемого гейкелита, которая относится к типу ильменитов. Ильменит FeTiO_3 изоморфен с кристаллом Fe_2O_3 ; половина атомов железа заменена в ильмените атомами титана. Имеются ильмениты, в которых часть атомов железа, кроме того, заменена атомами магния; эти ильмениты имеют состав, близкий к $(\text{Fe}, \text{g})\text{TiO}_3$; MgTiO_3 — гейкелит — также изоморфен с Fe_2O_3 . Сюда относятся также изоморфные соединения MnTiO_3 , CoTiO_3 , NiTiO_3 и низкотемпературная форма кристаллов CdTiO_3 (высокотемпературная форма CdTiO_3 имеет структуру типа перовскита). Кристаллическая решетка типа ильменита, к которой относятся все вышеуказанные соединения, является ромбоэдрической.

Координационные числа имеют следующие значения: для Ti оно равно 6O, для Fe (или Mg) — 6O [вокруг каждого атома Ti и каждого атома Fe (или Mg) шесть атомов кислорода образуют октаэдр]; координационное число $O = 4(\text{Ti}, \text{Fe})$ или $O = 4(\text{Ti}, \text{Mg})$ (вокруг каждого атома кислорода прочие атомы образуют тетраэдры).

В системе $\text{MgO} \cdot \text{TiO}_2$ имеется еще соединение — ортотитанат магния $2\text{MgO} \cdot \text{TiO}_2$ обладающее структурой типа шпинели [4], и дтитанат магния $\text{MgO} \cdot 2\text{TiO}_2$.

В системе $\text{ZnO} \cdot \text{TiO}_2$ обнаружено лишь одно соединение — ортотитанат цинка $2\text{ZnO} \cdot \text{TiO}_2$, обладающее структурой типа шпинели [4, 5]. Наличие соединения ZnTiO_3 , повидимому, не подтверждается [4, 5].

В настоящей работе исследовалась зависимость диэлектрических свойств поликристаллических диэлектриков системы $\text{ZnO} \cdot \text{TiO}_2 - 1,5\text{MgO} \cdot \text{TiO}_2$ от их состава и кристаллической структуры. Образцы готовились при помощи растирания шихты, прессовки на гидравлическом прессе и обжига в силитовых печах. На образцы наносились электроды методом керамического вжигания серебра. ϵ и $\text{tg } \delta$ образцов определялись при помощи мостов и куметра.

В табл. 1 и на рис. 1 приведены экспериментальные данные.

Таблица 1

$\text{ZnO} \cdot \text{TiO}_2$ в весовых частях	$1,5\text{MgO} \cdot \text{TiO}_2$ в весовых частях	ϵ	$\text{tg} \delta \cdot 10^4$ при $2 \cdot 10^6$ гц	$\frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dT} \cdot 10^6$ при $(1 \div 3) \cdot 10^6$ гц	Температура спекания $^{\circ}\text{C}$
100	—	26,2	20	—105	1290
*100	—	22,3	23	—120	1190
95	5	24,3	30	—100	1310
*95	5	21,0	30	—108	1220
*90	10	16,6	45	—35	1200
*85	15	14,6	26	+40	1235
*80	20	14,2	19	+85	1270
*75	25	15,5	5	+130	1280
66,6	33,3	14,6	11	+150	1290
*66,6	33,3	15,4	4	+125	1250
60	40	15,6	8	+140	1340
50	50	16,6	5	+105	1340
*50	50	15,7	3,5	+100	1240
25	75	15,3	8	+65	1350
*25	75	14,7	5	+37	1280
10	90	14,6	7,7	+57	1390
*10	90	14,0	5	—6	1340
—	100	15,9	3,5	+47	1380
*—	100	14,1	5,0	—1	1360

Примечание. * помечены составы, содержащие 4% плавня.

Из табл. 1 и рис. 1 видно, что диэлектрическая проницаемость в широком интервале концентраций при частичной замене $1,5\text{MgO} \cdot \text{TiO}_2$ на $\text{ZnO} \cdot \text{TiO}_2$ — в пределах до 70—75 весовых частей ZnTiO_3 — оста-

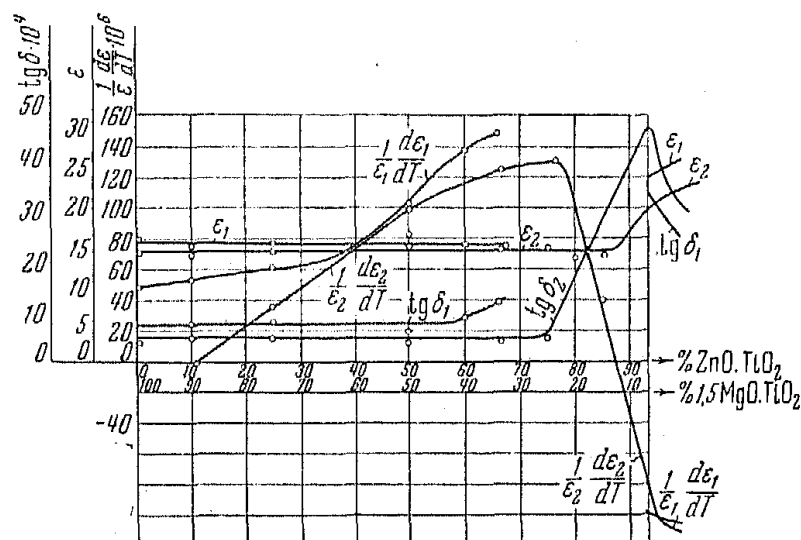


Рис. 1. Зависимость ϵ , $\text{tg} \delta$ и $\frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dT}$ материалов системы

$\text{ZnO} \cdot \text{TiO}_2 - 1,5 \text{MgO} \cdot \text{TiO}_2$ от концентрации компонентов. Значок 1 относится к материалам, не содержащим плавня, 2 — к материалам с 4% плавня

ся практически неизменной. Это существенное обстоятельство можно было бы объяснить следующим образом. Электронные поляризуемости ионов цинка и магния одинаковы и равны $\alpha_e = 0,114 \cdot 10^{-24} \text{ см}^3$, радиусы ионов Zn^{2+} и Mg^{2+} различаются лишь немного ($r_{\text{Zn}^{2+}} = 0,83 \text{ \AA}$,

$r_{\text{Mg}^{2+}} = 0,78 \text{ \AA}$). Следовательно, электронная поляризация единицы объема, обусловленная ионами Zn^{2+} , близка к электронной поляризации единицы объема, обусловленной ионами Mg^{2+} ($\alpha_e/r^3 = 0,199$ для Zn^{2+} и $\alpha_e/r^3 = 0,240$ для Mg^{2+}); поэтому при одинаковой структуре кристаллической решетки замена ионов Mg^{2+} на ионы Zn^{2+} не должна сильно изменить электронную поляризацию. Если при этой замене плотность упаковки структуры изменяется мало, то и ионная поляризуемость решетки должна оставаться практически неизменной. Неизменность кристаллической структуры должна быть проверена при помощи рентгеновского анализа (см. ниже).

При концентрации $\text{ZnO} \cdot \text{TiO}_2$ выше 75% ϵ начинает заметно расти с увеличением концентрации $\text{ZnO} \cdot \text{TiO}_2$. Добавление плавня, содействующего спеканию, несколько снижает диэлектрическую проницаемость.

Температурный коэффициент ϵ образцов исследуемой системы, не содержащих плавня, имеет положительное значение, несколько растущее с увеличением содержания $\text{ZnO} \cdot \text{TiO}_2$ до 75%. Можно думать поэтому, что частичная замена ионов Mg^{2+} на ионы Zn^{2+} , имеющие несколько больший радиус, приводит к такому разрыхлению решетки, при котором увеличивается температурная зависимость коэффициента упругой связи разноименных ионов решетки.

При содержании ZnTiO_3 в пределах от 75 до 90% спекание образцов без плавня практически оказалось невозможным. Это обстоятельство связано, повидимому, с тем, что в указанном интервале концентраций замещение ионов Mg^{2+} на ионы Zn^{2+} в пределах одной структуры весьма затруднено. При введении стеклообразного плавня спекание становится возможным. При этом, как видно из рис. 1 и табл. 1, положительное значение $\frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dT}$ понижается. В области концентрации $\text{ZnO} \cdot \text{TiO}_2$ от 75% и выше $\frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dT}$ резко понижается с ростом содержания $\text{ZnO} \cdot \text{TiO}_2$. Примерно в этой области концентраций наблюдается резкое возрастание диэлектрической проницаемости.

Можно думать, что в области концентраций 75—95% $\text{ZnO} \cdot \text{TiO}_2$ при спекании шихты с плавнем образуется композиционный диэлектрик, состоящий из двух кристаллических фаз, скрепленных стекловидной прослойкой. Диэлектрические характеристики такого диэлектрика, как известно, определяются законом смешения и могут быть вычислены по параметрам компонентов при помощи формул для двухкомпонентных систем (например, по логарифмической формуле).

Кривые концентрационной зависимости ϵ и $\frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dT}$ для диэлектриков в рассматриваемой области концентраций показывают, что указанные формулы могут быть применены. Действительно, ϵ увеличивается с ростом содержания $\text{ZnO} \cdot \text{TiO}_2$ примерно по логарифмическому закону, а $\frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dT}$ изменяется почти строго линейно, что соответствует логарифмической формуле для ϵ . Угол потерь диэлектриков исследуемой системы при изменении концентраций $\text{ZnO} \cdot \text{TiO}_2$ от 0 до 75% практически почти не изменяется и имеет малое значение [$\text{tg } \delta = (5 \div 10) \cdot 10^{-4}$].

В области концентраций от 75 до 95% $\text{ZnO} \cdot \text{TiO}_2$ имеет место значительное возрастание угла потерь, и при концентрации $\text{ZnO} \cdot \text{TiO}_2$ 90% $\text{tg } \delta$ имеет максимум. Это согласуется с вышеуказанным предположением об образовании композиционного диэлектрика в этой области концентраций. Повышенное значение $\text{tg } \delta$ обусловлено тем, что спекание образцов не является достаточно полным, так как происходит только за счет наличия плавня. Образцы поэтому имеют значитель-

ное количество пор, в том числе и открытых, и обладают некоторой гигроскопичностью. После пребывания во влажной атмосфере или в воде $\lg \delta$ указанных образцов резко возрастает.

Изложенные выше экспериментальные результаты и сделанные на основании их предположения интересно сопоставить с данными рентгенографического анализа, тем более что основной вопрос о том, почему те титанаты, которые не имеют структуры типа перовскита (титанат магния, так называемый титанат цинка) и сильно отличаются по структуре от рутила, все же обладают повышенной диэлектрической проницаемостью, до сих пор остается невыясненным.

Снятие дебаграмм диэлектриков исследуемой системы, проведенное по нашей просьбе М. А. Порай-Кошицем, прежде всего подтвердило, что так называемый титанат цинка, содержащий TiO_2 и ZnO в эквимолярном соотношении, не обладает решеткой типа ильменита или перовскита, которые характерны для титанатов металлов II группы системы Менделеева. Структура этого диэлектрика относится к типу шпинели.

Интересно, что и титанат магния, соответствующий молярному соотношению 1,5 моля TiO_2 на 1 моль MgO , который исследовался в настоящей работе, также обладает не гейкелитовой структурой, характерной, судя по литературным данным, для метатитаната магния ($\text{MgO} \cdot \text{TiO}_2$), а структурой типа шпинели. Кроме того, оказалось, что все диэлектрики системы $\text{ZnO} \cdot \text{TiO}_2 - 1,5\text{MgO} \cdot \text{TiO}_2$ обладают структурой типа шпинели.

Это, по видимому, связано с тем, что в системах $\text{ZnO} - \text{TiO}_2$ и $\text{MgO} - \text{TiO}_2$ наиболее стабильными при высокотемпературном обжиге являются соединения типа ортотитанатов $2\text{MgO} \cdot \text{TiO}_2$ и $2\text{ZnO} \cdot \text{TiO}_2$, имеющие структуру типа шпинели.

Таким образом при замещении ионов магния на ионы цинка исследуемые диэлектрики не изменяют структуры, что подтверждает сделанное выше предположение о причинах неизменности диэлектрической проницаемости при указанном замещении в большом интервале концентраций. Три линии максимальной интенсивности дебаграммы для всех диэлектриков системы $1,5\text{MgO} \cdot \text{TiO}_2 - \text{ZnO} \cdot \text{TiO}_2$ весьма близки по значениям межплоскостных расстояний к трем основным линиям дебаграммы таких шпинелей, как $\gamma\text{-Fe}_2\text{O}_3$, $\text{CoO} \cdot \text{Fe}_2\text{O}_3$, $\text{Fe}_2\text{O}_3 \cdot \text{ZnO}$, $\text{Fe}_2\text{O}_3 \cdot \text{MgO}$, $\text{TiO}_2 \cdot 2\text{ZnO}$, $2\text{MgO} \cdot \text{TiO}_2$, $\text{Ga}_2\text{O}_3 \cdot \text{MgO}$ и пр.

Можно думать, что для титанатов цинка и для титанатов магния при разных соотношениях основного и кислотного окислов наиболее вероятной является структура типа шпинели. Эта структура является обычной для очень многих смешанных кристаллов типа AB_2O_4 , где А — двухвалентный, а В — трехвалентный металл. Однако, как и в структуре перовскита, встречаются и другие шпинели, в которых А и В — металлы иных валентностей [6]. Для образования структуры шпинели важен общий заряд катионов, который должен быть равен восьми элементарным зарядам (в расчете на четыре иона кислорода). Так, соединения $\text{Ti}^{4+}\text{Mg}_2^{2+}\text{O}_4^{2-}$, $\text{Ti}^{4+}\text{Mn}^{2+}\text{O}_4^{2-}$, $\text{Ti}^{4+}\text{Zn}^{2+}\text{O}_4^{2-}$, $\text{Mo}^{6+}\text{Ag}_2^{+}\text{O}_4^{2-}$ имеют структуру типа шпинели.

В кристаллической решетке типа шпинели атомы кислорода находятся в кубической плотной упаковке (рис. 2). Кристаллографическая элементарная ячейка шпинели содержит 32 атома кислорода, и в этой ячейке имеются эквивалентные положения для 8 атомов металла, тетраэдрически окруженных четырьмя атомами кислорода, и для 16 атомов металла, октаэдрически окруженных шестью атомами кислорода. В элементарной ячейке должны поместиться 8 атомов А и 16 атомов В (ячейка содержит восемь «молекул» AB_2O_4), поэтому для атомов А наиболее вероятно положение с тетраэдрической координацией, а для

атомов В — положение с октаэдрической координацией. Шпинели MAI_2O_4 , где М означает Fe, Co, Ni, Zn, имеют именно такую структуру, которую называют структурой нормального типа (рис. 2). Однако в некоторых других шпинелях атомы А и В расположены иным образом, а именно: 8 тетраэдрических положений в них заняты не восемью атомами А, а половиной атомов В; другая половина атомов В и атомы А расположены в статистическом беспорядке в 16 октаэдрических положениях. Эти шпинели, которые относятся к «неупорядоченному» типу, лучше записывать в виде $\text{B} \cdot (\text{AB}) \text{O}_4$.

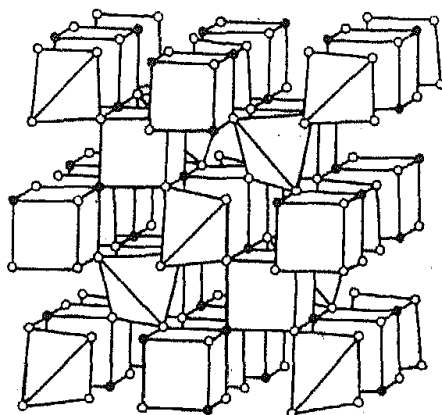


Рис. 2. Структура шпинели:
● — M^{3+} , ○ — O^{2-} ; M^{2+} — в центрах тетраэдров

Не во всех случаях, однако, атомы металла занимают междоузлия кислородной кубической структуры вполне упорядоченно. В литературе имеются указания [6] на три возможных варианта структуры шпинелей: в междоузлия внедряются а) атомы одного элемента с разной валентностью, например, Fe^{2+} и Fe^{3+} , б) атомы разных элементов с разной валентностью, например, Mg^{2+} и Al^{3+} , в) атомы одного элемента с постоянной валентностью, преимущественно равной трем, например, Al^{3+} . Таким образом кристаллическая структура шпинелей достаточно сложна, много сложнее структуры перовскита и рутила. Ввиду этого определение внутреннего поля, проведенное в работе одного из авторов [1] для кристаллических решеток типа перовскита и рутила с целью объяснить высокую диэлектрическую проницаемость, вряд ли возможно и во всяком случае должно встретить большие трудности.

Существенно, однако, что качественные соображения о причине повышенной диэлектрической проницаемости титанатов, не обладающих структурой перовскита или рутила, а относящихся, как показано в настоящей работе, к типу шпинелей, напрашиваются сами собой. Действительно, легко подметить некоторые общие черты в структуре шпинели и в структуре перовскита. Обе структуры в первом приближении можно рассматривать как кубические плотные упаковки ионов кислорода, поскольку размер элементарной ячейки определяется размерами иона кислорода; в промежутках между анионами размещаются малые по размерам катионы. В шпинели расположение ионов кислорода действительно отвечает кубической плотной упаковке. В перовските упаковка несколько менее плотна, так как каждый ион кислорода окружен только восемью соседними ионами кислорода. Однако в обоих случаях с известной степенью приближения анионную решетку можно считать доминирующей частью структуры, а катионы — размещенными в междоузлиях в таком количестве и с таким зарядом, чтобы обес-

печивалась электронейтральность решетки. При этом легко понять, что возможны очень многие различные комбинации катионов, одни из которых будут давать решетку, приближающуюся к типу перовскита, а другие — решетку шпинелей разных вариантов структуры. Из изложенного следует, что электронная поляризация шпинелей должна быть высокой, так как она определяется в первую очередь большой электронной поляризуемостью ионов кислорода и их числом в единице объема. Вследствие более плотной упаковки ионов кислорода в шпинелях электронная поляризация их может быть даже выше, чем электронная поляризация перовскитов. В связи с этим шпинели должны обладать повышенным показателем преломления.

В работе одного из авторов [1] показано, что при большой электронной поляризации и благоприятствующем внутреннем поле даже небольшое ионное смещение может привести к высокому значению диэлектрической проницаемости. То обстоятельство, что диэлектрическая проницаемость титанатов магния, титанатов цинка и изоморфных титанатовых кристаллов, содержащих ионы магния и ионы цинка, имеет повышенное значение (15—25), обусловлено, во-первых, большой электронной поляризацией. Однако положительное или близкое к нулю значение температурного коэффициента диэлектрической проницаемости этих диэлектриков (рис. 1, табл. 1) показывает, что ионное смещение, вызываемое электрическим полем в этих кристаллах, не должно быть малым. При малом ионном смещении и благоприятствующем внутреннем поле диэлектрическая проницаемость при электро- и радиочастотах значительно превышала бы квадрат показателя преломления видимого света, но температурный коэффициент ее вследствие высокой электронной поляризации оставался бы отрицательным и сравнительно большим по абсолютному значению, как в перовскитах и рутиле. Диэлектрическая проницаемость титано-магниевых, титано-цинковых и титано-магниево-цинковых шпинелей имеет повышенное значение и малый температурный коэффициент, поэтому следует думать, что на большую электронную поляризацию здесь накладывается достаточно большая поляризация ионного смещения, возможно, даже превышающая ионную поляризацию в перовскитах и рутиле, но не создающая столь сильного благоприятствующего внутреннего поля. Если в ионных кристаллах типа NaCl ионная поляризация преобладает над электронной и $\frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dT}$ положителен, то в исследуемых диэлектриках знак $\frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dT}$ может изменяться при изменении деталей структуры и состава. Так, из рис. 1 видно, что увеличение содержания цинка за счет содержания магния делает $\frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dT}$ более положительным в области концентрации до 75% ZnO.TiO₂. Это указывает на некоторое увеличение ионной поляризации, которое, однако, недостаточно еще для увеличения численного значения ϵ . Возможно, что неизменность ϵ диэлектриков исследуемой системы при вышеуказанном изменении состава обусловлена и тем, что при введении в решетку ионов цинка, взамен ионов магния, электронная поляризация несколько уменьшается, так как отношение α_e/r^3 для Zn²⁺ несколько меньше, чем для Mg²⁺ (см. выше), а ионная — несколько возрастает. Эти изменения компенсируются, и ϵ остается постоянной, а $\frac{1}{\epsilon} \frac{d\epsilon}{dT}$ делается более положительным, так как он определяется не суммарной поляризацией, а соотношением ионной и электронной частей поляризации.

Из изложенного следует, что повышенное значение диэлектрической проницаемости диэлектрических кристаллов типа шпинели обусловлено не только большой электронной поляризацией (за счет ионов кислорода),

но и накладывающейся на нее значительной поляризацией ионного смещения. При этом эффект благоприятствующего внутреннего поля, в отличие от перовскитов, главной роли не играет. Последнее согласуется с тем фактом, что среди шпинелей до сих пор не обнаружены сегнетоэлектрики, а также обычные диэлектрики с весьма высокой диэлектрической проницаемостью. В связи с более плотной, чем у перовскитов, упаковкой структуры шпинели в диэлектрических шпинелях трудно ожидать возникновения релаксации слабо связанных ионов, приводящей к сверхвысоким значениям диэлектрической проницаемости.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
19 января 1954 г.

Литература

- [1] Г. И. Сканави. Диэлектрическая поляризация и потери в стеклах и керамических материалах с высокой диэлектрической проницаемостью, Госэнергоиздат, М.—Л., 1952.—[2] Б. М. Вул и И. М. Гольдман. ДАН СССР, **46**, 154, 1945.—[3] Б. М. Вул, И. М. Гольдман и Р. Я. Разбаш. ЖЭТФ, **20**, 5, 1950.—[4] Л. М. Блюмен. Изв. АН Туркм. ССР, **5**, 70, 1953; **6**, 49, 1953.—[5] S. S. Cole and W. K. Nelson. Journ. Phys. Chem., **42**, 245, 1938.—[6] Б. Ф. Ормонт. Структуры неорганических веществ, ГИТТЛ, М.—Л., 1950.
-

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ ДИПОЛЬНЫХ ОРГАНИЧЕСКИХ КРИСТАЛЛОВ

Г. И. Сканави и А. Н. Губкин

Исследованы зависимости ϵ и $\lg \delta$ от частоты при температурах 19 и 45°С дипольных органических кристаллов — гидрогенизированных касторовых масел (олеоваксов) различного состава. На основе экспериментальных данных вычислены параметры, характеризующие релаксационную поляризацию. Определена функция распределения времен релаксации. Проведено обсуждение результатов с точки зрения теории абсолютных скоростей реакций.

1. Введение

Во многих твердых кристаллических диэлектриках наблюдается релаксационная поляризация, обусловленная наличием дипольных групп или слабо связанных ионов. Особенно ярко она проявляется, как показано в настоящей работе, в специальном образом гидрогенизированных касторовых маслах (олеоваксах), представляющих собой, в зависимости от режима гидрогенизации, твердые, полупластичные или пластичные вещества, содержащие кристаллическую и аморфную фазы.

Повышенная диэлектрическая проницаемость гидрогенизированных касторовых масел [1] связана с релаксационной ориентационной поляризацией, которая наблюдается в основном в кристаллической фазе и обусловлена, повидимому, вращением гидроксильных групп, входящих в состав гидрогенизированного масла. Для доказательства ориентационной природы поляризации олеооаксов в работе [1] исследовалась температурная зависимость ϵ и $\lg \delta$ трех составов различным образом гидрогенизированных касторовых масел.

С целью более глубокого изучения диэлектрических свойств олеооаксов нами была исследована частотная зависимость ϵ и $\lg \delta$ четырех продуктов из различным образом гидрогенизированного касторового масла при двух температурах в широком диапазоне частот. Принятые при измерениях меры предосторожности позволили получить хорошую воспроизводимость данных. На основании этих данных оказалось возможным подсчитать некоторые величины, характеризующие релаксационную поляризацию олеооаксов.

2. Методика эксперимента. Основные результаты

Для исследования были выбраны олеооаксы четырех различных составов, любезно предоставленные Н. А. Петровым и С. А. Дерябиным. Из них олеооакс, который мы обозначим 1, представляет собой твердый продукт, олеооаксы же, обозначаемые 2, 3 и 4, — полупластичные и пластичные продукты; по мере увеличения номера увеличивается пластичность состава.

Для исследования полупластичных и пластичных олеооаксов применялись обычные плоские электроды (рис. 1), помещаемые в стеклянный сосуд. Олеооаксы заливались в расплавленном виде в сосуд с такими электродами, причем при застывании они ввиду своей пластичности не давали трещин. Диэлектрическая проницаемость опре-

делялась как отношение емкости конденсатора, образованного электродами, заполненного веществом, к емкости воздушного конденсатора. Небольшая воздушная емкость электродов требовала точного учета емкости, образуемой прокладкой из полистирола и проводами. Для определения этой емкости ΔC были проведены измерения ряда стандартных жидкостей (бензол, ксилол, толуол, гексан, бензин), что позволило найти ΔC из формулы:

$$\varepsilon = \frac{C' - \Delta C}{C'' - \Delta C}, \quad (1)$$

где C' — емкость конденсатора со стандартной жидкостью, C'' — емкость конденсатора с воздухом вместо жидкости, ε — диэлектрическая проницаемость стандартной жидкости.

Олеовакс состава 1 представляет собой твердый хрупкий продукт белого цвета. Свойства этого продукта определить описанным выше способом не представлялось возможным, так как при застывании после расплавления он образует большое число трещин и пор, а также воздушные прослойки у электродов. Поэтому исследованию подвергались диски из твердого продукта 1 различного диаметра и толщины, которые выливались из расплавленного олеоакса, причем электроды на такие диски наносились различными способами.

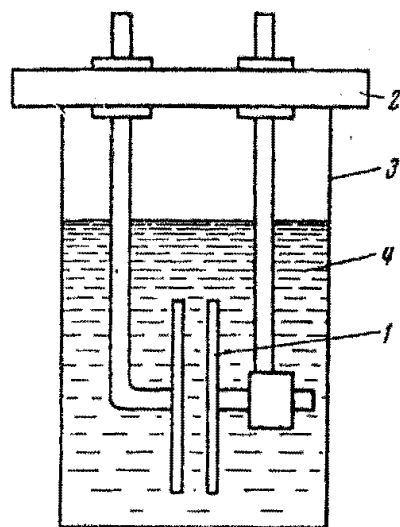


Рис. 1. Электроды для изучения олеоаксов состава 2, 3, и 4. 1 — латушые диски; 2 — пластина из полистирола; 3 — стеклянный сосуд; 4 — олеовакс

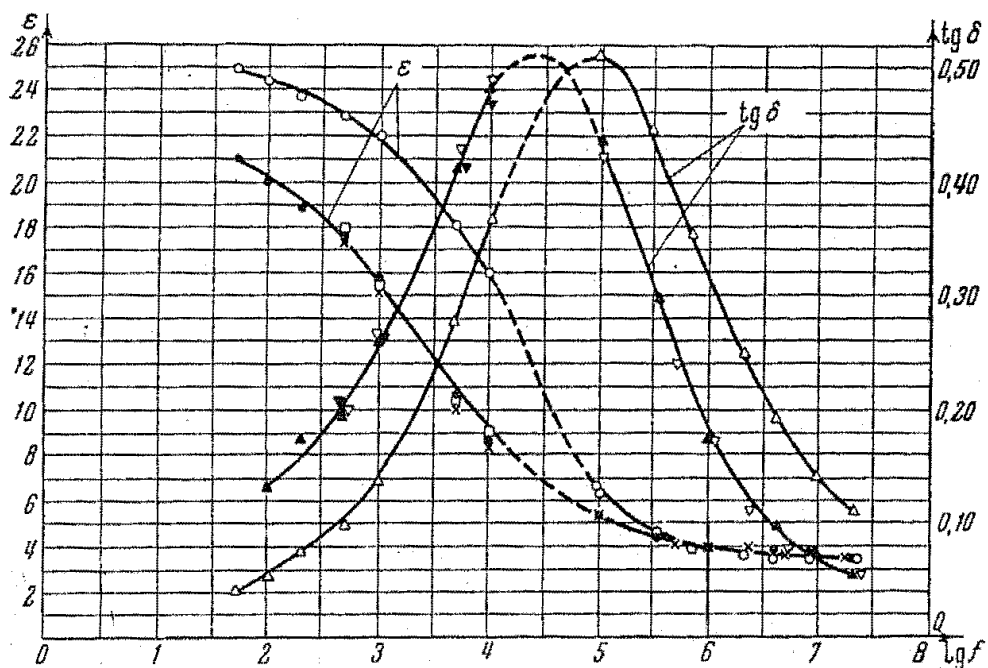


Рис. 2. Частотные зависимости ε и $\operatorname{tg} \delta$ твердого олеоакса (продукт 1). Электроды нанесены вакуумным распылением серебра: ● и ▲ — при $t = 19^\circ \text{C}$, ○ и △ — при $t = 45^\circ \text{C}$; электроды нанесены притиранием фольги на вазелиновом масле: × и ∇ — при $t = 19^\circ \text{C}$; электроды нанесены при помощи коллоидно-графитового препарата: □ и ▼ — при $t = 19^\circ \text{C}$

Диэлектрическая проницаемость в этом случае вычислялась при помощи формулы плоского конденсатора. Измерение емкости и $\operatorname{tg} \delta$

производилось в диапазоне частот от 50 гц до 20 кгц на звуковом мосте и в диапазоне от 100 кгц до 20 мгц на Q -метре. Погрешность измерений ϵ и $\operatorname{tg} \delta$ колебалась в зависимости от метода измерения,

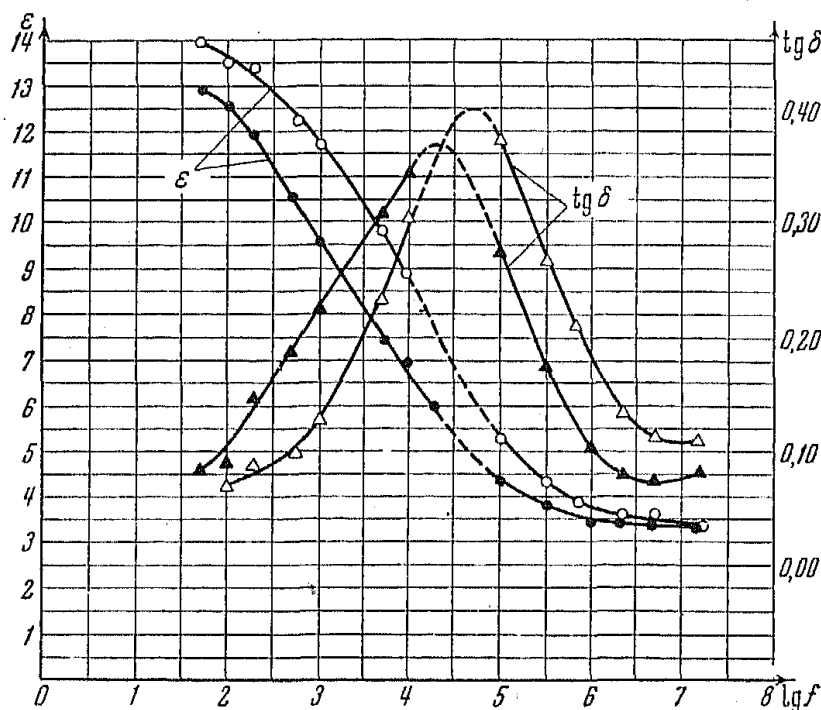


Рис. 3. Частотные зависимости ϵ и $\operatorname{tg} \delta$ полупластичного олеовакса (продукт 2). ● и ▲ — при $t = 19^\circ\text{C}$; ○ и △ — при $t = 45^\circ\text{C}$

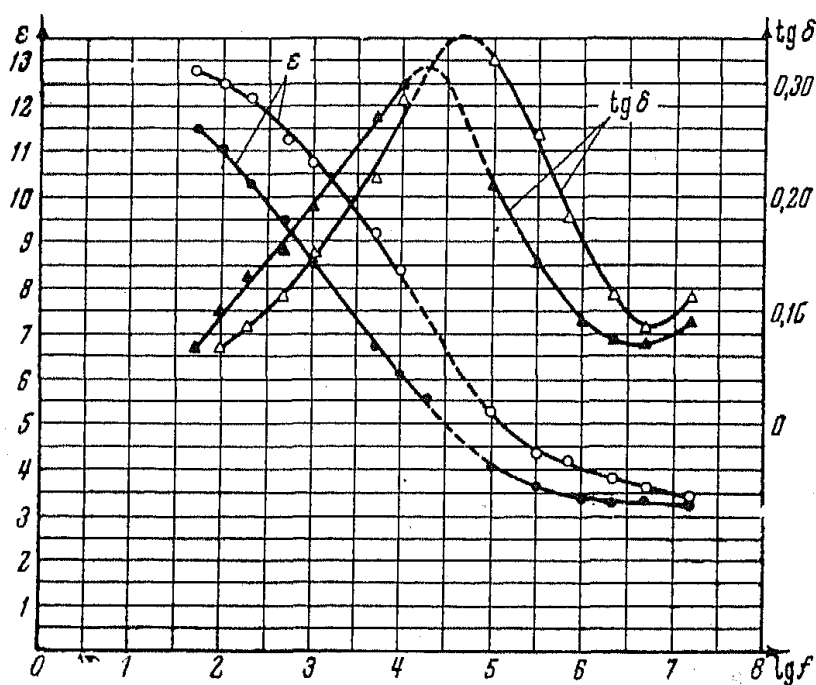


Рис. 4. Частотные зависимости ϵ и $\operatorname{tg} \delta$ полупластичного олеовакса (продукт 3). ● и ▲ — при $t = 19^\circ\text{C}$; ○ и △ — при $t = 45^\circ\text{C}$

частоты и величины диэлектрической проницаемости. В среднем она составляла 3—7% для ϵ и 8—12% для $\operatorname{tg} \delta$.

Результаты измерений частотной зависимости ϵ и $\operatorname{tg} \delta$ олеоваксов при температурах 19 и 45°C представлены на рис. 2, 3, 4 и 5.

Из рассмотрения результатов измерений следует, что поляризация олеоваксов имеет релаксационную природу. Интенсивность ориентационной поляризации, а следовательно, величина диэлектрической

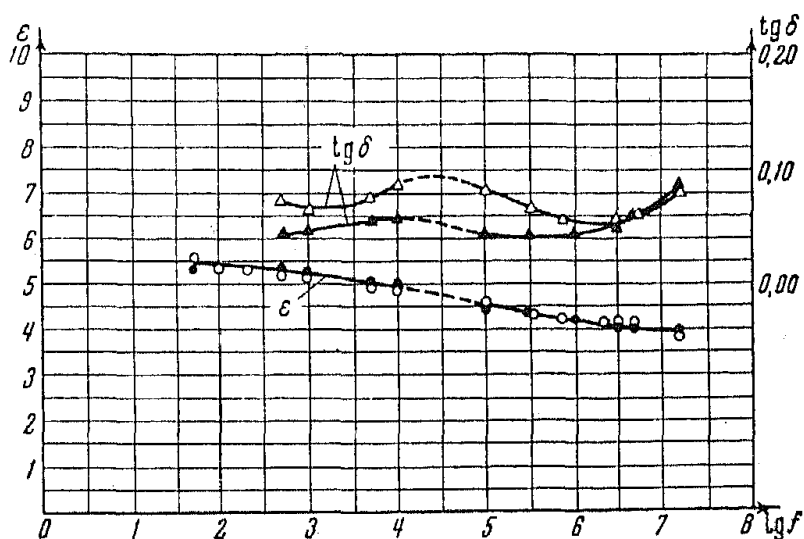


Рис. 5. Частотные зависимости ϵ и $\operatorname{tg} \delta$ пластичного олеовакса (продукт 4). ● и ▲ — при $t = 19^\circ \text{C}$; ○ и △ — при $t = 45^\circ \text{C}$

проницаемости и $\operatorname{tg} \delta$ и их температурно-частотная зависимость обусловлены степенью гидрогенизованности касторового масла, которая связана с появлением кристаллической фазы и дипольных групп, обладающих достаточной свободой вращения.

3. Определение времени релаксации, энергии активации и частоты собственных колебаний дипольных групп

Из общей теории релаксационных потерь (см. [2]) следует, что частота, соответствующая температурно-частотному максимуму $\operatorname{tg} \delta$, равна

$$\omega_m = \frac{1}{\theta} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\epsilon_\infty}}, \quad (2)$$

где θ — постоянная времени, ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость при постоянном напряжении ($\omega = 0$), ϵ_∞ — диэлектрическая проницаемость при высоких частотах ($\omega \rightarrow \infty$) в том случае, когда все полярные группы характеризуются одним временем релаксации.

Из графиков, приведенных выше, можно найти ω_m , ϵ_0 и ϵ_∞ и вычислить время релаксации дипольных групп

$$\tau = e^{U/kT/2\gamma}, \quad (3)$$

где U — энергия активации, T — абсолютная температура, k — постоянная Больцмана, γ — частота собственных колебаний диполей.

Если принять, что внутреннее поле равно лоренцову полю, то связь между постоянной времени и временем релаксации может быть просто выражена через ϵ_0 и ϵ_∞ :

$$\theta = \tau/\gamma, \quad (4)$$

где

$$\gamma = (\epsilon_\infty + 2) / (\epsilon_0 + 2).$$

Это выражение может быть применено в настоящем случае только в грубом приближении, так как известно, что в дипольных жидкостях и дипольных твердых телах внутреннее поле не равно полю Лоренца.

Для случая, когда внутреннее поле равно полю Лоренца,

$$\tau = \frac{1}{2\pi f_m} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_\infty} \frac{\varepsilon_\infty + 2}{\varepsilon_0 + 2}}. \quad (5)$$

Логарифмируя формулу для τ при двух различных температурах, получим выражение для вычисления энергии активации в общем виде:

$$U = k \ln \left[\frac{\omega_{mT_2}}{\omega_{mT_1}} \sqrt{\frac{\varepsilon_{0T_1}}{\varepsilon_{0T_2}} \frac{\gamma_{T_1}}{\gamma_{T_2}}} \right] \frac{1}{(1/T_1) - (1/T_2)}. \quad (6)$$

Здесь $\omega_m = 2\pi f_m$, $\gamma_{T_1} = (\varepsilon_\infty + 2)/(\varepsilon_{0T_1} + 2)$, $\gamma_{T_2} = (\varepsilon_\infty + 2)/(\varepsilon_{0T_2} + 2)$. Зная U , можно определить и γ .

Такие вычисления были проделаны для олеоваксов четырех составов. Результаты вычислений представлены в табл. 1.

Таблица 1

Гидрогенизированные каусторовые масла (олеоваксы)	Частота $f = \omega/2\pi$, соответствующая максимуму $\lg \delta$ в герцах		Время релаксации τ в секундах		Энергия активации U в эВ	Частота собственных колебаний в сек. ⁻¹
	19°C	45°C	19°C	45°C		
Продукт 1	25100	91200	$3,7 \cdot 10^{-6}$	$0,9 \cdot 10^{-6}$	0,41	$2,0 \cdot 10^{12}$
Продукт 2	19950	50120	$5,5 \cdot 10^{-6}$	$2,2 \cdot 10^{-6}$	0,29	$1,0 \cdot 10^{10}$
Продукт 3	19950	50120	$5,8 \cdot 10^{-6}$	$2,2 \cdot 10^{-6}$	0,29	$1,0 \cdot 10^{10}$
Продукт 4	12590	22390	$1,2 \cdot 10^{-5}$	$0,7 \cdot 10^{-5}$	0,18	$4,6 \cdot 10^7$

Из табл. 1 следует, что время релаксации дипольных групп в олеоваксах трех первых составов достигает величины порядка 10^{-6} сек., состава 4 — порядка 10^{-5} сек. и увеличивается по мере роста номера олеовакса (т. е. увеличения его пластичности). Энергия активации при этом уменьшается от 0,41 до 0,18 эВ.

Частота собственных колебаний дипольных групп уменьшается с ростом пластичности состава от величины порядка 10^{12} сек.⁻¹ до величин порядка 10^7 сек.⁻¹.

Таким образом наибольшее содержание кристаллической фазы, обуславливающей релаксационную поляризацию, связано с наивысшей энергией активации. По мере увеличения количества аморфной фазы энергия активации уменьшается, что указывает, повидимому, на ослабление внутренних связей, вызываемое присутствием аморфной фазы.

4. Учет различия времен релаксации

Все предыдущие вычисления были проделаны в предположении, что дипольные группы обладают одним временем релаксации. Однако в диэлектрике сложной структуры, а также в диэлектрике, содержащем различные примеси, дипольные группы закреплены различно, вследствие чего должен иметь место целый набор времен релаксации, группирующихся вокруг наивероятнейшего, или даже несколько наборов с разными значениями наивероятнейшего времени релаксации.

Если найти максимальное значение $\operatorname{tg} \delta$ из эксперимента и сравнить его с теоретическим, полученным из общей теории релаксационных потерь:

$$\operatorname{tg} \delta_{\max} = (\varepsilon_0 - \varepsilon_{\infty}) / 2\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_{\infty}}, \quad (7)$$

то, как показывает табл. 2, теоретическое значение $\operatorname{tg} \delta_{\max}$ более чем в два раза превышает экспериментальное. Надо думать, что такое расхождение связано именно с тем, что не учитывается различие времен релаксации. Действительно, обработка экспериментальных данных по методу [3], который дает возможность учесть набор времен релаксации, подтверждает это.

Таблица 2

Гидрогенизи- рованные кас- торовые масла (олеоваксы)	$\operatorname{tg} \delta_{\max}$					
	19°C			45°C		
	Эксперим.	$\alpha=0$ формула (7)	$\alpha \neq 0$ формула (16)	Эксперим.	$\alpha=0$ формула (7)	$\alpha \neq 0$ формула (16)
Продукт 1	0,51	1,07	0,46	0,51	1,18	0,49
Продукт 2	0,37	0,77	0,34	0,40	0,81	0,37
Продукт 3	0,32	0,72	0,30	0,34	0,76	0,33
Продукт 4	0,056	0,186	0,065	0,090	0,186	0,082

Как известно, уравнения Дебая, которые получены в предположении, что имеется одно лишь время релаксации у всех частиц, могут быть записаны в виде:

$$\varepsilon^* = \varepsilon_{\infty} + (\varepsilon_0 - \varepsilon_{\infty}) / (1 + i\omega\theta); \quad (8)$$

$$\varepsilon' = \varepsilon_{\infty} + (\varepsilon_0 - \varepsilon_{\infty}) / (1 + \omega^2\theta^2); \quad (9)$$

$$\varepsilon'' = (\varepsilon_0 - \varepsilon_{\infty}) \omega\theta / (1 + \omega^2\theta^2). \quad (10)$$

Здесь ε^* — комплексная диэлектрическая проницаемость; θ — постоянная времени, определяемая уравнением (4); ε' — действительная и ε'' — мнимая части диэлектрической проницаемости. Все остальные величины определены выше.

Если строить график зависимости ε'' от ε' при постоянной частоте, то в плоскости с координатами ε' , ε'' получается дуга полуокружности, центр которой лежит на оси ε' . Уравнение такой полуокружности имеет вид:

$$\left[\varepsilon' - \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_{\infty}}{2} \right]^2 + \varepsilon''^2 = \left(\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_{\infty}}{2} \right)^2. \quad (11)$$

В случае диэлектриков, имеющих набор времен релаксации, группирующихся относительно наивероятнейшего, получается дуга окружности, центр которой лежит ниже оси ε' (рис. 6—9).

Уравнение такой дуги может быть записано в следующем виде:

$$\left[\varepsilon' - \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_{\infty}}{2} \right]^2 + \left[\varepsilon'' + \frac{(\varepsilon_0 - \varepsilon_{\infty})}{2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha \pi \right]^2 = \left[\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_{\infty}}{2 \cos^{1/2} \alpha \pi} \right]^2. \quad (12)$$

Здесь $\alpha\pi/2$ — угол между радиусом этой дуги и осью ε' .

Вместо уравнений Дебая (8), (9), (10) теперь можно получить следующие выражения:

$$\varepsilon^* = \varepsilon_\infty + \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty}{1 + (i\omega\theta)^{1-\alpha}}; \quad (13)$$

$$\varepsilon' = \varepsilon_\infty + \frac{(\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty)[1 + (\omega\theta)^{1-\alpha} \sin^{1/2} \alpha\pi]}{1 + 2(\omega\theta)^{1-\alpha} \sin^{1/2} \alpha\pi + (\omega\theta)^{2(1-\alpha)}}; \quad (14)$$

$$\varepsilon'' = \frac{(\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty)(\omega\theta)^{1-\alpha} \cos^{1/2} \alpha\pi}{1 + 2(\omega\theta)^{1-\alpha} \sin^{1/2} \alpha\pi + (\omega\theta)^{2(1-\alpha)}}. \quad (15)$$

Параметр α , входящий в новые выражения (12), (13), (14) и (15), как будет показано ниже [см. (21)], имеет следующий физический смысл: он характеризует плотность группировки времен релаксации относительно своего наивероятнейшего значения. Максимальная величина $\operatorname{tg} \delta$ при учете набора времен релаксации находится из уравнений (14) и (15)

$$\operatorname{tg} \delta_{\max} = \frac{(\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty) \cos^{1/2} \alpha\pi \sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon_\infty}}{2\varepsilon_0 + \sqrt{\varepsilon_0/\varepsilon_\infty} (\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty) \sin^{1/2} \alpha\pi} \quad (16)$$

в том случае, если потерями проводимости можно пренебречь. На рис. 6, 7, 8 и 9 приведены круговые диаграммы для четырех соста-

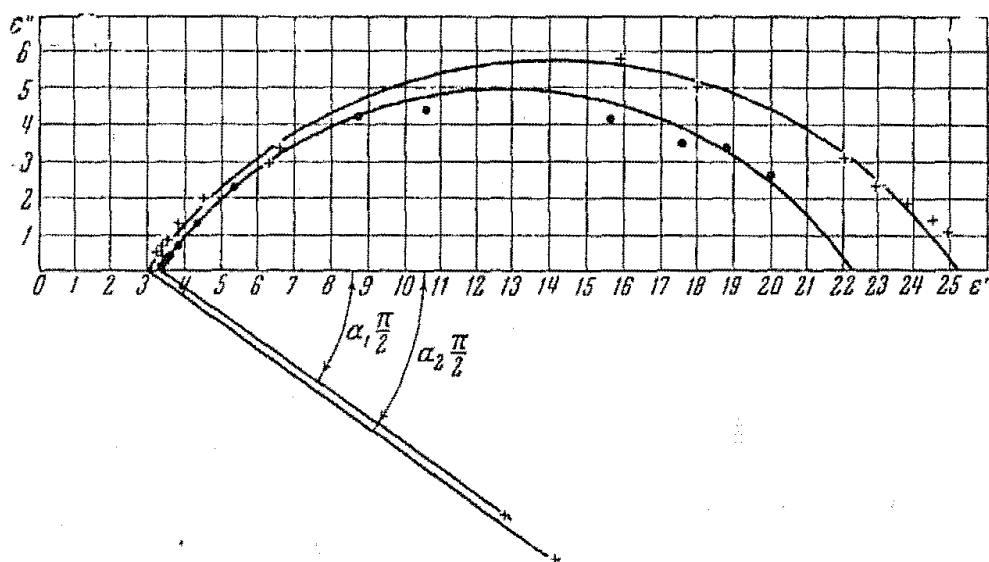


Рис. 6. Круговые диаграммы для твердого олеовакса (продукт 1). ● — при $t = 19^\circ \text{C}$; $\alpha_1 \frac{\pi}{2} = \alpha_2 \frac{\pi}{2} = 37^\circ$; $\alpha_1 = \alpha_2 \approx 0,4$; + — при $t = 45^\circ \text{C}$

вов олеоваксов при двух температурах, построенные по этому методу. Как видно из приведенных рисунков, для олеоваксов состава 1, 2 и 3 экспериментально найденные значения ε' и ε'' действительно образуют дугу окружности, центр которой лежит ниже оси ε' . Для олеовакса же состава 4 при низких значениях ε' значения ε'' не совпадают с дугой окружности, так что дуга окружности, характеризующая один набор времен релаксации, в этом случае может быть построена лишь

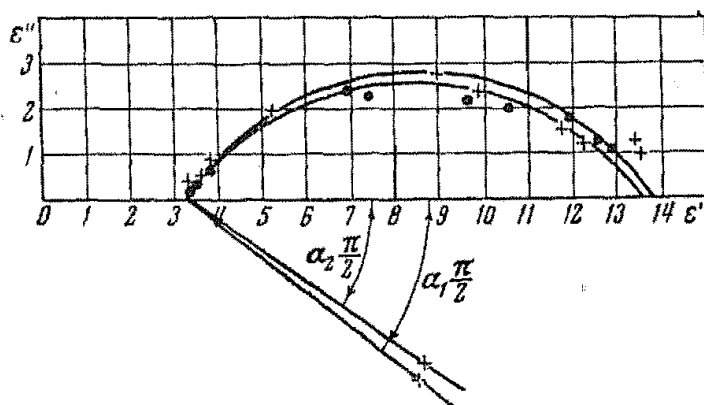


Рис. 7. Круговые диаграммы для полупластичного олеовакса (продукт 2)

● — при $t = 19^\circ\text{C}$, $\alpha_1 \frac{\pi}{2} = 39^\circ$; + — при $t = 45^\circ\text{C}$, $\alpha_2 \frac{\pi}{2} = 37^\circ$; $\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx 0,4$

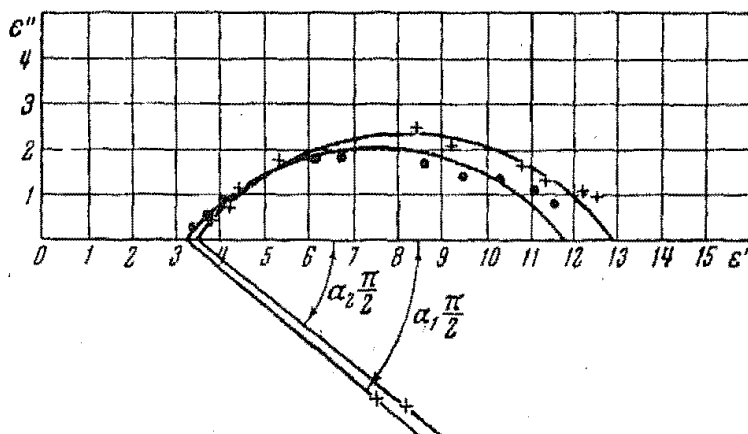


Рис. 8. Круговые диаграммы для полупластичного олеовакса (продукт 3).

● — при $t = 19^\circ\text{C}$, $\alpha_1 \frac{\pi}{2} = 40^\circ$; + — при $t = 45^\circ\text{C}$, $\alpha_2 \frac{\pi}{2} = 39^\circ$; $\alpha_1 \approx \alpha_2 \approx 0,4$

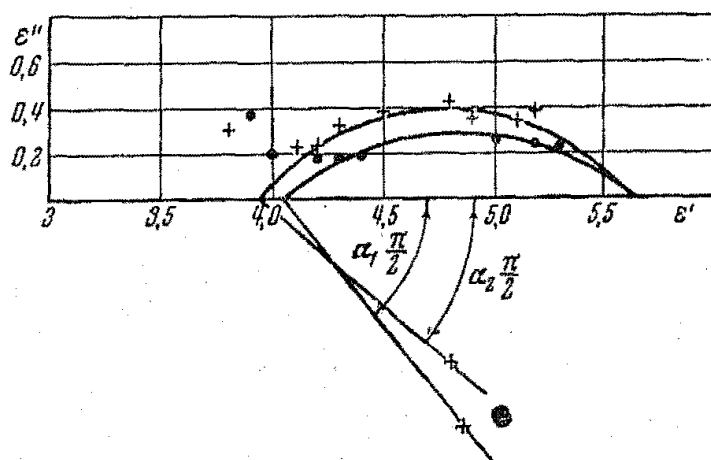


Рис. 9. Круговые диаграммы для пластичного олеовакса (продукт 4).

● — при $t = 19^\circ\text{C}$, $\alpha_1 \frac{\pi}{2} = 51^\circ$, $\alpha_1 \approx 0,6$; + — при $t = 45^\circ\text{C}$, $\alpha_2 \frac{\pi}{2} = 42^\circ$, $\alpha_2 \approx 0,5$.

условно. Это связано, повидимому, с наличием не одного, а нескольких наборов времен релаксации.

Из данных круговых диаграмм можно определить параметр α для двух температур. Параметр α для составов 1, 2 и 3 равен приблизительно 0,4 для обеих температур (19 и 45°С), для состава же 4 параметр α равен 0,6 при 19°С и 0,5 при 45°С.

Знание параметра α дает возможность применять формулы (13), (14), (15) и (16). Вычисляя теперь значения $\operatorname{tg} \delta_{\max}$ по формуле (16), получим хорошее совпадение с опытом для олеоаксов первых трех составов и несколько худшее для олеоакса состава 4 (табл. 2).

Как видно из формул (14) и (15), характер частотной зависимости ϵ' и ϵ'' несколько изменяется при учете набора времен релаксации.

Условие температурно-частотного максимума $\operatorname{tg} \delta$ в случае учета набора времен релаксации ($\alpha \neq 0$) имеет вид [см. формулу (2)]:

$$(\omega\tau)_m = \gamma \sqrt{\epsilon_0/\epsilon_\infty}^{1/(1-\alpha)}. \quad (17)$$

Здесь τ — наивероятнейшее время релаксации.

Отсюда видно, что вычисленное по частоте, соответствующей $\operatorname{tg} \delta_{\max}$, время релаксации в случае $\alpha \neq 0$ увеличивается по сравнению со случаем $\alpha = 0$.

Формула для вычисления энергии активации при учете набора времен релаксации примет следующий вид:

$$U = k \ln \left\{ \frac{\omega_{mT_2}}{\omega_{mT_1}} \left(\sqrt{\epsilon_{0T_1}/\epsilon_{0T_2}} \right)^{1/(1-\alpha)} \frac{\gamma_{T_1}}{\gamma_{T_2}} \right\} \frac{1}{(1/T_1) - (1/T_2)}. \quad (18)$$

Сравнивая эту формулу с соответствующей формулой (6) для одного времени релаксации ($\alpha = 0$), можно видеть, что значения энергии активации не изменяются при учете набора времен релаксации, если член $\sqrt{\epsilon_{0T_1}/\epsilon_{0T_2}} \approx 1$, что имеет место у олеоаксов.

Знание параметра α позволяет найти функцию распределения времен релаксации относительно наивероятнейшего.

5. Нахождение функции распределения времен релаксации

В работе [4] был дан метод, при помощи которого можно найти функцию распределения времен релаксации, если известна зависимость $\epsilon'' = \varphi(\ln \omega)$, достаточно хорошо описывающая экспериментальные результаты.

Для зависимости типа

$$\epsilon'' = \epsilon_m'' \operatorname{sech} \beta x \quad (19)$$

(где ϵ_m'' — максимальная величина ϵ'' , достигаемая при частоте ω_m , $x = \ln \omega/\omega_m$, β — параметр, характеризующий ширину распределения) получается следующая функция распределения времен релаксации относительно наивероятнейшего:

$$F(s) = \frac{\beta}{\pi} \frac{\cos^{1/2} \beta \pi \operatorname{ch} \beta s}{\cos^{21/2} \beta \pi + \operatorname{sh}^2 \beta s}. \quad (20)$$

Здесь $s = \ln(\tau/\tau_m)$, τ_m — наивероятнейшее время релаксации. При $\beta = 1$ уравнение (19) превращается в уравнение Дебая, а $F(s) = 0$.

В работе [3] был использован метод [4] для зависимости, выражаемой уравнением (15), и получена следующая функция распределения времен релаксации:

$$F(s) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin \alpha\pi}{\operatorname{ch} (1-\alpha)s - \cos \alpha\pi}. \quad (21)$$

При $\alpha = 0$ уравнение (15) переходит в уравнение Дебая, а $F(s)$, выражаемое формулой (21), обращается в нуль.

Из (21) следует, что параметр α действительно характеризует ширину распределения времен релаксации.

В работе [5] показано, что постоянная β , входящая в (19), связана с постоянной α , входящей в (13), (14) и (15), следующим соотношением:

$$\beta \sqrt{2} = (1 - \alpha) / \cos \left[\frac{\pi}{4} (1 - \alpha) \right].$$

Определяя β из этого условия и используя уравнение (20), можно найти функции распределения времен релаксации для олеоаксов четырех составов при двух различных температурах (рис. 10).

Как видно из рис. 10, для олеоаксов трех первых составов времена релаксации тесно группируются вокруг наивероятнейшего, при отклонении от наивероятнейшего функция распределения резко убывает. Для всех этих составов функция распределения одинакова для обеих температур.

Для олеоакса состава 4 функция распределения более расплывчата, вероятность наличия в этом продукте частиц с временем релаксации, отличным от наивероятнейшего, повышается, причем при температуре 45°C функция распределения более стянута к наивероятнейшему времени релаксации, чем при температуре 19°C. Это различие в поведении функции распределения при двух температурах у продукта 4 объясняется, повидимому, тем обстоятельством, что дипольные группы, имеющие различные наборы потенциальных барьеров, наличие которых у продукта 4 предположено выше, проявляют себя неодинаково при разных температурах.

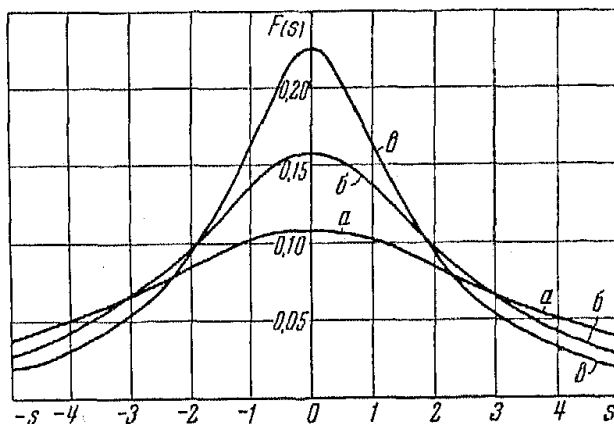


Рис. 10. Функции распределения времен релаксации олеоаксов. $a - \beta = 0,3$; $b - \beta = 0,4$; $v - \beta = 0,5$

6. Применение теории абсолютных скоростей реакций к исследованию процесса диэлектрической релаксации

Согласно теории диэлектрической релаксации, которая рассматривает ориентацию диполя как индивидуальный акт, число поворотов диполя, происходящее в течение одной секунды, равно

$$n = \nu e^{-U/RT} = \nu e^{-E/RT}, \quad (22)$$

где $E = NU$, N — число Авогадро.

Если считать, что процесс активации одной полярной молекулы происходит при участии большого числа связанных между собой молекул, то его следует описывать через изменение свободной энергии и энтропии всей совокупности частиц диэлектрика. На это впервые указал Френкель [6].

Применяя теорию абсолютных скоростей реакций к процессу релаксации частиц в диэлектрике, как это сделано в работе [7], можно попытаться определить, насколько сильно связан переход в активированное состояние (и, следовательно, ориентация) отдельных полярных молекул или дипольных групп с увеличением упорядоченности в расположении окружающих молекул. Выражение (22) можно тогда заменить следующим:

$$n = \frac{kT}{h} e^{-\Delta F/RT}, \quad (23)$$

которое верно при низких температурах. Здесь k — постоянная Больцмана, h — постоянная Планка, R — газовая постоянная, ΔF — изменение свободной энергии системы, отнесенное к 1 молю.

Выражение (23) может быть записано в ином виде, так как, согласно известному термодинамическому соотношению,

$$\Delta F = \Delta H - T\Delta S; \quad (24)$$

$$n = \frac{kT}{h} e^{\Delta S/R} e^{-\Delta H/RT}. \quad (25)$$

Здесь ΔS — изменение энтропии, ΔH — изменение теплосодержания системы, отнесенные к 1 молю.

Среднее время, необходимое для одного поворота диполя n^{-1} , может быть отождествлено со временем релаксации диполя τ [см. выражение (3)].

Таким образом

$$\frac{1}{\tau} = \frac{kT}{h} e^{-\Delta F/RT} \quad (26)$$

или

$$\frac{1}{\tau} = \frac{kT}{h} e^{\Delta S/R} e^{-\Delta H/RT}, \quad (27)$$

и, следовательно, $\ln \tau$ есть почти линейная функция от T^{-1} в том случае, если существует один, достаточно концентрированный набор времен релаксации.

Величина ΔF может быть найдена непосредственно из (26). Величина ΔH находится из зависимости $\ln \tau$ от температуры, так как из уравнения (27) следует

$$\frac{d \ln \tau}{d(T^{-1})} = \frac{\Delta H}{R} + T. \quad (28)$$

Величину ΔS можно найти из (24). Так как наши измерения позволяют определить величину τ только для двух температур, то определить значение величины ΔH для этих температур не представляется возможным. Однако если предположить, что величина ΔH постоянна в интервале температур 292—318°K, то ее можно определить для этого интервала из (28). В случае же, если ΔH в этом интервале температур незначительно изменяется, из (28) можно найти приблизительно ее среднее значение.

В табл. 3 приведены значения ΔF , ΔH и ΔS , вычисленные для четырех составов олеоваксов. Из этой таблицы прежде всего следует, что изменения энтропии имеют отрицательный знак для олеоваксов всех составов. Это указывает, повидимому, на то, что переход отдельной дипольной молекулы или дипольной группы в активированное состояние связан с увеличением упорядоченности в расположении окружающих молекул. Небольшая абсолютная величина изменения энтропии у олеовакса

Таблица 3

Гидрогенизированные касторовые масла (олеомаксы)	Температура °K	τ , сек.	ΔF , ккал	ΔS , кал/град	ΔH , ккал
Продукт 1	292	$3,7 \cdot 10^{-6}$	9,8	— 1,2	9,5
	318	$0,9 \cdot 10^{-6}$	9,8	— 1,1	
Продукт 2	292	$5,5 \cdot 10^{-6}$	10,0	— 14,1	5,9
	318	$2,2 \cdot 10^{-6}$	10,4	— 14,1	
Продукт 3	292	$5,8 \cdot 10^{-6}$	10,1	— 13,1	6,3
	318	$2,2 \cdot 10^{-6}$	10,4	— 13,0	
Продукт 4	292	$1,2 \cdot 10^{-5}$	10,5	— 24,9	3,2
	318	$0,7 \cdot 10^{-5}$	11,1	— 24,8	

состава 1 связана, вероятно, с тем, что у этого продукта в процессе ориентации одной молекулы участвует лишь небольшое число молекул, окружающих данную. С увеличением пластичности состава происходит увеличение изменения энтропии по абсолютной величине. Повидимому, это указывает на то, что с ростом пластичности состава в процессе ориентации начинает участвовать большее число молекул, окружающих вращающуюся молекулу.

Отрицательные значения изменения энтропии приводят к тому, что изменение теплосодержания меньше, чем изменение свободной энергии. Изменение теплосодержания уменьшается с ростом пластичности состава. Сравнение дипольной ориентации в органических кристаллах, данные о которой приведены в настоящей работе, с дипольной ориентацией в льде, данные о которой приведены в работе [7], показывает, что величина ΔF у льда, так же как и у олеомаксов — порядка 10, однако изменение энтропии у льда имеет положительный знак.

Изложенное выше обсуждение экспериментальных результатов проведено при том допущении, что поле, действующее на дипольные группы в органическом кристалле, мало отличается от поля Лоренца. Это допущение дает возможность определить ряд величин, характеризующих релаксационную поляризацию. Однако вопрос о более правильном учете внутреннего поля в сложных диэлектриках с релаксационной поляризацией остается открытым. В том случае, когда эта поляризация проявляется достаточно ярко и не завуалирована дополнительными процессами, оценка действующего поля может быть проведена более точно. Решению этой задачи посвящена следующая работа.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
19 января 1954 г.

Литература

- [1] А. Ф. Вальтер, Л. Д. Инген Т. А. Трамбичкая. Журн. техн. физ., 10, 1970, 1940. — [2] Г. И. Скапанви. Физика диэлектриков, ГИТТЛ, 1949. — [3] K. Cole and R. Cole. Journ. Chem. Phys., 9, 341, 1941. — [4] R. Fuoss and J. Kirkwood. Journ. Amer. Chem. Soc., 63, 385, 1941. — [5] C. J. F. Böttcher. Theory of electric polarisation, Elsevier Publishing Company, Amsterdam, 1952. — [6] Я. И. Френкель. Кинетическая теория жидкостей, Изд-во АН СССР, 1948. — [7] С. Глестон, К. Лейднер, Г. Эйринг. Теория абсолютных скоростей реакций, ИИЛ, 1948.

ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

О МОДИФИЦИРОВАННОМ МЕТОДЕ ТАММА

В. П. Силин

Ковариантная формулировка метода Тамма [1], предложенная в работе [2], позволила рассмотреть вопрос о перенормировке расходящихся величин, возникающих при использовании метода Тамма в теории поля. Однако при этом оказалось затруднительным при помощи обычных приемов исключить расходящиеся величины [2-4]. В свете таких затруднений особое внимание приобретает модифицированный метод Тамма, предложенный недавно Дайсоном [5]. В настоящем сообщении мы рассмотрим вопрос о перенормировке расходящихся величин, возникающих в первом приближении модифицированного метода Тамма при рассмотрении задачи двух частиц — нуклона и мезона.

Для случая псевдоскалярной связи гамильтониан в представлении взаимодействия равен

$$H(x) = \frac{i}{2} f (\bar{\psi} \gamma_5 \tau_\alpha \psi - \psi \gamma_5^T \tau_\alpha^T \bar{\psi}) \varphi_\alpha = i f \bar{\psi} \gamma_5 \tau_\alpha \varphi_\alpha \psi. \quad (1)$$

Нам нужно получить уравнение для следующего матричного элемента:

$$a_{\rho, \beta}(x_1, x_2; \sigma) = \Psi_0^*(\sigma) \psi_\rho(x_1) \varphi_\beta(x_2) \Psi(\sigma). \quad (2)$$

Здесь Ψ_0 и Ψ — волновые функции реального вакуума и соответственно реального состояния двух частиц. Легко убедиться, что

$$i \frac{\delta a_{\rho, \beta}(x_1, x_2; \sigma)}{\delta \sigma(x)} = f [S(x_1 - x) \gamma_5 \tau_\alpha]_{\rho\delta} b_{\delta\alpha\beta}(x, x, x_2; \sigma) - f \Delta(x_2 - x) (\gamma_5 \tau_\beta)_{\varepsilon\delta} c_{\rho, \varepsilon, \delta}(x_1, x, x; \sigma), \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} b_{\delta\alpha\beta}(x, x, x_2; \sigma) &= \Psi_0^*(\sigma) \psi_\delta(x) \varphi_\alpha(x) \varphi_\beta(x_2) \Psi(\sigma), \\ c_{\rho\varepsilon\delta}(x_1, x, x; \sigma) &= \Psi_0^*(\sigma) \psi_\rho(x_1) \bar{\psi}_\varepsilon(x) \psi_\delta(x) \Psi(\sigma). \end{aligned} \quad (4)$$

При получении уравнений для b и c в правых частях возникают, кроме амплитуды a , также и другие амплитуды¹.

В первом приближении метода Тамма из этих амплитуд оставляется лишь a , в то время как остальными пренебрегается. Тогда для b и c получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} & \frac{\delta}{\delta \sigma(x')} b_{\delta\alpha\beta}(x, x, x_2; \sigma') = \\ &= f [\Delta(x_2 - x') S^{(+)}(x - x') \gamma_5 \tau_\beta + \Delta^{(+)}(x' - x_2) S(x - x') \gamma_5 \tau_\beta]_{\delta\kappa} a_{\kappa\alpha}(x', x; \sigma') + \\ &+ f \delta_{\alpha\beta} \Delta^{(+)}(x - x_2) [S(x - x') \gamma_5 \tau_\gamma]_{\delta\kappa} a_{\kappa\gamma}(x', x'; \sigma') + \\ &+ f [\Delta(x - x') S^{(+)}(x - x') \gamma_5 \tau_\alpha + \Delta^{(+)}(x' - x) S(x - x') \gamma_5 \tau_\alpha]_{\delta\kappa} a_{\kappa\beta}(x', x_2; \sigma'); \quad (5) \end{aligned}$$

¹ Под амплитудой понимается матричный элемент от N -упорядоченного произведения операторов поля.

$$\begin{aligned} & \frac{\delta}{\delta\sigma(x')} c_{\rho\epsilon\delta}(x_1, x, x'; \sigma') = \\ & = -fS_{\rho\epsilon}^{(+)}(x_1 - x) [S(x - x') \gamma_5 \tau_\gamma]_{\delta\alpha} a_{\alpha\gamma}(x', x'; \sigma') + \\ & + f[S^{(-)}(x - x') \gamma_5 \tau_\gamma S(x' - x) - S(x_1 - x') \gamma_5 \tau_\gamma S^{(-)}(x' - x)]_{\delta\epsilon} a_{\rho\gamma}(x_1, x'; \sigma') + \\ & + f[S(x_1 - x') \gamma_5 \tau_\gamma S^{(-)}(x' - x) - S^{(-)}(x_1 - x') \gamma_5 \tau_\gamma S(x' - x)]_{\rho\epsilon} a_{\delta, \gamma}(x, x'; \delta'). \quad (6) \end{aligned}$$

Интегрируя уравнения (5) и (6) в предположении, что при $t = \pm \infty$, $b = c = 0$ и подставляя соответствующие решения в (3), получаем следующее уравнение для a :

$$\begin{aligned} i \frac{\delta}{\delta\sigma(x)} a_\beta(x_1, x_2; \sigma) &= i \frac{3}{4} f^2 S(x_1 - x) \int dx' \mathfrak{M}(x - x') a_\beta(x', x_2; \sigma') - \\ &- \frac{i}{2} f^2 \Delta(x_2 - x) \int dx' \mathfrak{N}(x' - x) a_\beta(x_1, x'; \sigma') + \\ &+ f^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \epsilon(x - x') \{ [\Delta^{(+)}(x_2 - x) S^{(+)}(x_1 - x) - \Delta^{(-)}(x_2 - x) S^{(-)}(x_1 - x)] \times \\ &\times \gamma_5 S(x - x') \gamma_5 \tau_\beta \tau_\alpha a_\alpha(x', x'; \sigma') + \Delta(x_2 - x) [S^{(-)}(x_1 - x') \gamma_5 S^{(+)}(x' - x) \gamma_5 - \\ &- S^{(+)}(x_1 - x') \gamma_5 S^{(-)}(x' - x) \gamma_5] \tau_\alpha \tau_\beta a_\alpha(x, x'; \sigma') + S(x_1 - x) \times \\ &\times \gamma_5 [\Delta^{(+)}(x_2 - x') S^{(+)}(x - x') - \Delta^{(-)}(x_2 - x') S^{(-)}(x - x')] \gamma_5 \tau_\alpha \tau_\beta a_\alpha(x', x; \sigma') \}, \quad (7) \end{aligned}$$

где $\epsilon(x) = \pm 1/2$, соответственно при $t \approx 0$, а

$$i\mathfrak{M}(x) = -1/2 M(x) + 1/2 \{ \gamma_4 M(-x) \gamma_4 \}^+; \quad \mathfrak{N}(x) = -\text{Im } P(x), \quad (8)$$

причем

$$M(x) = \gamma_5 S_F(x) \gamma_5 \Delta_F(-x), \quad P(x) = \text{Sp} S_F(x) \gamma_5 S_F(-x) \gamma_5. \quad (9)$$

В уравнении (7) расходящиеся величины возникают из-за членов, содержащих $M(x)$ и $P(x)$. Последние, как известно [6], можно представить в виде:

$$\begin{aligned} P(x) &= A_1 \delta(x) + B_1 (\square - \mu^2) \delta(x) + P_c(x), \\ M(x) &= A_2 \delta(x) + B_2 \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m \right) \delta(x) + M_c(x), \end{aligned} \quad (10)$$

где A и B — неопределенные константы, а P_c и M_c уже не содержат расходящихся величин.

Добавив к гамильтониану (1) выражения $\delta\mu^2 \varphi_\alpha \varphi_\alpha$ и $\delta m \bar{\psi} \psi$ [$\delta m = (3i/4) f^2 A_2$ и $\delta\mu^2 = -(i/4) f^2 A_1$], можно при помощи перенормировки массы мезона и нуклона исключить константы A_1 и A_2 .

Для исключения констант B перейдем к импульсному представлению. Тогда уравнение (7) сводится к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} (W - E - \omega) a^{(+, +)} &= \frac{3if^2}{4} B_2 (W - E - \omega) a^{(+, +)} + \\ &+ \frac{if^2}{4} B_1 \frac{(W - E)^2 - \omega^2}{\omega} [a^{(+, +)} + a^{(+, -)}] + f^2 V_c^{(+, +)}, \\ (W - E + \omega) a^{(+, -)} &= \frac{3if^2}{4} B_2 (W - E + \omega) a^{(+, -)} - \\ &- \frac{if^2}{4} B_1 \frac{(W - E)^2 - \omega^2}{\omega} [a^{(+, +)} + a^{(+, -)}] + f^2 V_c^{(+, -)}, \\ (W + E - \omega) a^{(-, +)} &= \frac{3if^2}{4} B_2 (W + E - \omega) a^{(-, +)} + \\ &+ \frac{if^2}{4} B_1 \frac{(W + E)^2 - \omega^2}{\omega} [a^{(-, +)} + a^{(-, -)}] + f^2 V_c^{(-, +)}, \\ (W + E + \omega) a^{(-, -)} &= \frac{3if^2}{4} B_2 (W + E + \omega) a^{(-, -)} - \\ &- \frac{if^2}{4} B_1 \frac{(W + E)^2 - \omega^2}{\omega} [a^{(-, +)} + a^{(-, -)}] + f^2 V_c^{(-, -)}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $a^{(+, +)}, \dots, a^{(-, -)}$ — амплитуды соответственно для положительных и отрицательных частот, $E = V \sqrt{m^2 + p^2}$, $\omega = V \sqrt{\mu^2 + p^2}$, а V_c — выражения, не содержащие неопределенных констант. При помощи простых преобразований система (14) может быть преобразована к виду:

$$\begin{aligned} (W - E - \omega) a^{(+, +)} &= f_{11}^2 V_c^{(+, +)} + \frac{W - E - \omega}{\omega} (f_{11}^2 - f_1^2) (V_c^{(+, +)} + V_c^{(+, -)}), \\ (W - E + \omega) a^{(+, -)} &= f_{11}^2 V_c^{(+, -)} - \frac{W - E + \omega}{\omega} (f_{11}^2 - f_1^2) (V_c^{(+, +)} + V_c^{(+, -)}), \\ (W + E - \omega) a^{(-, +)} &= f_{11}^2 V_c^{(-, +)} + \frac{W + E - \omega}{\omega} (f_{11}^2 - f_1^2) (V_c^{(-, +)} + V_c^{(-, -)}), \\ (W + E + \omega) a^{(-, -)} &= f_{11}^2 V_c^{(-, -)} - \frac{W + E + \omega}{\omega} (f_{11}^2 - f_1^2) (V_c^{(-, +)} + V_c^{(-, -)}), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$f_1^2 = \frac{f^2}{1 - f^2 \frac{3i}{4} B_2}, \quad f_{11}^2 = \frac{f^2}{1 - f^2 \frac{3i}{4} B_2 - f^2 \frac{i}{2} B_1} = \frac{f_1^2}{1 - f_1^2 \frac{i}{2} B_1}. \quad (13)$$

Таким образом неопределенные константы B_1 и B_2 могут быть устранены при помощи перенормировки константы связи. Однако существенной особенностью рассматриваемого примера является то, что после перенормировки появляются две константы f_1 и f_{11} . Отметим, что в задаче одного или двух пуклонов, где необходимо устранить лишь B_2 , возникает только одна константа f_1 . В случае одного мезона, когда необходимо устранить лишь B_1 , перенормировка константы связи также не приводит к появлению лишних констант.

Из (13) следует, что, определив из сравнения теории с опытом константы f_1^2 и f_{11}^2 , можно найти B_1 . Такое положение противоречит обычно принятым взглядам, развитым в теории возмущений, согласно которым, в частности, константа B_1 является ненаблюдаемой величиной, не могущей быть определенной из опыта.

В заключение выражаю благодарность акад. И. Е. Тамму и В. Я. Файнбергу за обсуждение результатов настоящего сообщения.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
24 июля 1954 г.

Литература

- [1] И. Е. Тамм. Jour. of Phys., 9, 449, 1945. — [2] M. Cini. Nuovo Cimento, 10, 526, 614, 1952. — [3] H. Lehman. ZS. f. Naturforsch., 8a, 579, 1953. — [4] А. А. Рухадзе. Дипломная работа, МИФИ, 1954. — [5] F. Dyson. Phys. Rev., 90, 994; 91, 424, 1953. — [6] А. И. Ахиезер и В. Б. Берестецкий. Квантовая электродинамика, ГИТТЛ, 1953.

ОБОБЩЕНИЕ РЕГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ГРАВИТАЦИИ ЭЙНШТЕЙНА И ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ТОЧЕЧНОГО ЗАРЯДА

Дуань И-Ши

В теориях Борн [1], Инфельда [2], Боппа [3], Подольского [4] и Дирака [5] была получена конечная (или нулевая) собственная масса электрона, но гравитационные эффекты, как известно, не учитывались. Широков [6] и Фишер [7] показали, что при изучении природы массы элементарных частиц уже нельзя пренебречь действием этих эффектов. Гравитационное поле играет значительную роль в трактовке массы элементарных частиц. Было показано [8, 9], что для точечного заряда общее решение уравнений гравитационного и электромагнитного полей, содержащее произвольную функцию $\mu(r)$, может при специальном подборе этой функции описывать гравитационное и электромагнитное поля, которые не имеют особенностей во всей области изменения r от 0 до ∞ .

В настоящем сообщении делается попытка найти более общее решение вопроса.

Общее решение уравнений гравитации и электромагнетизма для точечного заряда приводит к выражениям [9]:

$$ds^2 = -e^\lambda dr^2 - e^\mu r^2 \{d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2\} + e^\nu dt^2, \quad (1)$$

$$x_1 = r, \quad x_2 = \theta, \quad x_3 = \varphi, \quad x_4 = t,$$

где ds — интервал в координатах типа сферических, λ , μ и ν — функции от r :

$$0 \leq r \leq +\infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi;$$

$$g_{11} = -e^\lambda, \quad g_{22} = -e^\mu r^2, \quad g_{33} = -e^\mu r^2 \sin^2 \theta, \quad (2)$$

$$g_{44} = e^\nu, \quad -g = r^4 \sin^2 \theta e^{\lambda+\nu+2\mu}, \quad g_{ik} = 0 \text{ при } i \neq k;$$

$$e^\lambda = \left(1 + \frac{\mu' r}{2}\right)^2 e^{-\nu+\mu}; \quad (3)$$

$$e^\nu = 1 - \frac{2m}{r} e^{-\mu/2} + \frac{4\pi\epsilon^2}{r^2} e^{-\mu};$$

$$T_1^1 = -T_2^2 = -T_3^3 = T_4^4 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon^2}{r^4} e^{-2\mu}. \quad (4)$$

Здесь ϵ — заряд частицы в единицах Хевисайда, T_h^i — тензор энергии — импульса электромагнитного поля.

Для вычисления собственной массы частицы обычно применяется формула [10]

$$m = \int (V - g T_4^4 + t_4^4) d\tau = \int V - g (T_4^4 - T_1^1 - T_2^2 - T_3^3) d\tau.$$

Здесь t_h^i — псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля.

Для электромагнитного поля $T_i^i = 0$. Поэтому

$$m = 2 \int V - g T_4^4 d\tau. \quad (5)$$

Положим

$$\mu = -2 \ln f(r) \quad (\text{или } f(r) = e^{-\mu/2}), \quad (6)$$

где $f(r)$ является любой функцией, не имеющей особенностей в области $0 \leq r \leq +\infty$, и которая удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} [f(r)]_{r=0} &= 0, \\ [f'(r)]_{r=0} &= \alpha, \quad \alpha \neq 0, \\ [f''(r)]_{r=0} &= \beta, \quad \beta \neq 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Легко показать, что избранные Эйнштейном [8] и Широковым [9] функции $\mu(r) = 2 \ln(1 + 2m/r)$ и $\mu(r) = -2 \ln(1 - e^{-hr})$ удовлетворяют этим условиям.

Подставляя (6) в (2)–(4), получим

$$e^\nu = 1 - \frac{2m}{r} f(r) + \frac{4\pi\epsilon^2}{r^2} f^2(r), \quad (8)$$

$$e^{\nu+\lambda} = \frac{[f(r) - r f'(r)]^2}{f^4(r)};$$

$$g_{11} = -e^{-\lambda} = -\frac{f^4(r)}{[f(r) - r f'(r)]} \left[1 - \frac{2m}{r} f(r) + \frac{4\pi\epsilon^2}{r^2} f^2(r) \right];$$

$$g_{22} = -e^\mu r^2 = -r^2 / f^2(r), \quad (9)$$

$$g_{33} = -e^\mu r^2 \sin^2 \theta = -r^2 \sin^2 \theta / f^2(r),$$

$$g_{44} = e^\nu = 1 - \frac{2m}{r} f(r) + \frac{4\pi\epsilon^2}{r^2} f^2(r);$$

$$V - g = \frac{r^2 \sin \theta [f(r) - rf'(r)]}{f^4(r)}, \quad T_4^4 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon^2 f^4(r)}{r^4}. \quad (10)$$

При помощи условий (7) легко получить следующие результаты:

$$\begin{aligned} [g_{11}]_{r=0} &= -(4\alpha^4 / \beta^2) [1 - 2m\alpha + 4\pi\epsilon^2\alpha^2], \\ [g_{22}]_{r=0} &= -1 / \alpha^2, \\ [g_{33}]_{r=0} &= -\sin^2\theta / \alpha^2, \\ [g_{44}]_{r=0} &= 1 - 2m\alpha + 4\pi\epsilon^2\alpha^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Выражения (11) показывают, что метрики пространства регулярны в точке $r=0$.

Подставляя (10) в (5), получим собственную массу частицы

$$m = 2 \int V - g T_4^4 d\tau = -4\pi\epsilon^2 \int_0^\infty d \left[\frac{f(r)}{r} \right] = 4\pi\epsilon^2\alpha, \quad (12)$$

т. е. полевая масса частицы будет конечной.

Если положить

$$\alpha = 1 / r_0,$$

то из (12) получим

$$r_0 = 4\pi\epsilon^2 / m = e^2 / mc^2, \quad (13)$$

где e — заряд частицы в абсолютных единицах. Выражение (13) показывает, что r_0 играет роль классического радиуса электрона.

Отметим, что, согласно (4), (5) и (12), полная масса заряженной частицы равна сумме равных друг другу масс электромагнитного и гравитационного полей.

В заключение выражаю благодарность проф. М. Ф. Широкову за обсуждение результатов данной работы.

Московский государственный
университет

Поступило в редакцию
3 июля 1954 г.

Литература

- [1] M. Born. Proc. Roy. Soc., A, **143**, 410, 1934.— [2] M. Born. L. Infeld. Proc. Roy. Soc., **144**, 425, 1934.— [3] F. Born. Ann. d. Phys., **38**, 345, 1940.— [4] B. Podolsky. Phys. Rev., **62**, 68, 1941.— [5] P. A. M. Dirac. Proc. Roy. Soc., A, **167**, 148, 1938.— [6] М. Ф. Широков. Вестн. МГУ, **4**, 67, 1947.— [7] И. З. Фишер. ЖЭТФ, **18**, 636, 1948; **19**, 271, 1949.— [8] A. Einstein. Rosen. Phys. Rev., **48**, 73, 1935.— [9] М. Ф. Широков. ЖЭТФ, **18**, 236, 1948.— [10] R. Tolman. Proc. Roy. Soc. A, **167**, 148, 1938.

ВЛИЯНИЕ ОБЪЕМА НА ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЙ СДВИГ УРОВНЕЙ В МЕЗОАТОМАХ

Г. Е. Пустовалов

Последние эксперименты по мезоатомам [1] показывают, что их изучение может дать ценные сведения об атомных ядрах [2,3]. Так как радиус орбиты мезона значительно меньше радиуса электронной орбиты, то на энергетические уровни мезона сильно влияет неточечный характер ядра. Начиная с $Z=15$, влияние конечных размеров ядра изменяет положение уровня более чем на 1%, а для самых тяжелых атомов это изменение достигает 140% [4]. Кроме того, на величину порядка 1% смещают энергетический уровень мезона релятивистские поправки, спин-орбитальное взаимодействие, экранировка ядра атомными электронами, поляризация ядра мезоном, электрический квадрупольный и магнитный дипольный моменты ядра и поляризация электрическим полем ядра электронно-позитронного вакуума.

Можно показать [5], что смещение уровней вследствие поляризации вакуума ядром по отношению к величине уровня будет для мезона во много раз больше, чем для электрона, именно порядка α , а не α^3 (α — постоянная тонкой структуры).

Однако при прежнем расчете не была учтена конечность размеров ядра, которая, как оказывается, играет здесь значительную роль, особенно для тяжелых атомов [1]. Влияние конечных размеров ядра на вакуумные сдвиги электронных уровней в дейтроне учитывалось в работе [6].

В настоящей работе произведено вычисление смещения мезонных уровней в различных атомах вследствие поляризации вакуума электрическим полем ядра при учете конечных размеров ядра.

Для расчета использовался фейнмановский эффективный поляризационный потенциал, который имеет вид

$$\varphi(k) = \frac{\alpha}{\pi} \left[\frac{4x^2 - 2k^2}{3k^2} \left(1 - \frac{V\sqrt{4x^2 + k^2}}{|k|} \operatorname{Arsh} \frac{|k|}{2x} \right) + \frac{1}{9} \right] \varphi_0(k). \quad (1)$$

Здесь $\varphi_0(k)$ — компонента Фурье потенциала внешнего поля, $x = mc/\hbar$ (m — масса электрона). Для кулоновского потенциала точечного ядра

$$\varphi_0(k) = eZ/2\pi^2 k^2. \quad (2)$$

В первом приближении можно считать, что заряд ядра распределен равномерно по его объему, что ведет внутри ядра к томсоновскому осцилляторному потенциалу, а снаружи — к обычному кулоновскому:

$$\begin{aligned} \varphi_0(r) &= -(eZ/R) [-3/2 + 1/2 (r/R_0)^2] \quad (r < R_0), \\ \varphi_0(r) &= eZ/r. \quad (r > R_0) \end{aligned} \quad (3)$$

(R_0 — радиус ядра). Отсюда легко получить для равномерно заряженного ядра

$$\varphi_0(k) = \frac{eZ}{2\pi^2 k^2} \frac{3}{R_0^2 k^2} \left(\frac{\sin kR_0}{kR_0} - \cos kR_0 \right). \quad (4)$$

В координатном представлении для потенциала поляризации имеем

$$\varphi(r) = \frac{4\alpha}{r} \int_0^\infty \left[\frac{4x^2 - 2k^2}{3k^2} \left(1 - \frac{V\sqrt{4x^2 + k^2}}{k} \operatorname{Arsh} \frac{k}{2x} \right) + \frac{1}{9} \right] \varphi_0(k) k \sin kr dk. \quad (5)$$

Сдвиг энергетического уровня находится по теории возмущений путем усреднения поляризационного потенциала по волновым функциям мезона

$$\Delta E_{nl} = -e \int |\psi_{nl}(r, \vartheta, \varphi)|^2 \varphi(r) d^3r = -e \int_0^\infty R_{nl}^2(r) \varphi(r) r^2 dr. \quad (6)$$

Волновые функции мезона получались при помощи вариационного метода. Для состояний $1s$, $2s$ и $2p$ соответственно были взяты пробные функции

$$\begin{aligned} \psi_{10} &= R_{10} Y_{00} = \frac{1}{V\pi} \left(q \frac{Z}{a} \right)^{3/2} \exp \left\{ -q \frac{Z}{a} r \right\}, \\ \psi_{20} &= R_{20} Y_{00} = \frac{V\sqrt{3} p \left(p \frac{Z}{a} \right)^{3/2}}{V\pi(p^2 - pq + q^2)} \left[1 - \frac{Z}{3a} (p + q) r \right] \exp \left\{ -p \frac{Z}{a} r \right\}, \\ \psi_{21} &= R_{21} Y_{10} = \frac{1}{V\pi} \left(s \frac{Z}{a} \right)^{3/2} r \exp \left\{ -s \frac{Z}{a} r \right\} \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $a = \hbar/\mu c^2$ (μ — приведенная масса мезона); q , p и s — вариационные параметры. Для вычисления энергии бралось нерелятивистское уравнение Шредингера и учитывалось, что внутри ядра потенциал — томсоновский, а снаружи — кулоновский. Из условия минимума энергии и ортогональности высших и низших состояний были получены трансцендентные уравнения для вариационных параметров, численным решением которых были найдены значения этих параметров для различных элементов. Также были вычислены значения уровней энергии $1s$, $2s$ и $2p$ с учетом объема ядра. Для зависимости радиуса ядра от атомного номера бралась формула с прежними параметрами

$$R_0 = 1,4 \cdot 10^{-13} \sqrt[3]{A} \text{ см.} \quad (8)$$

Эти величины приведены в табл. 1.

Таблица 1

Элемент	Энергия перехода $2p \rightarrow 1s$ без учета объема ядра в MeV	Энергия перехода $2p \rightarrow 1s$ с учетом объема ядра в MeV	Эксперимент. значения энергии перехода $2p \rightarrow 1s$ [1]
${}^1_1\text{H}^1$	0,00193		
${}^1_1\text{D}^2$	0,00202		
${}^2_2\text{He}^4$	0,00836		
${}^6_6\text{C}^{12}$	0,0765	0,0762	
${}^8_8\text{O}^{16}$	0,137	0,135	
${}^{14}_{14}\text{Si}^{28}$	0,418	0,401	0,41
${}^{30}_{30}\text{Zn}^{65}$	1,93	1,57	1,55
${}^{51}_{51}\text{Sb}^{121}$	5,50	3,40	3,50
${}^{82}_{82}\text{Pb}^{208}$	14,4	6,07	6,02
${}^{92}_{92}\text{U}^{238}$	18,2	6,79	

Таблица 2

Элемент	Поляризационный сдвиг без учета объема ядра	Поляризационный сдвиг с учетом объема ядра
${}^1_1\text{H}^1$	1,96 eV	
${}^1_1\text{D}^2$	2,21 "	
${}^2_2\text{He}^4$	19,56 "	
${}^6_6\text{C}^{12}$	416 "	410 eV
${}^8_8\text{O}^{16}$	878 "	853 "
${}^{14}_{14}\text{Si}^{28}$	3,53 keV	3,22 keV
${}^{30}_{30}\text{Zn}^{65}$	21,8 "	14,3 "
${}^{51}_{51}\text{Sb}^{121}$	74,4 "	30,9 "
${}^{82}_{82}\text{Pb}^{208}$	222 "	53,4 "
${}^{92}_{92}\text{U}^{238}$	288 "	60,4 "

Воспользовавшись найденной вариационной функцией, мы получим для сдвига уровня $1s$ за счет поляризации вакуума

$$\Delta E_{10} = -4e\alpha \cdot 4 \left(q \frac{Z}{a} \right)^3 \int_0^\infty \int_0^\infty dr dk \left[\frac{4x^2 - 2k^2}{3k^2} \left(1 - \frac{\sqrt{4x^2 + k^2}}{k} \operatorname{Arsh} \frac{k}{2x} \right) + \frac{1}{9} \right] \times \\ \times \varphi_0(k) kr \exp \left\{ -2q \frac{Z}{a} r \right\} \sin kr. \quad (9)$$

Интегрируя по r и вводя обозначения $k = 2\kappa x$, $\varepsilon_1 = \alpha\kappa/Zq$, $\omega = 2\kappa R_0$, получим окончательно

$$\Delta E_{10} = -\frac{4e^2\alpha Z\kappa}{3\pi^2} \int_0^\infty \left[(1 - 2x^2) \left(1 - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \operatorname{Arsh} x \right) + \frac{x^2}{3} \right] \times \\ \times \frac{3}{\omega^2 x^2} \left(\frac{\sin \omega x}{\omega x} - \cos \omega x \right) \frac{dx}{x^2 (1 + \varepsilon_1^2 x^2)^2}. \quad (10)$$

Укажем, что без учета объема ядра сдвиг уровня будет

$$\Delta E_{10} = -\frac{4e^2\alpha Z\kappa}{3\pi^2} \int_0^\infty \left[(1 - 2x^2) \left(1 - \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \operatorname{Arsh} x \right) + \frac{x^2}{3} \right] \frac{dx}{x^2 (1 + \varepsilon^2 x^2)^2}. \quad (11)$$

Здесь $\varepsilon = \alpha\kappa/Z$. Значения интеграла для различных элементов были получены путем численного интегрирования. Результаты приведены в табл. 2.

Оказывается, что без учета объема ядра поляризационный сдвиг уровней в мезоатомах приблизительно пропорционален Z^2 , в то время как при учете объема ядра эта зависимость для $Z > 30$ становится почти линейной.

В настоящее время проводятся расчеты поляризационного сдвига для $2s$ - и $2p$ -уровней, а также учитываются более отвечающие современному состоянию эксперимента распределения протонов по объему ядра.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить благодарность проф. Д. Д. Иваненко за обсуждение этой работы.

Московский государственный
университет

Поступило в редакцию
3 июня 1954 г.

Примечание при корректуре. В появившихся недавно работах по экспериментальному определению масс отрицательных мезонов по спектрам мезоатомов показано, что для получения значений масс мезонов, согласующихся с данными других опытов, необходимо учитывать вакуумный поляризационный сдвиг уровней в мезоатомах (S. Koslov, V. Fitch a. J. Rainwater. Phys. Rev., 95, 291, 1954; M. Stearns, M. B. Stearns, S. de Benedetti a. L. Leipuner. Phys. Rev., 95, 1353, 1954).

Литература

- [1] V. L. Fitch a. J. Rainwater. Phys. Rev., 92, 789, 1953. — [2] L. N. Cooper a. E. M. Henley. Phys. Rev., 92, 801, 1953. — [3] J. A. Wheeler. Phys. Rev., 92, 812, 1953. — [4] J. A. Wheeler. Rev. Mod. Phys., 21, 133, 1949. — [5] А. Д. Галанин и И. Я. Померанчук. ДАН СССР, 86, 251, 1952. — [6] Д. Д. Иваненко и Н. Н. Колесников. ДАН СССР, 91, 47, 1953.

О ГЕНЕРАЦИИ РАДИОВОЛН МИЛЛИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНА ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ ЭЛЕКТРОННОГО СГУСТКА ЧЕРЕЗ ТОРМОЗЯЩУЮ СРЕДУ

Г. А. Аскарьян

В предложенных [1-3] методах когерентной генерации субмиллиметровых радиоволн при помощи релятивистских сгустков электронов используется воздействие искусственно создаваемого электрического или магнитного поля (периодического или постоянного) на электроны сгустка. Использование специальных макроскопических электромагнитных полей не является единственным возможным способом модуляции скорости сгустка. В частности, для импульсного или периодического возмущения движения сгустка может быть использована сила торможения, возникающая при прохождении сгустка через среду с модулированной тормозной способностью, например через один листок или через ряд расположенных на определенных расстояниях друг от друга листков из диэлектрика, прозрачного для милливолновой радиации.

При движении сгустка в тормозящих слоях среды, кроме некогерентной части излучения, сопровождающего микросоударения, будет когерентно излучаться радиация от макроскопического торможения сгустка как целого. При удачном выборе размеров сгустка когерентно излученная энергия

$$\Delta \epsilon_{\text{когер}} \approx N^2 r_0^2 E_{\text{эфф}}^2 dn,$$

где N — число электронов в сгустке, r_0 — классический радиус электрона, $E_{\text{эфф}}$ — напряженность эффективного электрического поля, эквивалентного средней тормозной силе внутри листка

$$E_{\text{эфф}} = (1/e) (d\epsilon/dx)_{\text{ион}},$$

d — толщина листка, n — число листков, пронизанных сгустком ($n=1$ — импульсная модуляция, $n \gg 1$ — квазипериодическая модуляция).

При силе тока пучка $I \approx 10^{-2}$ А, $dn \sim 0,1$ см, $E_{\text{эфф}} \sim 2$ МВ/см, излучаемая, мощность

$$W = \frac{I}{Ne} \Delta \epsilon_{\text{когер}} \approx IN \frac{r_0^2}{e} E_{\text{эфф}}^2 dn \approx$$

$$\approx 2 \cdot 10^{-2} N \text{ эрг/сек.} \approx 0,1 W \text{ при } N \sim 5 \cdot 10^7.$$

Несмотря на необходимость устранения перегрева тормозящих слоев (например, путем использования движущихся диэлектрических листков или плоскостных струй жидкого диэлектрика) и необходимость ослабления расплывания сгустка (в случае нелокализованной модуляции скорости сгустка) для достижения больших излучаемых мощностей, предлагаемый метод может в некоторых случаях (при задании неколлимированного потока сгустков электронов с энергией $\lesssim 1$ МэВ), упростить конструирование генератора субмиллиметровых радиоволн и дать в руки радиофизиков простой и надежный прибор с легко изменяемыми параметрами вместо сложного и ограничивающего эффективность эксперимента высокоамплитудного ондулятора.

Применение тормозной модуляции облегчает переход к использованию плоских сгустков, рассекаемых дополнительной зональной пластинкой (аналогичной оптической), стоящей до или после модулятора скорости, на зоны, усиливающие действие друг друга.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
5 июля 1954 г.

Литература

- [1] В. Л. Гинзбург. Изв. АН СССР, сер. физич., 11, 165, 1947. — [2] H. Motz. Journ. Appl. Phys., 22, 527, 1951. — [3] H. Motz, W. Thon, R. Whitehurst. Journ. Appl. Phys., 24, 826, 1953.

ПРОВОДИМОСТЬ ТОНКИХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ПЛЕНОК

М. И. Казанов и М. Я. Азбель

Зависимость эффективной проводимости тонких металлических пленок от толщины получена в [1] в предположении, что электроны проводимости свободны. Если отказаться от этого предположения, то оказывается, что изучение проводимости тонких пленок может быть полезным для получения сведений о поверхности Ферми

$$\varepsilon(p_x, p_y, p_z) = \varepsilon_0, \quad (1)$$

где p_i — компоненты квазиимпульса, ε — энергия электрона, ε_0 — граничная фермиевская энергия.

Пусть f — отклонение функции распределения от равновесной фермиевской функции f_0 ($df_0/d\varepsilon = -\delta(\varepsilon - \varepsilon_0)$). Если выбрать ось z перпендикулярно плоскости пленки, а орт в направлении этой оси обозначить через k , то f удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{f}{\tau(kv)} = -\frac{e}{(kv)} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} (vE), \quad (2)$$

где $v = \partial \varepsilon / \partial p$ — скорость электрона, τ — время между соударениями, E — напряженность электрического поля¹. На границе пленки электроны рассеиваются диффузно, что соответствует нулевым граничным условиям для функции f :

$$\begin{aligned} f(0, p) &= 0 \quad (kv > 0), \\ f(d, p) &= 0 \quad (kv < 0) \end{aligned} \quad (3)$$

(d — толщина пленки). Ток проводимости обычным образом определяется функцией распределения

$$j(z) = \frac{2e}{(2\pi\hbar)^3} \int v f(z, p) d\tau_p. \quad (4)$$

Здесь $d\tau_p = dp_x dp_y dp_z$ — элемент объема в пространстве импульсов, интегрирование ведется по всему p -пространству.

Подставляя решение уравнения (2) с граничными условиями (3) в выражение (4) и воспользовавшись δ -образной зависимостью $df_0/d\varepsilon$ от энергии и тем, что поверхность Ферми (1) имеет центр симметрии, получим

$$\begin{aligned} f_i(z) &= \int_0^d k_{ik}(|z - z'|) E_k(z') dz', \\ k_{ik}(x) &= \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \iint_{kn \geq 0} \frac{n_i n_k}{(nk)} e^{-x/l(nk)} dS_p. \end{aligned} \quad (5)$$

dS_p — элемент площади на поверхности Ферми, $\mathbf{n}$ — вектор нормали к поверхности Ферми, l — длина свободного пробега ($l = |\mathbf{v}| \tau$); интегрирование ведется по той части поверхности, где $nk \geq 0$.

Средний ток, протекающий по пленке, найдем, проинтегрировав выражение (5) по z от 0 до d :

$$(j_{cp})_i = \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \iint_{nk \geq 0} \frac{\ln_i n_k}{d} dS_p \int_0^d E_k(z) (2 - e^{-z/l(nk)} - e^{-(d-z)/l(nk)}) dz. \quad (6)$$

Для массивного металла E_k не зависит от z . Производя интегрирование и переходя к пределу $d/l \rightarrow \infty$, получим

$$(j_{cp})'_i = \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \iint_{\varepsilon = \varepsilon_0} \ln_i n_k dS_p E_k.$$

¹ Кинетическое уравнение (2) содержит член с $E_z = dE/dz$, возникающий за счет отклонения среднего значения функции распределения $f + f_0$ от равновесного значения f_0 . Однако для всех реальных толщин коэффициент при этом члене исчезающе мал (это связано с малостью отношения $v/\sigma d$, где σ — среднее значение проводимости массивного металла), что позволяет его не учитывать.

Таким образом тензор проводимости для массивного металла имеет вид

$$\sigma_{ih} = \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \iint_{\varepsilon=\varepsilon_0} \ln_i n_h dS_p. \quad (7)$$

Для среднего значения проводимости $\sigma = \sigma_{ii}/3$ находим

$$\sigma = \frac{2e^2 \bar{I} S}{3(2\pi\hbar)^3}, \quad \bar{I} = \frac{1}{S} \iint_{\varepsilon=\varepsilon_0} I dS_p, \quad (7')$$

где S — площадь поверхности Ферми.

В случае пленки при пропускании тока в направлении, перпендикулярном оси z (только такая постановка эксперимента совместима с предположением, что все величины не зависят от x и y), E_x и E_y — постоянные, а E_z — функция z , которая должна быть найдена из совместного решения двух уравнений:

$$\frac{dE_z}{dz} = 4\pi \frac{2e}{(2\pi\hbar)^3} \int f d\tau_p, \quad j_z = 0.$$

Нас, однако, будет интересовать не зависимость E_z от координаты, а возникающая между сторонами пленки разность потенциалов

$$\delta V = - \int_0^d E_z(z) dz, \quad (8)$$

которая может быть определена (в случае тонких пленок) непосредственно из равенства нулю z -й компоненты тока. Действительно, из (5)

$$j_z = \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \iint dS_p \left\{ \mathbf{nk} \int_0^d E_z e^{-|z-z'|/l(nk)} dz' + (E_{\parallel} \mathbf{n}) \int_0^d e^{-|z-z'|/l(nk)} dz' \right\}, \quad (9)$$

$$E_{\parallel} = E - \mathbf{k} E_z.$$

Заменяя экспоненту единицей, что заведомо допустимо при $d \ll l$, получим

$$\delta V = d \frac{E_{\parallel} S_+}{k S_+}, \quad (10)$$

где S_+ — вектор площади той части поверхности Ферми, где $\mathbf{nk} > 0$ ². В случае изотропного закона дисперсии $S_+ \parallel \mathbf{k}$, т. е. $S_+ \perp E_{\parallel}$ и $\delta V = 0$.

Найдем теперь эффективную проводимость тонкой пленки ($d/l \ll 1$). Для этого заметим, что в (6) при $i=1, 2$ слагаемым, содержащим E_z , можно пренебречь. Тогда легко показать, что основной вклад в ток вносит интегрирование по узкому пояску на поверхности Ферми, где вектор нормали $\mathbf{n}$ почти перпендикулярен $\mathbf{k}$ ³. Учитывая это, находим

$$\sigma_{ih} = \frac{2e^2 d}{(2\pi\hbar)^3} \ln \frac{l}{d} \oint n_i n_h R(u) du \quad (i, k \neq 3),$$

du — элемент длины дуги, на которой $\mathbf{nk} = 0$; $R(u)$ — радиус кривизны к поверхности в направлении, перпендикулярном к дуге в точке u ; интегрирование ведется вдоль всей дуги.

При переходе к изотропному закону дисперсии получаем формулу (23) из [1]:

$$\sigma = \frac{3}{4} \frac{d}{l} \ln \frac{l}{d} \sigma_0,$$

где σ_0 — проводимость массивного металла.

Физико-технический институт
Академии наук Украинской ССР

Поступило в редакцию
28 июня 1954 г.

Литература

[1] K. Fuchs. Proc. Cambr. Phil. Soc., 34, 100, 1938.

² $S_+ = \iint_{\mathbf{nk} > 0} \mathbf{n} dS_p.$

³ Это соответствует тому очевидному факту, что основной ток в тонкой пленке создают электроны, двигающиеся вдоль ее поверхности.

ЗАМЕЧАНИЯ К СТАТЬЕ И. Е. БАЛЫГИНА «ПРЕДПРОБИВНЫЕ ТОКИ В ЖИДКОСТЯХ» [1]

Г. А. Воробьев.

Исследование предпробивных токов в жидкостях имеет большое значение для выяснения механизма пробоя жидких диэлектриков.

Весьма ценной является мысль, высказываемая в статье [1], о том, что характер разряда в жидкостях должен зависеть от условий опыта, в частности от наличия или отсутствия тормозного сопротивления. Это указание следует учитывать при исследовании пробоя диэлектриков. Однако данная работа, по нашему мнению, имеет ряд недостатков.

Автор статьи утверждает, что в случае пробоя жидкостей без тормозного сопротивления лидерная стадия разряда отсутствует, но обоснований этого утверждения в статье не имеется. Возможно, что оно справедливо в отношении малых межэлектродных промежутков, если проводить аналогию с газами, но для малых межэлектродных промежутков без тормозных сопротивлений в статье данных не приводится.

Приведенные данные по пробоем больших межэлектродных промежутков, по нашему мнению, скорее, опровергают вышеуказанное утверждение автора, нежели подтверждают его. Так, при пробое дистиллированной воды и трансформаторного масла без тормозного сопротивления в поле острей — плоскость (рис. 7, осциллограммы II и III рис. 8 работы [1]) время разряда оказалось больше в том случае, когда острей имело отрицательную полярность. Это находится в согласии со стримерной теорией разряда, которая в поле электродов острей — плоскость предусматривает лидерную стадию.

Данные статьи показывают, что при пробое глицерина и трансформаторного масла не наблюдается экспоненциального роста тока перед пробоем. Это указывает на отсутствие лавинообразного процесса формирования разряда. Следовательно, имел место другой процесс формирования разряда. Характер изменения тока в трансформаторном масле при отсутствии тормозного сопротивления (осциллограмма II рис. 8) такой же, как и при пробое длинных воздушных промежутков: вначале ток с увеличением напряжения импульса растет незначительно, а затем очень быстро увеличивается до больших значений. Для воздушных промежутков слабое изменение тока имеет место в лидерной стадии, а очень быстрое возрастание тока — в стадии главного разряда. Эта аналогия говорит в пользу наличия лидерной стадии и при отсутствии тормозного сопротивления при пробое жидких диэлектриков.

Несколько слов об осциллограммах. Автор статьи работал на медленных развертках, поэтому ему не удалось развернуть во времени предпробивные токи. На приведенных в статье осциллограммах ток перед пробоем действительно возрастает «внезапно»! Учитывая малую длительность предпробивных токов (видимо, порядка $10^{-8} \div 10^{-7}$ сек.), при их исследовании следует применять значительно более быстрые развертки, чем те, которые применены в обсуждаемой работе. Это позволит уточнить характер изменения во времени предпробивного тока, а сами опытные данные будут иметь большую убедительность.

Томский политехнический институт

Поступило в редакцию
24 мая 1954 г.

Примечание при корректуре. В опубликованной недавно работе [2] приводятся данные по пробоем трансформаторного масла (промежуток острей — плоскость длиной 3 дюйма) при отсутствии тормозного сопротивления. Приведенные в [2] осциллограммы тока при формировании разряда, а также фоторазвертки развивавшегося разряда показывают наличие лидерной стадии при пробое трансформаторного масла.

Литература

[1] И. Е. Балыгин. ЖЭТФ, 25, 738, 1953. — [2] T. W. Liao a, J. G. Anderson. Trans. AIEE, 72, 641, 1953.

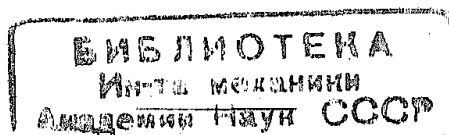
АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ ТОМА 27 ЗА 1954 г.

	Вып.	Стр.
Авакьянц Г. М. К теории приконтактных явлений	3	333
Азбель М. Я. (см. Каганов М. И.)	6	762
Алексеевский Н. Е., Журавлев Н. Н. и Лифанов И. И. К вопросу о сверхпроводимости Bi_2Pd	1	125
Алиханов А. И. К пятидесятилетию со дня рождения	1	3
Андрианова И. А. (см. Грачев А. А.)	3	313
Арифов У. А. и Аюханов А. Х. Угловое распределение вторичных ионов при бомбардировке ионами щелочных металлов танталовой мишени	1	87
Аскарьян Г. А. О генерации радиоволн миллиметрового диапазона при прохождении электронного сгустка через тормозящую среду	6	761
Аюханов А. Х. (см. Арифов У. А.)	1	87
Багиров М. А. (см. Стекольников И. С.)	2	189
Базь А. И. и Смородинский Я. А. Взаимодействие протонов с H^3 и возбужденные состояния α -частицы	3	382
Баринский Р. Л. (см. Вайнштейн Э. Е.)	4	521
Басов Н. Г. и Прохоров А. М. Применение молекулярных пучков для радиоспектроскопического изучения вращательных спектров молекул	4	431
Бене А. А. и Агрест М. М. Учет конечной толщины слоя эмульсий при исследовании ядерных процессов при помощи фотографического метода	5	557
Березняк Н. Г. (см. Есельсон Б. Н.)	5	648
Бобович Я. С. и Гуревич Д. Б. Применение фотоэлектрического метода регистрации к молекулярному анализу по спектрам комбинационного рассеяния света	3	318
Боровик Е. С. Эффект Холла и изменение сопротивления свинца, меди и магния в магнитном поле	3	355
Бравин А. В. Расчет поляризуемости некоторых атомов и ионов	3	384
Бронштейн И. М. и Смородина Т. А. Вторичная электронная эмиссия тонких слоев Be . I	2	215
Вайнштейн Б. К. Количественные соотношения в рядах Фурье электронной плотности кристаллов	1	44
Вайнштейн Л. А. и Яворский Б. М. О приближенном вычислении сил осцилляторов и эффективных сечений фотоионизации	6	712
Вайнштейн Э. Е., Баринский Р. Л. и Нарбутт К. И. К теории рентгеновских спектров поглощения	4	521
Вайсман И. А. О магнитных моментах дважды-нечетных ядер	3	386
Власов А. А. О переносе массы и заряда поверхностными волнами	2	224
Власов К. Б. и Ишмухаметов Б. Х. Ферромагнетизм веществ типа ферритов и антиферромагнетизм	1	75
Волков Д. И. и Чечерников В. И. Температурная зависимость магнитострикции ферромагнитных сплавов	2	208
Воробьев Г. А. Замечания к статье И. Е. Балыгина «Предпробивные токи в жидкостях»	6	764
Вятский А. Я. Диффракция и неупругое рассеяние электронов	2	162
Галанин А. Д. и Соловьев В. Г. Радиационная поправка к времени жизни π^0 -мезона	1	112
Гейликман Б. Т. О конденсации идеального бозе-газа в поле тяжести	1	118
Герценштейн М. Е. Диэлектрическая проницаемость плазмы, находящейся в стационарном магнитном поле	2	180
Гинзбург В. Л. и Силин В. П. Несколько замечаний о релятивистских волновых уравнениях со спектром масс	1	116
Гинзбург В. Л. О старых и новых ошибках В. Н. Кессениха	4	517
Гирин О. П. и Степанов Б. И. Спектры отражения окрашенных рассеивающих объектов. II	4	467
Глембоцкий И. И. (см. Юцис А. П.)	4	425

	Вып.	Стр.
Гордеев Г. В. Низкочастотные колебания плазмы	1	19
Гордеев Г. В. Возбуждение колебаний плазмы	1	24
Горный Н. Б. Исследование методом электрического дифференцирования функции распределения вторичных электронов по энергиям для монокристалла меди, покрытого монокристаллической пленкой закиси меди	2	171
Горный Н. Б. Неупругое отражение электронов с поверхности закиси меди	5	649
Горонина К. А. (см. Грачев А. А.)	3	313
Граменицкий И. М. и Подгорецкий М. И. Об определении времени регрессии и коэффициента усадки толстослойных фотоэмульсий	3	389
Граменицкий И. М., Емельянова Г. С. и Подгорецкий М. И. К вопросу об эффекте связанных расщеплений в космических лучах	5	654
Грачев А. А., Горонина К. А., Колачевский Н. Н. и Андропова И. А. Экспериментальное исследование изменения магнитного потока в проволоке при перематывании одного домена	3	313
Губкин А. Н. (см. Сканава Г. И.)	6	742
Гуревич А. В. О разрушении сверхпроводимости пленок в магнитном поле	2	195
Гуревич Д. Б. (см. Бобович Я. С.)	3	318
Данилов В. И. (1902—1954 гг.)	6	657
Дуань И-Ши. Обобщение регулярных решений гравитации Эйнштейна и электромагнетизма Максвелла для точечного заряда	6	756
Дьяков С. П. Ударные волны в бинарных смесях	3	283
Дьяков С. П. Об устойчивости ударных волн	3	285
Дьяков С. П. Ударные волны в релаксирующей среде	6	728
Емельянова Г. С. (см. Граменицкий И. М.)	5	654
Есельсон Б. Н. и Березняк Н. Г. Точки росы смесей изотопов гелия	5	648
Жарков Г. Ф. Рассеяние π -мезонов на нуклонах в теории затухания	3	296
Жидкова З. В. Спектры отражения окрашенных рассеивающих объектов. I.	4	458
Журавлев Н. Н. (см. Алексеевский Н. Е.)	1	125
Задумкин С. Н. Поверхностное натяжение и теплота испарения ртути, сурьмы, висмута и мышьяка	2	261
Зильберман Г. Е. О некоторых свойствах слабо-неидеального электронного газа	5	549
Ишмухаметов Б. Х. (см. Власов К. Б.)	1	75
Каганов М. И. и Азбель М. Я. Проводимость тонких металлических пленок	6	762
Калабухов Н. П. О процессе окрашивания кристаллов щелочно-галогидных солей путем рентгенизации	3	347
Капица П. Л. К шестидесятилетию со дня рождения	3	265
Каплан С. А. Спектральная теория газомангнитной изотропной турбулентности	6	699
Капцов Н. А. и Попов Н. А. Зажигание электрического разряда в газах на переменном токе звуковой частоты в трубках с внешними и внутренними электродами	1	97
Кард П. Г. К вопросу о спектре масс элементарных частиц	2	259
Кашкаров В. П. Об уравнениях движения системы конечных масс в теории тяготения Эйнштейна	5	563
Кессених В. Н. Ответ на статью В. Л. Гинзбурга по поводу книги «Распространение радиоволн»	4	510
Киbartас В. В. (см. Юцис А. П.)	4	425
Киржниц Д. А. К вопросу о мезон-нуклонных взаимодействиях	1	6
Козырев Б. М. и Ривкинд А. И. Протонный резонанс в растворах парамагнитных солей	1	69
Колачевский Н. Н. (см. Грачев А. А.)	3	313
Конюков М. В. и Терлецкий Я. П. Об электроакустических волнах в газоразрядной плазме	5	542
Коренблит Л. Л. К теории магнитных свойств атомных полупроводников. I.	6	719
Кострюкова М. О. Исследование температурной зависимости магнитной восприимчивости хлористого марганца ниже 4,2° К	5	655
Куусик И. Х. Замечание к электродинамике с высшими производными	2	260
Лебедев С. В. Нарушение закона Богуславского — Лэнгмюра при нагревании вольфрамового катода вакуумной лампы импульсом тока большой плотности	4	487

Лебедев С. В. Явления в вольфрамовых проволоках, предшествующие их взрыву под действием сильного тока	5	605
Левитская М. А. Уровни нуклонов на основе экспериментальных признаков	1	29
Липманов Э. М. Релятивистски-инвариантная форма электродинамики без продольных и скалярных полей	2	135
Литвинова П. С. О колебательной структуре в спектрах окиси цинка	5	636
Лифанов И. И. (см. Алексеевский Н. Е.)	1	125
Ляпидевский В. К. и Щербаков Ю. А. Исследование работы диффузионно-конденсационной камеры	1	103
Майтак Г. П. Некоторые закономерности и вычисление масс атомов	1	39
Мейкляр П. В. и Шиманский Р. С. Термическое образование F-центров в кристаллах галоидного серебра	2	156
Мироненко Ю. П. и Такибаев Ж. С. Новый метод фотометрирования следа частиц в фотоэмульсии	3	390
Мюллер Р. Л. О природе электропроводности стекла	2	264
Нарбутт К. И. (см. Вайнштейн Э. Е.)	4	521
Нелипа Н. Ф. Квантовая теория светящегося электрона. II.	4	421
Новосильцев Н. С. и Ходаков А. Л. Диэлектрический гистерезис в монокристаллах $BaTiO_3$	1	94
Осипов Б. Д. Дисперсия микроволн в аммиаке при давлении 10^{-2} мм рт. ст.	1	115
Пекар С. И. О расчете поляронов прямыми вариационными методами	5	651
Пекар С. И. Критерии применимости теории сильной связи частиц с мезонным полем	5	579
Пекар С. И. Теория сильной связи частицы (нуклона) с мезонным полем	4	398
Пекар С. И. Свободно движущийся нуклон	4	411
Пешков В. П. Измерение термомеханического эффекта в гелии II в окрестности $1^\circ K$	3	351
Пикус Г. Е. Фотоэффект с поверхностных уровней	3	369
Подгорецкий М. И. и Розенталь И. Л. Некоторые закономерности распада мезонов на три частицы	2	129
Подгорецкий М. И. (см. Граменицкий И. М.)	3	389
Подгорецкий М. И. (см. Граменицкий И. М.)	5	654
Попов Н. А. (см. Калцов Н. А.)	1	97
Порфирьева Н. Н. Расчет спектра собственных предельных частот смешанных молекулярных кристаллов при различной концентрации компонентов	4	439
Прохоров А. М. (см. Басов Н. Г.)	4	431
Пустовалов Г. Е. Влияние объема на поляризационный сдвиг уровней в мезоатомах	6	758
Рапопорт Л. П. и Филимонов В. А. Статистический расчет распределения плотности нуклонов и оболочечное строение ядра	2	243
Раутиан С. Г. Выбор конденсора при исследовании комбинационного рассеяния света	5	625
Ривкинд А. И. (см. Козырев Б. М.)	1	69
Ритус В. И. Образование π -мезонов фотонами и нуклонные изобары	6	660
Розенталь И. Л. (см. Подгорецкий М. И.)	2	129
Рытов С. М. О тепловом излучении в волноводах	5	571
Рытов С. М. Магнитный поток, создаваемый диполем, находящимся внутри ферромагнитной круглой проволоки	3	307
Сарафанов В. И. Электрическая прочность титанатов металлов II группы. Таблицы Д. И. Менделеева при постоянном и переменном ($f = 50$ гц) напряжении	5	590
Сарафанов В. И. (см. Сканави Г. И.)	5	595
Силин В. П. О модифицированном методе Тамма	6	734
Силин В. П. О спектре возбуждений системы многих частиц	3	269
Силин В. П. (см. Гинзбург В. Л.)	1	116
Сканави Г. И. и Маслов В. В. Диэлектрические свойства и структура поликристаллов системы $ZnO \cdot TiO_2 - 1,5 MgO \cdot TiO_2$	6	735
Сканави Г. И. и Губкин А. Н. Исследование диэлектрической поляризации дипольных органических кристаллов	6	742
Сканави Г. И. и Сарафанов В. И. Электрическая прочность титанатов металлов II группы таблицы Д. И. Менделеева при высокочастотном напряжении	5	595
Скобелкин В. И. О теории автогенезиса Н. С. Акулова	4	501

Скобелкин В. И. О двойном лучепреломлении в нелинейной электродинамике	6	677
Сморodinский Я. А. Поляризация при рассеянии протонов протонами	1	123
Сморodinский Я. А. (см. Базь А. И.)	3	382
Смородина Т. А. (см. Бронштейн И. М.)	2	215
Соловьев В. Г. (см. Галанин А. Д.)	1	112
Стекольников И. С. и Багиров М. А. Исследование скорости развития лидера длинной искры	2	189
Степанов Б. И. (см. Гириш О. П.)	4	467
Сыроватский С. И. Неустойчивость тангенциальных разрывов в сжимаемой среде	1	121
Такибаев Ж. С. (см. Мироненко Ю. П.)	3	390
Терлецкий Я. П. (см. Конюков М. В.)	5	542
Тиман Б. Л. Влияние взаимодействия ионов на их равновесные концентрации в случае многократной термической ионизации газа	6	708
Тиман Б. Л. Теплоемкость газа при высоких температурах	2	262
Тиман Б. Л. Влияние ионов на химическую реакцию в газе	5	653
Филимонов В. А. (см. Рапопорт Л. П.)	2	243
Фролов И. С. Показатель преломления воды и водных растворов сернистого натрия в области метровых волн	4	477
Халатников И. М. Некоторые вопросы релятивистской гидродинамики	5	529
Ходаков А. Л. (см. Новосильцев Н. С.)	1	94
Хозяинов В. Т. Образование мезонов при периферических столкновениях нуклонов	4	445
Хозяинов В. Т. К теории столкновений частиц с заданным угловым моментом	3	275
Ченцов Р. А. Теплопроводность фосфористой бронзы при гелиевых температурах	1	126
Чечерников В. И. (см. Волков Д. И.)	2	208
Чиковани Г. Е. Статистический метод определения масс нестабильных нейтральных частиц и их продуктов распада	1	110
Шабанский В. П. Кинетическое уравнение для электронов в металлах в сильных полях	2	142
Шабанский В. П. Об отклонениях от закона Ома в металлах	2	147
Шапиро И. С. О природе τ -мезонов и V_2^0 -частицы	2	257
Шапиро И. С. Распад на частицы с нулевой массой покоя	4	393
Шахпаронов М. И. К вопросу о применимости второго закона термодинамики к большим объектам Вселенной	5	646
Шиманский Р. С. (см. Мейкляр П. В.)	2	156
Широков М. Ф. О центре инерции в общей теории относительности	2	251
Шмарц В. Л. О тепловом расширении кристаллов	1	62
Шпинель В. С. γ -лучи Tc^{95}	3	387
Штейнбок Н. И. Основные характеристики ионизационных камер	5	615
Щербаков Ю. А. (см. Ляпидевский В. К.)	1	103
Юхновский И. Р. Бинарная функция распределения для систем взаимодействующих заряженных частиц. I	6	690
Юцис А. П., Кибартас В. В. и Глембоцкий И. И. Решение упрощенных уравнений Фока в двухконфигурационном приближении для атомов типа бериллия	4	425
Яворский Б. М. (см. Вайнштейн Л. А.)	6	712



Редакция ЖЭТФ просит авторов при направлении статей в печать руководствоваться изложенными ниже правилами. СТАТЬИ, ПРИСЛАННЫЕ БЕЗ СОБЛЮЖДЕНИЯ ПЕРЕЧИСЛЕННЫХ ПРАВИЛ, К РАССМОТРЕНИЮ РЕДАКЦИЕЙ ПРИНИМАТЬСЯ НЕ БУДУТ.

1. Статьи, являющиеся результатом работ, проведенных в институтах, должны обязательно иметь направление от соответствующего института.

2. Редакция в особенности обращает внимание авторов на то, что статьи должны быть изложены с предельной краткостью, совместимой с ясностью изложения, и окончательно обработаны. Следует избегать повторения данных таблиц или графиков в тексте статьи, а также представления численных результатов в виде таблиц и графиков одновременно.

Статьи объемом свыше 1 печ. листа (т. е. 21—22 стр. текста на пишущей машинке) вообще не допускаются. Как текст, так и графический материал должны представляться обязательно в двух экземплярах.

3. Статья должна иметь краткую аннотацию, указывающую цель и результаты работы. Аннотация и раздел «Выводы» (если таковой имеется в статье) не должны, однако, дублировать друг друга.

4. Статьи должны быть напечатаны на пишущей машинке с одной стороны листа; рукописные вставки не допускаются. Формулы должны быть вписаны четко чернилами. Все страницы рукописи должны быть пронумерованы. Таблицы должны быть напечатаны на отдельных от текста страницах.

СТАТЬИ ДОЛЖНЫ БЫТЬ ОБЯЗАТЕЛЬНО ПОДПИСАНЫ АВТОРОМ, А ПРИ НАЛИЧИИ НЕСКОЛЬКИХ АВТОРОВ — ВСЕМИ СООТВОРАМИ.

5. Во избежание недоразумений и ошибок следует делать ясное различие между заглавными и строчными буквами в формулах. В тех случаях, когда заглавные и строчные буквы одинаковы по начертанию и отличаются только своим размером (*V* и *v*, *U* и *u*, *W* и *w*, *O* и *o*, *K* и *k*, *S* и *s*, *I* и *i*, *C* и *c*, *P* и *p*), — необходимо заглавные буквы подчеркивать снизу двумя черточками (например, S), а строчные помечать двумя черточками сверху (например, s). Необходимо делать различие между *O* (большой), *o* (малой) и 0 (нулем), для чего букву *O* и *o* подчеркивать двумя черточками: O и o, а нуль оставлять без подчеркивания. Необходимо также различать

буквы *I* и *J*, для чего в рукописи букву *I* писать как римскую единицу с точкой вверх. Греческие буквы должны подчеркиваться красным карандашом. Векторы подчеркивать синим или черным карандашом.

6. Подстрочные примечания должны иметь сплошную нумерацию по всей статье. Цитируемая литература должна даваться не в виде подстрочных примечаний, а общим списком в конце статьи, с указанием в тексте статьи ссылки порядковой цифрой над строкой, в прямых скобках (например, [1]). Цитируемая литература должна быть оформлена в следующем порядке: а) для журнальных статей указываются инициалы и фамилия авторов, название журнала, номер тома (подчеркнуть снизу), страница и год; б) для книг надо указывать инициалы и фамилию авторов, полное название книги, год и место издания (для книг иностранного происхождения — указывать данные русского перевода, если таковой имеется).

7. Все рисунки и чертежи должны быть представлены отдельно от рукописи и ни в коем случае не должны приклеиваться к оригиналу. Рисунки желательно снабжать разъясняющими подписями, которые должны быть собраны на отдельном листе. На обороте рисунков должны быть указаны фамилия автора, название статьи и номер рисунка. Надписи на рисунках следует по возможности заменять цифрами или буквенными обозначениями в подписи к рисунку или в тексте.

Редакция просит авторов ограничиваться минимальным числом рисунков к статьям.

8. Редакция просит авторов отмечать на полях рукописи места, которые могут быть набраны пегитом.

9. Редакция посылает автору одну корректуру. Изменения и дополнения в тексте не допускаются. Корректурa с подписью автора должна быть выслана обратно в редакцию в течение суток с момента ее получения.

10. К рукописи должен быть приложен точный адрес, фамилия, имя и отчество автора, а также номер телефона, служебного или домашнего (для авторов, проживающих в Москве).

11. РУКОПИСИ, НЕ ПРИНЯТЫЕ РЕДАКЦИЕЙ, АВТОРУ НЕ ВОЗВРАЩАЮТСЯ.

Адрес редакции, Москва, Подсосенский пер., 21, Изд-во АН СССР.