

735

ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 27

Вып. 5 (11)



НОЯБРЬ 1954 г.

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

СОДЕРЖАНИЕ

И. М. Халатников. Некоторые вопросы релятивистской гидродинамики . . .	529
М. В. Конюков и Я. П. Терлецкий. Об электроакустических волнах в газоразрядной плазме	542
Г. Е. Зильберман. О некоторых свойствах слабо-неидеального электронного газа	549
А. А. Бене и М. М. Агрест. Учет конечной толщины слоя эмульсии при исследовании ядерных процессов при помощи фотографического метода . .	557
В. П. Кашкаров. Об уравнениях движения системы конечных масс в теории тяготения Эйнштейна	563
С. М. Рытов. О тепловом излучении в волноводах	571
С. И. Пекар. Критерии применимости теории сильной связи частиц с мезонным полем	579
В. И. Сарафанов. Электрическая прочность титанатов металлов II группы таблицы Д. И. Менделеева при постоянном и переменном ($f = 50$ гц) напряжении	590
Г. И. Скани и В. И. Сарафанов. Электрическая прочность титанатов металлов II группы таблицы Д. И. Менделеева при высокочастотном напряжении	595
С. В. Лебедев. Явления в вольфрамовых проволоках, предшествующие их взрыву под действием сильного тока	605
Н. И. Штейнбок. Основные характеристики ионизационных камер	615
С. Г. Раутиан. Выбор конденсора при исследовании комбинационного рассеяния света	625
П. С. Литвинова. О колебательной структуре в спектрах окиси цинка . . .	636

М. И. Шмидт	кона термодинамики	646
-------------	------------------------------	-----

Б. Н. Ес	пов гелия . . .	648
Н. Б. Го	ти закиси меди	649
С. И. Пе	методами . . .	651
Б. Л. Ти		653
И. М. Гр	Я. К вопросу об	654
эффе	магнитной вос-	655
М. О. Кс		
приим		

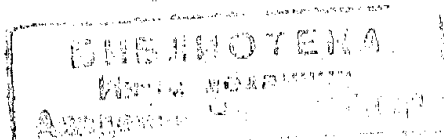
1954
 № 24
 Вып 5 (11)

Главный редактор Н. Н. АНДРЕЕВ

Зам. главного редактора М. М. СУЩИНСКИЙ

Редколлегия

Н. А. КАПЦОВ, В. П. ПЕШКОВ, Д. В. СКОБЕЛЬЦЫН,
 Н. Н. СОБОЛЕВ, М. М. СУЩИНСКИЙ, И. Е. ТАММ,
 Я. П. ТЕРЛЕЦКИЙ, Е. Л. ФЕЙНБЕРГ



НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

И. М. Халатников

Развит вариационный метод, позволяющий находить уравнения релятивистской гидродинамики. Найден релятивистский аналог потенциального движения. Выяснен вид уравнения Бернулли для такого движения. Обсуждены свойства релятивистской ударной адиабаты, а также распространение звука большой амплитуды. Найдено точное решение общей одномерной задачи в релятивистской гидродинамике.

Развитие релятивистской гидродинамики представляет интерес в связи с выяснившейся в последнее время возможностью гидродинамического подхода к решению задач ядерной физики. Ферми [1] высказал оригинальную идею о возможности статистического подхода к проблеме множественного образования частиц при соударениях нуклонов высоких энергий. Ландау [2] развил эту идею и дал точное решение задачи для случая лобового соударения нуклонов. При этом он нашел приближенное решение для весьма сложной гидродинамической задачи о релятивистском разлете тела, поперечные размеры которого значительно превосходят толщину.

В настоящей статье рассматривается ряд вопросов релятивистской гидродинамики.

В разделе 2 статьи развивается вариационный метод, позволяющий находить уравнения релятивистской гидродинамики, в некотором смысле эквивалентный принципу наименьшего действия в механике. Найден релятивистский аналог потенциального движения. Выясняется вид уравнения Бернулли для такого движения. В разделе 3 выясняются свойства ударной адиабаты; найдена связь между скачками термодинамических величин и скоростью разрывов слабой интенсивности. Кроме того, в этом разделе разбирается вопрос о скорости звуковых волн большой амплитуды в релятивистской гидродинамике. В разделе 4 найдено точное решение одномерной задачи в релятивистской гидродинамике¹.

1. Введение

Тензор энергии-импульса в релятивистской гидродинамике имеет вид [3]

$$T_{ik} = -W u_i u_k - p \delta_{ik}. \quad (1.1)$$

Здесь $W = \varepsilon + p$ — тепловая функция (на единицу объема), p — давление, ε — энергия (на единицу объема) и u_i — компонента 4-скорости, равная

$$u_i = dx_i / ds, \quad ds = \sqrt{-(dx_i)^2}, \quad x_i (x_1 x_2 x_3, ict). \quad (1.2)$$

¹ Непосредственно применить это решение к задаче о множественном образовании частиц пока не удалось, так как для этого необходимо решить двумерную задачу. Уравнения же релятивистской гидродинамики для двумерного случая оказываются нелинейными по всем переменным и порядка выше первого.

Релятивистские гидродинамические уравнения содержатся в условиях

$$\partial T_{ik} / \partial x_k = 0. \quad (1.3)$$

В случае, когда имеет место закон сохранения частиц, уравнение (1.3) необходимо дополнить уравнением непрерывности для плотности частиц n

$$\partial n u_i / \partial x_i = 0. \quad (1.4)$$

Для плотности энергии ε имеет место термодинамическое тождество

$$d\varepsilon = T dS + \mu dn, \quad (1.5)$$

где S — плотность энтропии, μ — термодинамический потенциал. Непосредственно из определения давления p следует соотношение

$$p = -\varepsilon + TS + \mu n. \quad (1.6)$$

Для потенциала μ из (1.5) и (1.6) имеем тождество

$$d\mu = -\frac{S}{n} dT + \frac{1}{n} dp. \quad (1.7)$$

Наконец, для тепловой функции, отнесенной к одной частице $w = W/n$, из тех же соотношений следует

$$dw = d\left(\mu + \frac{1}{n} TS\right) = T d\left(\frac{S}{n}\right) + \frac{1}{n} dp. \quad (1.8)$$

Спроектировав уравнения (1.3) на направление 4-скорости u_i и воспользовавшись уравнением непрерывности (1.4), убеждаемся в том, что в данном случае вдоль мировой линии энтропия, отнесенная на одну частицу, сохраняется

$$d\sigma / ds = 0, \quad \sigma = S/n. \quad (1.9)$$

Уравнение (1.9) можно также переписать в форме

$$\partial S u_h / \partial x_h = 0. \quad (1.10)$$

В ультрарелятивистском случае благодаря высоким температурам возможны процессы образования частиц. В этом случае закон сохранения частиц (1.4) уже не имеет места. Однако условие непрерывности энтропии попрежнему соблюдается. Действительно, спроектируем уравнения (1.3) на направление 4-скорости u_i , имеем

$$u_i \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = -u_i \frac{\partial}{\partial x_k} W u_i u_h - u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0. \quad (1.11)$$

Далее, воспользовавшись условием

$$u_i^2 = -1, \quad (1.12)$$

связывающим компоненты скорости u_i , находим

$$\frac{d}{ds}(W - p) + W \frac{\partial u_h}{\partial x_h} = \frac{d\varepsilon}{ds} + W \frac{\partial u_h}{\partial x_h} = 0. \quad (1.13)$$

В случаях, когда число частиц не сохраняется, число термодинамических степеней свободы уменьшается на одну, потенциал μ равен нулю, и, следовательно, согласно (1.5) и (1.6), имеем

$$d\varepsilon = T dS, \quad W = TS. \quad (1.14)$$

Учитывая (1.14), из (1.13) без труда находим условие непрерывности энтропии в форме (1.10).

Подставим в уравнения (1.3) выражение (1.1) для тензора T_{ik} и воспользуемся уравнением непрерывности (1.4); после несложного преобразования находим

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} &= -\frac{\partial}{\partial x_k} W u_i u_k - \frac{\partial p}{\partial x_i} = -n u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{W}{n} u_i \right) - \frac{\partial p}{\partial x_i} = \\ &= -n \frac{d}{ds} w u_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0.\end{aligned}\quad (1.15)$$

Учитывая (1.8), окончательно получаем уравнения движения в форме

$$\frac{d}{ds} w u_i + \frac{\partial' w}{\partial x_i} = 0. \quad (1.16)$$

Штрихом обозначаем производную, взятую при постоянной энтропии σ . В ультрарелятивистском случае подобным же путем, используя, однако, только условие непрерывности энтропии, находим

$$\frac{d}{ds} T u_i + \frac{\partial T}{\partial x_i} = 0. \quad (1.17)$$

Таким образом в ультрарелятивистском случае уравнения движения получаются заменой в уравнениях (1.16) тепловой функции w на температуру T .

2. Уравнения релятивистской гидродинамики

Об одном вариационном методе в гидродинамике

Уравнения движения релятивистской гидродинамики могут быть получены вариационным методом, аналогичным принципу наименьшего действия в релятивистской механике.

В механике действие $\bar{S}$ записывается в виде

$$\bar{S} = -\frac{1}{c} \int m c^2 ds. \quad (2.1)$$

Здесь m — масса частицы, c — скорость света в вакууме, ds — дифференциал интервала $ds = \sqrt{-(dx_i)^2}$. Интегрирование в (2.1) производится вдоль мировой линии. В гидродинамике для получения действия $\bar{S}$ естественно вместо $m c^2$ в (2.1) взять энергию, приходящуюся на одну частицу жидкости. При этом необходимо учесть, что согласно (1.9) энтропия, приходящаяся на одну частицу, вдоль мировой линии сохраняется. Энергия, приходящаяся на одну частицу, согласно (1.5) и (1.8), равна

$$(\partial \varepsilon / \partial n)_\sigma = \mu + T \sigma = w, \quad (2.2)$$

где w — тепловая функция.

Таким образом действие в гидродинамике может быть записано в виде интеграла от тепловой функции w вдоль мировой линии

$$\bar{S} = -\frac{1}{c} \int w ds. \quad (2.3)$$

Тепловая функция w в общем случае зависит от координат x_i , скоростей $u_i = dx_i/ds$ и сохраняющихся вдоль мировой линии величин (например, энтропии σ). Зависимость w от x_i определяется давлением и внешними полями в каждой данной точке.

Уравнения движения получаются как условия экстремума (минимума) интеграла (2.3) с дополнительным условием (1.9). Следуя общему методу Лагранжа, варьируем интеграл (2.3) и дополнительное условие (1.9) и образуем сумму с произвольными коэффициентами

$$Z = \frac{1}{c} \left\{ -\delta \int w ds + \int A \delta \frac{d\sigma}{ds} ds \right\}. \quad (2.4)$$

Отсюда, после несложного интегрирования по частям, получаем

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{c} \int \left\{ -\frac{\partial' w}{\partial x_i} \delta x_i ds + w u_i d\delta x_i + A \frac{d\delta\sigma}{ds} ds - \frac{\partial w}{\partial \sigma} \delta\sigma ds - \frac{\partial w}{\partial u_i} \delta \frac{dx_i}{ds} ds \right\} = \\ &= \frac{1}{c} \int ds \left\{ -\frac{\partial' w}{\partial x_i} - \frac{d}{ds} \left[w u_i - \frac{\partial w}{\partial u_i} - \frac{\partial w}{\partial u_h} u_h u_i \right] \right\} \delta x_i + \frac{1}{c} \int ds \left[-\frac{\partial w}{\partial \sigma} - \frac{\partial A}{\partial s} \right] \delta\sigma + \\ &\quad + \frac{1}{c} \int d \left\{ A \delta\sigma + w u_i \delta x_i - \frac{\partial w}{\partial u_i} \delta x_i - \frac{\partial w}{\partial u_h} u_h u_i \delta x_i \right\}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Поскольку варьирование производится при закрепленных пределах интегрирования, то третий интеграл в (2.5) равен нулю. Условие экстремума тогда получается приравниванием нулю коэффициентов при произвольных вариациях δx_i и $\delta\sigma$.

Таким путем находим

$$\frac{d}{ds} \left\{ w u_i - \frac{\partial w}{\partial u_i} - \frac{\partial w}{\partial u_h} u_h u_i \right\} + \frac{\partial' w}{\partial x_i} = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \sigma} - \frac{\partial A}{\partial s} = 0. \quad (2.7)$$

Уравнение (2.6) представляет собой наиболее общую форму уравнения движения в гидродинамике. Стоящие в нем производные от тепловой функции w по скоростям следует брать при постоянных внешних полях, давлении и энтропии. В форме (2.6) уравнение движения пригодно, например, для случая наличия электромагнитного поля. При этом производные $\partial' w / \partial x_i$ записываются следующим образом:

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = \frac{\partial w}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial w}{\partial F_{lm}} \frac{\partial F_{lm}}{\partial x_i}$$

(F_{lm} — тензор электромагнитного поля). В отсутствие внешних полей w не зависит от скоростей u_i и уравнение движения (2.6) приобретает следующий вид:

$$\frac{d}{ds} w u_i + \frac{\partial' w}{\partial x_i} = 0. \quad (2.8)$$

Воспользовавшись тождеством (1.8) и условием (1.9), перепишем (2.8) в обычной форме [3]

$$w n \frac{du_i}{ds} + \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_h} u_i u_h = 0. \quad (2.9)$$

Что касается условия (2.7), то оно никаких уравнений не дает.

Релятивистский аналог потенциального движения

Уравнения релятивистской гидродинамики (2.9) в изоэнтропическом случае обладают решениями следующего вида

$$\partial\varphi / \partial x_i = w u_i. \quad (2.10)$$

Убедимся в том, что из уравнений (2.10) следуют уравнения (2.9). Для этого продифференцируем (2.10) по x_k и воспользуемся возможностью переставлять порядок дифференцирования; имеем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} w u_k = \frac{\partial}{\partial x_k} w u_i. \quad (2.11)$$

Далее умножим соотношение (2.11) на u_k и просуммируем по индексу k . Таким путем находим

$$u_k \frac{\partial}{\partial x_k} w u_i = u_k \frac{\partial}{\partial x_i} w u_k = u_k^2 \frac{\partial w}{\partial x_i} + w u_k \frac{\partial u_k}{\partial x_i}. \quad (2.12)$$

В правой части соотношения (2.12) второй член равен нулю благодаря тому, что $u_k^2 = -1$ и, следовательно, $u_k \partial u_k / \partial x_i = 0$. Учитывая это, получаем из (2.12)

$$\frac{d}{ds} w u_i = - \frac{\partial w}{\partial x_i},$$

т. е. уравнения движения (2.9).

Из приведенного доказательства следует, что интегралы (2.10), будучи выполненными в некоторой точке на мировой линии, будут выполняться всегда. Действительно, согласно (2.12) и (2.11) и уравнениям движения (2.9), имеем

$$\frac{d}{ds} \left(- \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + w u_i \right) = \frac{d}{ds} w u_i + \frac{\partial w}{\partial x_i} = 0. \quad (2.13)$$

Таким образом соотношение (2.10) вдоль мировой линии сохраняется. Уравнениям (2.10) в классической гидродинамике соответствуют четыре условия — три условия потенциальности (равенство нулю трех компонент ротора скорости) плюс уравнение Бернулли. Действительно, в нерелятивистском пределе из (2.10) находим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} = \frac{w v_\alpha}{\sqrt{1-v^2}} \approx v_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3), \quad v^2 = v_\beta^2, \quad (2.14)$$

т. е. условия потенциальности. Четвертая же компонента условий (2.10) дает уравнение Бернулли

$$w u_4 = \frac{w v_4}{\sqrt{1-v^2}} \approx w i \left(1 + \frac{v^2}{2} \right) \approx i \left(w + \frac{v^2}{2} \right) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_4}. \quad (2.15)$$

Четвертая компонента условия (2.10) представляет собой, следовательно, релятивистский аналог уравнения Бернулли

$$w u_4 = \partial \varphi / \partial x_4. \quad (2.16)$$

В изоэнтропическом случае оно выполняется во всем объеме жидкости при соблюдении остальных трех условий (2.10) (условия квазипотенциальности). Это обстоятельство следует подчеркнуть, так как, подобно классическому закону сохранения Бернулли вдоль линий тока, в релятивистской гидродинамике в изоэнтропическом случае вдоль линии тока сохраняется величина [3]

$$w u_4 = \text{const}, \quad (2.17)$$

независимо от первых трех условий (2.10).

Покажем теперь, что условия (2.10) для одномерного нестационарного случая выполняются всегда, т. е., другими словами, одномерное движение в релятивистской гидродинамике является квази-

потенциальным. Для этого единственную в данном случае (все величины зависят от x_1 и x_4) компоненту уравнений движения²

$$(d/ds) w u_1 + (\partial w / \partial x_1) = 0$$

преобразуем к следующему виду:

$$u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} (w u_1) + u_4 \frac{\partial}{\partial x_4} (w u_4) + \frac{\partial w}{\partial x_1} = (1 + u_1^2) \frac{\partial w}{\partial x_1} + w u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_1 \frac{\partial w u_1}{\partial x_1} = 0.$$

Далее воспользуемся соотношением $u_k^2 = -1$; имеем

$$-u_4^2 \frac{\partial w}{\partial x_1} - w u_4 \frac{\partial u_4}{\partial x_1} + u_4 \frac{\partial w u_1}{\partial x_4} = u_1 \left(-\frac{\partial w u_4}{\partial x_1} + \frac{\partial w u_1}{\partial x_4} \right) = 0.$$

Отсюда непосредственно получаем

$$\partial w u_1 / \partial x_4 = \partial w u_4 / \partial x_1, \quad (2.18)$$

и, следовательно, существует такая функция φ , что

$$w u_1 = \partial \varphi / \partial x_1, \quad w u_4 = \partial \varphi / \partial x_4. \quad (2.19)$$

Сделанное утверждение о квазипотенциальности одномерного движения таким образом доказано. Возведем левую и правую части соотношения (2.10) в квадрат и просуммируем по всем значениям индекса i , в результате получаем уравнение³ для потенциала φ

$$(\partial \varphi / \partial x_i)^2 = -w^2. \quad (2.20)$$

Вместе с уравнением непрерывности

$$\partial n u_i / \partial x_i = 0 \quad (2.21)$$

оно дает полную систему гидродинамических уравнений. Связь n с w устанавливается при этом уравнением состояния.

Остановимся на случае ультрарелятивистских систем, для которых имеет место уравнение состояния

$$\varepsilon = 3p. \quad (2.22)$$

Состояние таких систем полностью определяется одной термодинамической переменной (например, температурой).

Уравнения движения, согласно (1.17), в этом случае приобретают вид

$$(d/ds) T u_i + (\partial T / \partial x_i) = 0. \quad (2.23)$$

Соответствующим образом изменяются условия квазипотенциальности

$$\partial \varphi / \partial x_i = T u_i \quad (2.24)$$

и уравнение (2.20) для потенциала φ

$$(\partial \varphi / \partial x_i)^2 = -T^2. \quad (2.25)$$

Согласно термодинамическому тождеству в рассматриваемом ультрарелятивистском случае

$$\varepsilon = T dS, \quad p = -\varepsilon + TS = 1/3 \varepsilon \quad (2.26)$$

² Как легко можно убедиться, четвертая компонента уравнений является следствием первых трех.

³ Обращаем внимание на то, что уравнение (2.20) сходно с уравнением Гамильтона — Якоби в механике.

и, следовательно,

$$S \sim T^3. \quad (2.27)$$

Исключив при помощи (2.24) и (2.25) величину T из уравнения непрерывности для энтропии (1.10), получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right)^2 \right\} = 0, \quad (2.28)$$

определяющее потенциал φ .

3. Некоторые свойства ударных волн в релятивистской гидродинамике

Рассмотрим некоторые свойства ударных волн в релятивистской гидродинамике. Воспользовавшись условиями непрерывности нормальных к разрыву компонент потока энергии, импульса и частиц⁴, можно без труда получить уравнение релятивистской ударной адиабаты. Соответствующее уравнение, связывающее значения термодинамических величин с обеих сторон разрыва, имеет следующий вид [4]:

$$w^2 - \bar{w}^2 + (\bar{p} - p) \left(w \frac{1}{n} + \bar{w} \frac{1}{\bar{n}} \right) = 0. \quad (3.1)$$

Здесь величины слева от разрыва обозначаем без черты, а справа от него — с чертой (разрыв предполагаем распространяющимся влево). Из тех же условий непрерывности находим скорость U нормального разрыва

$$U^2 = \left(\frac{w^2}{\bar{w}^2} - 1 \right) / \left(\frac{n^2}{\bar{n}^2} - 1 \right). \quad (3.2)$$

Выясним свойства релятивистской ударной адиабаты. Определим связь скачков термодинамических величин на разрывах слабой интенсивности. Для этого перепишем (3.1) в виде:

$$w - \bar{w} + (\bar{p} - p) \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{w}}{w + \bar{w}} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{\bar{n}} \right) \right] = 0,$$

и разложим значения всех величин справа от разрыва в ряд по степеням скачков энтропии $\Delta\sigma = \bar{\sigma} - \sigma$ и давления $\Delta p = \bar{p} - p$. Учитывая термодинамическое тождество

$$dw = T d\sigma + \frac{1}{n} dp, \quad (3.3)$$

находим

$$\begin{aligned} & - \left\{ T \Delta\sigma + \frac{1}{n} \Delta p + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{n} \right) (\Delta p)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \left(\frac{1}{n} \right) (\Delta p)^3 \right\} + \\ & + \frac{1}{n} \Delta p + \Delta p \left[\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{n} \right) \Delta p + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \left(\frac{1}{n} \right) (\Delta p)^2 \right] \left[\frac{\frac{1}{n} \Delta p + w}{2w + \frac{1}{n} \Delta p} \right] = \\ & = - T \Delta\sigma + \frac{1}{12} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \left(\frac{1}{n} \right) (\Delta p)^3 + \frac{1}{n} \frac{1}{wn} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{n} \right) (\Delta p)^3 = 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Связь скачков энтропии и давления на разрыве слабой интенсивности таким образом определяется соотношением

⁴ Рассматривается нормальный разрыв в случае одномерного движения жидкости. Скорость света всюду в дальнейшем полагаем равной единице.

$$\Delta\sigma = \frac{1}{12T} (\Delta p)^3 \left[\frac{\partial^2}{\partial p^2} \left(\frac{1}{n} \right) + \frac{3}{\omega n} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{n} \right) \right]. \quad (3.5)$$

Поскольку скачок энтропии оказывается третьего порядка (как и в нерелятивистском случае) относительно скачка давления, то в разложении (3.4) всеми степенями $\Delta\sigma$ выше первой и произведениями $\Delta\sigma$ и Δp мы пренебрегли. Скачок энтропии на разрыве должен иметь положительный знак. Поэтому знак скачка давления полностью определяется знаком выражения, стоящего в формуле (3.4) в квадратных скобках. Обычно для всех известных уравнений состояния имеем $\frac{\partial}{\partial p} \frac{1}{n} = m \frac{\partial V}{\partial p} < 0$ и $\frac{\partial^2}{\partial p^2} \frac{1}{n} = m \frac{\partial^2 V}{\partial p^2} > 0$ (V — удельный объем). В нерелятивистском пределе членом $\frac{3}{\omega n} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{n} \right)$ в квадратной скобке (3.5) можно пренебречь, и благодаря положительности $\frac{\partial^2}{\partial p^2} \left(\frac{1}{n} \right)$ имеем обычно дело с ударными волнами сжатия ($\Delta p > 0$). В релятивистском случае, повидимому, возможны волны разрежения ($\Delta p < 0$), так как можно себе представить, что в некоторых случаях отрицательный член в (3.5) $\frac{3}{\omega n} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{n} \right)$ может по абсолютной величине превосходить положительный член $\frac{\partial^2}{\partial p^2} \left(\frac{1}{n} \right)$.

Из формулы (3.2) для разрывов слабой интенсивности после несложных вычислений получаем⁵

$$U^2 = \frac{1}{\omega} \frac{\partial p}{\partial n} + \frac{n^3}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)^2 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial p^2} \left(\frac{1}{n} \right) + \frac{3}{\omega n} \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{n} \right) \right\} \Delta p. \quad (3.6)$$

Первый член в правой части (3.6) есть квадрат скорости звука в релятивистском случае [3]. Таким образом, как и следовало ожидать, релятивистские ударные волны слабой интенсивности в первом приближении движутся со скоростью звука. Второй член определяет отличие скорости разрыва от скорости звука. В зависимости от знака коэффициента при Δp в формуле (3.6) возможно распространение как волн сжатия ($\Delta p > 0$), так и волн разрежения ($\Delta p < 0$).

Если в качестве независимой переменной выбрать плотность частиц n , формула (3.6) приобретает следующий вид:

$$U^2 = c_0^2 + \frac{\Delta n}{2n} \left\{ 3c_0^2 (1 - c_0^2) + \frac{n^3}{\omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial n^2} \right\}, \quad (3.6')$$

где скорость звука c_0 определяется соотношением

$$c_0^2 = \frac{n}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial n}. \quad (3.7)$$

После извлечения квадратного корня отсюда находим

$$U = c_0 + \frac{\Delta n}{4nc_0} \left[3c_0^2 (1 - c_0^2) + \frac{n^3}{\omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial n^2} \right]. \quad (3.8)$$

Звук большой амплитуды в релятивистской гидродинамике

Вычислим теперь скорость звука в релятивистской гидродинамике во втором приближении, т. е. учтем влияние членов линейных по возмущениям термодинамических величин (Δn или Δp) в выраже-

⁵ Так как мы разлагаем здесь все величины до членов второго порядка относительно (Δp), то при этом, согласно (3.5), энтропию можно считать постоянной.

нии для скорости звука. Согласно [3] скорость римановой плоской волны равна

$$U = \left(c - \frac{iu_1}{u_4} \right) / \left(1 - c \frac{iu_1}{u_4} \right). \quad (3.9)$$

Здесь c есть местная скорость звука, зависящая от значений скорости жидкости u_1 в волне в данном ее месте.

В звуковой волне значения скорости u_1 малы по сравнению со скоростью звука c , скорость же $u_4 \approx i$; сохраняя линейные по u_1 члены в (3.9), получаем

$$U_{зв} = c - u_1(1 - c^2). \quad (3.10)$$

Разложим местную скорость звука c в ряд по степеням u_1 , ограничиваясь линейным членом; при помощи (3.7) находим

$$c^2 = c_0^2 + \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{n}{w} \frac{\partial w}{\partial n} \right) \frac{\partial n}{\partial u_1} u_1. \quad (3.11)$$

Здесь c_0 — равновесная скорость звука, функция равновесных значений термодинамических величин в покоящейся жидкости.

Согласно уравнению непрерывности (1.4) в звуковой волне имеет место соотношение

$$\partial n / \partial u_1 = -n/c. \quad (3.12)$$

Комбинируя (3.11) и (3.12), без труда находим

$$c = c_0 + \frac{n}{2c_0^2} \left[\frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{n}{w} \frac{\partial w}{\partial n} \right) \right] u_1. \quad (3.13)$$

Подставив это значение c в (3.10), получаем

$$U_{зв} = c_0 - u_1 \left[(1 - c_0^2) + \frac{n}{2c_0^2} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{n}{w} \frac{\partial w}{\partial n} \right) \right]. \quad (3.14)$$

Раскроем последний член в квадратной скобке в (3.14) и учтем соотношение (3.12), позволяющее выразить изменение плотности δn в звуковой волне через значение скорости u_1 ; имеем

$$U_{зв} = c_0 + \frac{\delta n}{2c_0 n} \left[3c_0^2(1 - c_0^2) + \frac{n^2}{w} \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} \right]. \quad (3.15)$$

Соотношение (3.15) определяет скорость звуковой волны во втором приближении. Тот факт, что различные точки профиля звуковой волны движутся с различными скоростями, будет, как известно, приводить к образованию разрывов. Благодаря неопределенности знака выражения, стоящего в квадратных скобках в (3.14), повидимому, возможно образование разрывов как на переднем, так и на заднем фронте звуковой волны.

4. Общая одномерная задача в релятивистской гидродинамике

Рассмотрим одномерное нестационарное изоэнтропическое движение жидкости. В этом случае благодаря квазипотенциальности одномерного движения имеют место соотношения:

$$w u_i = \partial \varphi / \partial x_i. \quad (4.1)$$

Для потенциала φ имеем в нашем случае дифференциальное соотношение

$$d\varphi = w u_4 dx_4 + w u_1 dx_1. \quad (4.2)$$

Введем переменную η , связанную со скоростями u_1 и u_4 следующим образом:

$$u_1 = \text{sh } \eta, \quad u_4 = i \text{ ch } \eta. \quad (4.3)$$

Произведем преобразование Лежандра к переменным w и η . Для потенциала χ относительно этих переменных имеем

$$d\chi = d(\varphi - w u_1 x_1 - w u_4 x_4) = -(x_1 \text{ sh } \eta + i x_4 \text{ ch } \eta) dw - \\ - (x_1 \text{ ch } \eta + i x_4 \text{ sh } \eta) w d\eta. \quad (4.4)$$

Из (4.4) следует

$$\begin{aligned} -\partial\chi / \partial w &= (x_1 \text{ sh } \eta + i x_4 \text{ ch } \eta); \\ -\partial\chi / \partial \eta &= w (x_1 \text{ ch } \eta + i x_4 \text{ sh } \eta). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Разрешим соотношения (4.5) относительно x_1 и x_4

$$i x_4 = -\frac{\partial\chi}{\partial w} \text{ ch } \eta + \frac{1}{w} \frac{\partial\chi}{\partial \eta} \text{ sh } \eta, \quad (4.6)$$

$$x_1 = \frac{\partial\chi}{\partial w} \text{ sh } \eta - \frac{1}{w} \frac{\partial\chi}{\partial \eta} \text{ ch } \eta. \quad (4.7)$$

Далее воспользуемся уравнением непрерывности для плотности частиц⁶

$$\frac{\partial n u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial n u_4}{\partial x_4} = 0, \quad (4.8)$$

в котором перейдем к переменным w и η . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x_1, x_4)}{\partial(w, \eta)} \left\{ \frac{\partial(n i \text{ ch } \eta, x_1)}{\partial(x_1, x_4)} - \frac{\partial(n \text{ sh } \eta, x_4)}{\partial(x_1, x_4)} \right\} &= \frac{\partial(n i \text{ ch } \eta, x_1)}{\partial(w, \eta)} - \frac{\partial(n \text{ sh } \eta, x_4)}{\partial(w, \eta)} = \\ &= \frac{\partial n}{\partial w} \left(i \text{ ch } \eta \frac{\partial x_1}{\partial \eta} - \text{sh } \eta \frac{\partial x_4}{\partial \eta} \right) + n \left(i \text{ sh } \eta \frac{\partial x_1}{\partial w} - \text{ch } \eta \frac{\partial x_4}{\partial w} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

При этом мы учитываем изоэнтропичность движения, благодаря чему плотность частиц n полностью определяется только одной переменной w . Подставим в (4.9) выражения (4.6) и (4.7) для x_4 и x_1 , после чего получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial w} \left\{ i \text{ ch } \eta \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial \eta \partial w} \text{ sh } \eta + \frac{\partial \chi}{\partial w} \text{ ch } \eta - \frac{1}{w} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \eta^2} \text{ ch } \eta - \frac{1}{w} \frac{\partial \chi}{\partial \eta} \text{ sh } \eta \right) + \right. \\ \left. + i \text{ sh } \eta \left(-\frac{\partial^2 \chi}{\partial w \partial \eta} \text{ ch } \eta - \frac{\partial \chi}{\partial w} \text{ sh } \eta + \frac{1}{w} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \eta^2} \text{ sh } \eta + \frac{1}{w} \frac{\partial \chi}{\partial \eta} \text{ ch } \eta \right) \right\} + \\ + n \left\{ i \text{ sh } \eta \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial w^2} \text{ sh } \eta - \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{1}{w} \frac{\partial \chi}{\partial \eta} \right) \text{ ch } \eta \right) + \right. \\ \left. + i \text{ ch } \eta \left(-\frac{\partial^2 \chi}{\partial w^2} \text{ ch } \eta + \frac{\partial}{\partial w} \left(\frac{1}{w} \frac{\partial \chi}{\partial \eta} \right) \text{ sh } \eta \right) \right\}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Отсюда после несложных преобразований окончательно находим

$$\frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial w} \left\{ \frac{\partial \chi}{\partial w} - \frac{1}{w} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \eta^2} \right\} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial w^2} = 0. \quad (4.11)$$

Согласно [3] скорость звука в релятивистской гидродинамике определяется соотношением

$$c^2 = \frac{n}{w} \frac{\partial w}{\partial n}. \quad (4.12)$$

⁶ В ультрарелятивистском случае вместо этого уравнения используем уравнение непрерывности для энтропии S . В этом случае во всех формулах необходимо n заменить на S , а w на T (см. раздел 1).

Введем вместо w переменную $y = \ln w$. Учитывая (4.12), уравнение (4.11) можно переписать в виде

$$c^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} - (1 - c^2) \frac{\partial \chi}{\partial y} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial \eta^2} = 0. \quad (4.13)$$

В дальнейшем мы рассмотрим ультрарелятивистский случай, когда имеет место уравнение состояния $\varepsilon = 3p$. Согласно (1.14) и (4.12) скорость звука в этом случае равна

$$c^2 = \frac{S}{T} \frac{\partial T}{\partial S} = \frac{1}{3}, \quad (4.14)$$

а, следовательно, одномерное нестационарное движение жидкости описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial \chi}{\partial y} + 3 \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = 0, \quad (4.15)$$

где $y = \ln T$.

Рассмотрим задачу об одномерном движении плоского бесконечного слоя толщины $2l$, разлетающегося в вакууме. Мы будем интересоваться уже той стадией разлета, когда имеются две области — область автомодельного движения, описываемого простой волной, и область нетривиального движения, граничащая с одной стороны с областью автомодельного движения, а с другой стороны, ограниченная неподвижной стенкой $x_1 = -l$.

Выясним граничные условия, которые должны выполняться для потенциала χ на границе нетривиальной области. Поскольку разлет происходит симметрично относительно $x_1 = -l$, то мы ограничимся только изучением правой половины ($x_1 > -l$). Очевидно, что при $x_1 = -l$ жидкость должна быть неподвижна, и поэтому $\eta = 0$. Это граничное условие согласно (4.5) записывается в следующем виде:

$$(\partial \chi / \partial \eta)_{\eta=0} = l e^{-y}. \quad (4.16)$$

Далее, в области автомодельного решения имеем

$$x_1 = i x_4 \frac{c-v}{1-vc} + f(v) \left(v = \frac{u_1}{u_4} \right). \quad (4.17)$$

Подставим в (4.17) выражения (4.6) и (4.7) для x_1 и $i x_4$, кроме того, выразим v через η :

$$v = \text{th } \eta. \quad (4.18)$$

Имеем

$$\left(\frac{\partial \chi}{\partial w} \text{sh } \eta - \frac{1}{w} \frac{\partial \chi}{\partial \eta} \text{ch } \eta \right) = \frac{c - \text{th } \eta}{1 - c \text{th } \eta} \left(- \frac{\partial \chi}{\partial w} \text{ch } \eta + \frac{1}{w} \frac{\partial \chi}{\partial \eta} \text{sh } \eta \right) + f(\eta). \quad (4.19)$$

Далее, после несложных преобразований находим

$$\frac{\partial \chi}{\partial w} w c - \frac{\partial \chi}{\partial \eta} = f(\eta) \text{ch } \eta (1 - c \text{th } \eta) w. \quad (4.20)$$

В области автомодельного движения величины η и w связаны соотношением [3]

$$\eta + (\ln w) / c = \text{const}, \quad (4.21)$$

поэтому левую часть (4.20) можно записать в виде полной производной

$$\frac{\partial \chi}{\partial \eta} = \left(\frac{\partial \chi}{\partial w} w c - \frac{\partial \chi}{\partial \eta} \right) = f(\eta) \text{ch } \eta (1 - c \text{th } \eta) w(\eta). \quad (4.22)$$

Функция $f(\eta)$ зависит только от выбора шкалы x_1 , при нашем выборе начала отсчета она равна нулю. Таким образом второе условие запишется в виде ⁷

$$\chi = 0 \text{ при } \eta + (\ln T)/c = 0. \quad (4.23)$$

Введем вместо потенциала χ потенциал $\bar{\chi}$

$$\chi = \bar{\chi} e^{-y} \quad (4.24)$$

и в качестве переменных выберем η и величину

$$\mu = -\eta - y/c \quad (c = 1/\sqrt{3}). \quad (4.25)$$

В новых переменных уравнение для $\bar{\chi}$ и граничные условия приобретают вид

$$\left(6 \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \mu} - 3 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - 1\right) \bar{\chi} = 0; \quad (4.26)$$

$$\bar{\chi} = 0 \text{ при } \mu = 0; \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial \bar{\chi}}{\partial \eta} - \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial \mu} = -l e^{-2\mu/\sqrt{3}} \text{ при } \eta = 0. \quad (4.28)$$

Произведем преобразование Лапласа по переменной μ

$$\psi = \int \bar{\chi}(\mu) e^{-\mu q} d\mu. \quad (4.29)$$

Уравнение (4.26) переходит в

$$6q \frac{\partial \psi}{\partial \eta} - 3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - \psi = 0, \quad (4.30)$$

а граничные условия в

$$\frac{\partial \psi}{\partial \eta} - q\psi = -l \frac{1}{q + (2/\sqrt{3})} \quad (\eta = 0). \quad (4.31)$$

Решение уравнения (4.30), удовлетворяющее граничному условию (4.31) и ведущее себя надлежащим образом при $\eta \rightarrow \infty$, имеет следующий вид

$$\psi = l \frac{\exp \{(q - \sqrt{q^2 - 1/3}) \eta\}}{\sqrt{q^2 - 1/3} (q + 2/\sqrt{3})}. \quad (4.32)$$

Согласно формуле обращения, для преобразования Лапласа имеем

$$\begin{aligned} \bar{\chi} &= \int \psi e^{\mu q} dq = l \int \frac{\exp \{(q - \sqrt{q^2 - 1/3}) \eta\} e^{\mu q}}{\sqrt{q^2 - 1/3} (q + 2/\sqrt{3})} dq = \\ &= l \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{\exp \{-\sqrt{q^2 - 1/3} \eta\} \exp \{-yq\sqrt{3}\}}{\sqrt{q^2 - 1/3} (q + 2/\sqrt{3})} dq \quad (\operatorname{Re} q < x). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Интеграл в (4.33) берется в комплексной области таким образом, чтобы все полюсы подинтегрального выражения лежали левее прямой, вдоль которой производится интегрирование.

Оригиналы для каждого из множителей в интеграле (4.33) известны, именно

⁷ Потенциал χ определяется с точностью до постоянной. Начальное значение температуры T полагаем равным единице.

$$\bar{\chi}_1 = \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{1}{q+2/\sqrt{3}} e^{-\sqrt{3}yq} dq = e^{2y};$$

$$\bar{\chi}_2 = \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{e^{-\sqrt{3}yq}}{Vq^2-1/3} e^{-y\sqrt{3}q} dq = I_0(\sqrt{y^2-\eta^2/3}) U(-y-\eta/\sqrt{3}); \quad (4.34)$$

I_0 — функция Бесселя мнимого аргумента.

В этих интегралах

$$U(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 1/2, & t = 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Согласно теореме Бореля имеем

$$\bar{\chi} = \int \bar{\chi}_1(y+y') \bar{\chi}_2(-y') dy' = \int_{\eta/\sqrt{3}}^{-y} e^{2(y+y')} I_0(\sqrt{y'^2-\eta^2/3}) dy'. \quad (4.35)$$

Таким образом окончательно потенциал χ , удовлетворяющий необходимым в задаче граничным условиям, равен

$$\chi = e^y \int_{\eta/\sqrt{3}}^{-y} e^{2y'} I_0(\sqrt{y'^2-\eta^2/3}) dy'. \quad (4.36)$$

При помощи потенциала (4.36) из соотношений (4.5) можно найти зависимость всех величин (y и η) от x_1 и x_4 при одномерном разлете. В поздней стадии разлета, когда y и η велики, можно для I_0 воспользоваться асимптотическим представлением, после чего несложные вычисления дают следующий результат:

$$\eta = 1/2(\ln \beta - \ln \alpha), \quad y = -1/3(\ln \beta + \ln \alpha - \sqrt{\ln \beta \ln \alpha}), \quad (4.37)$$

$$\beta = x_1 - ix_4, \quad \alpha = x_1 + ix_4.$$

Решение (4.37) было впервые найдено Ландау [2]. При помощи асимптотического выражения для функции I_0 можно найти решение задачи с точностью большей, чем логарифмическая, которая имеет решение (4.37); при этом оказывается, что решение (4.37) в применении к конкретным случаям соударений ядер для энергий порядка 10 BeV дает результат, верный лишь по порядку величины.

Выражаю глубокую благодарность акад. Л. Д. Ландау за участие в обсуждении затронутых в работе вопросов. Я хотел бы также отметить весьма полезную дискуссию с безвременно скончавшимся С. П. Дьяковым.

Институт физических проблем
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
7 января 1954 г.

Литература

- [1] E. Fermi. Progr. Theor. Phys., 5, 570, 1950; Phys., Rev., 81, 683, 1951.—
[2] Л. Д. Ландау. Изв. АН СССР, сер. физ., 17, 51, 1953.—[3] Л. Д. Ландау
и Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред, изд. 2-е, ГТТИ, 1953.—[4] A. Taub.
Phys. Rev., 74, 328, 1948.

ОБ ЭЛЕКТРОАКУСТИЧЕСКИХ ВОЛНАХ В ГАЗОРАЗРЯДНОЙ ПЛАЗМЕ

М. В. Конюков и Я. П. Терлецкий

На основе системы гидродинамических уравнений для электронного и ионного газов и уравнений электродинамики решается задача о распространении электроакустических волн в плазме. Показано, что при учете трения о нейтральный газ и рождения частиц вследствие ионизации в цилиндрически-симметричном разряде могут существовать два типа бегущих вдоль оси разрядной трубки волн — электронные и ионные. Электронные волны оказываются быстро затухающими, а ионные — как затухающими, так и усиливающимися.

1. При решении задачи о распространении возмущений плотности электронов и ионов как методом кинетических уравнений (Власов [1], Климонтович [2] и другие), так и гидродинамическим методом (Лэнгмюр [3], Томсон [4], Шуман [5] и другие) не уделялось достаточного внимания учету трения электронов и ионов и совсем пренебрегалось рождением частиц. В некоторых работах (Логунов [6], Широков [7]) хотя и рассматривались как трение, так и ионизация, однако связанные с ними эффекты не анализировались достаточно полно. Поэтому представляет интерес рассмотрение задачи о распространении возмущения с учетом этих факторов и установление степени их влияния на процессы распространения возмущения плотности электронов и ионов.

Вследствие трудностей, возникающих при решении этой задачи методом кинетического уравнения, мы пользуемся гидродинамическим приближением, при котором газоразрядная плазма рассматривается как совокупность трех взаимно проникающих идеальных газов, взаимодействие между которыми осуществляется как через парные столкновения, приводящие к возникновению трения электронов и ионов о нейтральный газ, так и через самосогласованное поле, вызывающее появление дополнительной электрической силы, действующей на электроны и ионы. Учет рождения частиц вследствие ионизации произведен введением в правую часть уравнения непрерывности члена, пропорционального плотности, который учитывает массу частиц, родившихся в единице объема в единицу времени. Рекомбинацией внутри объема пренебрегаем [8], но считаем, что она происходит главным образом на стенках, что приводит к граничному условию, состоящему в допущении равенства электронного и ионного потоков на стенку [9]. Хаотические составляющие скорости, существующие наряду с направленными, учитываются введением температуры для электронного, ионного и нейтрального газов, что предполагает наличие для каждого из них максвелловского распределения по скоростям с соответствующими параметрами.

При указанных выше условиях, а также при предположении отсутствия внутреннего трения и работы внешних сил давления, уравнения гидродинамики соответственно для электронного и ионного идеальных газов записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma^-}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\sigma^- v_\alpha^-) &= Z^- \sigma^-; \\
\frac{\partial}{\partial t} (\sigma^- v_\alpha^-) + \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\sigma^- v_\alpha^- v_\beta^-) &= - \frac{\partial p^-}{\partial x_\alpha} + \frac{e \sigma^-}{m^-} E_\alpha - \alpha_- \sigma^- (v_\alpha^- - v_\alpha^0); \\
\frac{\partial}{\partial t} (\sigma^- \varepsilon^-) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\sigma^- \varepsilon^- v_\alpha^-) &= k_- \frac{\partial^2 \Theta^-}{\partial x_\alpha^2} + \\
+ \gamma \frac{e}{m^-} \sigma^- E_\alpha v_\alpha^- - \beta_- (\Theta^- - \Theta^0) - \sum_{i=1}^h \varepsilon_i \frac{\sigma^-}{m^-} f_i; \\
p^- &= (\Theta^- / m^-) \sigma^-; \\
\frac{\partial \sigma^+}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\sigma^+ v_\alpha^+) &= Z^+ \sigma^+; \\
\frac{\partial}{\partial t} (\sigma^+ v_\alpha^+) + \frac{\partial}{\partial x_\beta} (\sigma^+ v_\alpha^+ v_\beta^+) &= - \frac{\partial p^+}{\partial x_\alpha} - \frac{e \sigma^+}{m^+} E_\alpha - \alpha_+ \sigma^+ (v_\alpha^+ - v_\alpha^0); \\
\frac{\partial}{\partial t} (\sigma^+ \varepsilon^+) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\sigma^+ \varepsilon^+ v_\alpha^+) &= k_+ \frac{\partial^2 \Theta^+}{\partial x_\alpha^2} + \gamma_1 \frac{e}{m^+} \sigma^+ E_\alpha v_\alpha^+ - \beta_+ (\Theta^+ - \Theta^-), \\
p^+ &= (\Theta^+ / m^+) \sigma^+,
\end{aligned} \tag{1}$$

где σ^- , v_α^- , m^- , p^- , Θ^- — плотность, компонента скорости, масса частиц, парциальное давление и температура, умноженная на постоянную Больцмана для электронного газа; α_- — коэффициент трения электронов о нейтральный газ, отнесенный к единице массы; k_- — коэффициент теплопроводности для электронов; Z^- — число частиц, рождающихся в одну секунду на частицу данного рода; β_- — коэффициент, определяющий теплообмен между электронами и нейтральным газом в данной точке; γ — величина, определяющая часть работы сил поля, идущую на нагревание электронного газа; те же символы, но со знаком плюс используются для обозначения соответствующих величин для газа положительных ионов; v_α^0 — компонента скорости

нейтрального газа; член $-\sum_{i=1}^h \varepsilon_i \frac{\sigma^-}{m^-} f_i^-$ учитывает потери тепловой энергии электронного газа на неупругие соударения. Поле E_α , входящее в уравнения сохранения импульса, определяется из уравнений Максвелла для статического случая:

$$\frac{\partial E_\alpha}{\partial x_\alpha} = 4\pi e \left(\frac{\sigma^-}{m^-} - \frac{\sigma^+}{m^+} \right); \quad \frac{\partial E_i}{\partial x_h} - \frac{\partial E_h}{\partial x_i} = 0. \tag{2}$$

2. Учитывая известные трудности нелинейных уравнений гидродинамики, мы рассмотрим лишь задачу о распространении малых возмущений вдоль оси разрядной трубки, при отсутствии вихревых движений и уходе частиц на стенку посредством их диффузии, а также при условии, что газы изотермичны, а нейтральный газ, кроме того, еще и неподвижен. Предположения эти позволяют не рассматривать уравнения энергии, считать $v_\alpha^0 = 0$ и опустить в уравнениях для импульса члены вида $\frac{\partial}{\partial x_\beta} (\sigma^- v_\alpha^- v_\beta^-)$ [10], после чего в цилиндрической системе координат, ось Oz которой совпадает с осью трубки, рассматриваемая система уравнений записывается так:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma^-}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma^- v_r^-) + \frac{\partial}{\partial z} (\sigma^- v_z^-) &= Z^- \sigma^-; \\
\frac{\partial}{\partial t} (\sigma^- v_r^-) &= -\frac{\Theta^-}{m^-} \frac{\partial \sigma^-}{\partial r} + \frac{e}{m^-} \sigma^- E_r - \alpha_- \sigma^- v_r^-; \\
\frac{\partial}{\partial t} (\sigma^- v_z^-) &= -\frac{\Theta^-}{m^-} \frac{\partial \sigma^-}{\partial z} + \frac{e}{m^-} \sigma^- E_z - \alpha_- \sigma^- v_z^-; \\
\frac{\partial \sigma^+}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma^+ v_r^+) + \frac{\partial}{\partial z} (\sigma^+ v_z^+) &= Z^+ \sigma^+; \\
\frac{\partial}{\partial t} (\sigma^+ v_r^+) &= -\frac{\Theta^+}{m^+} \frac{\partial \sigma^+}{\partial r} - \frac{e}{m^+} \sigma^+ E_r - \alpha_+ \sigma^+ v_r^+; \\
\frac{\partial}{\partial t} (\sigma^+ v_z^+) &= -\frac{\Theta^+}{m^+} \frac{\partial \sigma^+}{\partial z} - \frac{e}{m^+} \sigma^+ E_z - \alpha_+ \sigma^+ v_z^+; \\
\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_r) + \frac{\partial E_z}{\partial z} &= 4\pi e \left(\frac{\sigma^-}{m^-} - \frac{\sigma^+}{m^+} \right).
\end{aligned} \tag{3}$$

3. Нулевым приближением для рассматриваемой системы уравнений мы считаем распределение постоянное по z и t , но зависящее от r . Система уравнений в этом случае при условии, что движение по r определяется в каждой точке значением электрического поля, создаваемого движущимися частицами, и градиентом плотности (так называемая амбиполярная диффузия), дает два уравнения, определяющие σ_0^- и σ_0^+ при наличии рождения частиц. Решение возникшей системы уравнений приводит к распределению по r в виде функций Бесселя нулевого порядка:

$$\frac{\sigma_0^-}{m^-} = N_0^- J_0 \left(\sqrt{\frac{z^-}{D_a}} r \right), \quad \frac{\sigma_0^+}{m^+} = N_0^+ J_0 \left(\sqrt{\frac{z^+}{D_a}} r \right), \tag{4}$$

где N_0^- и N_0^+ — равновесные значения плотности на оси разрядной трубки, а $D_a = \left(\frac{\Theta^-}{m^- \alpha_-} \frac{e}{m^+ \alpha_+} + \frac{\Theta^+}{m^+ \alpha_+} \frac{e}{m^- \alpha_-} \right) / \left(\frac{e}{m^- \alpha_-} + \frac{e}{m^+ \alpha_+} \right)$ — коэффициент амбиполярной диффузии [11, 12].

4. Первые приближения для плотности электронов и ионов ищем в виде

$$\frac{\sigma^-}{m^-} = \frac{\sigma_0^-}{m^-} (1 + n^-); \quad \frac{\sigma^+}{m^+} = \frac{\sigma_0^+}{m^+} (1 + n^+), \tag{5}$$

где σ_0^- и σ_0^+ — полученные ранее значения плотности электронов и ионов, зависящие только от r ; а n^- и n^+ — относительные отклонения от стационарного значения плотности, зависящие от r , Z и t , которые в нашем случае можно считать малыми по сравнению с единицей. Система уравнений для первого приближения получается из (3) с учетом (5). Исключение импульса и поля при пренебрежении бесконечно малыми второго порядка относительно n^+ и n^- и использование нулевого приближения дают систему уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 n^-}{\partial t^2} - \frac{\Theta^-}{m^-} \frac{\partial^2 n^-}{\partial z^2} + (\alpha_- - Z^-) \frac{\partial n^-}{\partial t} - \frac{\Theta^-}{m^-} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial n^-}{\partial r} \right) - \\
- 2 \frac{\Theta^-}{m^-} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\sigma_0^-}{m^-} \right) / \frac{\sigma_0^-}{m^-} \right] \frac{\partial n^-}{\partial r} + \frac{4\pi e^2}{m^-} \frac{\sigma_0^-}{m^-} n^- = \frac{4\pi e^2}{m^-} \frac{\sigma_0^+}{m^+} n^+; \\
\frac{\partial^2 n^+}{\partial t^2} - \frac{\Theta^+}{m^+} \frac{\partial^2 n^+}{\partial z^2} + (\alpha_+ - Z^+) \frac{\partial n^+}{\partial t} - \frac{\Theta^+}{m^+} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial n^+}{\partial r} \right) - \\
- 2 \frac{\Theta^+}{m^+} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\sigma_0^+}{m^+} \right) / \frac{\sigma_0^+}{m^+} \right] \frac{\partial n^+}{\partial r} + \frac{4\pi e^2}{m^+} \frac{\sigma_0^+}{m^+} n^+ = \frac{4\pi e^2}{m^+} \frac{\sigma_0^-}{m^-} n^-.
\end{aligned} \tag{6}$$

Отыскание точных решений полученной системы представляется затруднительным. Мы исследуем лишь упрощенную систему, в которой стационарное распределение плотностей, зависящее от r , заменяется некоторым усредненным распределением, т. е. мы полагаем, что плотности не зависят от r и равны соответственно $\overline{\sigma_0^-}/m^-$ и $\overline{\sigma_0^+}/m^+$. Тогда, в соответствии с условием квазинейтральности, положим

$$\begin{aligned}\omega_e^2 &= 4\pi e^2 \frac{\overline{\sigma_0^-}}{m^-} / m^- = 4\pi e^2 \frac{\overline{\sigma_0^+}}{m^+} / m^-; \\ \omega_i^2 &= 4\pi e^2 \frac{\overline{\sigma_0^+}}{m^+} / m^+ = 4\pi e^2 \frac{\overline{\sigma_0^-}}{m^-} / m^+, \end{aligned}$$

где ω_e^2 и ω_i^2 — квадраты собственных частот электронных и ионных колебаний, определяемые этими средними плотностями. Отыскивая решение системы (6) со средними плотностями в виде:

$$n^- = n_1^- J_0\left(\frac{2,4}{R} r\right) e^{i\omega t - i k z}, \quad n^+ = n_0^+ J_0\left(\frac{2,4}{R} r\right) e^{i\omega t - i k z}, \quad (7)$$

получаем в качестве условия для ее не нулевых решений следующую зависимость между ω и k :

$$\begin{aligned} & \left[-\omega^2 + \frac{\Theta^-}{m^-} k^2 + i\omega(\alpha_- - Z^-) - \left(\frac{2,4}{R}\right)^2 \frac{\Theta^-}{m^-} + \omega_e^2 \right] \times \\ & \times \left[-\omega^2 + \frac{\Theta^+}{m^+} k^2 + i\omega(\alpha_+ - Z^+) - \left(\frac{2,4}{R}\right)^2 \frac{\Theta^+}{m^+} + \omega_i^2 \right] = \omega_e^2 \omega_i^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Если учесть, что в условиях эксперимента мы имеем дело с достаточно большими радиусами

$$\frac{\Theta^-}{m^-} \left(\frac{2,4}{R}\right)^2 \ll \omega_e^2 \quad \text{и} \quad \frac{\Theta^+}{m^+} \left(\frac{2,4}{R}\right)^2 \ll \omega_i^2,$$

то с достаточной степенью приближения уравнение (8) можно записать

$$\begin{aligned} & \left[k^2 - \frac{m^-}{\Theta^-} \left(\omega^2 - \omega_e^2 - i\omega(\alpha_- - Z^-) \right) \right] \left[k^2 - \frac{m^+}{\Theta^+} \left(\omega^2 - \omega_i^2 - i\omega(\alpha_+ - Z^+) \right) \right] = \\ & = \frac{m^-}{\Theta^-} \omega_e^2 \frac{m^+}{\Theta^+} \omega_i^2. \end{aligned} \quad (8')$$

Связь между n_0^+ и n_0^- , соответствующая этому приближению, определяется равенствами:

$$\begin{aligned} n_0^+ &= \omega_i^2 n_0^- / \left[\frac{\Theta^+}{m^+} k^2 - \omega^2 + \omega_i^2 + i\omega(\alpha_+ - Z^+) \right], \\ n_0^- &= \omega_e^2 n_0^+ / \left[\frac{\Theta^-}{m^-} k^2 - \omega^2 + \omega_e^2 + i\omega(\alpha_- - Z^-) \right], \end{aligned} \quad (9)$$

легко сводящимися одно к другому при помощи (8').

Записываем уравнение (8) в виде

$$(k^2 - a)(k^2 - b) = c, \quad (10)$$

откуда

$$k_{1,2}^2 = \frac{a+b}{2} \pm \frac{a-b}{2} \sqrt{1 + \frac{4c}{(a-b)^2}}, \quad (11)$$

где

$$a = \frac{m^-}{\Theta^-} [\omega^2 - \omega_e^2 - i\omega(\alpha_- - Z^-)]; \quad b = \frac{m^+}{\Theta^+} [\omega^2 - \omega_i^2 - i\omega(\alpha_+ - Z^+)];$$

$$c = \frac{m^-}{\Theta^-} \omega_e^2 \frac{m^+}{\Theta^+} \omega_i^2.$$

Так как $(a - b)^2$ по порядку определяется четвертой степенью частоты ω_e , а c — произведением $\omega_e^2 \omega_i^2$, то $4c/(a - b)^2$ мало [4]. Разложив корень в ряд и удерживая члены, не зависящие от $4c/(a - b)^2$, получаем в прежних обозначениях

$$k^2 - \frac{m^-}{\Theta^-} [\omega^2 - \omega_e^2 - i\omega(\alpha_- - Z^-)] = 0,$$

$$k^2 - \frac{m^+}{\Theta^+} [\omega^2 - \omega_i^2 - i\omega(\alpha_+ - Z^+)] = 0. \quad (12)$$

Легко видеть, что уравнения (12) могут быть получены как решения уравнений (7), если пренебречь в них правыми частями, т. е. рассматривать ионные колебания на стационарном электронном фоне, а электронные колебания на стационарном ионном фоне.

Соответственно этому будем называть ионными волны, определяемые вторым уравнением (12), а электронными — волны, определяемые первым уравнением (12).

5. Первое из уравнений (12) дает волновой вектор электронной волны как функцию частоты и параметров разряда

$$k = \pm \sqrt{\frac{m^-}{\Theta^-}} \left\{ \sqrt{\frac{(\omega^2 - \omega_e^2) + \sqrt{(\omega^2 - \omega_e^2) + \omega^2(\alpha_- - Z^-)^2}}{2}} - \right.$$

$$\left. - i \sqrt{\frac{V(\omega^2 - \omega_e^2)^2 + \omega^2(\alpha_- - Z^-)^2 - (\omega^2 - \omega_e^2)}{2}} \right\}. \quad (13)$$

Комплексность волнового вектора указывает на возможность как усиления, так и затухания волн в зависимости от знака мнимой части, определяемого, в свою очередь, знаком разности $(\alpha_- - Z^-)$. Для электронного газа знак этой разности всегда положителен, так как α_- — величина порядка полного числа электронных столкновений с молекулами нейтрального газа, а Z^- — лишь порядка ионизирующих столкновений, и поэтому для электронного газа возможны лишь затухающие волны. Например, для неона при давлении 6 мм рт. ст. $\alpha_- \approx 10^8 - 10^9$ сек.⁻¹, тогда как $Z^- \approx 10^5$ сек.⁻¹. Для оценки степени затухания рассмотрим отношения амплитуд по прохождении волной расстояния, равного длине волны; оно определяется выражением:

$$\delta = 2\pi \sqrt{\frac{\sqrt{1 + [\omega^2(\alpha_- - Z^-)^2 / (\omega^2 - \omega_e^2)^2]} - 1}{\sqrt{1 + [\omega^2(\alpha_- - Z^-)^2 / (\omega^2 - \omega_e^2)^2]} + 1}}. \quad (14)$$

(6) В отличие от работ [3, 4], в которых не производится учета трения и рождения частиц, мы приходим к выводу о возможности существования волн в любом диапазоне частот, но для $\omega < \omega_e$ выражения (для волнового вектора и степени затухания на одной длине волны принимают вид:

$$k = \pm \sqrt{\frac{m^-}{\Theta^-}} \left\{ \sqrt{\frac{V(\omega_e^2 - \omega^2)^2 + \omega^2(\alpha_- - Z^-)^2 - (\omega_e^2 - \omega^2)}{2}} - i \sqrt{\frac{V(\omega_e^2 - \omega^2)^2 + \omega^2(\alpha_- - Z^-)^2 + (\omega_e^2 - \omega^2)}{2}} \right\}, \quad (15)$$

$$\delta = 2\pi \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \left| \frac{\omega^2(\alpha_- - Z^-)^2}{(\omega_e^2 - \omega^2)^2} \right|} + 1}{\sqrt{1 + \left| \frac{\omega^2(\alpha_- - Z^-)^2}{(\omega_e^2 - \omega^2)^2} \right|} - 1}}.$$

Возникшая таким образом электронная волна имеет электронную и ионную компоненты, амплитуды которых, согласно (9), связаны соотношением

$$n_0^+ = \frac{\omega_i^2 n_j^-}{(\Theta^+ / m^+) k^2 - \omega^2 + \omega_i^2 + i\omega(\alpha_+ - Z^+)}. \quad (16)$$

6. Второе из уравнений (12) дает волновой вектор ионной волны как функцию частоты и параметров разряда

$$k = \pm \sqrt{\frac{m^+}{\Theta^+}} \left\{ \sqrt{\frac{(\omega^2 - \omega_i^2)^2 + V(\omega^2 - \omega_i^2)^2 + \omega^2(\alpha_+ - Z^+)^2}{2}} - i \sqrt{\frac{V(\omega^2 - \omega_i^2)^2 + \omega^2(\alpha_+ - Z^+)^2 - (\omega^2 - \omega_i^2)}{2}} \right\}. \quad (17)$$

Рассмотрение выражения для волнового вектора позволяет сделать заключение о возможности существования волны при любых ω , но в отличие от электронной волны, ионные волны могут быть незатухающими и даже усиливающимися. Величина $(\alpha_+ - Z^+)$, определяющая знак у мнимой части k , может быть и положительной, и отрицательной в условиях разряда, так как α_+ — порядка числа упругих столкновений положительного иона с нейтральными атомами в 1 сек., а Z^+ — порядка числа ионизующих столкновений электрона в 1 сек. В силу того что тепловая скорость электрона значительно больше тепловой скорости иона, могут существовать условия, когда число ионизующих столкновений электрона будет больше полного числа столкновений положительного иона.

Возникшая ионная волна имеет ионную и электронную компоненты, амплитуды которых, согласно (9), связаны соотношением

$$n_0^- = \frac{\omega_e^2 n_0^+}{(\Theta^- / m^-) k^2 - \omega^2 + \omega_e^2 + i\omega(\alpha_- - Z^-)}, \quad (18)$$

а сдвиг фаз между ними

$$\varphi = \arctg \left\{ - \frac{\omega(\alpha_- - Z^-)}{(\Theta^- / m^-) k^2 - \omega^2 + \omega_e^2} \right\}. \quad (19)$$

7. Итак, при гидродинамическом рассмотрении задачи о распространении синусоидальных возмущений плотности показана возможность существования электронных и ионных волн, которые должны быть отнесены к типу электроакустических.

Электроакустические электронные волны плотности оказываются всегда затухающими, но возможными для любых частот. Величина затухания зависит от параметров разряда и частоты, и для частот, меньших лэнгмюровской, настолько велика, что электронные волны практически можно считать невозможными; для частот, больших лэнгмюровской, затухание уменьшается, стремясь к нулю при увеличении ω до бесконечности.

Электроакустические ионные волны плотности также возможны для любых частот и в зависимости от параметров разряда могут оказаться затухающими, незатухающими и даже усиливающимися.

Возможность существования незатухающих и усиливающихся волн реализуется в экспериментальных условиях; так, например, для ртути при давлении 0,3 мм рт. ст. и токе 0,3 мА $\alpha_+ \approx 10^5 \text{ сек.}^{-1}$, тогда как $Z^+ \approx 10^5 \text{ сек.}^{-1}$, т. е. $\alpha_+ - Z^+ \approx 0$.

Особый интерес представляет рассмотрение разряда при наличии ступенчатой ионизации, сильно влияющей на величину Z^+ и почти не влияющей на α_+ .

Рассмотрение вопроса показало, что в газовом разряде невозможно распространение продольных электронных волн, и при решении задачи о поведении низкочастотных возмущений электронной плотности их можно считать диффузионно рассасывающимися, в то время как продольные ионные волны плотности оказываются возможными, и, видимо, они и определяют распространение по разряду возмущений плотности электрического заряда.

В заключение выражаем глубокую благодарность А. А. Зайцеву за консультации и ценные советы.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
28 декабря 1953 г.

Литература

- [1] А. А. Власов. ЖЭТФ, 8, 291, 1938. — [2] Ю. Л. Климонтович. ЖЭТФ, 21, 1284, 1292, 1951. — [3] I. Langmuir a. L. Tonks. Phys. Rev., 33, 195, 1929. — [4] J. J. Thomson a. G. P. Thomson. Conduction of Electricity in Gases, London, Cambridge University Press, 1933, т. 2, стр. 353. — [5] O. W. Schumann. ZS. f. Phys., 121, 7, 1943. — [6] А. А. Логунов. ЖЭТФ, 20, 458, 1950. — [7] М. Ф. Широков. ДАН СССР, 89, 837, 1953. — [8] И. Лэнгмюр и Р. Комптон. Усп. физ. наук, 2, 9, 1931. — [9] W. Schottky. Phys. ZS., 25, 342, 1924. — [10] С. Л. Соболев. Уравнения математической физики, ГТТИ, М. — Л., 1946, стр. 23. — [11] Г. В. Спивак и Е. Л. Столярова. Вестн. МГУ, 5, 31, 1952. — [12] W. Schottky. Phys. ZS., 25, 637, 1924.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СЛАБО-НЕИДЕАЛЬНОГО
ЭЛЕКТРОННОГО ГАЗА

Г. Е. Зильберман

Рассмотрены условия, при которых взаимодействие электронов может считаться возмущением, а также вопрос о выборе оператора возмущения. При $T=0$ найдена свободная энергия слабо-неидеального электронного газа, и вычислена его магнитная восприимчивость. Показано, что период осцилляции последней зависит от химического потенциала не так, как для невзаимодействующих электронов. Конкретный вид этой зависимости, получаемый в работе, позволяет определить закон дисперсии квазичастиц при $T=0$ вблизи границы распределения Ферми и распространить теорию на случай близкой к нулю температуры.

В то время как свойства идеального электронного газа исследованы очень подробно [1-4]¹, до сих пор еще не были рассмотрены магнитные свойства взаимодействующих электронов в кристалле. Как известно, при низких температурах (в частности, и при $T=0$) магнитная восприимчивость χ электронного газа осциллирует с изменением напряженности магнитного поля. При количественном сравнении теории с опытом численные значения предельной энергии Ферми E_0 и эффективной массы электронов оказываются значительно (в десятки и сотни раз) меньшими обычного значения E_0 и массы свободного электрона, что пока еще не нашло объяснения. Представляет поэтому интерес выяснить, как влияет на основные сравниваемые с опытом величины учет взаимодействия электронов. Проще всего это сделать при $T=0$ и, так как период осцилляции χ не зависит от температуры, можно рассчитывать получить сведения, относящиеся не только к $T=0$. Взаимодействие электронов мы будем считать слабым возмущением. В разделе 1 будет показано, как следует выбрать оператор возмущения.

Ниже под «свободными» будут пониматься только электроны, находящиеся в верхней энергетической зоне, существование остальных электронов игнорируется (они включаются в ионные оболочки). Далее, периодическое поле решетки будет учтено только путем введения эффективной массы. Принимаемый таким образом квадратичный закон дисперсии существен для наших выводов.

Если при данной концентрации температура настолько низка, что распределение «свободных» электронов близко к имеющему место при $T=0$, то большинство электронов имеет энергию порядка предельной энергии Ферми E_0 . Поэтому именно с E_0 и следует сравнивать энергию взаимодействия. Мы покажем, что относительная малость возмущения в этом смысле (при квадратичном законе дисперсии) достигается не при малой концентрации электронов, как это часто принимают, а при большой (см. также [6], стр. 186). Этот вывод несправедлив при высоких температурах, а также при некоторых специальных законах дисперсии.

¹ Кроме того, рассмотрено поведение электронов в магнитном поле при помощи полярной модели металла [5].

1. Выбор оператора возмущения

Поведение электронов в кристалле с закрепленными атомными остатками описывается гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \sum_i P_i^2 + \sum_i V_i^0(r_i) + \frac{1}{2} \sum'_{i,h} \frac{e^2}{r_{ih}}, \quad (1)$$

где

$$P_i = -i\hbar \nabla_i - \frac{e}{c} A_i.$$

Член $\sum_i V_i^0(r_i)$ — сумма взаимодействий электронов с атомными ос-

татками — не является периодическим², поскольку заряды одного (в данном случае положительного) знака не могут создать периодического поля (величина V_i^0 меняется по параболическому закону, на который накладываются периодические осцилляции). Добавим и

вычтем из (1) выражение $\sum_i e^2 \int \frac{nd\tau}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}$, где $n = N/V$ — постоянная

средняя плотность электронов в кристалле, N — полное число электронов, V — объем³. Обозначим

$$\sum_i V_i(r_i) = \sum_i V_i^0(r_i) + \sum_i e^2 \int \frac{nd\tau}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|}, \quad (2)$$

$$\frac{\epsilon}{2} \sum_{i,h} I(r_i, r_h) = \frac{1}{2} \sum'_{i,h} \frac{e^2}{r_{ih}} - \frac{1}{2} \sum_{i,h} \frac{e^2}{N} \int \frac{nd\tau}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|} - \frac{1}{2} \sum_{i,h} \frac{e^2}{N} \int \frac{nd\tau}{|\mathbf{r}_h - \mathbf{r}|}. \quad (3)$$

Здесь сумма (2) будет иметь периодичность кристаллической решетки и может быть записана как $\sum_{h,h} V_h e^{2\pi i h r h}$. Член взаимодействия (3)

такого периода не имеет. Запишем теперь (1) в виде:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^0 + \epsilon \mathcal{H}^{(1)} = \sum_i H_i^0 + \frac{\epsilon}{2} \sum_{i,h} I_{ih}. \quad (4)$$

В нулевом приближении положим $\epsilon = 0$, тогда $\mathcal{H} = \mathcal{H}^0$ описывает поведение системы невзаимодействующих электронов в периодическом поле кристалла и во внешнем магнитном поле⁴. Как было показано в [7], при небольшой амплитуде осцилляции периодического поля можно применять метод эффективной массы, чем мы и будем пользоваться.

2. О малости возмущения

Применяя теорию возмущений, мы должны будем вычислять матричные элементы возмущения $(\epsilon \mathcal{H}^{(1)})_{nm} = \int \Psi_n^* \epsilon \mathcal{H}^{(1)} \Psi_m d\tau$, где функции

² Вопреки часто делаемому утверждению.

³ Подобная же процедура принята в теории плазмы (см. известные работы по теории плазмы Л. Д. Ландау, А. А. Власова и других).

⁴ Заметим, что если отбросить взаимодействие уже в (1), мы не получим периодического поля.

Ψ_n и Ψ_m — антисимметризованные произведения одноэлектронных функций, а значки n и m описывают состояния всей системы. Нетрудно видеть, что, поскольку в $\mathcal{H}^{(1)}$ входит только парное взаимодействие, n и m могут отличаться не более, чем на два одноэлектронных состояния. Поэтому, если обозначить

$$\Phi_{12} = e^2 \left(\frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{N} \int \frac{nd\tau}{|r-r_1|} - \frac{1}{N} \int \frac{nd\tau}{|r-r_2|} \right), \quad (5)$$

то отличные от нуля матричные элементы будут

а) При $n = m$:

$$(\varepsilon \mathcal{H}^{(1)})_{nm} = \frac{1}{2} \sum_{i,h} \left\{ \int |\psi_i(1)|^2 |\psi_h(2)|^2 \Phi_{12} d\tau_1 d\tau_2 - \int \psi_i^*(1) \psi_h^*(2) \psi_i(2) \psi_h(1) \Phi_{12} d\tau_1 d\tau_2 \right\}. \quad (6)$$

Суммирование здесь и ниже ведется по всем заполненным состояниям.

б) При n и m , отличающихся на одно индивидуальное состояние:

$$(\varepsilon \mathcal{H}^{(1)})_{nm} = \sum_i \left\{ \int \psi_i^*(1) \varphi_1(1) |\psi_i(2)|^2 \Phi_{12} d\tau_1 d\tau_2 - \int \psi_i^*(1) \varphi_1(2) \psi_i^*(2) \psi_i(1) \Phi_{12} d\tau_1 d\tau_2 \right\}, \quad (7)$$

ψ_1 и φ_1 — отличные друг от друга индивидуальные состояния.

в) При n и m , отличающихся на два индивидуальных состояния:

$$(\varepsilon \mathcal{H}^{(1)})_{nm} = \int \psi_1^*(1) \psi_2^*(2) \varphi_1(1) \varphi_2(2) \Phi_{12} d\tau_1 d\tau_2 - \int \psi_1^*(1) \psi_2^*(2) \varphi_1(2) \varphi_2(1) \Phi_{12} d\tau_1 d\tau_2. \quad (8)$$

Как нетрудно видеть, в выражениях (7) и (8) можно считать

$$\Phi_{12} = e^2 \left(\frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{N} \int \frac{nd\tau}{|r-r_1|} \right). \quad (9)$$

Это же относится и к выражению (6), хотя оно при выборе возмущения в форме (9) будет отличаться от истинного постоянным членом $-\frac{1}{2} e^2 \int \frac{nn_1 d\tau d\tau_1}{|r-r_1|}$. Этот член, однако, несуществен и в точности сокращается с энергией равномерно распределенного по кристаллу ионного заряда, которую можно добавить к собственным значениям гамильтониана (1).

Оценка выражения

$$\sum_k \Phi_{1k} = e^2 \left(\sum_k \frac{1}{r_{1k}} - \int \frac{nd\tau}{|r-r_1|} \right) \quad (10)$$

может быть произведена без труда, если учесть, что в подавляющем большинстве элементарных ячеек кристалла число электронов всегда мало отличается от среднего (большие флуктуации заряда очень мало вероятны, так как требуют большой энергии). Эта оценка дает для (10) значение $\propto e^2 n^{1/2}$, где n — концентрация электронов. Последнюю величину можно записать еще как

$$e^2 n^{1/2} \approx 2 \sqrt{WE_0}. \quad (11)$$

где

$$W = \frac{me^4}{2\pi^2\hbar^3}, E_0 = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3n}{8\pi} \right)^{2/3}. \quad (12)$$

Величина W равна 1,37 eV, если m — масса свободного электрона. Малость (11) по сравнению с E_0 означает малость отношения

$$\sqrt{\frac{W}{E_0}} = \frac{me^2}{\pi^2\hbar^2} \left(\frac{\pi}{3n} \right)^{1/3}, \quad (13)$$

которое и следует считать малым параметром задачи⁵. Очевидно, (13) будут тем меньше, чем больше концентрация электронов и чем меньше эффективная масса m .

3. Энергия слабо взаимодействующих электронов при $T = 0$

В представлении вторичного квантования гамильтониан (4) имеет вид:

$$\mathcal{H} = \sum_{f\sigma} H^0(f, f) a_{f\sigma}^+ a_{f\sigma} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{f_1 f_2 f'_1 f'_2, \sigma_1 \sigma_2} I(f_1 f_2 f'_1 f'_2) a_{f_1 \sigma_1}^+ a_{f_2 \sigma_2}^+ a_{f'_1 \sigma_1} a_{f'_2 \sigma_2}, \quad (14)$$

где $f\sigma$ описывает индивидуальное состояние. Применяя теорию возмущений в отсутствие вырождения (при $T = 0$ вырождение отсутствует), получим

$$E = \sum_{f\sigma} H^0(f, f) n_{f\sigma} + \Delta E, \quad (15)$$

где

$$\Delta E = \sum_{(C, n_{f\sigma}, \dots)} (C^*, \varepsilon \mathcal{H}^{(1)} C). \quad (16)$$

В (16) C — волновые функции нулевого приближения в представлении вторичного квантования, а суммирование ведется по всем возможным наборам чисел заполнения ($\dots n_{f\sigma} \dots$). Поскольку

$$C = \prod_{f\sigma} \delta(n_{f\sigma} - n_{f\sigma}^0), \quad (17)$$

то матричный элемент $C^* a_{f_1 \sigma_1}^+ a_{f_2 \sigma_2}^+ a_{f'_1 \sigma_1} a_{f'_2 \sigma_2} C$ не обращается в нуль только, если $f'_1 = f_1$ и $f'_2 = f_2$ или если $f'_1 = f_2$, $f'_2 = f_1$ и $\sigma_1 = \sigma_2$. Учитывая перестановочные свойства операторов $a_{f\sigma}^+$ и $a_{f\sigma}$, а также то, что $a_{f\sigma}^+ a_{f\sigma} = n_{f\sigma}$, легко вычислить ΔE . Собственные значения оператора (14) в первом приближении теории возмущений будут равны

$$E = \sum_{f\sigma} H^0(f, f) + 2\varepsilon \sum_{f_1 f_2} I(f_1 f_2 f_1 f_2) - \varepsilon \sum_{f_1 f_2} I(f_1 f_2 f_2 f_1). \quad (18)$$

Здесь суммирование распространено на заполненные состояния, для которых $n_{f\sigma} = 1$.

В соответствии со сказанным в конце раздела мы должны выбрать индивидуальные функции в виде:

⁵ Можно непосредственно убедиться в том, что условие $W \ll E_0$ эквивалентно обычному критерию применимости теории возмущения (матричный элемент возмущения много меньше разности уровней невозмущенной системы).

$$\psi_f = \frac{1}{2L V \alpha_0} e^{i(k_1 x + k_3 z)} \varphi_n \left(\frac{y + \alpha_0^2 k_1}{\alpha_0} \right), \quad (19)$$

$$\alpha_0 = \sqrt{\hbar c / e H}, \quad f = (k_1 n k_3)$$

(φ_n — функция Чебышева — Эрмита), которому соответствуют собственные значения

$$E_f = \mu H \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2 k_3^2}{2m}; \quad \mu = \frac{e \hbar}{mc}, \quad (20)$$

$2L$ — размеры кристалла (который мы будем считать кубическим), в дальнейшем будем считать $L \rightarrow \infty$.

Поскольку возмущение определяется формулой (3), нетрудно видеть, что в (18) сумма кулоновских интегралов

$$2\varepsilon \sum I(f_1 f_2 f_1 f_2) = -\frac{1}{2} e^2 \int \frac{nn_1 d\tau d\tau_1}{|r - r_1|}$$

сокращается с кулоновской энергией размазанного по объему положительного заряда ионов $+\frac{1}{2} e^2 \int \frac{nn_1 d\tau d\tau_1}{|r - r_1|}$. Таким образом вычислению подлежат только сумма обменных интегралов $\varepsilon \sum I(f_1 f_2 f_2 f_1)$ и член нулевого приближения $\sum H^0(f, f)$. В обоих этих выражениях суммирование ведется по всем заполненным в нулевом приближении состояниям:

$$\sum_f \rightarrow \frac{L^2}{\pi^2} \int_{-L/\alpha_0^2}^{+L/\alpha_0^2} dk_1 \sum_{n=0}^{(E_0/\mu H) - 0,5} \int_{-k_{3 \text{ макс}}}^{+k_{3 \text{ макс}}} dk_3 \dots, \quad (21)$$

причем заполненными являются все состояния внутри параболического цилиндра $E_f = E(k_1 n k_3) = E_0$ [см. (20)]. Суммирование по k_1 ведется в границах от $-L/\alpha_0^2$ до $+L/\alpha_0^2$ [так как «положение равновесия» функции (19) должно, естественно, попасть в кристалл], по n от нуля до $(E_0/\mu H) - 0,5$ и по k_3

$$\text{от } -k_{3 \text{ макс}} = -\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \left(E_0 - \mu H \left(n + \frac{1}{2} \right) \right)} \text{ до } +k_{3 \text{ макс}}.$$

Мы опускаем здесь это очень громоздкое вычисление и приведем только его результат, в котором сохранены наибольшие члены, а остальные опущены. При $T = 0$:

$$E = \frac{(2m)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3} \left\{ \frac{3}{5} E_0^{5/2} + \frac{1}{32} (\mu H)^2 \sqrt{E_0} + \frac{3E_0 (\mu H)^{3/2}}{4\pi \sqrt{2}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \sin \left(\frac{2\pi p E_0}{\mu H} - \frac{\pi}{4} \right)}{p^{3/2}} + \right.$$

$$+ \frac{3(\mu H)^{5/2}}{8\pi^2 \sqrt{2}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \cos \left(\frac{2\pi p E_0}{\mu H} - \frac{\pi}{4} \right)}{p^{5/2}} - \frac{3}{5} \sqrt{W} E_0^2 -$$

$$\left. - \frac{3\sqrt{W} E_0}{5\pi \sqrt{2}} (\mu H)^{3/2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \sin \left(\frac{2\pi p E_0}{\mu H} - \frac{\pi}{4} \right)}{p^{3/2}} + \dots \right\}. \quad (22)$$

Первые четыре члена относятся к нулевому приближению, остальные представляют собой добавку. Видно, что отношение главных членов $\frac{3}{5} E_0^{5/2}$ и $\frac{3}{5} \sqrt{W} E_0^2$ равно $\sqrt{E_0 / W}$.

Кроме выражения для энергии (22), приведем еще выражение для полного числа заполненных состояний

$$N(E_0) = N(\zeta) = \frac{(2m)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3} \left\{ E_0^{3/2} - \frac{1}{32} (\mu H)^2 E_0^{-1/2} + \right. \\ \left. + \frac{3(\mu H)^{3/2}}{4\pi V^2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \sin\left(\frac{2\pi p E_0}{\mu H} - \frac{\pi}{4}\right)}{p^{3/2}} \right\}. \quad (23)$$

4. Термодинамические соотношения

Как известно [8], при наличии магнитного поля

$$dF = -SdT - pdV + \zeta dN - MdH, \quad (24)$$

где M — магнитный момент, F — свободная энергия, ζ — химический потенциал, который в отсутствие взаимодействия между электронами обозначался E_0 .

Свободная энергия связана с термодинамическим потенциалом Ω равенством

$$F = N\zeta + \Omega. \quad (25)$$

Магнитный момент M может быть, следовательно, выражен как

$$M = -\left(\frac{\partial F}{\partial H}\right)_{T,V,N} = -\left(\frac{\partial F}{\partial H}\right)_{T,V,\zeta} - \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta}\right)_{T,V,H} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial H}\right)_{T,V,N}, \quad (26)$$

поскольку ζ зависит от H , или, как

$$M = -(\partial\Omega / \partial H)_{T,V,\zeta}, \quad (27)$$

поскольку

$$N = -(\partial\Omega / \partial \zeta)_{T,V,H}, \quad (28)$$

и поэтому из (25) следует

$$\left(\frac{\partial F}{\partial H}\right)_{T,V,N} = N\left(\frac{\partial \zeta}{\partial H}\right)_{T,V,N} + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \zeta}\right)_{T,V,H} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial H}\right)_{T,V,N} + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial H}\right)_{T,V,\zeta} = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial H}\right)_{T,V,\zeta}. \quad (29)$$

Химический потенциал ζ определяется формулой

$$\zeta = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V,H}. \quad (30)$$

При наличии взаимодействия между электронами $\zeta \neq E_0$ и, следовательно, E_0 играет в формуле (22) только роль параметра, связанного с ζ .

Если правильно представление о том, что и в основном состоянии энергия системы взаимодействующих частиц может быть представлена в виде суммы энергий некоторых квазичастиц, то ζ представляет собой химический потенциал этих квазичастиц, т. е. предельную энергию распределения Ферми.

При $T=0$ свободная энергия F совпадает с полной E и в формулах (26) и (30) может быть использовано выражение (22).

5. Осцилляции магнитной восприимчивости

Как известно, магнитная восприимчивость χ равна M/H , т. е.

$$\chi = -\frac{1}{H} \left(\frac{\partial F}{\partial H}\right)_{T,V,N}. \quad (31)$$

При $T=0$, $F=E$ и поэтому следует брать производную от (22) с учетом зависимости E_0 от H вследствие постоянства N (23).

Как видно из выражений (22), (23), осциллирующие члены (которые нас и интересуют) имеют одну и ту же частоту осцилляций, а именно, при изменении H эти члены осциллируют с периодом

$$\Delta H = \mu H^2 / E_0, \quad (32)$$

однако E_0 уже не является химическим потенциалом. Найдем последний по формуле (30). Учитывая (22) и (23) и оставляя только главные члены, получим

$$\zeta = E_0 - 4/5 \sqrt{WE_0}. \quad (33)$$

Таким образом найден химический потенциал квазичастиц, что, в свою очередь, позволяет проверить формулы (22) и (23) путем вычисления энергии и полного числа частиц (при $T = 0$):

$$E = \int_0^{\zeta} x dz(x), \quad N = Z(\zeta), \quad (34)$$

где $Z(E)$ — число состояний с энергией ниже E , выражение для него приведено ниже.

Поскольку $W \ll E_0$, можно записать (33) как

$$E_0 = \zeta + 4/5 \sqrt{W\zeta}. \quad (35)$$

Формулу (32) теперь запишем как

$$\Delta H = \frac{\mu H^2}{\zeta + 4/5 \sqrt{W\zeta}}, \quad (36)$$

вместо $\Delta H = \mu H^2 / \zeta$, что имеет место в теории невзаимодействующих электронов.

Из формулы (36), пользуясь теорией, развитой Лифшицем и Косевичем [9], можно получить закон дисперсии для квазичастиц (см. раздел 4) при $T = 0$ вблизи границы распределения Ферми. Если закон дисперсии представить в виде:

$$E = \frac{p^2}{2m} + \Psi(p), \quad (37)$$

где второй член значительно меньше первого (и, кроме того, энергия зависит лишь от величины импульса p , а не от его направления в пространстве), то, как следует из формулы (35) и теории, развитой в [9],

$$\Psi(p) = -\frac{4}{5} \frac{e^2}{h} p, \quad (38)$$

а квантованные значения энергии (37) в магнитном поле будут

$$E = \mu H \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{p_{\parallel}^2}{2m} - \frac{4}{5} \sqrt{W \left[\mu H \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{p_{\parallel}^2}{2m} \right]}, \quad (39)$$

$p_{\parallel}$ — составляющая импульса, параллельная полю H .

Зная закон дисперсии, можно вычислить $Z(E)$, которое оказывается равным

$$Z(E) = \frac{(2m)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3} \left\{ E_1^{3/2} - \frac{1}{32} (\mu H)^2 E_1^{-1/2} + \frac{3(\mu H)^{3/2}}{4\pi \sqrt{2}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p \sin \left(\frac{2\pi p E_1}{\mu H} - \frac{\pi}{4} \right)}{p^{3/2}} \right\}, \quad (40)$$

$$E_1 \equiv E + 4/5 \sqrt{WE}.$$

Отсюда, пользуясь формулой

$$\Omega = -kT \int_0^{\infty} \ln(1 + e^{(\zeta - E)/kT}) dZ(E) \quad (41)$$

и формулой (27), можно вычислить магнитную восприимчивость χ . От обычного выражения, получаемого в пренебрежении взаимодействием электронов W , наше выражение отличается тем, во-первых, что, как видно из (36), вместо химического потенциала ζ в осциллирующих членах содержится выражение $\zeta + \frac{4}{5} \sqrt{W\zeta}$ и, во-вторых, тем, что амплитуда осцилляций будет определяться множителем $\text{sh}^{-1} \frac{2\pi^2 kT}{\mu H} \left(1 + \frac{2}{5} \sqrt{\frac{W}{E_0}}\right)$ вместо $\text{sh}^{-1} \frac{2\pi^2 kT}{\mu H}$.

Таким образом учет взаимодействия электронов, рассматриваемого как малое возмущение, не снимает трудностей, отмеченных во введении (аномально малые эффективные массы и химический потенциал).

В заключение автор выражает свою благодарность проф. И. М. Лифшицу за ценные дискуссии и за предоставление возможности познакомиться с результатами работы [9] до их опубликования.

Поступила в редакцию
23 января 1954 г.

Литература

- [1] Л. Д. Ландау. ZS. f. Phys., 64, 629, 1930. — [2] Л. Д. Ландау. Добавление к статье D. Schönberg. Proc. Roy. Soc., 170, 341, 1939. — [3] А. И. Ахиезер. ДАН СССР, 23, 872, 1939. — [4] Г. Е. Зильберман. ЖЭТФ, 21, 1209, 1951. — [5] Г. Е. Зильберман. ЖЭТФ, 25, 313, 1953. — [6] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. Статистическая физика, ГИТТЛ, М.—Л., 1951. — [7] Г. Е. Зильберман. ЖЭТФ, 23, 49, 1952. — [8] Ф. Блох. Молекулярная теория магнетизма, ГТТИ, 1936. — [9] И. М. Лифшиц и А. М. Косевич. ДАН СССР, 96, 963, 1954.

УЧЕТ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ СЛОЯ ЭМУЛЬСИИ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ЯДЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ ПОМОЩИ ФОТОГРАФИЧЕСКОГО МЕТОДА

А. А. Бене и М. М. Агрест

Выведена поправка за счет конечной толщины слоя эмульсии для определения полного числа следов любых ядерных частиц внутри заданного телесного угла.

1. Введение

При исследовании ядерных процессов при помощи фотографического метода необходимо учитывать конечность толщины фотографического слоя, из-за чего не все образовавшиеся следы целиком остаются внутри эмульсии. Следы, оканчивающиеся за пределами слоя эмульсии, вообще говоря, не могут быть использованы, так как невозможно измерить их общую длину. В настоящей работе вычислены соответствующие поправки для случая, когда первичные частицы падают параллельно поверхности фотографического слоя. При помощи этих поправок можно определить полное число вторичных частиц, рассеивающихся внутри заданной области изменения угла $0 \leq \theta \leq \theta_0$. Угол θ при этом есть угол между направлением падающей первичной частицы и направлением вылета исследуемой вторичной частицы в лабораторной системе координат. Величина же предельного угла θ_0 зависит от условий опыта.

2. Математический вывод формулы для поправки

На рис. 1 изображена поверхность $S = S(\theta, \varphi) \equiv S(\theta)$ в сферических координатах. $S(\theta)$ — длина пробега исследуемых вторичных частиц, зависящая только от угла θ . Нас интересуют лишь те следы, у которых $\theta \leq \theta_0$.

Если обозначить через $f(\theta)$ распределение интенсивности исследуемых следов по углам в лабораторной системе координат (вообще говоря, зависящее от энергии падающей частицы), то общее число следов N , заключенных внутри конуса с углом раствора θ_0 , пропорционально величине σ , определяемой формулой:

$$\sigma = 2\pi \int_0^{\theta_0} f(\theta) \sin \theta d\theta = 2\pi [F(0) - F(\theta_0)], \quad (1)$$

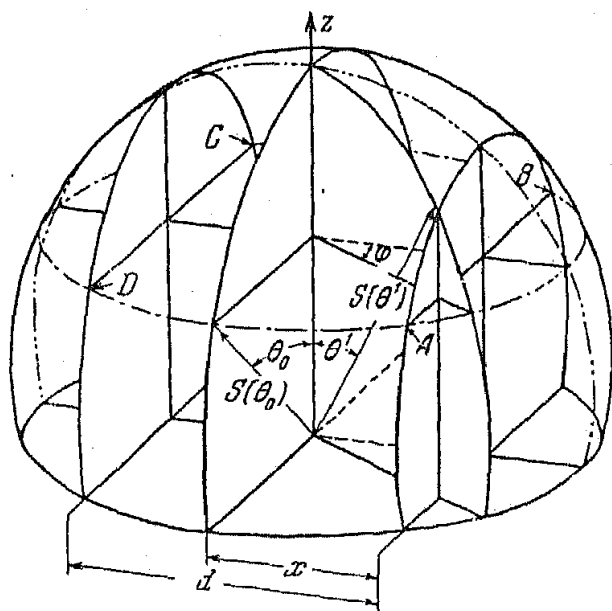


Рис. 1. Зависимость длины пробега S фотографически регистрируемых вторичных частиц от угла вылета θ . Координатная ось z выбрана в направлении падающей частицы

где

$$F(0) = \left[\int f(\theta) d(\cos \theta) \right]_0,$$

и

$$F(\theta_0) = \left[\int f(\theta) d(\cos \theta) \right]_{\theta_0}.$$

Рассмотрим конус K с углом раствора θ_0 и вершиной в начале лабораторной системы координат. Фотографический слой эмульсии толщины d вырежет из поверхности $S(\theta)$, ограничивающей этот конус K , область $ABCD$. Все следы, лежащие внутри интересующего нас конуса K , но вне области $ABCD$, оканчиваются вне эмульсии и не могут быть использованы. Число этих следов, очевидно, пропорционально величине

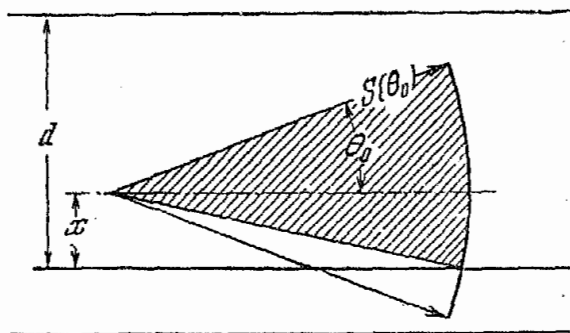


Рис. 2. Число следов, целиком находящихся внутри эмульсии, зависит от расстояния x происходящего ядерного процесса от поверхности слоя эмульсии

$$\sigma_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\theta'(\varphi, x)}^{\theta_0} f(\theta) \sin \theta d\theta. \quad (2)$$

Нижний предел интегрирования $\theta'(\varphi, x)$ есть полярный угол точки пересечения трех поверхностей: меридиональной плоскости $\varphi = \varphi$, плоской поверхности пластинки, определяемой расстоянием x , и поверхности $S = S(\theta)$.

Из всех следов, лежащих в меридиональной плоскости $\varphi = \varphi$, внутри эмульсии целиком находятся лишь те следы, которые лежат внутри области изменения полярного угла θ : $0 \leq \theta \leq \theta'(\varphi, x)$ (рис. 1). Параметр x характеризует глубину происходящего под поверхностью эмульсии ядерного процесса (рис. 2). С целью исключения трудно определяемой величины x введем в рассмотрение усредненную по x величину

$$\sigma' = \frac{1}{d} \int_0^d dx \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\theta'(\varphi, x)}^{\theta_0} f(\theta) \sin \theta d\theta. \quad (3)$$

Мы можем теперь написать аналитическое выражение для искомого отношения W — числа следов N_1 , целиком находящихся внутри эмульсии, к полному числу следов N . Очевидно, оно будет

$$W = N_1 / N = (\sigma - \sigma') / \sigma. \quad (4)$$

Это отношение W зависит от энергии E падающих частиц, так как распределение интенсивности $f(\theta)$ и величина $\theta'(\varphi, x)$ в общем случае зависят от E .

Приведем формулы, связывающие величины θ' , φ и x , которые легко выводятся на основании рис. 1:

1. Для φ , лежащих в интервале

$$0 \leq \varphi \leq \varphi_1 = \arccos \frac{x}{S_0 \sin \theta_0}; \quad S_0 = S(\theta_0),$$

полярный угол θ меняется в интервале

$$\theta' \leq \theta \leq \theta_0,$$

где θ' определяется из соотношения

$$\sin \theta' = x / S(\theta') \cos \varphi.$$

II. Для φ , лежащих в интервале

$$\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2 = \arccos \frac{x-d}{S_0 \sin \theta_0},$$

полярный угол θ' не зависит от φ и равен θ_0 .

В этой области изменения φ величина σ_1 , согласно формуле (2), исчезает.

III. При изменении φ в интервале

$$\varphi_2 \leq \varphi \leq \pi$$

полярный угол θ меняется в области

$$\theta'' \leq \theta \leq \theta_0,$$

где θ'' удовлетворяет уравнению

$$\sin \theta'' = \frac{x-d}{S(\theta'') \cos \varphi}.$$

Таким образом на основании формулы (2) получаем следующее выражение для σ_1 :

$$\sigma_1 = 2 \int_0^{\varphi_1} d\varphi \int_{\theta'}^{\theta_0} f(\theta) \sin \theta d\theta + 2 \int_{\varphi_1}^{\pi} d\varphi \int_{\theta''}^{\theta_0} f(\theta) \sin \theta d\theta. \quad (5)$$

Итак, для усреднения величины σ_1 по x необходимо рассмотреть отдельно следующие два случая.

Случай А. Толщина d слоя эмульсии удовлетворяет условию $d \leq S_0 \sin \theta_0$. В этом случае имеем

$$\sigma' = \frac{2}{d} \int_0^d dx \int_0^{\varphi_1} d\varphi \int_{\theta'}^{\theta_0} f(\theta) \sin \theta d\theta + \frac{2}{d} \int_0^d dx \int_{\varphi_1}^{\pi} d\varphi \int_{\theta''}^{\theta_0} f(\theta) \sin \theta d\theta,$$

или, как нетрудно убедиться,

$$\sigma' = \frac{4}{d} \int_0^d dx \int_0^{\varphi_1} d\varphi \int_{\theta'}^{\theta_0} f(\theta) \sin \theta d\theta,$$

откуда следует

$$\sigma' = \frac{4}{d} \left[I^* - F(\theta_0) S_0 \sin \theta_0 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{d^2}{S_0^2 \sin^2 \theta_0}} + \frac{d}{S_0 \sin \theta_0} \arccos \frac{d}{S_0 \sin \theta_0} \right) \right]. \quad (6)$$

Здесь

$$I^* = \int_0^d dx \int_{\theta_1}^{\theta_0} F(\theta') \frac{x}{S(\theta')^2 \sin^2 \theta'} \left[\frac{dS(\theta')}{d\theta'} \sin \theta' + S(\theta') \cos \theta' \right] \times \\ \times \left(1 - \frac{x^2}{S(\theta')^2 \sin^2 \theta'} \right)^{-1/2} d\theta',$$

где θ_1 определяется из уравнения

$$x = S(\theta_1) \sin \theta_1.$$

При этом, если распределение длины пробега $S(\theta)$ таково, что функция $\psi(\theta) = S(\theta) \sin \theta$ монотонна во всем интервале изменения θ , $0 \leq \theta \leq \theta_0$, то выражение I^* в формуле (6) представляется в виде разности двух квадратур: $I^* = I_1 - I_2$, где

$$I_1 = \int_0^{\theta_0} F(\theta') \left[\frac{dS(\theta')}{d\theta'} \sin \theta' + S(\theta') \cos \theta' \right] d\theta', \quad (7)$$

$$I_2 = \int_{\theta_2}^{\theta_0} F(\theta') \left[\frac{dS(\theta')}{d\theta'} \sin \theta' + S(\theta') \cos \theta' \right] \sqrt{1 - \frac{d^2}{S(\theta')^2 \sin^2 \theta'}} d\theta', \quad (8)$$

а θ_2 и $F(\theta')$ определяются из уравнений

$$d = S(\theta_2) \sin \theta_2, \quad 0 \leq \theta_2 \leq \theta_0,$$

$$F(\theta') = \left[\int f(\theta) d(\cos \theta) \right]_{\theta'}.$$

Непосредственное вычисление квадратур I^* , I_1 и I_2 может быть выполнено в каждом отдельном случае, когда заданы распределение длины пробега $S(\theta)$ и распределение интенсивности $f(\theta)$.

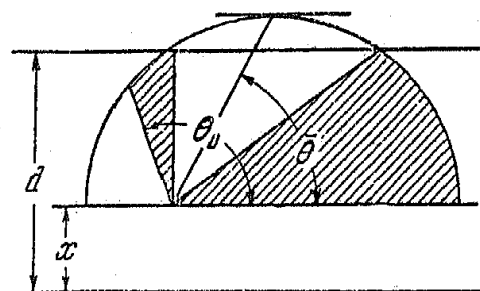


Рис. 3. Случай больших углов θ_0 ($\theta_0 > \bar{\theta}$), не рассматриваемый в предлагаемой работе; возможен лишь в случае Б

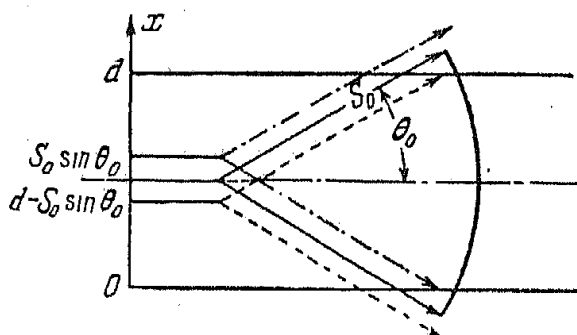


Рис. 4. Случай Б. Существуют такие значения x , при которых все следы в одной или обеих областях изменения φ целиком находятся внутри эмульсии

Случай Б. Толщина d слоя эмульсии удовлетворяет условию $d \geq S_0 \sin \theta_0$ и, кроме того, $\theta_0 \leq \bar{\theta}$, где $\bar{\theta}$ — значение аргумента θ , при котором функция $\psi(\theta) = S(\theta) \sin \theta$ достигает максимума.

Мы вводим добавочное условие $\theta_0 \leq \bar{\theta}$, чтобы исключить случай больших углов (рис. 3), который не представляет особого интереса, и, простоты ради, в этой работе не рассматривается. Как видно из рис. 4, в области изменения φ

$$0 \leq \varphi \leq \varphi_1 = \arccos \frac{x}{S_0 \sin \theta_0}$$

будут существовать следы, выходящие за пределы слоя эмульсии лишь при x , лежащих в интервале

$$0 \leq x \leq S_0 \sin \theta_0.$$

При изменении же φ в интервале $\varphi_2 \leq \varphi \leq \pi$ такие следы будут суще-

ствовать лишь при значениях x , удовлетворяющих условию

$$d - S_0 \sin \theta_0 \leq x \leq d.$$

Итак, представим выражение для σ' в следующем виде:

$$\sigma' = \frac{2}{d} \int_0^{S_0 \sin \theta_0} dx \int_0^{\varphi_1} d\varphi \int_{\theta'}^{\theta_0} f(\theta) \sin \theta d\theta + \frac{2}{d} \int_{d - S_0 \sin \theta_0}^d dx \int_{\varphi_2}^{\pi} d\varphi \int_{\theta''}^{\theta_0} f(\theta) \sin \theta d\theta,$$

которое легко приводится к виду

$$\sigma' = \frac{4}{d} \int_0^{S_0 \sin \theta_0} dx \int_0^{\varphi_1} d\varphi \int_{\theta'}^{\theta_0} f(\theta) \sin \theta d\theta,$$

или окончательно

$$\sigma' = \frac{4}{d} [I_1 - F(\theta_0) S_0 \sin \theta_0], \quad (9)$$

где I_1 выражается формулой (7), как и в случае А, рассмотренном выше. При этом условии монотонности функции $\psi(\theta)$ на интервале $0 \leq \theta \leq \theta_0$, очевидно, обеспечивается условием $\theta_0 \leq \bar{\theta}$.

Если $d = S_0 \sin \theta_0$, случай Б переходит в случай А и соответственно формула (6) в формулу (9), как в этом легко убедиться непосредственно.

Вычисление W для какого-нибудь специального случая требует задания функций $f(\theta)$ и $S(\theta)$. Очевидно, квадратуры в формулах (6) и (9) легко вычисляются, если распределение интенсивности $f(\theta)$ представить в виде полинома относительно $\cos \theta$, что может быть осуществлено с любой степенью точности:

$$f(\theta) = \sum_{k=0}^n a_k \cos^k \theta,$$

так что

$$F(\theta_i) = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{k+1} \cos^{k+1} \theta_i, \quad \theta_i = 0, \theta', \theta_0.$$

Точно так же распределение длины пробега $S(\theta)$ по углам может быть представлено полиномом относительно $\cos \theta$, т. е.

$$S(\theta) = \sum_{k=0}^m A_k \cos^k \theta.$$

Вычисление I_1 по формуле (7), таким образом, не представляет никаких затруднений. Интеграл I_2 [формула (8)] в общем случае не выражается через элементарные функции.

3. Частный пример]

В качестве примера практического применения полученных выше результатов вычислим величину W для частиц трития в ядерной реакции $\text{Li}^6(n, \alpha)\text{H}^3$.

Если энергия падающих нейтронов $E_n = 270 \text{ keV}$, то угловое распределение интенсивности $f(\theta)$ в лабораторной системе координат

достаточно хорошо представляется полиномом второй степени относительно $\cos \theta$ вида [1,2]

$$f(\theta) = 2,71 + 0,36 \cos \theta + 5,44 \cos^2 \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2.$$

Зависимость длины пробега S частицы трития от угла вылета θ для той же энергии E_n падающего нейтрона может быть представлена в виде:

$$S(\theta) = 10 \cos \theta + 39,3$$

для $0 \leq \theta \leq \pi/2$, если при этом длины S выражать в микронах.

Величина $S_0 \sin \theta_0$ равна для $\theta_0 = 30^\circ$ и $\theta_0 = 60^\circ$, соответственно, 24 и 38 μ . Следовательно, при нормальных толщинах эмульсии — от 50 μ и выше — имеет место случай Б со значением $\bar{\theta} \approx 76^\circ$.

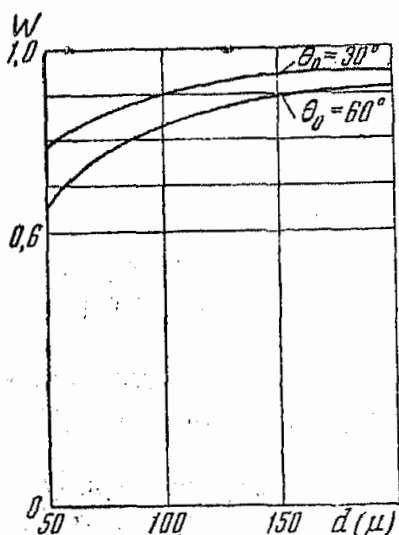


Рис. 5. Зависимость величины W для частиц трития в ядерной реакции $Li^6(n, \alpha)H^3$ от толщины d слоя эмульсии

Если, таким образом, подставить эти выражения для $f(\theta)$ и $S(\theta)$ в приведенные выше формулы, то из (4) на основании (9) получим следующие значения величины W :

$$W = 1 - 10,3 \frac{1}{d} \quad \text{для } \theta_0 = 30^\circ,$$

$$W = 1 - 17,1 \frac{1}{d} \quad \text{для } \theta_0 = 60^\circ,$$

где при этом толщина d , естественно, тоже выражена в микронах. На рис. 5 показана зависимость величины W от толщины слоя d для двух значений параметра θ_0 .

Изложенный выше метод и конечные результаты являются весьма общими и пригодны для любых ядерных частиц. В этом смысле поправочная формула, полученная в [3] для специального случая протонов отдачи,

легко может быть получена из наших формул (4) и (9), если рассмотреть все следы протонов отдачи внутри конуса с углом раствора θ_0 .

Поступила в редакцию
15 января 1954 г.

Литература

- [1] W. Solano a. J. H. Roberts. Bull. Amer. Phys. Soc., 27, 5, 7, 1952.—
[2] L. E. Derlington et al. Phys. Rev., 90, 1049, 1953.—[3] W. M. Gibson a. D. L. Livesey. Proc. Phys. Soc., 60, 523, 1948.

ОБ УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ КОНЕЧНЫХ МАСС В ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА

В. П. Кашкаров

При помощи приближенного метода, разработанного Фоком [1], рассматривается вопрос об уравнениях движения тел произвольной формы в теории тяготения Эйнштейна.

1. В теории тяготения Эйнштейна принципиально важен вопрос об отношении уравнений движения тел к уравнениям тяготения:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa T_{\mu\nu}, \quad (1)$$

где $R_{\mu\nu}$ — сокращенный тензор кривизны, R — его инвариант, $T_{\mu\nu}$ — тензор масс, $g_{\mu\nu}$ — метрический тензор, κ — коэффициент пропорциональности, связанный с ньютоновской гравитационной постоянной γ соотношением

$$\kappa = \frac{8\pi}{c^2} \gamma.$$

Вопрос этот можно поставить так: являются ли уравнения движения тел не зависящими от уравнений тяготения (1) или же уравнения тяготения определяют и уравнения движения тел?

Для определения движения тел в первых вариантах теории относительности наряду с законом тяготения вводился так называемый принцип геодезической линии, согласно которому все тела в пространстве должны двигаться по геодезическим линиям. Однако позднее было показано, что уравнения тяготения содержат в себе уравнения движения тел, и поэтому никакого принципа геодезической линии вводить не нужно. Это общее утверждение еще не давало возможности найти явный вид уравнений движения для системы тел.

Вопрос об отыскании явного вида уравнений движения очень сложен. Дело в том, что для определения движения тел мы должны знать метрику пространства — времени (т. е. $g_{\mu\nu}$), метрика же сама зависит от движения тел. Таким образом мы не можем задать наперед тензор масс $T_{\mu\nu}$. Поэтому необходимо было разработать метод, который давал бы возможность из уравнений тяготения находить одновременно с уравнениями движения и тензор масс. Эта сложная задача была решена Фоком в работе [1]. В этой работе дан метод приближенного вычисления компонент метрического тензора $g_{\mu\nu}$ из уравнений (1) и совместного определения тензора масс $T_{\mu\nu}$ внутри тел. Этот приближенный метод основан на предположении о том, что ньютонов потенциал всюду мал по сравнению с квадратом скорости света, а также, что

$$v/c \ll 1,$$

где v — скорость движения любого из тел системы. Кроме того, для упрощения математических выкладок предполагается, что тела обладают сферической симметрией и линейные размеры их малы по сравнению с расстояниями между телами.

В настоящей работе мы отказываемся от предположения о сферической симметрии тел и пользуемся методом Фока для решения задачи об уравнениях движения тел произвольной формы. Все остальные предположения, принятые в работе [1], остаются в силе и в нашем случае.

Так как мы будем пользоваться методом Фока, развитым им в работе [1], то приведем основные формулы этой работы. В ней в качестве искомых функций вместо компонент метрического тензора $g^{\mu\nu}$ берутся величины

$$\mathfrak{G}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \sqrt{-g}, \quad (2)$$

где g — определитель, составленный из $g_{\mu\nu}$, и применяется так называемая гармоническая система координат, которая определяется условием:

$$\square x^\nu = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \mathfrak{G}^{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = 0. \quad (3)$$

(Относительно гармонической системы координат см. работы [1] и [2].)

В гармонической системе координат уравнения тяготения имеют вид:

$$-\frac{1}{2\sqrt{-g}} g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \mathfrak{G}^{\mu\nu}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \Pi^{\nu, \alpha\beta} \Pi_{\alpha\beta}^\mu - \frac{1}{2} y^\mu y^\nu + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} L = -\frac{8\pi\gamma}{c^2} T^\mu, \quad (4)$$

где

$$\Pi^{\nu, \alpha\beta} = \frac{1}{2g} \left(\mathfrak{G}^{\alpha\rho} \frac{\partial \mathfrak{G}^{\beta\nu}}{\partial x_\rho} + \mathfrak{G}^{\beta\rho} \frac{\partial \mathfrak{G}^{\alpha\nu}}{\partial x_\rho} - \mathfrak{G}^{\nu\rho} \frac{\partial \mathfrak{G}^{\alpha\beta}}{\partial x_\rho} \right),$$

$$y^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} (\ln \sqrt{-g}), \quad L = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \Pi_{\alpha\beta}^\rho \frac{\partial \mathfrak{G}^{\alpha\beta}}{\partial x_\rho} + \frac{1}{2} y^\alpha y_\alpha.$$

Греческие индексы здесь пробегают значения 1, 2, 3, 4; по одинаковым значкам подразумевается суммирование.

Для решения уравнений тяготения (4) необходимо задаться исходными значениями тензора масс внутри тел. Поскольку пространство везде (также и внутри тел) почти евклидово, и используется гармоническая система координат, мало отличающаяся от декартовой, то берутся в качестве исходных значений тензора масс следующие:

$$T^{00} = \frac{1}{c^2} \sum_a \rho_a; \quad (5, a)$$

$$T^{0i} = \frac{1}{c^2} \sum_a \rho_a \dot{a}_i; \quad (5, b)$$

$$T^{ih} = \frac{1}{c^2} \sum_a \rho_a \dot{a}_i \dot{a}_h + T^{*ih}. \quad (5, b)$$

Здесь ρ_a — плотность тела a , зависящая только от расстояния точки от центра тела a , $\dot{a}_i = \frac{da_i}{dt}$, a_i ($i = 1, 2, 3$) — декартовы координаты центра инерции тела a , T^{*ih} — непрерывная функция от координат с производными, которые остаются конечными, но могут допускать разрывы там же, где и величины ρ_a . Латинские индексы здесь и в дальнейшем пробегают значения 1, 2, 3.

Решение уравнений (4) ищется в виде

$$\mathbb{G}^{00} = \frac{1}{c} + \frac{4U}{c^3} + \frac{4S}{c^5} + \dots; \quad (6a)$$

$$\mathbb{G}^{0i} = \frac{4U_i}{c^3} + \frac{4S_i}{c^5} + \dots; \quad (6б)$$

$$\mathbb{G}^{ih} = -c\delta_{ih} + \frac{4S_{ih}}{c^3} + \dots \quad (6в)$$

Искомые функции $\mathbb{G}^{\mu\nu}$ кроме уравнений тяготения (4) должны удовлетворять условию (3). В работе [1] показано, что для того, чтобы удовлетворить условию гармоничности

$$\frac{\partial \mathbb{G}^{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = 0$$

в первом приближении, необходимо положить

$$m_a \ddot{a}_i = -\frac{\partial \Phi}{\partial a_i}, \quad (7)$$

где $\Phi = -\frac{1}{2} \sum_{a \neq b} \frac{\gamma m_a m_b}{|a-b|}$ — потенциальная энергия всей системы тел.

Уравнения (7) представляют собой ньютоновы уравнения движения для системы тел. Они получены здесь как следствие уравнений тяготения. В работе [1] вычисление уравнений движения ограничено этим первым приближением.

Чтобы получить поправки к ньютоновым уравнениям движения, необходимо решить уравнения тяготения в следующем приближении и потребовать, чтобы найденное решение удовлетворяло условиям гармоничности также со следующей степенью точности. Вычисление малых поправок к ньютоновым уравнениям движения системы тел сферической формы было проведено Петровой [3].

В нашей работе, как уже было сказано выше, методом Фока решается аналогичная задача для системы тел произвольной формы. Чтобы получить уравнения движения для системы тел, необходимо решить уравнения тяготения для пространственных компонент, которые имеют вид:

$$\frac{1}{2c} \Delta \mathbb{G}^{ih} - \frac{1}{2c^3} \frac{\partial^2 \mathbb{G}^{ih}}{\partial t^2} + \frac{2}{c^4} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_h} - \frac{\delta_{ih}}{c^4} (\text{grad } U)^2 = -\frac{8\pi\gamma}{c^2} T^{ih}. \quad (8)$$

Здесь U — решение уравнения

$$\Delta U = -4\pi\gamma \sum_a \rho_a, \quad (9)$$

т. е. вне масс

$$U = \sum_a \gamma \left\{ \frac{m_a}{|r-a|} + \frac{1}{2} I_{mn}^{(a)} \frac{\partial^2}{\partial a_m \partial a_n} \left(\frac{1}{|r-a|} \right) \right\}, \quad (10)$$

где

$$I_{mn}^{(a)} = \int_{(a)} \rho_a x'_{am} x'_{an} dV'_a.$$

Для решения нашей задачи также необходимо задаться исходными значениями тензора масс. Возьмем (см. [4]) в качестве исходных значений $T^{\mu\nu}$ следующие:

$$T^{00} = \frac{1}{c^2} \sum_a \rho_a, \quad (11a)$$

$$T^{0i} = \frac{1}{c^2} \sum_a \rho_a (\dot{a}_i + [\vec{\omega} \mathbf{r}'_a]_i); \quad (11b)$$

$$T^{jh} = \frac{1}{c^2} \sum_a \rho_a (\dot{a}_i + [\vec{\omega} \mathbf{r}'_a]_i) (\dot{a}_h + [\vec{\omega} \mathbf{r}'_a]_h) + T^{*jh}, \quad (11b)$$

где T^{*jh} определится из условий гармоничности и из требования равенства нулю расходимости тензора масс во всем пространстве. Здесь в выражениях для T^{0i} и T^{jh} плотность ρ_a умножается на скорость той точки тела, в которой рассматривается тензор масс. Скорость же эта складывается из скорости точки в поступательном движении (она по-прежнему равна $\dot{a}$) и скорости, которую точка имеет во вращении вокруг центра инерции данного тела (она равна $[\vec{\omega} \mathbf{r}'_a]$, где $\vec{\omega}$ — мгновенная угловая скорость вращения тела, $\mathbf{r}'_a$ — радиус-вектор, проведенный из центра инерции тела a в рассматриваемую точку).

Обратимся теперь к решению уравнения (8). Подставляя в него значение

$$\mathcal{G}^{ih} = -c\delta_{ih} + \frac{4S_{ih}}{c^3} + \dots, \quad (12)$$

получим для S_{ih} в требуемом приближении уравнение

$$\Delta S_{ih} = -4\pi\gamma c^2 T^{ih} + \frac{1}{2} \delta_{ih} (\text{grad } U)^2 - \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_h}. \quad (13)$$

Кроме уравнения (13) величины S_{ih} должны удовлетворять также условиям гармоничности, которые в данном приближении имеют вид

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial S_{ih}}{\partial x_h} = 0, \quad (14)$$

где U_i определяется уравнением

$$\Delta U_i = -4\pi\gamma \sum_a \rho_a (\dot{a}_i + [\vec{\omega} \mathbf{r}'_a]_i). \quad (15)$$

В уравнение (13) входит неизвестная величина T^{ih} , относительно которой мы знаем только то, что вне масс она равна нулю, а внутри масс характер ее определяется выражением (11b). Поэтому для решения уравнения (13) удобно разбить его на два уравнения, из которых только одно будет содержать неизвестную величину T^{ih} .

Положим, следуя методу Фока,

$$S_{ih} = U_{ih} + V_{ih}$$

и потребуем, чтобы U_{ih} и V_{ih} удовлетворяли уравнениям:

$$\Delta U_{ih} = -4\pi\gamma c^2 T^{ih}, \quad (17)$$

$$\Delta V_{ih} = \frac{1}{2} \delta_{ih} (\text{grad } U)^2 - \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_h}. \quad (18)$$

Таким образом наша задача сводится к решению уравнений (17) и (18). Рассмотрим сначала уравнение (18) с известной правой частью. Решить это уравнение в явном виде затруднительно (для сферически

симметричных масс Фоком получено решение указанного уравнения в явном виде). Но этого делать нам и не нужно, так как нашей целью является получение уравнений движения из (14), а в (14) входит не сама величина V_{lh} , а ее расходимость. Поэтому нам достаточно вычислить $\partial V_{lh} / \partial x_h$.

2. Нетрудно показать, что расходимость V_{lh} удовлетворяет уравнению:

$$\Delta \frac{\partial V_{lh}}{\partial x_h} = - \frac{\partial U}{\partial x_l} \Delta U. \quad (19)$$

Решение этих уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{lh}}{\partial x_h} = & \sum_a \frac{\gamma}{|r-a|} \left\{ \sum_b' \left[\gamma m_a m_b \frac{a_l - b_l}{|a-b|^3} + \frac{1}{2} \gamma m_b I_{mn}^{(a)} \frac{\partial^2}{\partial a_m \partial a_n} \left(\frac{a_l - b_l}{|a-b|^3} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \gamma m_a I_{mn}^{(b)} \frac{\partial^2}{\partial a_m \partial a_n} \left(\frac{a_l - b_l}{|a-b|^3} \right) \right] - \int_{(a)} \rho_a \frac{\partial u_a}{\partial x_l'} dV'_a \right\} + \\ & + \sum_a \frac{\partial}{\partial a_m} \left(\frac{\gamma}{|r-a|} \right) \left\{ \sum_b' \gamma m_b I_{mn}^{(a)} \frac{\partial}{\partial a_n} \left(\frac{a_l - b_l}{|a-b|^3} \right) - A_{lm}^{(a)} \right\} + \\ & + \sum_a \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial a_m \partial a_n} \left(\frac{\gamma}{|r-a|} \right) \left\{ \sum_b' \gamma m_b I_{mn}^{(a)} \frac{a_l - b_l}{|a-b|^3} \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь

$$A_{lh}^{(a)} = \int_{(a)} \rho_a \frac{\partial u_a}{\partial x_l'} x'_{ah} dV'_a.$$

Подсчитаем теперь dU_l/dt . Из уравнения (15) находим, что вне масс

$$U_l = \gamma \sum_a \left\{ \frac{m_a \dot{a}_l}{|r-a|} + \frac{1}{2} \dot{a}_l I_{mn}^{(a)} \frac{\partial^2}{\partial a_m \partial a_n} \left(\frac{1}{|r-a|} \right) + [\vec{\omega} I_n^{(a)}]_l \frac{\partial}{\partial a_n} \left(\frac{1}{|r-a|} \right) \right\}. \quad (21)$$

В этом выражении $[\vec{\omega} I_n^{(a)}]_l$ — сокращенная запись выражения $\omega_l I_{mn}^{(a)} - \omega_m I_{ln}^{(a)}$, в котором значки i, l, m не равны друг другу и идут в таком же порядке, как в i -й составляющей векторного произведения двух векторов.

Дифференцируя (21) по времени, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_l}{\partial t} = & \gamma \sum_a \left\{ \frac{m_a \ddot{a}_l}{|r-a|} - \frac{\partial}{\partial x_h} \left[\frac{m_a \dot{a}_l \dot{a}_h}{|r-a|} + \frac{1}{2} \dot{a}_l \dot{a}_h I_{mn}^{(a)} \frac{\partial^2}{\partial a_m \partial a_n} \left(\frac{1}{|r-a|} \right) + \right. \right. \\ & + \frac{1}{2} \ddot{a}_l I_{km}^{(a)} \frac{\partial}{\partial a_m} \left(\frac{1}{|r-a|} \right) + \frac{[\vec{\omega} I_h^{(a)}]_l + [\vec{\omega} I_k^{(a)}]_l}{|r-a|} + \\ & \left. \left. + [\vec{\omega} I_m^{(a)}]_l \dot{a}_h \frac{\partial}{\partial a_m} \left(\frac{1}{|r-a|} \right) + \frac{1}{2} \dot{a}_l \dot{a}_h I_{km}^{(a)} \frac{\partial}{\partial a_m} \left(\frac{1}{|r-a|} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Точка сверху обозначает дифференцирование по времени. Подставим теперь значение $\partial V_{lh} / \partial x_h$ из (20) и $\partial U_l / \partial t$ из (22) в условия гармоничности (14), которые можно переписать так:

$$\frac{\partial U_l}{\partial t} + \frac{\partial V_{lh}}{\partial x_h} = - \frac{\partial U_{lh}}{\partial x_h}, \quad (23)$$

тогда получим

$$\sum_a \frac{\gamma}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} \left\{ m_a \ddot{a}_i + \sum_b' \left[\gamma m_a m_b \frac{a_i - b_i}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^3} + \frac{1}{2} \gamma (m_a I_{mn}^{(b)} + m_b I_{mn}^{(a)}) \frac{\partial^2}{\partial a_m \partial a_n} \left(\frac{a_i - b_i}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^3} \right) \right] - \right. \\ \left. - \int_{(a)} \rho_a \frac{\partial u_a}{\partial x_i} dV'_a \right\} - \frac{\partial}{\partial x_h} \sum_a \left\{ \frac{\gamma}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} \left[\sum_b' \gamma m_b I_{hm}^{(a)} \frac{\partial}{\partial a_m} \left(\frac{a_i - b_i}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^3} \right) - A_{ih}^{(a)} + \right. \right. \\ \left. \left. + m_a \dot{a}_i \dot{a}_h + \frac{d}{dt} [\vec{\omega} I_h^{(a)}]_i \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a_m} \left(\frac{\gamma}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} \right) \left[\sum_b' \gamma m_b I_{hm}^{(a)} \frac{a_i - b_i}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^3} + \right. \right. \\ \left. \left. + \ddot{a}_i I_{hm}^{(a)} + 2 \dot{a}_h [\vec{\omega} I_m^{(a)}]_i + \dot{a}_i \dot{I}_{hm}^{(a)} \right] + \frac{1}{2} \dot{a}_i \dot{a}_h I_{mn}^{(a)} \frac{\partial^2}{\partial a_m \partial a_n} \left(\frac{\gamma}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} \right) \right\} = - \frac{\partial U_{ih}}{\partial x_h}. \quad (24)$$

Штрих у сумм по b означает, что член $b = a$ отсутствует.

Поскольку вне масс U_{ih} являются гармоническими функциями, то $\partial U_{ih} / \partial x_h$ не могут иметь простых полюсов. Мы можем поэтому положить

$$U_{ih} = \sum_a \frac{\gamma}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} \left\{ m_a \dot{a}_i \dot{a}_h + \frac{d}{dt} [\vec{\omega} I_h^{(a)}]_i + \sum_b' \gamma m_b I_{hm}^{(a)} \frac{\partial}{\partial a_m} \left(\frac{a_i - b_i}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^3} \right) - A_{ih}^{(a)} \right\} + \\ + \sum_a \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a_m} \left(\frac{\gamma}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} \right) \left\{ 2 \dot{a}_h [\vec{\omega} I_m^{(a)}]_i + \ddot{a}_i I_{hm}^{(a)} + \dot{a}_i \dot{I}_{hm}^{(a)} + \sum_b' \gamma m_b I_{hm}^{(a)} \frac{a_i - b_i}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^3} \right\} + \\ + \frac{1}{2} \sum_a \frac{\partial^2}{\partial a_m \partial a_n} \left(\frac{\gamma}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} \right) \dot{a}_i \dot{a}_h I_{mn}^{(a)}. \quad (25)$$

Тогда, чтобы удовлетворить условиям гармоничности, нужно потребовать выполнение равенства

$$\sum_a \frac{\gamma}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} \left\{ m_a \ddot{a}_i + \sum_b' \left[\gamma m_a m_b \frac{a_i - b_i}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^3} + \frac{1}{2} \gamma (m_a I_{mn}^{(b)} + m_b I_{mn}^{(a)}) \frac{\partial^2}{\partial a_m \partial a_n} \left(\frac{a_i - b_i}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^3} \right) \right] - \right. \\ \left. - \int_{(a)} \rho_a \frac{\partial u_a}{\partial x_i} dV'_a \right\} = 0. \quad (26)$$

Это равенство будет иметь место только в том случае, когда каждое слагаемое суммы по a будет равно нулю.

Введем в рассмотрение взаимную потенциальную энергию системы тел

$$\Phi = - \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} \left\{ \frac{\gamma m_a m_b}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|} + \frac{1}{2} \gamma (m_a I_{mn}^{(b)} + m_b I_{mn}^{(a)}) \frac{\partial^2}{\partial a_m \partial a_n} \left(\frac{1}{|\mathbf{b}-\mathbf{a}|} \right) \right\}, \quad (27)$$

тогда нетрудно убедиться, что сумма выражений, стоящих в квадратных скобках в уравнении (26), есть не что иное, как $\partial \Phi / \partial a_i$. Таким образом условия гармоничности будут выполнены, если положить

$$m_a \ddot{a}_i = - \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} + \int_{(a)} \rho_a \frac{\partial u_a}{\partial x_i} dV'_a. \quad (28)$$

В этих уравнениях

$$\int_{(a)} \rho_a \frac{\partial u_a}{\partial x_i} dV'_a = 0,$$

как сумма внутренних сил, действующих между частицами, составляющими тело a , и они могут быть поэтому переписаны в виде

$$m_a \ddot{a}_i = - \frac{\partial \Phi}{\partial a_i}, \quad (29)$$

т. е. они представляют собой ньютоновы уравнения движения центров инерции для системы тел.

Следовательно, как и в случае сферически симметричных тел, уравнения движения центров инерции тел вытекают из уравнений тяготения Эйнштейна.

При помощи уравнений (29) можно упростить выражение для U_{ih} . Можно U_{ih} написать в виде:

$$U_{ih} = \sum_a \frac{\gamma}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} \left\{ m_a \dot{a}_i \dot{a}_h + \frac{d}{dt} [\vec{\omega} I_h^{(a)}]_i + \sum_b' \gamma m_b I_{hm}^{(a)} \frac{\partial}{\partial a_m} \left(\frac{a_i - b_i}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^3} \right) - A_{ih}^{(a)} \right\} + \\ + \sum_a \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a_m} \left(\frac{\gamma}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} \right) \left\{ \dot{a}_i I_{hm}^{(a)} + 2 \dot{a}_h [\vec{\omega} I_m^{(a)}]_i \right\} + \sum_a \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial a_m \partial a_n} \left(\frac{\gamma}{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|} \right) \dot{a}_i \dot{a}_h I_{mn}^{(a)}. \quad (30)$$

Уравнение

$$\Delta \frac{\partial U_{ih}}{\partial x_h} = - 4\pi \gamma c^2 \frac{\partial T^{ih}}{\partial x_h} \quad (31)$$

и выражение (30) позволяют определить расходимость T^{ih} . Она имеет вид:

$$\frac{\partial T^{ih}}{\partial x_h} = \frac{1}{c^2} \sum_a \left\{ \frac{\partial \rho_a}{\partial x_h} (\dot{a}_i + [\vec{\omega} \mathbf{r}'_a]_i) (\dot{a}_h + [\vec{\omega} \mathbf{r}'_a]_h) + \rho_a [\vec{\omega} \dot{\mathbf{a}}]_i - [\vec{\omega} \dot{\mathbf{r}}'_a]_i + \frac{\partial u_a}{\partial x_i} - \right. \\ \left. - \sum_b' \gamma m_b \frac{\partial}{\partial a_m} \left(\frac{a_i - b_i}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^3} \right) x'_{am} + \frac{1}{2} \sum_b' \gamma m_b \left(\frac{I_{mn}^{(a)}}{m_a} - x'_{am} x'_{an} \right) \frac{\partial^2}{\partial a_m \partial a_n} \left(\frac{a_i - b_i}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^3} \right) \right\}. \quad (32)$$

3. В случае тел произвольной формы сумма моментов сил, действующих на какое-либо тело со стороны остальных тел системы, уже не будет равна нулю, как это было в случае сферически симметричных тел, поэтому угловая скорость вращения каждого тела будет изменяться со временем. Большой интерес представляет вопрос о том, как будет изменяться со временем угловая скорость вращения каждого тела. Иначе говоря, содержатся ли уравнения вращения тел в уравнениях тяготения?

Оказывается, что уравнения вращения тел также являются следствием уравнений тяготения. Получить их можно следующим образом. В. А. Фок указал нам, что уравнения вращения тел получатся из требования симметричности U_{ih} относительно индексов i и k . Требование же это вытекает из того, что U_{ih} входит в поправочный член выражения для $\mathcal{G}^{ih}$, а $\mathcal{G}^{ih}$ симметричны относительно i и k . Наше выражение (30) для U_{ih} не является ни симметричным, ни антисимметричным относительно i и k . Перепишем поэтому (30), выделив в U_{ih} симметричную и антисимметричную части, и потребуем, чтобы антисимметричная часть U_{ih} обратилась в нуль. Это дает

$$\frac{d}{dt} \{ [\vec{\omega} I_i^{(a)}]_k - [\vec{\omega} I_k^{(a)}]_i \} = \sum_b' \gamma m_b \left\{ I_{kn}^{(a)} \frac{\partial}{\partial a_n} \left(\frac{a_i - b_i}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^3} \right) - \right. \\ \left. - I_{in}^{(a)} \frac{\partial}{\partial a_n} \left(\frac{a_k - b_k}{|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^3} \right) \right\} - (A_{ih}^{(a)} - A_{ki}^{(a)}) = 0. \quad (33)$$

Выражение же для U_{lh} будет иметь вид:

$$U_{lh} = \sum_a \frac{\gamma}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} \left\{ m_a \dot{a}_i \dot{a}_h + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left([\vec{\omega} I_i^{(a)}]_h + [\vec{\omega} I_h^{(a)}]_i \right) + \frac{1}{2} \sum_b \gamma m_b \left[I_{hn}^{(a)} \frac{\partial}{\partial a_n} \left(\frac{a_i - b_i}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^3} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + I_{in}^{(a)} \frac{\partial}{\partial a_n} \left(\frac{a_h - b_h}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^3} \right) \right] - \frac{1}{2} \left(A_{ih}^{(a)} + A_{hi}^{(a)} \right) \right\} + \frac{1}{2} \sum_a \frac{\partial}{\partial a_m} \left(\frac{\gamma}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} \right) \left\{ \frac{1}{2} (\dot{a}_l \dot{I}_{hm}^{(a)} + \dot{a}_h \dot{I}_{lm}^{(a)}) + \right. \\ \left. + \dot{a}_h [\vec{\omega} I_m^{(a)}]_l + \dot{a}_l [\vec{\omega} I_m^{(a)}]_h \right\} + \frac{1}{2} \sum_a \frac{\partial^2}{\partial a_m \partial a_n} \left(\frac{\gamma}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|} \right) \dot{a}_l \dot{a}_h I_{mn}^{(a)}. \quad (34)$$

Нетрудно видеть, что

$$A_{ih}^{(a)} - A_{hi}^{(a)} = \int_{(a)} \rho_a \left(\frac{\partial u_a}{\partial x'_i} x'_{ah} - \frac{\partial u_a}{\partial x'_h} x'_{ai} \right) dV'_a = 0,$$

как сумма моментов внутренних сил, действующих между частицами тела a , относительно его центра инерции. Таким образом уравнение (33) может быть переписано в виде:

$$\frac{d}{dt} \{ [\vec{\omega} I_i^{(a)}]_h - [\vec{\omega} I_h^{(a)}]_i \} = \sum_b \gamma m_b \left\{ I_{hn}^{(a)} \frac{\partial}{\partial a_n} \left(\frac{a_i - b_i}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^3} \right) - I_{in}^{(a)} \frac{\partial}{\partial a_n} \left(\frac{a_h - b_h}{|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^3} \right) \right\}. \quad (35)$$

Последнее уравнение представляет собой закон о моменте количества движения для тела a , определяющий его вращение под действием моментов внешних сил, приложенных к телу a .

Следовательно, уравнения вращения тел содержатся в уравнениях тяготения наряду с уравнениями поступательного движения. Метод Фока позволяет получить и те и другие.

В заключение пользуюсь случаем выразить искреннюю благодарность акад. В. А. Фоку за консультацию и Н. М. Петровой за предложение темы и внимание к настоящей работе.

Казахский государственный университет
Алма-Ата

Поступила в редакцию
18 января 1954 г.

Литература

- [1] В. А. Фок. ЖЭТФ, 9, 375, 1939.—[2] В. А. Фок. Сборник «Николай Коперник», Изд-во АН СССР, 1947.—[3] Н. М. Петрова. ЖЭТФ, 19, 989, 1949.—[4] В. А. Фок. Усп. физ. наук, 48, 2, 1952.

О ТЕПЛОВОМ ИЗЛУЧЕНИИ В ВОЛНОВОДАХ

С. М. Рытов

Волноводная форма закона Кирхгофа [1] обобщена на случай, когда находящиеся в волноводе излучающие тела нагреты неравномерно, но при условии, что скин-эффект выражен достаточно сильно. Показано, что излучаемая мощность может быть выражена через коэффициенты поглощения волн E_{mn} , H_{mn} и через эффективные температуры, являющиеся средними взвешенными по распределению потока энергии для этих волн на поверхности излучателя. Получено простое выражение для излучаемой мощности в случае, когда излучатель состоит из тел, нагретых различно, но равномерно.

1. Общая теория электрических флуктуаций приводит к следующей волноводной форме закона Кирхгофа (см. [1], § 17): мощность теплового излучения, проходящая через поперечное сечение волновода и отнесенная к единичной полосе частот ω , равна

$$P_{\omega} = \frac{\Theta}{2\pi} \sum'_{m, n} \{A_{mn}^{(E)}(\omega) + A_{mn}^{(H)}(\omega)\}, \quad (1)$$

где $\Theta = kT$ (k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура излучателя), $A_{mn}^{(E)}$ и $A_{mn}^{(H)}$ — коэффициенты поглощения излучателя соответственно для E_{mn} - и H_{mn} -волн, и где сумма Σ' распространяется на все значения m и n , при которых соответствующие волны являются бегущими (докритическими, т. е. $\omega_{mn} \text{ крит} < \omega$).

Закон (1) предполагает, что все элементы излучателя находятся при одинаковой температуре. В этих условиях нетрудно получить (1) и из простых энергетических соображений, основанных на теореме о равномерном распределении энергии по степеням свободы. А именно, результат Найквиста [2], заключающийся в том, что при полном согласовании с двухпроводной линией излучатель посылает в нее на главной волне частоты ω мощность $\Theta/2\pi$, может быть доказан для волн любого типа в произвольных одномерных каналах ([1], § 17). Требование, чтобы для несогласованного излучателя тепловое равновесие соблюдалось в каждом спектральном интервале, приводит тогда к тому, что несогласованный излучатель посылает на докритической волне какого-либо типа и номера мощность

$$P_{mn\omega}^{(F)} = \frac{\Theta}{2\pi} A_{mn}^{(F)}(\omega) \quad (F = E \text{ или } H).$$

Для полной мощности на частоте ω отсюда следует (1).

Указанные рассуждения позволяют обойтись при выводе (1) без привлечения общей теории электрических флуктуаций, но, как отмечено, они предполагают равномерный нагрев излучателя. Между тем случай неравномерно нагретых излучающих тел может чаще встретиться на практике и представляет самостоятельный теоретический интерес. Задача становится при этом более сложной, в особенности, если учесть, что электрические параметры материалов, будучи функциями температуры, также становятся при неравномерном нагреве функциями точки.

Речь идет, таким образом, об излучении не только неравномерно нагретых, но и неоднородных тел. В такой постановке решение вопроса уже не может быть получено без электродинамической теории флуктуаций, применение которой дает возможность формулировать задачу в совершенно общем виде. Однако сравнительно простой ответ можно получить только для случая достаточно хорошо проводящих тел.

2. С целью лучшего выяснения вопроса и связанных с ним трудностей, остановимся первоначально на конкретной задаче об излучении,

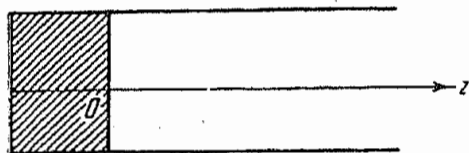


Рис. 1

посылаемом в идеальный волновод поперечной плоской перегородкой (рис. 1), материал которой неоднороден и нагрет неравномерно. В этом отношении данный случай представляет собой обобщение рассмотренной в [1], § 15 задачи об излучении однородной и равномерно нагретой перегородки.

При однородном материале перегородки падающая на нее волна, скажем, волна H_{mn} , дает такую же отраженную волну и не вызывает появления волн других типов и номеров. Нарушение однородности материала тотчас же влечет за собой трансформацию типов и номеров волн, т. е. при отражении волны H_{mn} в отраженном поле будут представлены, вообще говоря, все прочие волны. Конечно, это не препятствует введению для любой падающей волны коэффициента поглощения, определенного просто из соотношения между суммарными потоками энергии — падающим, отраженным и прошедшим. Однако этот коэффициент поглощения будет зависеть от всей структуры поля в неоднородной перегородке. В частности, если даже только одна волна является докритической, например H_{10} , и, следовательно, на достаточно больших расстояниях от перегородки только эта волна будет представлена в отраженном поле, ее коэффициент поглощения будет зависеть от степени возбуждения всех остальных волн, хотя они и не распространяются вдоль волновода.

Сказанное остается в силе и тогда, когда проводимость σ перегородки настолько высока, что толщина скин-слоя d , будучи различна в разных точках перегородки из-за непостоянства σ

$$d(x, y) = \frac{c}{\sqrt{2\pi\omega\sigma(x, y)}}, \quad (2)$$

всюду достаточно мала, т. е.

$$kd_{\text{макс}} \ll 1 \quad \left(k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}\right). \quad (3)$$

Однако в этом случае мы имеем возможность использовать на поверхности перегородки ($z = 0$) приближенные граничные условия М. А. Леонтовича:

$$\begin{aligned} \sqrt{\epsilon} E_x + H_y &= 0 \\ \sqrt{\epsilon} E_y - H_x &= 0 \end{aligned} \quad \left(\sqrt{\epsilon} = \frac{1-i}{kd}, \mu = 1\right), \quad (4)$$

и их обобщение для теплового излучения:

$$\begin{aligned} \sqrt{\epsilon} E_x + H_y &= -\sqrt{\epsilon} \mathfrak{R}_x, \\ \sqrt{\epsilon} E_y - H_x &= -\sqrt{\epsilon} \mathfrak{R}_y, \end{aligned} \quad (5)$$

где $\mathfrak{R}$ — стороннее поверхностное флуктуационное поле, имеющее функцию корреляции (см. [1], § 12)

$$\overline{\mathfrak{R}_\alpha(x, y) \mathfrak{R}_\beta^*(x', y')} = \frac{2k}{c} \Theta(x, y) d(x, y) \delta(x - x') \delta(y - y') \delta_{\alpha\beta} \quad (6)$$

($\alpha, \beta = x, y$).

В (6) предположено, что вид функции корреляции сохраняется таким, как и при постоянных Θ и d . Очевидно, это вполне оправдано вследствие малости фактического радиуса корреляции по сравнению с размерами неоднородностей Θ и d .

Мы ограничимся далее именно случаем (3).

3. Поле, создаваемое перегородкой, представляет собой суперпозицию всех типов волн:

$$\begin{aligned} E_x &= \sum_{\mu, \nu} \left(A \frac{\beta}{ix^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} e^{-i\beta z} + B \frac{k}{ix'^2} \frac{\partial \Psi}{\partial y} e^{-i\beta' z} \right), \\ E_y &= \sum_{\mu, \nu} \left(A \frac{\beta}{ix^2} \frac{\partial \Phi}{\partial y} e^{-i\beta z} - B \frac{k}{ix'^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x} e^{-i\beta' z} \right), \\ E_z &= \sum_{\mu, \nu} A \Phi e^{-i\beta z}, \\ H_x &= \sum_{\mu, \nu} \left(-A \frac{k}{ix^2} \frac{\partial \Phi}{\partial y} e^{-i\beta z} + B \frac{\beta'}{ix'^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x} e^{-i\beta' z} \right), \\ H_y &= \sum_{\mu, \nu} \left(A \frac{k}{ix^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} e^{-i\beta z} + B \frac{\beta'}{ix'^2} \frac{\partial \Psi}{\partial y} e^{-i\beta' z} \right), \\ H_z &= \sum_{\mu, \nu} B \Psi e^{-i\beta' z}. \end{aligned} \quad (7)$$

Для упрощения записи индексы μ и ν здесь опущены у собственных функций Φ, Ψ , постоянных распространения β, β' , собственных значений x, x' и постоянных A, B . Функции Φ и Ψ являются решениями двумерной краевой задачи:

$$\Delta \varphi + x^2 \varphi = 0, \quad x^2 = k^2 - \beta^2, \quad (8)$$

при граничных условиях на стенках волновода соответственно $\varphi = \Phi = 0$ (E -волны) и $\frac{\partial \varphi}{\partial N} = \frac{\partial \Psi}{\partial N} = 0$ (H -волны, N — нормаль к стенке). Все собственные функции ортогональны между собой и нормированы так, что

$$\frac{1}{S} \int_S |\Phi_{mn}|^2 dx dy = \frac{1}{S} \int_S |\Psi_{mn}|^2 dx dy = 1. \quad (9)$$

В силу уравнения (8) и ортогональности собственных функций имеют место соотношения

$$\int_S \left(\frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial x} \frac{\partial \Phi_{\mu\nu}^*}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial y} \frac{\partial \Phi_{\mu\nu}^*}{\partial y} \right) dx dy = x_{mn}^2 S \delta_{m\mu} \delta_{n\nu} \quad (10)$$

и аналогично для Ψ ; кроме того,

$$\int_S \left(\frac{\partial \Psi_{mn}}{\partial x} \frac{\partial \Phi_{\mu\nu}^*}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_{mn}}{\partial y} \frac{\partial \Phi_{\mu\nu}^*}{\partial x} \right) dx dy = 0. \quad (11)$$

Нетрудно подсчитать, что мощность излучения на частоте ω , переносимая через поперечное сечение волновода, есть

$$P_{\omega} = \frac{k c S}{2\pi} \sum'_{m,n} \left(\frac{\beta}{x^2} |A|^2 + \frac{\beta'}{x'^2} |B|^2 \right), \quad (12)$$

где $\sum'$ имеет тот же смысл, что и в (1), а чертой обозначено, как и в (6), усреднение по ансамблю. Для нахождения $|A|^2$ и $|B|^2$ надо подставить (7) (при $z=0$) в (5), что дает следующую систему уравнений для A и B :

$$\begin{aligned} \sum_{\mu,\nu} \left(A \frac{\beta V_{\varepsilon} + k}{ix^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + B \frac{k V_{\varepsilon} + \beta'}{ix'^2} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) &= -V_{\varepsilon} \Re_x, \\ \sum_{\mu,\nu} \left(A \frac{\beta V_{\varepsilon} + k}{ix^2} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - B \frac{k V_{\varepsilon} + \beta'}{ix'^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) &= -V_{\varepsilon} \Re_y. \end{aligned} \quad (13)$$

В случае однородного материала перегородки соотношения (10) и (11) позволяют легко разрешить эти уравнения относительно A и B . В рассматриваемой задаче зависимость ε от x, y существенно усложняет дело.

Учитывая, однако, что $|\varepsilon| \gg 1$ и что коэффициент в функции корреляции (6) содержит множителем малый параметр kd , мы можем ограничиться при вычислении A и B предельной формой граничных условий (5):

$$E_x = -\Re_x, \quad E_y = -\Re_y \quad (z=0), \quad (14)$$

т. е. можно отбросить в (13) члены, не содержащие V_{ε} . Мы получаем тогда уравнения:

$$\begin{aligned} \sum_{\mu,\nu} \left(A \frac{\beta}{ix^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + B \frac{k}{ix'^2} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) &= -\Re_x, \\ \sum_{\mu,\nu} \left(A \frac{\beta}{ix^2} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - B \frac{k}{ix'^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) &= -\Re_y. \end{aligned} \quad (15)$$

Умножая первое уравнение (15) на $\frac{\partial \Phi_{mn}^*}{\partial x} dS$, второе — на $\frac{\partial \Phi_{mn}^*}{\partial y} dS$, складывая и интегрируя по S , а затем действуя так же, но умножая первое уравнение на $\frac{\partial \Psi_{mn}^*}{\partial y} dS$, второе на $-\frac{\partial \Psi_{mn}^*}{\partial x} dS$, получаем при помощи (10) и (11):

$$\begin{aligned} A_{mn} &= -\frac{i}{\beta_{mn} S} \int_S \left(\Re_x \frac{\partial \Phi_{mn}^*}{\partial x} + \Re_y \frac{\partial \Phi_{mn}^*}{\partial y} \right) dS, \\ B_{mn} &= -\frac{i}{k S} \int_S \left(\Re_x \frac{\partial \Psi_{mn}^*}{\partial y} - \Re_y \frac{\partial \Psi_{mn}^*}{\partial x} \right) dS. \end{aligned} \quad (16)$$

Как показывает более точный расчет (методом возмущений), переход от условий (5) к (14) означает отбрасывание в $|A_{mn}|^2$ добавочных членов, имеющих порядок не ниже $k^2 d_{\text{макс}} / \beta_{mn}$ по отношению к главному, а в $|B_{mn}|^2$ — не ниже $\beta'_{mn} d_{\text{макс}}$. Таким образом для волн E_{mn} поправка мала, если только ω не слишком близка к критической частоте, т. е. не слишком велико отношение k / β_{mn} (для этого достаточно уже весьма малой расстройки от критической частоты). Для волн H_{mn} поправка мала всегда, поскольку мы имеем условие (3), а $\beta'_{mn} \ll k$.

Из (16) при помощи функции корреляции (6) находим

$$\begin{aligned} \overline{|A_{mn}|^2} &= \frac{2k}{S^2 c \beta_{mn}^2} \int_S \Theta(x, y) d(x, y) \left(\left| \frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial y} \right|^2 \right) dS, \\ \overline{|B_{mn}|^2} &= \frac{2}{S^2 c k} \int_S \Theta(x, y) d(x, y) \left(\left| \frac{\partial \Psi_{mn}}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Psi_{mn}}{\partial y} \right|^2 \right) dS, \end{aligned}$$

и подстановка этих выражений в (12) дает

$$\begin{aligned} P_\omega &= \frac{1}{\pi S} \sum'_{m,n} \left\{ \frac{k^2}{\beta_{mn} x_{mn}^2} \int_S \Theta d \cdot \left(\left| \frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial y} \right|^2 \right) dS + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta'_{mn}}{x_{mn}^2} \int_S \Theta d \cdot \left(\left| \frac{\partial \Psi_{mn}}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Psi_{mn}}{\partial y} \right|^2 \right) dS \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

В случае равномерного нагрева ($\Theta = \text{const}$) и однородного материала ($d = \text{const}$) эта формула переходит, в силу (10), в выражение

$$P_\omega = \frac{\Theta d}{\pi} \sum'_{m,n} \left(\frac{k^2}{\beta_{mn}} + \beta'_{mn} \right),$$

которое представляет собою первый член разложения по степеням kd точного выражения P_ω , полученного ранее для однородной и равномерно нагретой перегородки [см. [1], формула (15.12)].

4. Найдем теперь коэффициенты поглощения E - и H -волн. Предположим, что на перегородку падает волна E_{mn} :

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\beta_{mn}}{ix_{mn}^2} \frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial x} e^{i\beta_{mn}z}, \quad H_x = -\frac{k}{ix_{mn}^2} \frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial y} e^{i\beta_{mn}z}, \\ E_y &= -\frac{\beta_{mn}}{ix_{mn}^2} \frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial y} e^{i\beta_{mn}z}, \quad H_y = \frac{k}{ix_{mn}^2} \frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial x} e^{i\beta_{mn}z}. \end{aligned} \quad (18)$$

Мощность в этой волне равна ¹

$$P_{mn}^{(E)} = \frac{kcS}{8\pi} \frac{\beta_{mn}}{x_{mn}^2}. \quad (19)$$

Вследствие неоднородности материала перегородки отраженное поле содержит, вообще говоря, волны всех типов и номеров, т. е. выражается формулами (7). Подставляя (7) и (18) (при $z=0$) в условия (4), получаем

$$\begin{aligned} &\sum_{\mu,\nu} \left(A \frac{\beta}{ix^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + B \frac{k}{ix'^2} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) - \frac{\beta_{mn}}{ix_{mn}^2} \frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial x} = \\ &= -\frac{1}{V_\varepsilon} \left\{ \sum_{\mu,\nu} \left(A \frac{k}{ix^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + B \frac{\beta'}{ix'^2} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) + \frac{k}{ix_{mn}^2} \frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial x} \right\}, \\ &\sum_{\mu,\nu} \left(A \frac{\beta}{ix^2} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - B \frac{k}{ix'^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) - \frac{\beta_{mn}}{ix_{mn}^2} \frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial y} = \\ &= -\frac{1}{V_\varepsilon} \left\{ \sum_{\mu,\nu} \left(A \frac{k}{ix^2} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - B \frac{\beta'}{ix'^2} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{k}{ix_{mn}^2} \frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial y} \right\}. \end{aligned}$$

¹ Расчет проводится ниже для дискретного гармонического колебания частоты ω , вследствие чего коэффициент в выражении для мощности в четыре раза меньше, чем в случае усредненной по ансамблю спектральной плотности.

В нулевом приближении (т. е. при $|\varepsilon| \rightarrow \infty$) мы получаем отсюда при помощи (10) и (11), что $A_{\mu\nu}^{(0)} = 0$, за исключением $A_{mn}^{(0)} = 1$; $B_{\mu\nu}^{(0)} = 0$. Подставив эти значения в правые части, мы можем далее найти члены первого порядка относительно $1/\sqrt{\varepsilon}$, т. е. относительно kd . Так как выражение (12), позволяющее определить мощность отраженного поля, содержит квадраты модулей A и B , для вычисления этой мощности в первом порядке относительно kd достаточно, очевидно, вычислить лишь поправочный член к A_{mn} , поскольку квадраты модулей $A_{\mu\nu}$ и $B_{\mu\nu}$ при $\mu \neq m$, $\nu \neq n$ будут порядка $(kd)^2$. Поправка первого порядка к A_{mn} есть

$$A_{mn}^{(1)} = -\frac{2k}{S\beta_{mn}x_{mn}^2} \int_S \left(\left| \frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial y} \right|^2 \right) \frac{dS}{\sqrt{\varepsilon}}$$

и, следовательно, с точностью до первого порядка

$$\begin{aligned} |A_{mn}|^2 &= |A_{mn}^{(0)}|^2 + A_{mn}^{(0)} A_{mn}^{(1)*} + A_{mn}^{(0)*} A_{mn}^{(1)} = \\ &= 1 - \frac{2k^2}{S\beta_{mn}x_{mn}^2} \int_S d(x, y) \left(\left| \frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial y} \right|^2 \right) dS. \end{aligned} \quad (20)$$

Таким образом отраженная мощность равна

$$P_{mn}^{(E) \text{ отр}} = \frac{kcS}{8\pi} \frac{\beta_{mn}}{x_{mn}^2} |A_{mn}|^2, \quad (21)$$

а коэффициент поглощения волны E_{mn} , согласно (19) — (21), есть

$$A_{mn}^{(E)} = 1 - \frac{P_{mn}^{(E) \text{ отр}}}{P_{mn}^{(E)}} = \frac{2k^2}{S\beta_{mn}x_{mn}^2} \int_S d(x, y) \left(\left| \frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial y} \right|^2 \right) dS. \quad (22)$$

Аналогичный расчет в случае падающей волны H_{mn} дает для коэффициента поглощения выражение

$$A_{mn}^{(H)} = \frac{2\beta'_{mn}}{Sx_{mn}^{\prime 2}} \int_S d(x, y) \left(\left| \frac{\partial \Psi_{mn}}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Psi_{mn}}{\partial y} \right|^2 \right) dS. \quad (23)$$

Обозначая для краткости

$$\left| \frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial y} \right|^2 = e_{mn}, \quad \left| \frac{\partial \Psi_{mn}}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Psi_{mn}}{\partial y} \right|^2 = h_{mn}, \quad (24)$$

мы можем записать теперь излучаемую перегородкой мощность (17) через коэффициенты поглощения (22) и (23) в следующем виде:

$$P_{\omega} = \frac{1}{2\pi} \sum_{m, n} \left\{ A_{mn}^{(E)} \frac{\int_S \Theta d \cdot e_{mn} dS}{\int_S d \cdot e_{mn} dS} + A_{mn}^{(H)} \frac{\int_S \Theta d \cdot h_{mn} dS}{\int_S d \cdot h_{mn} dS} \right\}. \quad (25)$$

В случае равномерного нагрева перегородки ($\Theta = \text{const}$) отсюда получается выражение (1), которое, разумеется, не предполагает однородности излучающего тела и справедливо при любых (а не только при больших) проводимостях.

5. Выражение (25) имеет простой физический смысл. Для тел с сильно выраженным скин-эффектом можно ввести поверхностную плотность джоулева тепла q , которая представляет собою поток энергии внутрь тела через единицу его поверхности при данном внешнем

поле [3]. При этом в первом приближении в рассматриваемом случае хорошо проводящих тел внешнее магнитное поле такое же, какое было бы при идеальной проводимости тел.

Из общего выражения для плотности потока энергии

$$S_z = \frac{c}{16\pi} (E_x H_y^* - E_y H_x^* + E_x^* H_y - E_y^* H_x)$$

в силу условий (4) имеем для q

$$q = -S_z = \frac{c}{16\pi} \left(\frac{1}{V_\varepsilon} + \frac{1}{V_{\varepsilon^*}} \right) (|H_x|^2 + |H_y|^2) = \frac{kcd}{16\pi} |H_t|^2,$$

где H_t — тангенциальная компонента невозмущенного магнитного поля, т. е. поля, соответствующего бесконечной проводимости перегородки.

Если на перегородку падает волна E_{mn} , то, согласно (18) и (24),

$$q_{mn}^{(E)} = \frac{k^3 cd}{16\pi\chi_{mn}^4} \left(\left| \frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial y} \right|^2 \right) = \frac{k^3 cd}{16\pi\chi_{mn}^4} e_{mn}.$$

Аналогично в случае волны H_{mn} :

$$q_{mn}^{(H)} = \frac{kc\beta_{mn}'^2 d}{16\pi\chi_{mn}^4} \left(\left| \frac{\partial \Psi_{mn}}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Psi_{mn}}{\partial y} \right|^2 \right) = \frac{kc\beta_{mn}'^2 d}{16\pi\chi_{mn}^4} h_{mn}.$$

Таким образом (25) можно записать в виде

$$P_\omega = \frac{1}{2\pi} \sum_{m,n} \{ A_{mn}^{(E)} \Theta_{mn}^{(E)} + A_{mn}^{(H)} \Theta_{mn}^{(H)} \}, \quad (26)$$

где $\Theta_{mn}^{(E)}$ и $\Theta_{mn}^{(H)}$ — эффективные температуры, представляющие собою средние температуры, взвешенные по распределению потока энергии в перегородку при волнах данных типов и номеров:

$$\Theta_{mn}^{(F)} = \frac{\int_S \Theta(x, y) q_{mn}^{(F)} dS}{\int_S q_{mn}^{(F)} dS} \quad (F = E \text{ или } H). \quad (27)$$

Из физического содержания полученного результата совершенно очевидно, что он не связан со специальной формой рассмотренного выше излучателя (плоская поперечная перегородка), а справедлив для тел любой формы и расположения при том, конечно, условии, что проводимость этих тел достаточно высока — настолько, что во всех точках поверхности выполнено условие (3). Именно в силу этого условия распределение потерь по поверхности, даваемое плотностью джоулева тепла q , зависит от конфигурации тангенциальной компоненты невозмущенного магнитного поля².

6. Как экспериментальное определение $|H_t|^2$ на поверхности помещенных в волноводе тел, так и теоретический расчет H_t во всех случаях, кроме геометрически простейших, связаны со значительными трудностями. Поэтому использование формулы (26) в общем виде вряд ли сможет оказаться практически полезным. Существенное упрощение достигается тогда, когда излучающее устройство состоит из

² Кроме требования (3), все предшествующие выводы, основанные на граничных условиях (4), предполагают также, что всюду, где $H_t \neq 0$, d мало по сравнению с радиусами кривизны поверхностей.

однородных тел, нагретых различно, но равномерно. В этом случае мощность P_ω снова, как и в простейшем случае (1), может быть выражена через непосредственно измеряемые и вычисляемые величины.

Ограничимся такими условиями, когда докритической является только волна H_{10} . Отбрасывая все индексы, указывающие тип и номер волны, имеем, согласно (17), (23) и (24),

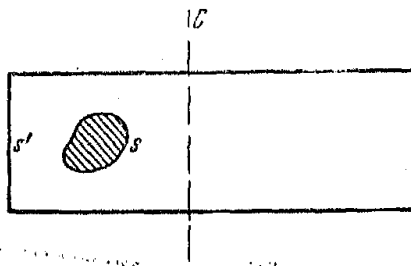


Рис. 2

$$P_\omega = \frac{\beta'}{\pi S x'^2} \int_S \Theta d \cdot h dS, \quad (28)$$

$$A = \frac{2\beta'}{S x'^2} \int_S d \cdot h dS. \quad (29)$$

Пусть в волновом позоиди сечения C (рис. 2) находится собственно излучатель (замкнутая поверхность s), а остальные тела, сделанные (включая стенки волновода) из одного материала, имеют поверхность s' ($S = s + s'$). Пусть, далее, температура на s' постоянна и равна Θ_0 , а на s — тоже постоянна и равна либо Θ_0 (холодный излучатель), либо Θ_m (нагретый излучатель). Обозначим толщину скин-слоя на s' через d , а на s — через d_0 при $\Theta = \Theta_0$ и через d_m при $\Theta = \Theta_m$ (очевидно: $d_m > d_0$). Можно измерить два коэффициента поглощения всей системы расположенной позади сечения C — при холодном излучателе,

$$A_0 = \frac{2\beta'}{S x'^2} (d \cdot \int_{s'} h dS + d_0 \oint_s h dS),$$

и при нагретом:

$$A_m = \frac{2\beta'}{S x'^2} (d \cdot \int_{s'} h dS + d_m \oint_s h dS).$$

Из этих двух уравнений получаем

$$\begin{aligned} \frac{\beta'}{S x'^2} \int_{s'} h dS &= \frac{d_m A_0 - d_0 A_m}{2d(d_m - d_0)}, \\ \frac{\beta'}{S x'^2} \oint_s h dS &= \frac{A_m - A_0}{2(d_m - d_0)}. \end{aligned} \quad (30)$$

При нагретом излучателе, согласно (28), в волновод поступает мощность

$$P_\omega = \frac{\beta'}{\pi S x'^2} (\Theta_0 d \cdot \int_{s'} h dS + \Theta_m d_m \oint_s h dS).$$

Подставляя сюда выражения (30), находим

$$P_\omega = \frac{A_m (d_m \Theta_m - d_0 \Theta_0) - A_0 d_m (\Theta_m - \Theta_0)}{2\pi (d_m - d_0)}. \quad (31)$$

Таким образом здесь оказывается возможным выразить P_ω через измеряемые величины Θ_0 , Θ_m , A_0 , A_m и толщины скин-слоя d_0 и d_m в материале излучателя соответственно в холодном и нагретом его состоянии. Скин-слой d остальных элементов системы, находящихся, по предположению, всегда при температуре Θ_0 , выпадает.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
10 февраля 1954 г.

Литература

- [1] С. М. Рытов. Теория электрических флуктуаций и теплового излучения. Изд-во АН СССР, М., 1953. — [2] Н. Nyquist. Phys. Rev., 32, 110, 1928. — [3] С. М. Рытов. ЖЭТФ, 10, 180, 1940.

КРИТЕРИИ ПРИМЕНИМОСТИ ТЕОРИИ СИЛЬНОЙ СВЯЗИ ЧАСТИЦ С МЕЗОННЫМ ПОЛЕМ

С. И. Пекар

Выводятся условия (неравенства) применимости приближений, использованных в предыдущих работах [1,2], в которых рассматривался нуклон, локализованный на дискретном уровне в самосогласованной мезонно-полевой потенциальной яме и движущийся поступательно и вращательно вместе с упомянутой ямой. Некоторые величины, которые не принимались во внимание в предыдущих работах, здесь учитываются как малые возмущения.

1. Введение

В предыдущих работах был предложен метод приближенного рассмотрения частиц, именуемых ниже условно нуклонами, сильно взаимодействующих с мезонным полем [1,2]. Там предполагалось, что созданное нуклоном мезонное поле вследствие своей значительной инерционности не успевает принимать статическую форму для каждого мгновенного положения нуклона. Поэтому упомянутое поле само становится источником силы, действующей на нуклон. Эта реакция поля предполагается настолько большой, что образует для нуклона глубокую потенциальную яму, в которой нуклон локализуется на дискретном энергетическом уровне. Предполагалось, что в этой потенциальной яме нуклон осциллирует настолько быстро, что инерционное мезонное поле почти не успевает следовать за движением нуклона, а представляет собой приблизительно квазистатическое поле, определяемое формой ψ -облака нуклона. С другой стороны, ψ -функция нуклона, в свою очередь, определяется упомянутым квазистатическим мезонным полем. Описанное выше самосогласованное образование, как целое, может совершать поступательное и вращательное движение, при котором перемещается яма, унося с собой быстро осциллирующий нуклон.

В настоящей статье выводятся критерии, при которых справедливы предположения и приближения, использованные в предыдущих работах. Относительно обозначений, терминов, понятий и соотношений смотри предыдущие работы [1,2], которые ниже будут цитироваться как I и II соответственно.

2. Условие малого отличия мезонного поля от его самосогласованной формы

В предыдущих работах предполагалось, что фактическое мезонное поле $\varphi_\alpha(\mathbf{r})$, совершая нулевые колебания в присутствии нуклона, остается близким к самосогласованному полю $\varphi_\alpha^0(\mathbf{r} \dots v_i \dots)$ в той части пространства, где осциллирует нуклон. На этом основании при вычислении самого низкого энергетического уровня нуклона, осциллирующего в потенциальной яме $\varphi_\alpha(\mathbf{r})$, в нулевом приближении $\varphi_\alpha(\mathbf{r})$ заменялось на φ_α^0 , а затем, в первом приближении, разность $\varphi'_\alpha(\mathbf{r}) = \varphi_\alpha(\mathbf{r}) - \varphi_\alpha^0(\mathbf{r} \dots v_i \dots)$ вводилась как малое возмущение [см. текст

работы I, от формул (57) до (59)). Это законно лишь в том случае, если поправка энергии первого порядка E' значительно меньше, чем разность между самым низким и следующим энергетическим уровнем. Предположим, что второй дискретный уровень, если таковой вообще существует, расположен ближе к началу непрерывного спектра, чем к первому уровню (это будет в последующих статьях проверено для конкретно выбранных выражений энергии взаимодействия нуклона с мезонным полем $\hat{H}'$). В этом случае разность между вторым и первым энергетическим уровнем по порядку величины совпадает с разностью между самым низким уровнем непрерывного спектра mc^2 и первым дискретным уровнем E^0 . Таким образом критерий применимости метода возмущения имеет вид

$$|E'(\dots q_{\alpha\vec{x}}^{\pm} \dots)| \ll mc^2 - E^0. \quad (1)$$

Из формул (59), (3), (6), (29), (61) работы I следует

$$E'(\dots q_{\alpha\vec{x}}^{\pm} \dots) = -4\pi \sum_{\alpha=1}^3 \int \gamma_{\alpha}^0 (\varphi_{\alpha} - \varphi_{\alpha}^0) d\tau = - \sum_{\vec{\alpha\vec{x}}} \hbar \omega_{\vec{x}} q_{\alpha\vec{x}}^0 (q_{\alpha\vec{x}}^{\pm} - q_{\alpha\vec{x}}^0). \quad (2)$$

Во время нулевых колебаний величины $q_{\alpha\vec{x}}^{\pm} - q_{\alpha\vec{x}}^0$, а следовательно, и $|E'|$ могут принимать сколь угодно большие значения, и при этом неравенство (1) будет нарушаться. Однако для наших целей достаточно, чтобы неравенство (1) имело место лишь при таких значениях $q_{\alpha\vec{x}}^{\pm}$, при которых волновая функция системы $\Phi(q)$ существенно отличается от нуля; требуется лишь, чтобы большие значения $|E'|$ были мало вероятны, но не требуется, чтобы они были вовсе невозможны. Поэтому вместо (1) достаточно потребовать неравенство

$$\int E'^2 |\Phi(q)|^2 dq \ll (mc^2 - E^0)^2, \quad dq = \prod_{\vec{\alpha\vec{x}}} dq_{\alpha\vec{x}}^{\pm}. \quad (3)$$

$\Phi(q)$ определяется формулами (39), (51), (58), (62) работы II. Из них следует (поскольку $N=0$)

$$|\Phi(q)|^2 = |V(\dots v_i \dots)|^2 \exp \left\{ - \sum_{\vec{\alpha\vec{x}}} [q_{\alpha\vec{x}}^0 - q_{\alpha\vec{x}}^{\pm}(\dots v_i \dots)]^2 \right\}. \quad (4)$$

Подстановка этого выражения, а также выражения (2) в левую часть неравенства (3) приводит к интегралам вида

$$\begin{aligned} & \int (q_{\alpha_1\vec{x}_1}^{\pm} - q_{\alpha_1\vec{x}_1}^0) (q_{\alpha_1\vec{x}_1}^{\pm} - q_{\alpha_1\vec{x}_1}^0) |V(\dots v_i \dots)|^2 \times \\ & \times \exp \left\{ - \sum_{\vec{\alpha\vec{x}}} [q_{\alpha\vec{x}}^{\pm} - q_{\alpha\vec{x}}^0(\dots v_i \dots)]^2 \right\} dq. \end{aligned} \quad (5)$$

Непосредственное вычисление этого интеграла затрудняется тем, что v_i являются сложными функциями $q_{\alpha\vec{x}}^{\pm}$, явный вид которых неизвестен. Однако можно, оказывается, использовать то обстоятельство, что хотя v_i существенно зависит от бесконечно большого числа аргументов $q_{\alpha\vec{x}}^{\pm}$, но от каждого из них зависит бесконечно мало. Так, например, согласно (29) II, $\partial v_i / \partial q_{\alpha\vec{x}}^{\pm}$ линейно и однородно выражается

через $\partial q_{\alpha\vec{x}}^0 / \partial v_i$, а последние суть величины, пропорциональные $1/L^{3/4}$, где L — размер «основной кубической области», в которой ортонормированы базисные функции $\chi_{\vec{x}}(\mathbf{r})$ [см. (2) I]. Следовательно, когда $L \rightarrow \infty$, $\partial v_i / \partial q_{\alpha\vec{x}}^0 \rightarrow 0$, как $1/L^{3/4}$. Это значит, что если в функции $v_i(\dots q_{\alpha\vec{x}}^0 \dots)$ конечное число аргументов $q_{\alpha\vec{x}}^0$ заменить нулями, то от этого v_i приобретет бесконечно малую погрешность порядка $1/L^{3/4}$.

Для вычисления интеграла (5) заменим в функциях $v_i(\dots q_{\alpha\vec{x}}^0 \dots)$ аргументы $q_{\alpha_1\vec{x}_1}^0$ и $q_{\alpha_2\vec{x}_2}^0$ нулями (при этом в подинтегральную функцию вносится погрешность, пропорциональная $1/L^{3/4}$). После этого можно элементарно произвести интегрирование по $q_{\alpha_1\vec{x}_1}^0$ и $q_{\alpha_2\vec{x}_2}^0$ (или только по $q_{\alpha_1\vec{x}_1}^0$, в случае $\alpha_2 = \alpha_1, \vec{x}_2 = \vec{x}_1$). В результате получается интеграл по остальным координатам $q_{\alpha\vec{x}}^0$, значение которого находится из условия нормировки, если последнюю проводить таким же образом, выделив предварительно интегрирование по $q_{\alpha_1\vec{x}_1}^0$ и $q_{\alpha_2\vec{x}_2}^0$. Таким путем для интеграла (5) получается точное значение $\frac{1}{2} \delta_{\alpha_1\alpha_2} \delta_{\vec{x}_1\vec{x}_2}$, а неравенство (3) приобретает вид

$$\frac{\hbar^2}{2} \sum_{\alpha\vec{x}} \omega_{\vec{x}}^2 q_{\alpha\vec{x}}^{0^2} \ll (mc^2 - E^0)^2. \quad (6)$$

Из раздела 3 статьи I ясно, что самосогласованные состояния нуклона с дискретными энергетическими уровнями E^0 и затухающей в пространстве волновой функцией ψ^0 энергетически выгодны лишь в том случае, если понижение энергии системы, связанное с переходом нуклона из непрерывного спектра на дискретный энергетический уровень, превосходит положительную энергию, необходимую для создания самосогласованного мезонного поля φ_{α}^0 в отсутствие нуклона

$$mc^2 - E^0 > 2\pi \sum_{\alpha=1}^3 \int \varphi_{\alpha}^0 \eta_{\alpha}^0 d\tau \equiv \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \int [(\nabla \varphi_{\alpha}^0)^2 + \mu^2 \varphi_{\alpha}^{0^2}] d\tau. \quad (7)$$

С другой стороны, если приписывать физический смысл только таким решениям самосогласованных уравнений Дирака, при которых средняя кинетическая энергия нуклона положительна, т. е.

$$\int \psi^{0*} \hat{E}_0 \psi^0 d\tau > mc^2, \quad (8)$$

то на основании (32), (34) I и (8) получается

$$mc^2 - E^0 < 4\pi \sum_{\alpha=1}^3 \int \varphi_{\alpha}^0 \eta_{\alpha}^0 d\tau. \quad (9)$$

В этом случае, следовательно, неравенство (7) не может быть сильным неравенством.

Если в левой части критерия (6) один множитель $\omega_{\vec{x}}^2$ вынести за знак суммы при среднем эффективном значении ω , то оставшуюся сумму можно представить следующим образом:

$$\frac{\hbar}{2} \sum_{\alpha\vec{x}} \omega_{\vec{x}}^2 q_{\alpha\vec{x}}^{0^2} = 2\pi \sum_{\alpha=1}^3 \int \varphi_{\alpha}^0 \eta_{\alpha}^0 d\tau. \quad (10)$$

Если в правой части (6) один из множителей $mc^2 - E^0$ заменить меньшей величиной из (7) и затем все неравенство (6) сократить на эту величину, то получается критерий, несколько более жесткий, чем (6), но более простой:

$$\hbar\omega \ll mc^2 - E^0. \quad (11)$$

Перейдем теперь к рассмотрению других приближений, сделанных в предыдущих работах I, II и основанных также на предположении, что, совершая нулевые колебания в присутствии нуклона, мезонное поле $\varphi_\alpha(\mathbf{r})$ остается близким к самосогласованному полю $\varphi_\alpha^0(\mathbf{r})$ в той части пространства, где осциллирует нуклон. На этом основании, когда в предыдущих работах встречались интегралы, в которых под-интегральная функция содержала множитель $\varphi_\alpha(\mathbf{r})$ и была значительна в области, где существенно отличны от нуля $\varphi_\alpha^0(\mathbf{r})$ или $\eta_\alpha^0(\mathbf{r})$, то в таких случаях φ_α под интегралом заменялось на φ_α^0 [см., например, (28), (29) II или получение (46), (47) II]. Покажем сейчас, что и это приближение тоже имеет своим критерием неравенство (11). Рассмотрим, например, интеграл

$$\sum_\alpha \int \varphi_\alpha \eta_\alpha^0 d\tau. \quad (12)$$

В нем можно φ_α заменить на φ_α^0 , если

$$\sum_\alpha \int (\varphi_\alpha - \varphi_\alpha^0) \eta_\alpha^0 d\tau \equiv \sum_{\alpha\mathbf{x}} \frac{\hbar\omega_{\mathbf{x}}}{4\pi} (q_{\alpha\mathbf{x}} - q_{\alpha\mathbf{x}}^0) q_{\alpha\mathbf{x}}^0 \ll \sum_\alpha \int \varphi_\alpha^0 \eta_\alpha^0 d\tau. \quad (13)$$

Требуется чтобы это неравенство выполнялось не для любых $q_{\alpha\mathbf{x}}$, а лишь для таких $q_{\alpha\mathbf{x}}$, при которых $|\Phi(q)|^2$ значительно. Поэтому вместо (13) достаточно потребовать неравенство:

$$\int \left[\sum_{\alpha\mathbf{x}} \hbar\omega_{\mathbf{x}} (q_{\alpha\mathbf{x}} - q_{\alpha\mathbf{x}}^0) q_{\alpha\mathbf{x}}^0 \right]^2 |\Phi(q)|^2 dq \ll \left[4\pi \sum_\alpha \int \varphi_\alpha^0 \eta_\alpha^0 d\tau \right]^2. \quad (14)$$

Выполняя здесь в левой части интегрирование, получаем

$$\frac{\hbar^2}{2} \sum_{\alpha\mathbf{x}} \omega_{\mathbf{x}}^2 q_{\alpha\mathbf{x}}^{0^2} \ll \left[4\pi \sum_\alpha \int \varphi_\alpha^0 \eta_\alpha^0 d\tau \right]^2. \quad (15)$$

Вынося множитель $\omega_{\mathbf{x}}$ при среднем эффективном значении ω за знак суммы и учитывая (10), получаем

$$\hbar\omega \ll 8\pi \sum_\alpha \int \varphi_\alpha^0 \eta_\alpha^0 d\tau. \quad (16)$$

Формулы (7) и (9) показывают, что неравенство (16) соблюдается, если соблюдается неравенство (11).

3. Обоснование адиабатического приближения

В этом разделе дается обоснование и критерии применимости приближения (19) I, основанного на предположении, что в выражении

$$\Psi(\mathbf{r}, \dots q_{\alpha\mathbf{x}} \dots) = \psi(\mathbf{r}, \dots q_{\alpha\mathbf{x}} \dots) \Phi(\dots q_{\alpha\mathbf{x}} \dots) \quad (17)$$

ψ меняется с $q_{\alpha\mathbf{x}}$ гораздо медленнее, чем Φ .

Будем исходить из точного волнового уравнения системы (16) I

$$[\hat{H}_0 + \hat{E}_0 + \hat{H}'] \Psi = H \Psi. \quad (18)$$

Введем полную систему ортогональных функций $\psi_s(\mathbf{r}, \dots, q_{\alpha\mathbf{x}} \dots)$, удовлетворяющих уравнению

$$[\hat{E}_0 + \hat{H}'] \psi_s(\mathbf{r}, q) = E_s(q) \psi_s(\mathbf{r}, q), \quad (19)$$

где q означает совокупность величин $q_{\alpha\mathbf{x}}$, которые в этом уравнении являются параметрами. Разложим волновую функцию системы $\Psi(\mathbf{r}, q)$ в ряд по ортогональным функциям $\psi_s(\mathbf{r}, q)$:

$$\Psi(\mathbf{r}, q) = \sum_s \Phi_s(q) \psi_s(\mathbf{r}, q). \quad (20)$$

Подстановка этого разложения в (18) приводит к следующим уравнениям для коэффициентов разложения $\Phi_s(q)$:

$$[\hat{H}_0 + E_s(q)] \Phi_s(q) - \sum_{s' \alpha\mathbf{x}} \hbar \omega_{\alpha\mathbf{x}} \int \psi_s^* \frac{\partial \psi_{s'}}{\partial q_{\alpha\mathbf{x}}} d\tau \frac{\partial \Phi_{s'}}{\partial q_{\alpha\mathbf{x}}} - \\ - \frac{1}{2} \sum_{s' \alpha\mathbf{x}} \hbar \omega_{\alpha\mathbf{x}} \int \psi_s^* \frac{\partial^2 \psi_{s'}}{\partial q_{\alpha\mathbf{x}}^2} d\tau \Phi_{s'}(q) = H \Phi_s(q). \quad (21)$$

Предположим, что ψ_s являются медленно меняющимися функциями $q_{\alpha\mathbf{x}}$. Тогда последние два члена в левой части (21) малы по сравнению с остальными членами и могут рассматриваться как малые возмущения. При этом предпоследний член, содержащий $\partial \psi_{s'}/\partial q_{\alpha\mathbf{x}}$, является величиной первого порядка малости, а последний член, содержащий $\partial^2 \psi_{s'}/\partial q_{\alpha\mathbf{x}}^2$, — величиной второго порядка малости. Поскольку в дальнейшем в методе возмущений мы ограничимся только первым порядком малости, можно уже с самого начала игнорировать последний член в левой части (21).

Для того чтобы можно было воспользоваться стандартной теорией возмущений, необходимо системе уравнений (21) придать вид одного обычного операторного уравнения. Для этого введем многомерный вектор $\vec{\Phi}$, компонентами которого являются функции $\Phi_s(q)$. Далее, введем матрицу

$$A_{ss'}^{\alpha\mathbf{x}} = -\hbar \omega_{\alpha\mathbf{x}} \int \psi_s^* \frac{\partial \psi_{s'}}{\partial q_{\alpha\mathbf{x}}} d\tau = A_{ss'}^{\alpha\mathbf{x}}(q) \quad (22)$$

и диагональную матрицу $D_{ss'}$, диагональные элементы которой равны $E_s(q)$. Тогда систему уравнений (21) можно записать в виде одного векторного уравнения обычного операторного типа:

$$\left[\hat{H}_0 + D(q) + \sum_{\alpha\mathbf{x}} A^{\alpha\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial q_{\alpha\mathbf{x}}} \right] \vec{\Phi} = H \vec{\Phi}. \quad (23)$$

Здесь $D\vec{\Phi}$ и $A^{\alpha\mathbf{x}} \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial q_{\alpha\mathbf{x}}}$ следует понимать, как обычное умножение матрицы на вектор.

В нулевом приближении оператор

$$\hat{\Omega} \equiv \sum_{\alpha \vec{x}} A^{\alpha \vec{x}} \frac{\partial}{\partial q_{\alpha \vec{x}}} \quad (24)$$

опускается. Тогда векторное уравнение (23) распадается на совокупность независимых уравнений для отдельных компонент вектора $\vec{\Phi}$, причем эти уравнения имеют вид

$$[\hat{H}_0 + E_s(q)] \Phi_s(q) = H \Phi_s(q). \quad (25)$$

Так как в различные уравнения (25) (с разными s) входят различные функции $E_s(q)$, то и спектры собственных значений H у этих уравнений, вообще говоря, различны. Поэтому вся совокупность уравнений (25) может быть удовлетворена только таким вектором $\vec{\Phi}$, у которого равны нулю все компоненты, кроме одной компоненты $\Phi_s(q)$; последняя же должна удовлетворять соответствующему уравнению (25). Если решения упомянутого уравнения (25) нумеровать квантовым числом n в порядке возрастающих значений H , то решения нулевого приближения будут обозначаться $\Phi_{sn}(q)$ и H_{sn} , где s — номер единственной отличной от нуля компоненты вектора $\vec{\Phi}$.

В нулевом приближении в разложении (20) имеется всего один член. Следовательно, можно считать, что нуклон находится в состоянии $\psi_s(\mathbf{r}, q)$, определяемом уравнением (19), и обладает энергией $E_s(q)$. При этом индекс s приобретает смысл квантового числа нуклона. Индекс n является многомерным квантовым числом мезонного поля, движущегося в присутствии нуклона.

Описанное выше нулевое приближение как раз совпадает с использованным в предыдущих работах приближением [(17), (19), (20), (21)]. Очевидно, что критерием справедливости этого приближения является условие того, что оператор (24), введенный в качестве малого возмущения, мало изменит результаты, полученные в нулевом приближении. Это условие, как известно, имеет вид

$$\sum_{s'n'}' \frac{|\Omega_{s'n', sn}|^2}{(H_{s'n'} - H_{sn})^2} \ll 1, \quad (26)$$

где $\Omega_{s'n', sn}$ — матричные элементы оператора возмущения $\hat{\Omega}$, вычисленные при помощи собственных функций нулевого приближения $\Phi_{sn}(q)$.

Для оценки левой части неравенства (26) вынесем знаменатель всех слагаемых при некотором среднем значении за знак суммы. Среднее значение $H_{s'n'}$ следует выбрать с такими значениями $s'n'$, при которых $|\Omega_{s'n', sn}|$ имеет максимум. Последний соответствует таким переходам $sn \rightarrow s'n'$, при которых энергия виртуально рождающихся свободных мезонов

$$\sum_{l=1}^{N'} \hbar \omega_l \quad (27)$$

приблизительно равна разности энергий самосогласованных мезонных полей в конечном и исходном состояниях

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^3 \int \{[(\nabla \varphi_{\alpha s}^0)^2 + \mu^2 \varphi_{\alpha s}^0{}^2] - [(\nabla \varphi_{\alpha s'}^0)^2 + \mu^2 \varphi_{\alpha s'}^0{}^2]\} d\tau. \quad (28)$$

Поэтому на основании (50) II и (34) I для среднего значения $H_{s'n'} - H_{sn}$ у группы слагаемых с фиксированным s' и всевозможными n' получается

$$\overline{H_{s'n'} - H_{sn}} \approx E_{s'}^0 - E_s^0. \quad (29)$$

Эту величину можно заменить на $mc^2 - E^0$, как упоминалось в предыдущем разделе.

Далее, записав условие ортогональности и нормировки для функций $\psi_s(\mathbf{r}, q)$ и дифференцируя его по $q_{\alpha\kappa}$, получаем

$$\int \psi_{s'}^* \frac{\partial \psi_s}{\partial q_{\alpha\kappa}} d\tau = - \int \psi_s \frac{\partial \psi_{s'}^*}{\partial q_{\alpha\kappa}} d\tau, \quad A_{s's}^{\alpha\kappa} = - A_{ss'}^{\alpha\kappa}, \quad (30)$$

Предположим, что в возмущаемом состоянии sn нуклон находится в мезонно-полевой потенциальной яме на основном уровне, который не вырожден. Тогда $\psi_s(\mathbf{r}, q)$ вещественна и из (30) получается

$$\int \psi_s \frac{\partial \psi_s}{\partial q_{\alpha\kappa}} d\tau = 0. \quad (31)$$

Отсюда следует

$$A_{ss}^{\alpha\kappa} = 0, \quad \Omega_{sn', sn} = 0. \quad (32)$$

В частности, диагональные элементы матрицы возмущения равны нулю. Это значит, что поправка энергии системы в первом приближении равна нулю.

После выноса в (26) знаменателя при среднем значении за знак суммы, последнюю можно распространить на все без исключения $s'n'$, ибо член $s' = s, n' = n$ согласно (32) равен нулю. В результате критерий (26) можно переписать в виде

$$\frac{1}{(mc^2 - E^0)^2} (\hat{\Omega}^2)_{sn, sn} \ll 1; \quad (33)$$

$$(\hat{\Omega}^2)_{sn, sn} = \int \Phi_{sn}^* \hat{\Omega}^2 \Phi_{sn} dq = \int \Phi_{sn}^* \sum_{s' \alpha \kappa \alpha' \kappa'} A_{ss'}^{\alpha\kappa} \frac{\partial}{\partial q_{\alpha\kappa}} A_{s's'}^{\alpha'\kappa'} \frac{\partial}{\partial q_{\alpha'\kappa'}} \Phi_{sn} dq. \quad (34)$$

Если $\psi_s(\mathbf{r}, q)$ является медленно изменяющейся функцией $q_{\alpha\kappa}$, то и $A_{s's}^{\alpha\kappa}(q)$ тоже является такой функцией. Поэтому, пренебрегая членом высшего порядка малости, получаем

$$\frac{\partial}{\partial q_{\alpha\kappa}} (\Phi_{sn}^* A_{ss'}^{\alpha\kappa}) \approx \frac{\partial \Phi_{sn}^*}{\partial q_{\alpha\kappa}} A_{ss'}^{\alpha\kappa} + \dots \quad (35)$$

После преобразования (34) по частям и использования (35) и (30) получается

$$(\hat{\Omega}^2)_{sn, sn} = \int \sum_{s'} \left| \sum_{\alpha\kappa} A_{s's}^{\alpha\kappa} \frac{\partial \Phi_{sn}}{\partial q_{\alpha\kappa}} \right|^2 dq. \quad (36)$$

Φ_{sn} определяется формулой (39) II, причем в возмущаемом состоянии sn нет свободных мезонов: $N = 0$. При дифференцировании Φ_{sn} сле-

дует учесть, что, согласно (5), (14) II

$$\sum_{\vec{\alpha}\kappa} \frac{\partial q_{\vec{\alpha}\kappa}^0}{\partial v_i} \left[q_{\vec{\alpha}\kappa} - q_{\vec{\alpha}\kappa}^0 (\dots v_i \dots) \right] = 0. \quad (37)$$

Таким образом

$$\begin{aligned} \sum_{\vec{\alpha}\kappa} A_{s's}^{\vec{\alpha}\kappa} \frac{\partial \Phi_{sn}}{\partial q_{\vec{\alpha}\kappa}} &= \sum_{\vec{\alpha}\kappa} A_{s's}^{\vec{\alpha}\kappa} \left\{ - \left[q_{\vec{\alpha}\kappa} - q_{\vec{\alpha}\kappa}^0 (\dots v_i \dots) \right] \Phi_{sn} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_i \frac{\partial V}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial q_{\vec{\alpha}\kappa}} \exp \left[-1/2 \sum_{\vec{\alpha}\kappa} (q_{\vec{\alpha}\kappa} - q_{\vec{\alpha}\kappa}^0)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (38)$$

Рассмотрим в этой формуле каждый из двух членов правой части отдельно. Для выяснения смысла первого члена его необходимо несколько преобразовать. Дифференцируя уравнение (19) по параметру $q_{\vec{\alpha}\kappa}$, умножая результат на $\psi_{s'}^*$, интегрируя по координатам $\mathbf{r}$ и учитывая самосопряженность оператора $\hat{E}_0 + \hat{H}'$, получаем

$$A_{s's}^{\vec{\alpha}\kappa} \left[E_{s'}(q) - E_s(q) \right] = \hbar \omega_{\vec{\alpha}\kappa} \left[\left(\frac{\partial \hat{H}'}{\partial q_{\vec{\alpha}\kappa}} \right)_{s's} - \frac{\partial E_s(q)}{\partial q_{\vec{\alpha}\kappa}} \delta_{s's} \right], \quad (39)$$

где

$$\left(\frac{\partial \hat{H}'}{\partial q_{\vec{\alpha}\kappa}} \right)_{s's} = \int \psi_{s'}^* \frac{\partial \hat{H}'}{\partial q_{\vec{\alpha}\kappa}} \psi_s d\tau. \quad (40)$$

Если воспользоваться выражениями (39) для $A_{s's}^{\vec{\alpha}\kappa}$, то можно первый член формулы (38) представить следующим образом:

$$- \sum_{\vec{\alpha}\kappa} \frac{\hbar \omega_{\vec{\alpha}\kappa} (\partial \hat{H}' / \partial q_{\vec{\alpha}\kappa})_{s's} (q_{\vec{\alpha}\kappa} - q_{\vec{\alpha}\kappa}^0)}{E_{s'}(q) - E_s(q)} \Phi_{sn} = - \hbar \bar{\omega} \frac{(\delta \hat{H}')_{s's}}{E_{s'}(q) - E_s(q)} \Phi_{sn}, \quad s' \neq s. \quad (41)$$

Здесь $\bar{\omega}$ — некоторое среднее эффективное значение $\omega_{\vec{\alpha}\kappa}$, при котором $\omega_{\vec{\alpha}\kappa}$ вынесено за знак суммы. $\delta \hat{H}'$ — вариация оператора $\hat{H}'$, вызванная заменой в нем $q_{\vec{\alpha}\kappa}^0$ на $q_{\vec{\alpha}\kappa}$. При получении равенства (41) используется то обстоятельство, что $\hat{H}'$ является однородной функцией первого порядка от аргументов $q_{\vec{\alpha}\kappa}$.

Если возмущаемое состояние не является изобарным, т. е. $l = l' = 0$, и если скорость поступательного движения всего самосогласованного образования незначительна, т. е. $k \approx 0$, то в формуле (38) второй член вообще отсутствует, так как, согласно (51), (58), (62) II, в этом случае $\partial V / \partial v_i = 0$. Тогда, подставив в выражение (36) один лишь первый член правой части (38) [в виде (41)], критерий (33) можно переписать в виде

$$\frac{(\hbar \bar{\omega})^2}{(mc^2 - E_0)^2} \int |\Phi_{sn}|^2 \sum_{s'} \frac{|(\delta \hat{H}')_{s's}|^2}{[E_{s'}(q) - E_s(q)]^2} dq \ll 1. \quad (42)$$

Здесь интеграл должен быть гораздо меньше единицы, так как только в этом случае можно величину $\varphi'_\alpha(\mathbf{r}) = \varphi_\alpha(\mathbf{r}) - \varphi_{\alpha s}^0(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_i \dots)$ рассматривать как малое возмущение при вычислении ψ_s и E_s . Этот вопрос уже обсуждался в предыдущем разделе и привел к неравенству (11). Последнее показывает, что и прединтегральный множитель в (42) тоже значительно меньше единицы, так как средние эффективные частоты ω и ω — одного порядка: и та, и другая являются частотами нормальных колебаний мезонного поля, наиболее сильно взаимодействующих с нуклоном; у этих колебаний длина волны должна быть порядка размеров мезонно-полевой потенциальной ямы.

Таким образом неравенство (42) не является новым ограничением, а следует из неравенства (11).

Если возмущаемое состояние является изобарным, или самосогласованное образование обладает большой скоростью поступательного движения ($k, l, l' \neq 0$), то второй член правой части (38) становится отличным от нуля и может даже превзойти по модулю первый член. В этом случае, сохраняя в (38) только второй член, получаем

$$\sum_{\vec{\alpha}\vec{\kappa}} A_{s's}^{\vec{\alpha}\vec{\kappa}} \frac{\partial \Phi_{sn}}{\partial q_{\vec{\alpha}\vec{\kappa}}} \approx \approx - \sum_{\vec{\alpha}\vec{\kappa}} \hbar \omega_{\vec{\kappa}} \int \psi_{s'}^* \frac{\partial \psi_s}{\partial q_{\vec{\alpha}\vec{\kappa}}} d\tau \sum_i \frac{\partial V}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial q_{\vec{\alpha}\vec{\kappa}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\vec{\alpha}\vec{\kappa}} (q_{\vec{\alpha}\vec{\kappa}} - q_{\vec{\alpha}\vec{\kappa}s}^0)^2 \right\}. \quad (43)$$

Поскольку в данном случае речь идет о получении критерия, ограничивающего энергию поступательного и вращательного движения нуклона, а не отклонение ψ_s от самосогласованной формы, можно в (43) ψ_s заменить самосогласованной волновой функцией ψ_s^0 (см. конец раздела 5 статьи I). Тогда величину (43) можно переписать в виде

$$\sum_{\vec{\alpha}\vec{\kappa}} A_{s's}^{\vec{\alpha}\vec{\kappa}} \frac{\partial \Phi_{sn}}{\partial q_{\vec{\alpha}\vec{\kappa}}} \approx \approx - \sum_{\vec{\alpha}\vec{\kappa}ij} \hbar \omega_{\vec{\kappa}} \frac{\partial v_i}{\partial q_{\vec{\alpha}\vec{\kappa}}} \frac{\partial v_j}{\partial q_{\vec{\alpha}\vec{\kappa}}} \int \psi_{s'}^* \frac{\partial \psi_s^0}{\partial v_i} d\tau \frac{\partial V}{\partial v_i} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{\vec{\alpha}\vec{\kappa}} (q_{\vec{\alpha}\vec{\kappa}} - q_{\vec{\alpha}\vec{\kappa}s}^0)^2 \right\}. \quad (44)$$

Для дальнейшего вычисления следует учесть, что согласно (36) II и (34) II

$$\sum_{\vec{\alpha}\vec{\kappa}} \hbar \omega_{\vec{\kappa}} \frac{\partial v_i}{\partial q_{\vec{\alpha}\vec{\kappa}}} \frac{\partial v_j}{\partial q_{\vec{\alpha}\vec{\kappa}}} = \begin{cases} \delta_{ij} A_i \text{ при } i > 3, \\ \sim \delta_{ij} A \text{ при } i, j \leq 3. \end{cases} \quad (45)$$

Далее,

$$\sum_{s'} \psi_{s'}^*(\mathbf{r}') \psi_{s'}(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (46)$$

поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{s'} \left| \int \psi_{s'}^* \frac{\partial \psi_s^0}{\partial v_j} d\tau \right|^2 &= \sum_{s'} \iint \psi_{s'}^*(\mathbf{r}') \frac{\partial \psi_s^0(\mathbf{r})}{\partial v_j} \psi_{s'}(\mathbf{r}) \frac{\partial \psi_s^{0*}(\mathbf{r})}{\partial v_j} d\tau' d\tau = \\ &= \int \frac{\partial \psi_s^{0*}(\mathbf{r})}{\partial v_j} \frac{\partial \psi_s^0(\mathbf{r})}{\partial v_j} d\tau. \end{aligned} \quad (47)$$

Следует иметь в виду, что слагаемые с разными i в выражении (44) могут иметь самые различные порядки величины. Так, например, множители $\partial V/\partial v_i$ по порядку величины равны $\lambda_i V$, где λ_i — квантовые числа, соответствующие трансляционным и ротационным степеням свободы v_i . В частности,

$$\frac{\partial V}{\partial \xi_1} = ik_1 V, \quad \frac{\partial V}{\partial \varphi} = im V, \quad \frac{\partial V}{\partial \Phi} \sim l V \quad (48)$$

и т. д. Квантовые числа $\lambda_1 = k_1, \dots, \lambda_5 = l, \dots, \lambda_7 = l'$ могут принимать совершенно независимые значения. Поэтому требование малости суммы (44) сводится к требованию малости каждого i -го слагаемого в отдельности. В результате критерий (33) при помощи формул (36), (44), (45), (47) и (48) сводится к неравенствам:

$$\frac{\lambda_i^2}{(mc^2 - E^0)^2} \int A_i^2 |\Phi_{sn}(q)|^2 \int \frac{\partial \psi_s^{0*}}{\partial v_i} \frac{\partial \psi_s^0}{\partial v_i} d\tau dq \ll 1. \quad (49)$$

Для зарядовых степеней свободы $v_6 = \gamma$ и $v_7 = \beta$ [см. (35), (36), (54), работы I] интеграл по $\mathbf{r}$ в выражении (49) получается соответственно < 1 и $1/4$. Для них критерий (49) имеет вид

$$\frac{\hbar^4 l'^2}{l'^2 (mc^2 - E^0)^2} \ll 1. \quad (50)$$

Для угловых степеней свободы $v_4 = \varphi$ и $v_5 = \Phi$ интеграл по $\mathbf{r}$ в выражении (49) можно оценить, исходя из предположения, что, поскольку ψ_s^0 является основным состоянием нуклона в мезонно-полевой потенциальной яме, четыре пространственные компоненты ψ_s^0 имеют не более одного-двух узлов как функции φ и Φ . Тогда фигурирующие в (49) интегралы по $\mathbf{r}$ оказываются порядка единицы, и критерий (49) для этих степеней свободы имеет вид

$$\frac{\hbar^4 l^2}{l^2 (mc^2 - E^0)^2} \ll 1. \quad (51)$$

Для самых низких изобарных состояний, т. е. в случае $l' = 1$, $l = 1$, смысл неравенств (50) и (51) сводится к тому, что энергия квазиротационного движения и, соответственно, ротационного движения должна быть значительно меньше $mc^2 - E^0$.

Гораздо более существенны неравенства, ограничивающие скорость поступательного движения нуклона, так как с ними приходится иметь дело не только при рассмотрении изобарных состояний, но и при рассмотрении обычных состояний нуклона. В случае $v_i = \xi_i$, $i = 1, 2, 3$, в выражении (49) интеграл по $\mathbf{r}$ может быть вычислен точно лишь после определения функции ψ_s^0 . Но по порядку величины этот интеграл равен $1/\bar{r}^2$, где $\bar{r}$ — средний эффективный радиус ψ_s^0 -облака нуклона. Таким образом для поступательного движения критерий (49) сводится к неравенству

$$\frac{\hbar^4 k^2}{(mc^2 - E^0)^2 M^2 \bar{r}^2} \ll 1. \quad (52)$$

Здесь M — мезонно-полевая масса нуклона [см. (64) II].

В том случае, если движение нуклона в самосогласованной потенциальной яме носит существенно релятивистский характер,

$$mc^2 - E^0 \sim mc^2, \quad \bar{r} \sim \hbar/mc. \quad (53)$$

Неравенство (52) в этом случае можно приблизительно переписать в виде

$$(\hbar k/Mc)^2 \ll 1. \quad (54)$$

Последнее неравенство означает, что скорость поступательного движения нуклона должна быть меньше скорости света.

4. Краткая сводка результатов

Все результаты получены в предположении, что нуклон в самосогласованной мезонно-полевой потенциальной яме находится в основном состоянии, энергетический уровень которого достаточно далек от остальных уровней; предполагается, что второй дискретный энергетический уровень расположен ближе к началу непрерывного спектра, чем к первому уровню.

Сделанное в предыдущих работах [1, 2] предположение, что фактическое мезонное поле, совершая нулевые колебания, в области, где локализован нуклон, остается близким к самосогласованному полю, справедливо при соблюдении неравенства (11).

Предположение, что состояние нуклона адиабатически следует за движением мезонного поля, справедливо при соблюдении неравенств (11), (50), (51) и (52) [или вместо (52) можно взять (54)]. Эти неравенства в приведенной выше последовательности обеспечивают адиабатическое следование состояний нуклона, соответственно, за вибрацией потенциальной ямы вблизи самосогласованной формы, за квазиротацией мезонного поля, за вращением и за поступательным движением потенциальной ямы.

Конкретная численная проверка всех критериев будет делаться по мере того, как будут выбираться определенные виды оператора взаимодействия $\hat{H}'$ и будут вычисляться все необходимые величины. По-видимому, слабым местом теории будет недостаточно сильное выполнение необходимых неравенств.

Институт физики
Академии наук Украинской ССР

Поступила в редакцию
18 января 1954 г.

Литература

- [1] С. И. Пекар. ЖЭТФ, 27, 398, 1954. — [2] С. И. Пекар. ЖЭТФ, 27, 411, 1954.

ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОЧНОСТЬ ТИТАНАТОВ МЕТАЛЛОВ II ГРУППЫ ТАБЛИЦЫ Д. И. МЕНДЕЛЕЕВА ПРИ ПОСТОЯННОМ И ПЕРЕМЕННОМ ($f = 50$ ГЦ) НАПРЯЖЕНИИ

В. И. Сарафанов

Проведено изучение электрической прочности титаната магния, титаната цинка, титаната кальция, тетратитаната бария, титаната стронция и титаната бария при постоянном и переменном напряжении. Изучена также температурная зависимость $E_{пр}$.

Чрезвычайно интересные диэлектрические свойства титанов щелочно-земельных металлов и их большое практическое значение делают актуальной задачу исследования электрической прочности титанатов.

В работе [1] было проведено изучение зависимости пробивной напряженности от температуры титаната бария при переменном напряжении, а также измерено значение $E_{пр}$ некоторых других титанатов при комнатной температуре.

В настоящей работе проведено исследование электрической прочности ряда титанатов металлов II группы и сделана попытка выяснить природу их пробоя. Было проведено исследование шести материалов с весьма сильно различающимися значениями диэлектрической проницаемости, близких по своему составу к титанату цинка, титанату магния, тетратитанату бария, имеющим ϵ порядка $15 \div 30$, титанату кальция и титанату стронция, имеющим ϵ порядка $150 \div 200$, и титанату бария — материалу с очень высоким значением ϵ и обладающему сегнетоэлектрическими свойствами. Для улучшения условий спекания при изготовлении образцов в шихту вводились некоторые добавки.

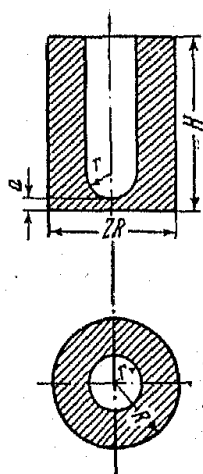


Рис. 1. Форма образцов, использованных при измерении электрической прочности

1. Методика эксперимента

Пробивное напряжение измерялось на специальных образцах, имеющих форму прямого цилиндра с глубоким цилиндрическим углублением, заканчивающимся полусферой (рис. 1). Такая форма образца обладает тем преимуществом, что здесь пробой происходит в заранее определенном, наиболее тонком месте, в котором поле близко к однородному, и напряженность его можно подсчитать. Толщина образца выбиралась такой, чтобы пробой его происходил при напряжениях, меньших, чем напряжение перекрытия. Таким образом пробой производился в отсутствие краевых разрядов. Электроды наносились на основание образца и на поверхность углубления вжиганием серебра в керамику. Вследствие некоторых недостатков этого метода нанесения электродов полученные значения $E_{пр}$, возможно, несколько занижены. Источником постоянного напряжения служил кенотронный

выпрямитель, источником переменного (с частотой 50 гц) — повышающий трансформатор.

Для определения толщины образца в месте пробоя пробитый образец раскалывался таким образом, чтобы канал пробоя был обнажен. Длина этого канала измерялась при помощи специально приспособленного микроскопа с точностью до 0,01 мм. Пробивная напряженность определялась по формуле

$$E_{\text{пр}} = \frac{V_{\text{пр}}}{a\eta}, \quad (1)$$

где $V_{\text{пр}}$ — напряжение, при котором произошел пробой, a — толщина образца в месте пробоя, η — так называемый коэффициент использования, который находился при помощи таблицы, приведенной в книге [2].

Пробой образца производился в трансформаторном масле. Температура измерялась термпарой, находящейся вплотную около заземленного электрода, в непосредственной близости к месту пробоя. Точность определения $E_{\text{пр}}$ для самых тонких образцов составляла $\pm 15\%$, для более толстых (толщиной 0,5 мм), которых было большинство, погрешность измерений не превышала $\pm 10\%$.

2. Экспериментальные результаты и их обсуждение

Результаты измерения температурной зависимости электрической прочности титанатов при постоянном напряжении приведены в табл. 1. Для каждого из исследуемых диэлектриков указано значение его диэлектрической проницаемости, интервал толщин, которые имели образцы, а также минимальное, максимальное и среднее значение пробивной напряженности.

Таблица 1

Зависимость $E_{\text{пр}}$ от T при постоянном напряжении *

Титанат	ϵ	Интервал толщин в мм	$T=20^\circ \text{C}$			$T=80^\circ \text{C}$			$T=120^\circ \text{C}$			$T=180^\circ \text{C}$		
			$E_{\text{мин}}$	$E_{\text{макс}}$	$E_{\text{ср}}$	$E_{\text{мин}}$	$E_{\text{макс}}$	$E_{\text{ср}}$	$E_{\text{мин}}$	$E_{\text{макс}}$	$E_{\text{ср}}$	$E_{\text{мин}}$	$E_{\text{макс}}$	$E_{\text{ср}}$
MgTiO ₃	16	0,32—0,60	308	445	351	283	420	328	269	405	326	252	383	333
BaO·4TiO ₂	26	0,30—0,60	319	432	348	240	381	321	220	345	289	214	319	278
ZnTiO ₃	22	0,25—0,50	375	620	493	432	618	500	416	621	507	392	545	480
CaTiO ₃	150	0,50—0,65	300	406	370	300	403	369	299	398	363	338	381	364
SrTiO ₃	170	0,40—0,80	251	433	342	281	343	314	230	337	277	141	236	191
BaTiO ₃	1300	0,42—0,60	81	120	101	80	108	92	60	88	75	41	52	46

* Значения $E_{\text{пр}}$ даны в кВ/см, значения ϵ приведены при $T=20^\circ \text{C}$ и $f=50$ гц.

В табл. 2 приведены аналогичные результаты, относящиеся к переменному напряжению ($f=50$ гц).

Как видно из этих данных, существует значительный разброс результатов, достигающий в некоторых случаях $\pm 35\%$. Наличие подобного разброса характерно для всех работ, посвященных изучению электрической прочности диэлектриков. Причина его заключается в том, что в процессе пробоя, по всей вероятности, наличие слабых мест играет решающую роль.

Таблица 2

Зависимость $E_{пр}$ от T при переменном напряжении *

Титанат	ϵ	Интервал толщин в мм	$T=20^\circ \text{C}$			$T=80^\circ \text{C}$			$T=130^\circ \text{C}$			$T=180^\circ \text{C}$		
			$E_{мин}$	$E_{макс}$	$E_{ср}$	$E_{мин}$	$E_{макс}$	$E_{ср}$	$E_{мин}$	$E_{макс}$	$E_{ср}$	$E_{мин}$	$E_{макс}$	$E_{ср}$
MgTiO_3	16	0,30—0,45	248	420	308	267	407	319	277	402	334	218	403	314
$\text{BaO} \cdot 4\text{TiO}_2$	26	0,36—0,62	182	362	224	166	250	195	157	238	202	153	269	204
ZnTiO_3	22	0,30—0,60	180	336	267	197	363	272	190	350	280	185	345	265
CaTiO_3	150	0,50—0,67	161	251	204	171	227	200	165	239	195	145	247	198
SrTiO_3	170	0,50—0,80	135	230	190	169	229	196	177	237	200	144	245	203
BaTiO_3	1300	0,43—0,60	47	76	58	42	67	56	43	73	55	44	79	65

* Значения диэлектрической проницаемости титанатов указаны при $T=20^\circ\text{C}$ и $f=50$ гц; $E_{пр}$ в $\text{kV}_{эфф}/\text{см}$.

Сравнение электрической прочности титанатов при постоянном и переменном напряжении показывает, что $E_{пр}$ при постоянном напряжении у всех исследованных в настоящей работе диэлектриков имеет более высокие значения, чем эффективные значения пробивной напряженности при переменном напряжении. Амплитудные значения $E_{пр}$ при переменном напряжении также ниже, чем $E_{пр}$ при постоянном напряжении (за исключением титаната магния, у которого $E_{перем}^a > E_{пост}$).

Эти результаты показывают, что при постоянном напряжении пробивная напряженность титаната цинка, титаната магния и титаната кальция практически не зависит от температуры в интервале от 20 до 180°C , т. е. пробой этих материалов является электрическим. Здесь и в дальнейшем мы будем употреблять термин «электрический пробой» в том смысле, что пробой не тепловой. Конечно, пробой титанатов не является «собственно электрическим» (под «собственно электрическим» пробоем мы понимаем такой пробой диэлектрика, который происходит по устранении всех причин, могущих понизить его электрическую прочность), хотя бы уже потому, что поликристаллические титанаты имеют многофазное строение и, как правило, содержат воздушные поры.

Полученный результат — независимость $E_{пр}$ от T — не является неожиданным, если учесть, что эти титанаты обладают, даже при повышенных температурах, весьма малой электропроводностью¹ (см. табл. 3, составленную по данным [3]).

Интересно отметить, что между величиной $E_{пр}$ при постоянном напряжении и энергией активации для титанатов цинка, магния и кальция существует некоторое соответствие: чем больше энергия активации U , тем выше электрическая прочность материала (табл. 4).

Наличие такого соответствия между U и $E_{пр}$ было отмечено Воробьевым [4] для щелочно-галогидных кристаллов. Наши результаты

¹ Принципиально для теплового пробоя диэлектрика не требуется, чтобы его электропроводность была больше некоторой критической величины. Тепловой пробой, как известно, обуславливается нарушением теплового равновесного состояния, превышением тепловыделения в образце над теплооттоком с его поверхности; следовательно, можно вызвать тепловой пробой даже у находящегося в электрическом поле диэлектрика со сколь угодно малой электропроводностью, например, заключив его в адиабатическую оболочку. Практически же, при использовании образцов обычных размеров, если не применять специальных мер, затрудняющих теплоотвод, для теплового пробоя нужно, чтобы электропроводность была не меньше некоторой величины $\gamma_{кр}$. Анализ литературных данных показывает, что $\gamma_{кр}$ имеет величину порядка $10^{-3} \div 10^{-9} \Omega^{-1}\text{см}^{-1}$.

Таблица 3

Титанат	lg γ		
	$T=80^\circ \text{C}$	$T=130^\circ \text{C}$	$T=180^\circ \text{C}$
MgTiO ₃	-12,8	-12,3	-11,5
ZnTiO ₃	-15	-13,5	-12,3
CaTiO ₃	-12,2	-11	-10

Таблица 4

Титанат	U (eV)	$E_{\text{пр}}$ (kV/cm)
ZnTiO ₃	1,334	493
CaTiO ₃	0,91	370
MgTiO ₃	0,71	351

показывают, что это соответствие характерно и для некоторых титанатов (именно тех, пробой которых при постоянном напряжении является электрическим).

Электрическая прочность остальных исследованных нами титанатов (тетратитанат бария, титанат стронция и титанат бария) при постоянном напряжении (табл. 1) снижается с ростом температуры, что указывает на тепловой характер пробоя. Это легко объясняется более высокими значениями электропроводности этих диэлектриков и сильным возрастанием ее с повышением температуры (см. табл. 5, составленную также по данным [3]).

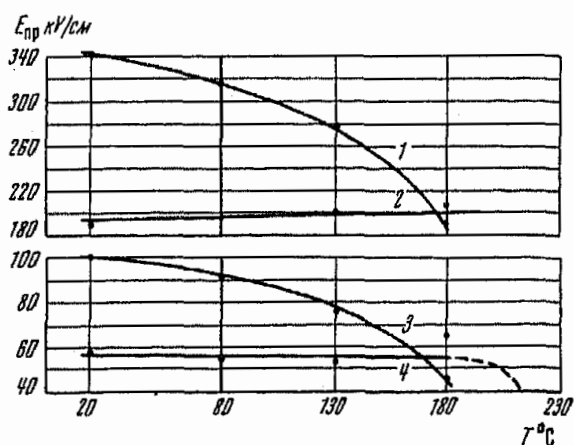
Таблица 5

Титанат	lg γ			
	$T=20^\circ \text{C}$	$T=80^\circ \text{C}$	$T=130^\circ \text{C}$	$T=180^\circ \text{C}$
SrTiO ₃	-11,5	-9	-7,5	-6
BaTiO ₃	-12,5	-10,8	-9	-7,5

При переменном низкочастотном напряжении (табл. 2) $E_{\text{пр}}$ всех исследованных нами титанатов не зависит от T , т. е. их пробой в температурном интервале от 20 до 180°С не является тепловым.

Полученный экспериментальный результат, заключающийся в том, что для некоторых титанатов (SrTiO₃, BaTiO₃) пробой при постоянном

Рис. 2. Зависимость $E_{\text{пр}}$ от T для SrTiO₃ и BaTiO₃ при постоянном и переменном напряжении. SrTiO₃: 1 — V постоянное, 2 — V переменное ($f=50$ гц); BaTiO₃: 3 — V постоянное, 4 — V переменное ($f=50$ гц)



напряжении и повышенных температурах является тепловым, а при переменном ($f=50$ гц) при тех же повышенных температурах — не тепловым, несколько неожидан. Обычно, если пробой некоторых диэлектриков в определенном температурном интервале при постоянном напряжении является тепловым, то при переменном напряжении в том же температурном интервале пробой и по-прежнему носит тепловой харак-

тер. Однако указанный результат был подтвержден нашими повторными измерениями и является достаточно надежно установленным. Существенно отметить, что при переменном напряжении кривая $E_{пр} = \varphi(T)$ этих титанатов лежит ниже соответствующей кривой при постоянном напряжении даже в той области температур, где пробой (при постоянном напряжении) носит тепловой характер (рис. 2). Эти результаты могут указывать на то, что механизм пробоя титанатов при постоянном и переменном напряжении различен. При переменном напряжении решающим процессом, приводящим к нарушению электрической прочности образца, по всей вероятности, являются многократно повторяющиеся разряды в порах, причем этот механизм от температуры не зависит и имеет место при более низких напряженностях, чем те, которые требуются для теплового пробоя.

Выводы

В результате проведенной работы показано, что:

1. Пробивная напряженность изученных нами поликристаллических материалов, близких по составу и структуре к титанатам цинка, магния, кальция, стронция, бария и тетратитанату бария, имеет величину $2 \div 4 \cdot 10^5$ В/см. Пробивная напряженность метатитаната бария имеет несколько более низкие значения (см. табл. 1, 2).

2. Пробой материалов, близких к титанатам цинка, магния, кальция при постоянном напряжении, и всех шести исследованных в данной работе материалов при переменном — является электрическим.

3. Пробой титанатов стронция и бария, а также, вероятно, и тетратитаната бария при постоянном напряжении является тепловым.

Настоящая работа выполнена под руководством проф. Г. И. Скани, которому автор выражает свою глубокую благодарность.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
19 января 1954 г.

Литература

- [1] Б. М. Вул, И. М. Гольдман и Р. Я. Разбаш. ЖЭТФ, 20, 465, 1950. —
- [2] Физика диэлектриков, под редакцией А. Ф. Вальтера, ГТТИ, 530, 1932. —
- [3] Е. В. Синяков. Диссертация, Днепропетровский государственный университет, 1949. — [4] А. А. Воробьев. ДАН СССР, 27, 934, 1940.

ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРОЧНОСТЬ ТИТАНАТОВ МЕТАЛЛОВ II ГРУППЫ ТАБЛИЦЫ Д. И. МЕНДЕЛЕЕВА ПРИ ВЫСОКОЧАСТОТНОМ НАПРЯЖЕНИИ

Г. И. Сканави и В. И. Сарафанов

Излагаются результаты изучения частотной и температурной зависимости электрической прочности титанатов цинка, магния, кальция, стронция и тетратитаната бария в диапазоне частот от 140 кгц до 3÷4 мгц, и температур от 20 до 230° С. Проведено детальное обсуждение и уточнение гипотезы «термоионизационного» пробоя.

В настоящей работе проведено изучение электрической прочности при высокочастотном напряжении некоторых поликристаллических материалов, близких по составу и структуре к титанатам металлов II группы таблицы Д. И. Менделеева, и сделана попытка установить природу их пробоя в различных областях температур и частот.

1. Экспериментальная методика

Источником высокого напряжения высокой частоты служил высоковольтный высокочастотный генератор, дающий возможность получать напряжение до 8 kV_{эф} в диапазоне частот от 100 кгц до 3÷4 мгц. Образцы для пробоя имели такую же форму, и определение $E_{пр}$ производилось тем же путем, что и при измерении электрической прочности при постоянном напряжении (см. [1]).

Пробой образцов производился в воздухе. Перекрытия образцов перед пробоем не происходило вследствие того, что толщина образца подбиралась такой, чтобы $V_{пр}$ было ниже напряжения перекрытия.

Для измерения температурной зависимости предельной напряженности образец помещался в воздушный термостат, температура в котором могла изменяться в пределах от 20 до 230° С. Температура образца измерялась при помощи термопары, жестко закрепленной на определенном, строго фиксированном расстоянии от образца, причем градуировка термопары была произведена в этом же положении по термометру, головка которого находилась в месте, куда помещался испытываемый образец во время измерения.

Существенные указания относительно природы электрического пробоя, особенно ответ на вопрос, имеет ли место в данном случае тепловой пробой, можно получить, измеряя температуру образца, находящегося в высокочастотном поле. Нарушение теплового равновесного состояния (тепловой пробой) будет характеризоваться «саморазогревом» образца, ростом его T со временем при неизменном напряжении. Поэтому представляет интерес измерение температуры в месте пробоя там, где разогрев максимальный.

Нами был применен следующий простой метод, который давал возможность измерять температуру, достаточно близкую к $T_{\max}$. Два одинаковых (равной толщины) образца помещались в специальном станочке, как указано на рис. 1. Высокий потенциал подводился к коротко замкнутым между собой верхним и нижним электродам так, что образцы были подключены параллельно, и на каждом из них

было одинаковое напряжение V . Термопара помещалась точно в середине между образцами, достаточно близко (поскольку толщина образцов составляла $\sim 0,4$ мм) к месту максимальной температуры. (На рисунке для ясности термопара изображена на некотором расстоянии от электродов, в действительности же она вплотную прижималась

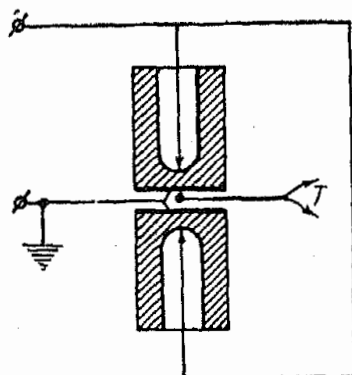


Рис. 1. Расположение образцов при измерении их температуры в высокочастотном поле

к центрам электродов.) Измеренная таким образом температура была достаточно близка к максимальной и, во всяком случае, правильно передавала характер изменения ее, что нас главным образом и интересовало.

2. Экспериментальные результаты и их обсуждение

Зависимость пробивной напряженности исследуемых титанатов от частоты при комнатной температуре представлена на рис. 2 и 3. На

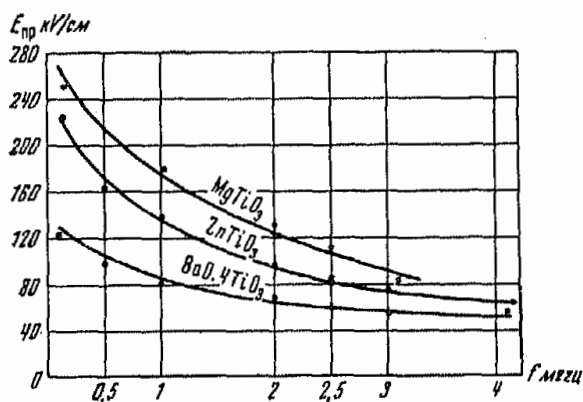


Рис. 2. Зависимость $E_{пр}$ от частоты для титаната цинка, титаната магния и тетра-титаната бария

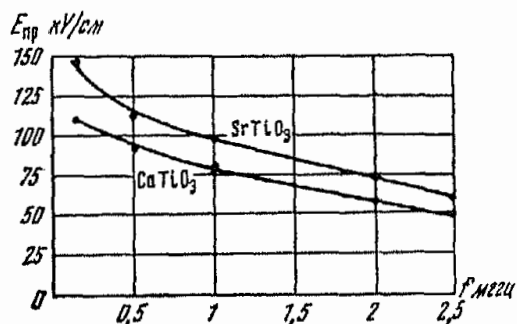


Рис. 3. Зависимость $E_{пр}$ от частоты для титаната стронция и титаната кальция

графиках указаны средние значения эффективной пробивной напряженности. Наибольшие отклонения от среднего значения достигали в отдельных случаях $\pm 30\%$. При этом при частотах > 1 мГц (где, как будет показано ниже, пробой титанатов является тепловым) разброс значений $E_{пр}$ меньше, чем при более низких частотах. Для этих диэлектриков имеет место отчетливо выраженная зависимость $E_{пр}$ от частоты электрического поля: с увеличением частоты $E_{пр}$ снижается.

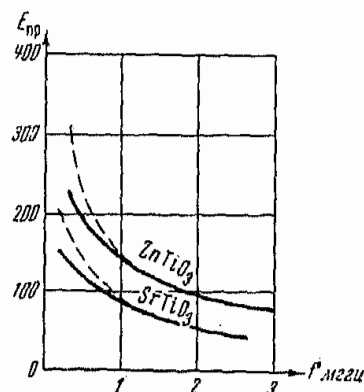
Как известно, при тепловом пробое на высоких частотах пробивная напряженность обратно пропорциональна корню квадратному из частоты (если ϵ и $\operatorname{tg} \delta$ в указанном диапазоне не меняются с частотой):

$$E_{пр} = \frac{\text{const}}{\sqrt{f}} \quad (1)$$

Для сравнения наших результатов с этим следствием теории теплового пробоя были построены теоретические кривые по формуле (1),

причем постоянная в числителе выбиралась так, чтобы при $f = 2,5$ мггц значения $E_{пр}$, вычисленные по формуле (1), и экспериментальные значения электрической прочности совпадали. Соответствующие кривые для двух титанатов приведены на рис. 4 пунктирными линиями, там же (сплошными линиями) показаны экспериментальные значения $E_{пр}$. Для остальных, изучаемых в настоящей работе титанатов обсуждаемые зависимости аналогичны.

Рис. 4. Экспериментальные и теоретические (следующие из формул теории теплового пробоя) кривые $E_{пр} = \varphi(f)$. Верхняя кривая относится к титанату цинка, нижняя — к титанату стронция



При частотах выше 1 мггц вычисленные и экспериментальные кривые совпадают, что свидетельствует в пользу того, что пробой наших титанатов в этой области частот является тепловым.

При $f < 1$ мггц, как видно из рис. 4, пробой наступает при напряжениях ниже тех, которые необходимы для теплового пробоя; это может указывать на нетепловой характер пробоя, ибо в этом случае при напряжениях ниже тех, которые требуются для теплового пробоя, вступает в силу какой-то иной механизм, приводящий к нарушению электрической прочности диэлектрика.

Тепловой характер пробоя титанатов при $f > 1$ мггц подтверждается тем, что в этой области частот пробивная напряженность уменьшается с ростом температуры. На рис. 5 и 6 представлены кривые $E_{пр} = \varphi(T)$ при частоте 2,5 мггц. Сравнение этих графиков с соответствующей

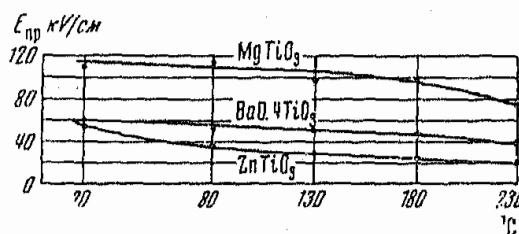


Рис. 5. $E_{пр} = \varphi(T)$ при $f = 2,5$ мггц для титанатов магния, цинка и тетрагитата бария

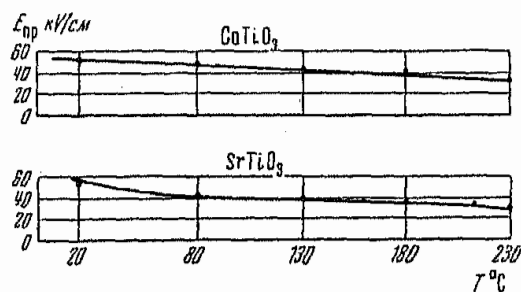


Рис. 6. $E_{пр} = \varphi(T)$ при $f = 2,5$ мггц для титанатов кальция и стронция

зависимостью, вычисленной по формуле (2) (см. ниже), следующей из теории теплового пробоя, также подтверждает заключение, что пробой титанатов здесь является тепловым. Указанное сравнение приведено для титанатов цинка и магния в табл. 1. В столбцах $E_{теор}$ представлены величины, определенные по формуле:

$$E_{теор} = \frac{\text{const}}{\sqrt{C \lg \delta}}, \quad (2)$$

где C и $\lg \delta$ — соответственно емкость образца данного титаната и его тангенс угла диэлектрических потерь при $f = 2,5$ мггц и данной тем-

Таблица 1

$T^{\circ}C$	$ZnTiO_3$		$MgTiO_3$	
	$E_{теор}$	$E_{эксп}$	$E_{теор}$	$E_{эксп}$
20	58	58	118	110
80	37	39	112	114
130	33	29	101	99
180	30	25	93	94
230	24	20	77	80

пературе. Постоянная выбиралась так, чтобы экспериментальные и вычисленные величины совпадали для одной из температур.

При частотах, превышающих 1 мГц, существует сильная зависимость $E_{пр}$ от толщины образца. На рис. 7 приведена зависимость

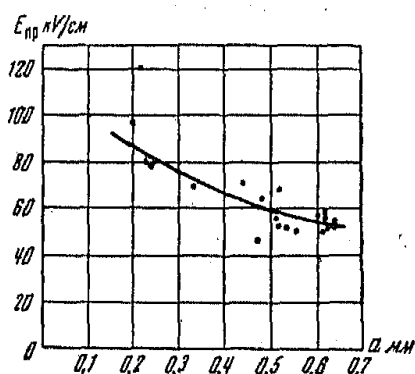


Рис. 7. Зависимость $E_{пр}$ от толщины образца a при $f=2,5$ мГц для титаната цинка

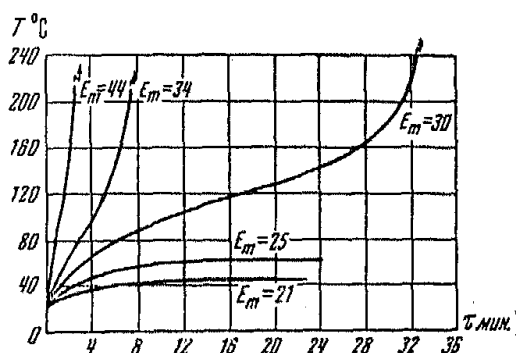


Рис. 8. Зависимость температуры образца от времени при заданном напряжении для титаната цинка ($f=2,5$ мГц)

$E_{пр} = \varphi(a)$ для титаната цинка при $f=2,5$ мГц. При увеличении a наблюдается снижение $E_{пр}$. Это также свидетельствует в пользу того, что пробой здесь тепловой.

Сильно повышенное значение $E_{пр}$ титаната магния, по сравнению с другими титанатами, при $f=2,5$ мГц (рис. 5 и табл. 1), повидимому, связано с тем, что при измерениях были использованы образцы $MgTiO_3$ толщиной $\sim 0,25$ мм, а образцы остальных диэлектриков имели толщину $0,45-0,60$ мм.

Кривые изменения температуры образца, находящегося в высокочастотном электрическом поле при $f=2,5$ мГц, от времени при заданном напряжении также однозначно указывают на тепловой характер пробоя. На рис. 8 приведены кривые $T = \varphi(\tau)$ при разных напряжениях для $ZnTiO_3$. Для остальных титанатов эти кривые имеют такой же характер.

Из всего вышесказанного можно сделать вывод, что пробой титанатов, изучаемых в настоящей работе, при частотах больше 1 мГц является тепловым. При частотах же меньше 1 мГц, как это видно уже из рис. 4, пробой титанатов не является тепловым. Измерение температурных зависимостей $E_{пр}$ в этой области частот (при $f=145$ кГц), результаты которого приведены на рис. 9 и 10, это подтверждает, так как зависимость $E_{пр}$ от температуры либо полностью отсутствует, либо весьма слабо выражена.

Лишь для $SrTiO_3$ при $T > 130^{\circ}C$ пробой носит тепловой характер: $E_{пр}$ заметно снижается с ростом температуры. Этот факт легко объясняется температурным ходом активной проводимости этого титаната: при $T < 130^{\circ}C$ активная проводимость почти не изменяется с T и имеет

величину $< 10^{-8} \Omega^{-1} \text{ см}^{-1}$; при $T > 130^\circ \text{ C}$, γ_a сильно возрастает с температурой. Именно в этой области температур пробой SrTiO_3 и является тепловым.

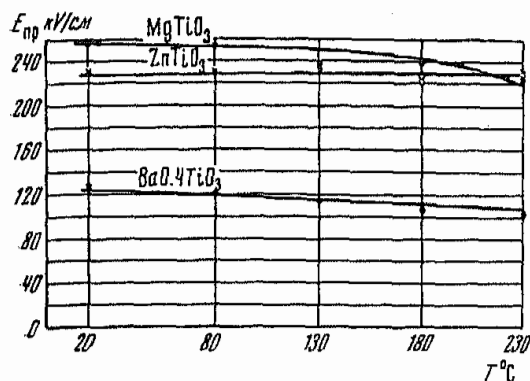


Рис. 9. $E_{\text{пр}} = \varphi(T)$ при $f = 145 \text{ кГц}$ для титанатов магния и цинка и тетратитаната бария

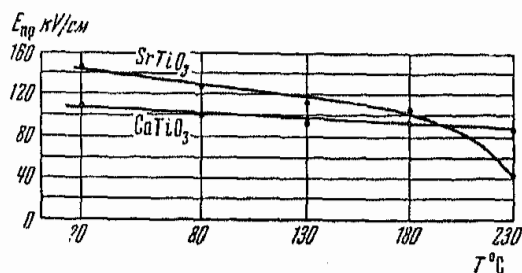


Рис. 10. $E_{\text{пр}} = \varphi(T)$ при $f = 145 \text{ кГц}$ для титанатов кальция и стронция

Пробой изучаемых в настоящей работе титанатов при высоких частотах ниже 1 мГц не является также и «собственно электрическим», о чем говорят пониженные значения пробивной напряженности и зависимость $E_{\text{пр}}$ от частоты.

3. Обсуждение природы электрического пробоя титанатов при высокой частоте (в области частот, где пробой не является тепловым)

Для выяснения природы пробоя изучаемых диэлектриков в области высоких частот естественно попытаться учесть факт наличия пор в этих материалах, поскольку в порах при высокой частоте может выделяться большое количество тепла. Исходя из этого, можно представить себе механизм пробоя керамических пористых материалов следующим образом. Вследствие тепловыделения в поре, на ее стенке образуется градиент температуры, который будет тем больше, чем больше тепловыделение, т. е. чем больше приложенное напряжение. При некотором напряжении $V_{\text{пр}}$ градиент T достигнет такой величины, при которой обусловленные им термические натяжения на стенке поры станут равными, а в дальнейшем (при повышении V) будут превышать временное сопротивление (предел прочности) материала. Тогда произойдет растрескивание керамики вблизи поры, что в конечном счете приведет к нарушению электрической прочности материала, к его пробую.

Такое представление о природе пробоя керамических диэлектриков при высокой частоте было высказано в работе Пирятинского [2]. В этой работе автор, используя метод [3] подсчета тангенциального напряжения на стенке полого шара в зависимости от его радиуса и от температуры показывает, что для такого «термоионизационного пробоя» необходимо, чтобы температура на стенке сферической поры достигла величины, определяемой формулой:

$$T_{\text{кр}} = \frac{\sigma_{\text{кр}}(1 - \nu)}{\alpha\beta} \quad (3)$$

Здесь $\sigma_{\text{кр}}$ — временное сопротивление материала, ν — коэффициент Пуассона, α — коэффициент линейного расширения, β — модуль Юнга. Легко показать, что для этого нужно, чтобы удельное тепловыделение в поре было

$$p = \frac{3 \lambda T_{\text{кр}}}{a^2} = \frac{3 \lambda \sigma_{\text{кр}}(1 - \nu)}{\alpha \beta a^2} \quad (4)$$

где λ — коэффициент теплопроводности керамики, a — радиус поры.

Чтобы получить формулу для пробивной напряженности, необходимо, далее, подсчитать количество тепла, выделяющееся в единице объема поры за единицу времени, для данного значения напряженности среднего поля в образце $E_{\text{ср}}$, т. е. найти p как функцию от $E_{\text{ср}}$:

$$p = \varphi(E_{\text{ср}}). \quad (5)$$

Если такая функция найдена, то пробивная напряженность легко может быть определена при помощи приравнивания правых частей равенств (4) и (5).

Определить функцию (5) можно, вообще говоря, двумя путями. Первый путь заключается в непосредственном рассмотрении физических процессов, происходящих в поре при наложении на диэлектрик высокого предпробивного напряжения, — коронирования и разрядов в поре, приводящих к большому тепловыделению в ней. Удельное тепловыделение в поре можно подсчитать как

$$p = p_{\text{разр}} + w, \quad (6)$$

где $p_{\text{разр}}$ — удельное тепловыделение в поре, обусловленное разрядами, w — тепло, выделяющееся в единице объема поры за счет короны, которая, по всей видимости, существует в поре при высокочастотном напряжении, предшествуя разрядам в ней.

Первый член в (6) можно подсчитать, полагая, что в процессе единичного разряда вся электрическая энергия, запасенная в поре, превращается в тепло. Тогда за один разряд в поре выделится количество тепла

$$p' = \int_{(x)} \frac{E_{\text{разр}}^2 dx}{8\pi \cdot 9 \cdot 10^{11}} \text{ Дж} \quad (7)$$

Здесь $E_{\text{разр}}$ — напряженность поля в поре, при которой происходит разряд в ней, x — объем поры.

Если считать для грубой оценки, что поле в поре перед разрядом равномерно, то удельное тепловыделение в поре за 1 сек.

$$p_{\text{разр}} = \frac{n f E_{\text{разр}}^2}{72 \pi \cdot 10^{11}} \frac{W}{\text{см}^3}, \quad (8)$$

где n — число разрядов за период, f — частота электрического поля.

Число разрядов в поре можно приближенно оценить как

$$n = 4 \frac{E_i^a}{E_{\text{разр}}}, \quad (9)$$

где E_i^a — амплитуда напряженности поля в поре. Подставив (9) в (8), получим, что

$$p_{\text{разр}} = \frac{f E_{\text{разр}} E_i^a}{18 \pi \cdot 10^{11}}. \quad (10)$$

Полагая, что поры имеют сферическую форму, и, следовательно, $E_i^a = \frac{3\sqrt{2}}{2} E_{\text{ср}}$ (поскольку $\epsilon \gg 1$), найдем связь между $p_{\text{разр}}$ и экспериментально определяемой $E_{\text{пр}}$:

$$p_{\text{разр}} = \frac{\sqrt{2} f E_{\text{разр}} E_{\text{пр}}}{12 \pi \cdot 10^{11}} = \text{const } f E_{\text{пр}}. \quad (11)$$

Если не учитывать тепловыделения вследствие коронирования, то $p = p_{\text{разр}}$. Приравняв правые части равенств (4) и (11), найдем

$$E_{\text{пр}} = \frac{\text{const}}{f}. \quad (12)$$

Этот результат не согласуется с результатами наших опытов которые дают более слабую частотную зависимость $E_{\text{пр}}$. Отсюда можно заключить, что оценивать тепловыделение в поре, учитывая только одни разряды, без учета коронирования (как это делается, например, в работе [4]) нельзя.

Удельное тепловыделение в поре w , обусловленное коронированием, вряд ли можно оценить с удовлетворительной точностью. Однако следует отметить, что если величина w имеет существенное значение и может быть положена равной $w = AE^m$, где $m > 1$, то формула (6) даст зависимость $E_{\text{пр}}$ от частоты тем менее резкую, чем больше m . Таким образом достаточно точная оценка тепловыделения в поре, обусловленного разрядами и коронированием, принципиально может дать функцию уменьшения пробивной напряженности поликристаллических или керамических диэлектриков, содержащих воздушные включения, с увеличением частоты, которая согласуется с наблюдаемой на опыте.

Второй путь количественной оценки вышеизложенной гипотезы заключается в том, чтобы оценить интересующую нас величину феноменологически, т. е., не анализируя процессов, происходящих в поре, попытаться определить связь p с экспериментально измеряемыми величинами (ϵ и $\text{tg } \delta$) диэлектрика.

Функцию (5) автор работы [2] определяет как

$$p = \epsilon f \text{tg } \delta \left(\frac{3}{2} E_{\text{ср}} \right)^2, \quad (13)$$

где ϵ — диэлектрическая проницаемость газа в поре, f — частота, $\frac{3}{2} E_{\text{ср}}$ — электрическое поле в поре, $\text{tg } \delta$, насколько можно судить из текста статьи [2], измеряется для всего образца в целом обычным путем и характеризует потери в диэлектрике. Далее на основании экспериментальных данных автор [2] полагает, что $\text{tg } \delta$ пропорционален напряженности поля и пишет

$$p = k_1 f E_{\text{пр}}^3. \quad (14)$$

Приравнивание (4) и (14) приводит его к формуле для пробивной напряженности:

$$E_{\text{пр}} = \sqrt[3]{\frac{3\lambda\sigma_{\text{кр}}(1-\nu)}{k_1\alpha\beta fa^2}}. \quad (15)$$

Определить абсолютные значения $E_{\text{пр}}$ из формулы (15) нельзя, так как неизвестен ряд входящих в нее параметров. В связи с этим автор работы [2] проверяет экспериментально частотную зависимость $E_{\text{пр}}$, даваемую формулой (15). Однако этот метод проверки гипотезы не является достаточным для однозначного ответа на вопрос о ее правдоподобности; кроме того, формулы (13) и (15) нуждаются в уточнении, что приводит к некоторым выводам, отличным от тех, которые даются в работе [2] (см. ниже).

Необходимо установить, действительно ли выделяется в поре требующееся для пробоя, согласно формуле (4), удельное количество тепла, при напряженности электрического поля, равной $E_{\text{пр}}$ (в работе [2] этого не сделано). Поскольку значения термических и механических констант, входящих в формулу (4), для титанатов неизвестны,

для грубой оценки требующегося для пробоя удельного количества тепла приходится использовать соответствующие величины, средние для радиокерамических материалов. Полагая

$$\lambda = 0,01 \text{ W / см} \cdot \text{град.}, \quad \sigma_{\text{кр}} = 300 \text{ кг / см}, \quad \nu = 0,3, \\ \alpha = 8 \cdot 10^{-6} \text{ град.}^{-1}, \quad \beta = 10^6 \text{ кг / см}, \quad a = 0,0015 \text{ см},$$

найдем¹

$$p \approx 10^5 \text{ W / см}^3. \quad (16)$$

Чтобы оценить теперь количество выделяющегося тепла по формуле (13), нужно уточнить, что понимается под p : потери в единице объема поры или в единице объема диэлектрика². Поскольку в формулу (13) входит диэлектрическая проницаемость воздуха и электрическое поле в поре, то казалось бы, что в работе [2] через p обозначены потери в единице объема поры, а не диэлектрика в целом. Тогда очевидно, что $\text{tg } \delta$ должен относиться не к диэлектрику в целом, а должен являться некой эффективной характеристикой потерь в поре, не равной измеряемому значению $\text{tg } \delta$.

Если относить все потери, измеряемые на опыте, к порам, что, повидимому, подразумевается в работе [2], то при оценке удельных потерь в порах через измеряемые для всего диэлектрика значения ϵ и $\text{tg } \delta$ следует ввести объемную концентрацию пор:

$$p_{\text{пор}} = p_{\text{диэл}} \frac{1}{\theta}, \quad (17)$$

где θ — отношение объема пор к объему всего диэлектрика (для наших образцов $\theta \approx 0,01$). Потери же в диэлектрике определяются по формуле

$$p_{\text{диэл}} = \frac{1}{k} \epsilon f \text{tg } \delta E_{\text{ср}}^2, \quad (18)$$

где $k = 1,8 \cdot 10^{12}$, ϵ и $\text{tg } \delta$ — соответственно диэлектрическая проницаемость и тангенс угла потерь всего диэлектрика в целом. Тогда

$$p_{\text{пор}} = \frac{\epsilon f \text{tg } \delta E_{\text{ср}}^2}{k\theta}. \quad (19)$$

Подсчитаем величину удельных потерь в поре, даваемую этой формулой. Полагая $\epsilon = 100$, $f = 2 \cdot 10^5$ гц, $\text{tg } \delta \approx 10^{-3}$, $E_{\text{ср}} = 10^5 \text{ V / см}$, $\theta = 0,01$, получим

$$p_{\text{пор}} \approx 10^4 \text{ W / см}^3. \quad (20)$$

Как видно, величина (20) достаточно близка (если учесть приближенный характер вычислений) к величине (16), что дает количественное подтверждение возможности обсуждаемого механизма нарушения электрической прочности титанатов при высокой частоте.

Полагая, как и в работе [2], что $\text{tg } \delta$ пропорционален E ($\text{tg } \delta = k_1 E_{\text{ср}}$), и считая, что ϵ диэлектрика не зависит от E , приравняв (4) и (19), получим формулу для пробивной напряженности

$$E_{\text{пр}} = \sqrt[3]{\frac{3\lambda\sigma_{\text{кр}} k\theta(1-\nu)}{\alpha\beta a^2 k_1 f \epsilon}}, \quad (21)$$

¹ p — величина удельных потерь. Абсолютное же тепловыделение в поре $p_0 = \frac{4}{3} \pi a^3 p \approx 10^{-3} \text{ W}$.

² Такое уточнение не только является необходимым для проводимого нами оценочного сравнения; оно также, как показано ниже, изменяет окончательную формулу (15).

или

$$E_{\text{пр}} = \frac{A}{\sqrt[3]{a^2 \epsilon f}}, \quad (22)$$

где

$$A = \sqrt[3]{\frac{3\lambda\sigma_{\text{кр}} k\theta (1-\nu)}{\alpha\beta k_1}}. \quad (23)$$

Полученная нами формула (22) отличается от (15). Формула (15) дает независимость $E_{\text{пр}}$ от ϵ диэлектрика, так как в формулу (13) входит диэлектрическая проницаемость воздуха. Полученная же нами формула (22) показывает, что $E_{\text{пр}}$ обратно пропорционально $\sqrt[3]{\epsilon}$ (ϵ — диэлектрическая проницаемость диэлектрика). В общем, этот вывод согласуется с нашими экспериментальными данными: электрическая прочность титанатов цинка и магния (со сравнительно небольшой ϵ , порядка 15–30) значительно выше при $f = 140$ кГц, чем прочность титанатов стронция и кальция (имеющих ϵ порядка 150–200).

Таким образом утверждение автора работы [2] о том, что из теории термоионизационного пробоя следует независимость $E_{\text{пр}}$ от ϵ , неверно по изложенным выше соображениям. Неправомочно также высказываемое в работе [2] (стр. 1560) утверждение, что результаты Вула с сотрудниками [4], показавшие независимость $E_{\text{пр}}$ от ϵ титаната бария при пробое на переменном напряжении ($f = 50$ Гц), согласуются с выводами автора работы [2]. Совершенно очевидно, что результаты [4], подтвержденные также работой одного из авторов данной работы [1], относятся к нарушению электрической прочности диэлектриков при $f = 50$ Гц, где механизм пробоя совершенно иной, отличный от термоионизационного, и, следовательно, тот факт что при этом механизме пробоя $E_{\text{пр}}$ не зависит от ϵ , не имеет никакого отношения к нарушению электрической прочности титанатов при высокой частоте.

Далее, из формулы (22) следует, что $E_{\text{пр}}$ при таком механизме пробоя должно быть пропорционально $1/\sqrt[3]{f}$. Экспериментальные результаты, приведенные в работе [2], подтверждают такую частотную зависимость. Наши же экспериментальные результаты показывают, что $E_{\text{пр}}$ уменьшается с увеличением частоты несколько менее резко. Однако если в (18) считать, что вследствие ионизации пор с ростом напряженности увеличиваются не только потери ($\text{tg } \delta = k_1 E_{\text{ср}}$), но растет и эффективное ϵ , то, положив, например, $\epsilon = \epsilon_0 + k_2 E_{\text{ср}}$ (где ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость диэлектрика в слабых полях), $E_{\text{пр}}$ определится из уравнения

$$P_{\text{пр}} = \frac{f\epsilon_0 k_1}{k\theta} E_{\text{пр}}^3 + \frac{fk_1 k_2}{k\theta} E_{\text{пр}}^4,$$

что даст более слабое изменение $E_{\text{пр}}$ с частотой, чем даваемое формулой (22).

Наконец, формулы (22) и (21) показывают, что при обсуждаемом механизме пробоя $E_{\text{пр}}$ практически не зависит (или слабо зависит) от температуры окружающей среды, в интервале 20–200°С, так как изменение термических и механических констант керамики не может быть большим в этом интервале температур. Это хорошо подтверждается нашими экспериментальными результатами (рис. 9, 10). Следует отметить, что в работе [2] при выводе формулы (4) полагалось, что T_b (температура на границе диэлектрик — среда) равно нулю, тогда, естественно, получалась независимость $E_{\text{пр}}$ от T , поскольку T просто было исключено из рассмотрения. Нами же проведен более полный расчет количества тепла, которое должно выделяться в поре для того,

чтобы произошел пробой без дополнительного условия $T_b = 0$. Этот расчет также приводит к формуле (4) (т. е. T исключается), так как критерием пробоя является достижение определенного значения $\text{grad } T$ на стенке поры, который не зависит от T_b .

Выводы

В результате настоящей работы показано, что:

1. Пробой поликристаллических диэлектриков, близких по составу и структуре к титанату стронция, титанату цинка, титанату магния, титанату кальция, тетратитанату бария при высоких частотах, превышающих 1 мГц, является тепловым.

2. Пробой этих же диэлектриков при высоких частотах от 100 кГц до 1 мГц не является ни тепловым, ни «собственно электрическим» в интервале температур от 20 до 230°С (кроме SrTiO_3 , у которого при $T > 100^\circ\text{C}$ пробой тепловой) и, по всей вероятности, обусловлен тепловыделением в порах и носит «термоионизационный характер».

3. Проведено детальное обсуждение гипотезы «о термоионизационном» пробое этих диэлектриков в области высоких частот, меньших 1 мГц.

Количественная оценка этой гипотезы и уточнение, проведенное в настоящей работе, показывают ее правдоподобность и приводят к формулам, отличным от формул работы [2] и лучше согласующимся с экспериментом.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
19 января 1954 г.

Литература

[1] В. И. Сарафанов. ЖЭТФ, этот выпуск, стр. 590.— [2] А. З. Пирятинский. Журн. техн. физ., 22, 1556, 1952.— [3] С. П. Тимошенко. Теория упругости, ГТТИ, 1934, стр. 414.— [4] S. Whitehead. Dielectric Breakdown of Solids, Oxford, 1951, стр. 203.— [5] Б. М. Вул, И. М. Гольдман и Р. Я. Разбаш. ЖЭТФ, 20, 465, 1950.

ЯВЛЕНИЯ В ВОЛЬФРАМОВЫХ ПРОВОЛОКАХ, ПРЕДШЕСТВУЮЩИЕ ИХ ВЗРЫВУ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛЬНОГО ТОКА

С. В. Лебедев

При плотности тока $j \approx 5 \cdot 10^5 \text{ А/см}^2$ наблюдаются аномалии состояния вольфрама, обнаруженные ранее [1,2] при $j \gtrsim 5 \cdot 10^5 \text{ А/см}^2$. При резком выключении тока $\approx 5 \cdot 10^5 \text{ А/см}^2$ замечено, что вольфрам не становится жидким, хотя его энергия соответствует энергии жидкого состояния. Признаки аномальной эмиссии наблюдаются одновременно с признаками аномальной зависимости сопротивления от энергии.

Рассматривается предположение о характере изменений, которые происходят в металле при нагревании его током большой плотности.

Методика экспериментов, результаты которых обсуждаются ниже, мало отличается от рассмотренной ранее [1-3]. Измерение сопротивления R вольфрамовых проволок и энергии E , поступающей в эти проволоки при протекании сильного тока i , производилось по осциллограммам напряжений $V_R(t) = R(t)i(t)$ и $V_r(t) = ri(t)$ на исследуемой проволоке и последовательно включенном постоянном сопротивлении r . Величина электронной эмиссии проволоки оценивалась по анодному току I_a . Ток I_a измерялся по напряжению $V_p(t) = rI_a(t)$ на постоянном сопротивлении r , стоящем в анодной цепи лампы, катодом которой служит исследуемая проволока.

В [1] было выяснено, что при нагревании металлических проволок током $\sim 10^7 \text{ А/см}^2$ в некоторый момент t_c происходит резкое изменение зависимости сопротивления металла R от поступающей в него энергии E . Величина энергии $E_{t_c}^{tc}$, поступившей с момента t_0 включения тока i до момента t_c , при токах различной плотности оказывается различной. Из этих фактов был сделан вывод, что при $j \sim 10^7 \text{ А/см}^2$ состояние металла в момент t_c не является обычным состоянием. (Потерями энергии за время $t_c - t_0$ можно пренебречь.)

Чтобы судить о том, возникает ли отклонение от нормального состояния металла на более ранней стадии нагревания, мы пытались сравнивать величину dR/dE , измеренную по осциллограммам в опытах при большой плотности тока, с нормальным значением dR/dE . Для вольфрама нормальная зависимость R от E известна только до начала плавления. Поэтому такое сравнение возможно только до тех пор, пока $E \leq W_n$ или пока R не достигло величины $R_{пл}^{тн}$ (W_n — энергия нагревания вольфрама до начала плавления в обычных условиях; $R_{пл}^{тн}$ и $R_{пл}^{ж}$ — обычные значения сопротивления при температуре плавления в твердом и в жидком состояниях). При $R \approx R_{пл}^{тн}$, dR/dE сильно уменьшается, так что в случае постоянного тока i осциллограмма $V_R(t) = iR(t)$ до $t = t_c$ может быть разделена на две области, первая

из которых характеризуется значительно большим dR/dt ¹. Момент времени, соответствующий границе раздела этих областей, обозначается через t' (стрелка на рис. 1) и относится к тому месту осциллограммы $V_R(t)$, в котором dR/dt начинает заметно уменьшаться. Данные, указывающие на то, что уже при $t < t'$ появляется некоторое уменьшение dR/dE по сравнению с нормальным значением этой величины, были приведены в [1] (пример 3). Однако, как было указано, эти данные недостаточно надежны.

В области $t' < t < t_c$ об аномальном состоянии вольфрама в [1] мы судили по следующим признакам: 1) состояние аномально при $t = t_c$; 2) в течение времени $t_c - t'$ сопротивление проволоки почти не меняется и остается близким к $R_{пл}^{TB}$, несмотря на то, что в нее поступает энергия, в два с лишним раза превышающая W_n . Однако первый из этих признаков относится только к моменту t_c и не доказывает непосредственно, что состояние аномально во всей области с малым dR/dE .

Второй же признак является недостаточно убедительным, так как неизвестна нормальная зависимость R от E при $E > W_n$.

1. Изучение области $t' < t < t_c$

В [1] было выяснено, что при $t > t'$, $E_{t_0}^t > W_n$, в частности, для $t = t_c$ при $j \approx 10^7$ А/см², $E_{t_0}^{t_c} > W_n + 6W_{пл}$ ($W_{пл}$ — энергия, необходимая для плавления металла в нормальных условиях). Следовательно, в случае отсутствия аномалий большей части области (t' , t_c) должно было бы соответствовать жидкое состояние вольфрама. Но вблизи $t = t'$ по осциллограммам незаметно значительного изменения сопротивления, которое обычно происходит при плавлении металлов: после момента t' , R возрастает очень мало, а при $t = t_n$ возрастание R прекращается (рис. 1). Совпадение величины R с $R_{пл}^{TB}$ в области резкого уменьшения dR/dE в наших опытах установлено только с точностью около 10%. Таким образом незначительное изменение R при увеличении E выше $E = W_n$ либо указывает на отсутствие обычного плавления в условиях наших опытов, либо позволяет утверждать, что изменение сопротивления вольфрама при плавлении не превышает 10%². Однако сопротивление металлов при плавлении обычно меняется значительно больше, чем на 10% (табл. 1)³.

Если бы оказалось, что для вольфрама $R_{пл}^{ж}/R_{пл}^{TB}$ мало отличается от единицы (в отличие от металлов, указанных в табл. 1), то участок $t' < t < t_c$ мог бы соответствовать нормальному состоянию жидкого вольфрама. Тогда резкое увеличение dR/dE в момент t_c должно было бы происходить всегда при одной и той же величине энергии $E_{t_0}^{t_c}$. Но, как уже отмечалось, в действительности величина $E_{t_0}^{t_c} = E_{t_0}^{t_c'} + E_{t_0}^{t_c''}$ различна при нагревании металла токами различной плотности. В опытах с постоянным током различие в величине энергии $E_{t_0}^{t_c}$, поступающей при различных j за время $t_c - t'$, видно по осциллограммам даже без подсчета.

¹ Уменьшению $\frac{dR}{dE}$ соответствует уменьшение $\frac{dR}{dt} = \frac{dR}{dE} i^2 R$. Действительно, по осциллограммам видно, что i и R почти не изменяются за время уменьшения $\frac{dR}{dt}$.

² Поскольку не выяснено, какое из двух значений, $R(t')$ или $R(t_n)$, ближе к $R_{пл}^{TB}$, то не исключена возможность, что $R(t') = R_{пл}^{TB}$, а $R(t_n) = R_{пл}^{ж}$.

³ Таблица взята из [4].

Таблица 1

Металл	Li	Na	K	Rb	Cs	Cu	Ag	Au	Zn
$\frac{R_{пл}^{ж}}{R_{пл}^{тв}}$	1,68	1,45	1,55	1,61	1,66	2,07	1,9	2,28	2,09

Металл	Cd	Hg	Al	Ga	Te	Sn	Pb	Sb	Bi
$\frac{R_{пл}^{ж}}{R_{пл}^{тв}}$	2,0	4,1	1,64	0,58	2,0	2,1	2,67	0,67	0,43

Действительно, опыт показывает, что $R(t') \approx R(t_n) \approx R(t_c) \approx R_{пл}^{тв}$ величина $E_{t_0}^{t'}$ близка к W_n . Поэтому

$$\frac{E_{t'}^{t_c}}{W_n} \approx \frac{E_{t'}^{t_c}}{E_{t_0}^{t'}} = \frac{\int_{t'}^{t_c} i^2 R dt}{\int_{t_0}^{t'} i^2 R dt} \approx \frac{R_{пл}^{тв}(t_c - t')}{R(t' - t_0)}.$$

Из сопоставления осциллограмм 1 и 2 рис. 1 видно, что отношение $(t_c - t') / (t' - t_0)$ для осциллограммы 1 значительно больше, чем для

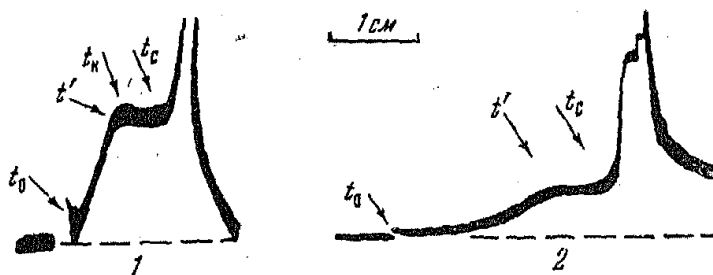


Рис. 1 Осциллограммы $V_R(t) = R(t) i(t)$ вольфрамовых проволок в масле при постоянном токе. 1 — $j \approx 6 \cdot 10^6$ А/см², масштаб времени $b = 1,5 \cdot 10^{-5}$ сек./см; 2 — $j = 1,7 \cdot 10^6$ А/см², $b = 6,5 \cdot 10^{-5}$ сек./см

осциллограммы 2. Следовательно, $E_{t'}^{t_c} / W_n$ в первом случае (при $j \approx 6 \cdot 10^6$ А/см²) значительно больше, чем во втором (при $j = 1,7 \cdot 10^6$ А/см²)⁴.

На рис. 2 схематически показана зависимость $R = R\left(\frac{t - t_0}{t' - t_0}\right)$, найденная по осциллограммам, которые были получены в опытах с постоянным током различной плотности. При $\frac{t - t_0}{t' - t_0} < 1$ кривые $R = R\left(\frac{t - t_0}{t' - t_0}\right)$ для различных j совпадают в пределах точности измерения R и E . На этой схеме точки C_1 , C_2 соответствуют момен-

⁴ Для $j \leq 6 \cdot 10^6$ А/см² при $t < t'$ в пределах точности измерения R и E не наблюдается аномалий dR/dE . Поэтому при $j \leq 6 \cdot 10^6$ А/см² R можно считать одинаковым для различных j .

там t_c для $j = 1,7 \cdot 10^6$ А/см² и $j = 6 \cdot 10^6$ А/см² (при переходе к большему j точка C смещается вправо). Участок между C_1 и C_2 соответствует аномальному состоянию, которое реализуется только при $j > 1,7 \cdot 10^6$ А/см² (при меньших j металл взрывается при $\frac{t-t_0}{t'-t_0} < C_1$).

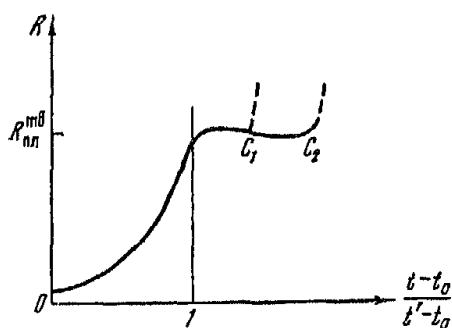


Рис. 2. Характер зависимости сопротивления вольфрама от $(t-t_0)/(t'-t_0)$ для $j = 1,7 \cdot 10^6$ А/см² и $j = 6 \cdot 10^6$ А/см²

При уменьшении j до величины $\sim 3 \cdot 10^5$ А/см² область малого dV_R/dt (т. е. малого dR/dE) и последующий скачок V_R еще наблюдаются совершенно четко (рис. 3, 3 и 5). Однако характер разрушения проволоки при этом изменяется: при $j \geq 2 \cdot 10^6$ А/см² скачок V_R в момент t_c сопровождается сильным взрывом металла, тогда как при $j \leq 3 \cdot 10^5$ А/см² признаков взрыва не наблюдается. Не исключена возможность того, что вследствие уменьшения $dE/dt = j^2 R$ при переходе к малым j нарастание V_R для расплавленной проволоки может быть связано с изменением ее формы

и, следовательно, уже не характеризует состояния металла (при $j \approx 3 \cdot 10^5$ А/см², $t_c - t' \approx 7 \cdot 10^{-4}$ сек). Поэтому при $j \leq 3 \cdot 10^5$ А/см² мы не пытаемся судить о состоянии вольфрама по скачку V_R .

Итак, при $j \geq 5 \cdot 10^6$ А/см² состояние металла, соответствующее значительной части области малого dR/dE (например, участок C_1, C_2 на схеме рис. 2), не является обычным жидким состоянием. Этот вывод, однако, непосредственно нельзя распространить на часть областей малого dR/dE , расположенную вблизи $(t-t_0)/(t'-t_0) = 1$, так как при больших j скачка V_R не происходит вблизи $(t-t_0)/(t'-t_0) = 1$, а при малых j скачок V_R не позволяет надежно судить о состоянии металла.

Заметим, что в рассматриваемых опытах с постоянным током аномальное состояние наблюдается уже при $j = 1,7 \cdot 10^6$ А/см², тогда как в [1] аномалии были обнаружены только при $j \geq 5 \cdot 10^6$ А/см². Это различие связано с тем, что опыты при $j < 5 \cdot 10^6$ А/см² в [1] проводились только на переменном токе, при котором в случае малых j четкого скачка V_R не наблюдалось⁵. При этом не было заметно и области с малым dR/dE , так как падение dR/dt на осциллограммах $V_R = Ri$ было замаскировано быстрым изменением тока i . Таким образом при переходе к малым j в опытах с переменным током в [1] мы теряли оба признака, по которым судили об аномалиях состояния.

2. Исследование начала области малого dR/dE

Чтобы выяснить, соответствует ли начало области малого dR/dE (участок вблизи $(t-t_0)/(t'-t_0) = 1$ на схеме рис. 2) нормальному жидкому состоянию вольфрама, ток i , нагревающий проволоку, в определенный момент t_n резко выключался, после чего поверхность проволоки осматривалась в лупу для выяснения признаков оплавления. Результаты этих опытов для различных j оказались различными.

а) при $j \leq 5 \cdot 10^5$ А/см² легко подобрать такие импульсы тока i , что проволока не плавится, хотя ток выключается уже после момента t' . Примеры осциллограмм, полученных при таких токах, показаны

⁵ Как отмечалось в [1], вид осциллограмм V_R после момента t_c зависит не только от состояния металла, но и от внешних условий.

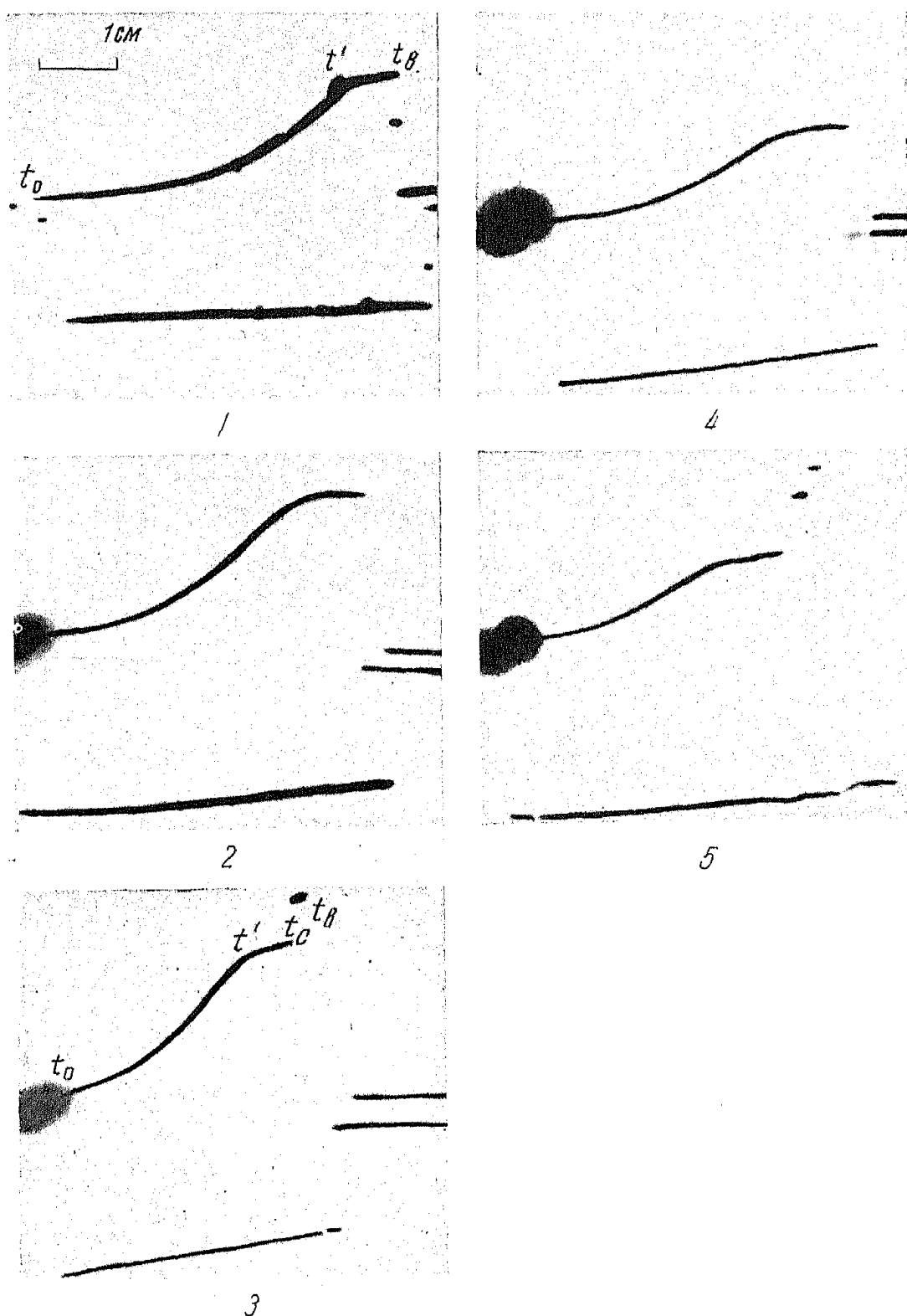
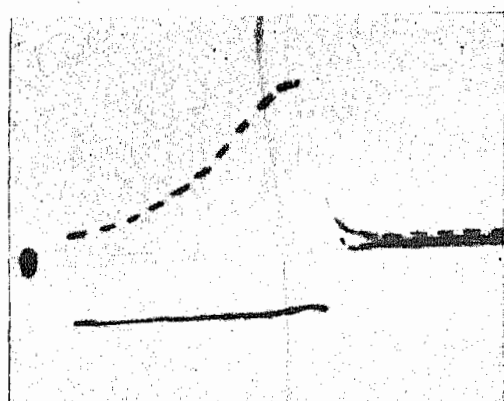
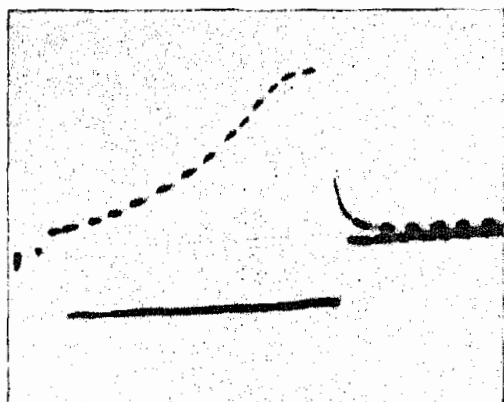


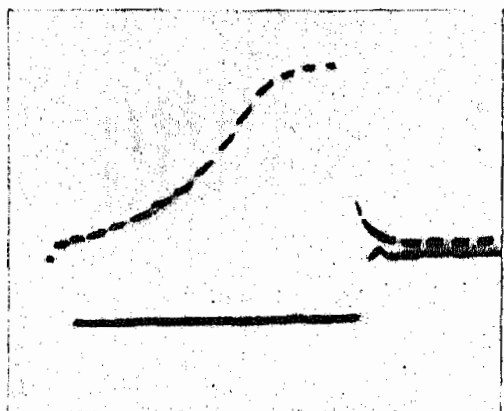
Рис. 3. Осциллограммы $V_R(t)$ (верхние кривые) и $V_r(t)$ (нижние кривые) вольфрамовых проволок в масле. Развертка по времени к концу каждой осциллограммы замедляется. 1 — следов плавления нет. Диаметр проволоки $5 \cdot 10^{-3}$ см, длина $l = 2$ см, $j = 8,3 \cdot 10^5$ А/см², $r = 9,5$ Ω. Чувствительность осциллографа $a = 120$ В/см, масштаб времени в начале осциллограммы $b_H = 10^{-4}$ сек./см и в конце $b_K = 1,7 \cdot 10^{-4}$ сек./см. 2 — следов оплавления нет, диаметр $6 \cdot 10^{-3}$ см, $l = 3$ см, ток падает от $4 \cdot 10^5$ до $3 \cdot 10^5$ А/см². 3 — проволока, оставшаяся после опыта 2, сильно оплавилась. 4 — следов оплавления нет, диаметр $6 \cdot 10^{-3}$ см, $l \approx 2$ см. 5 — проволока, оставшаяся после опыта 4, плавится длинным импульсом тока. В опытах 3, 4, 5 ток мало отличается от тока в опыте 2. В опытах 2, 3, 4, 5 $a = 54$ В/см, $b_H = 6 \cdot 10^{-4}$ сек./см, $b_K = 8,5 \cdot 10^{-4}$ сек./см, $r = 9,5$ Ω



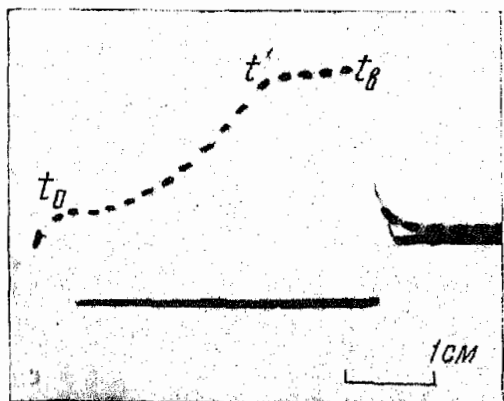
1



2

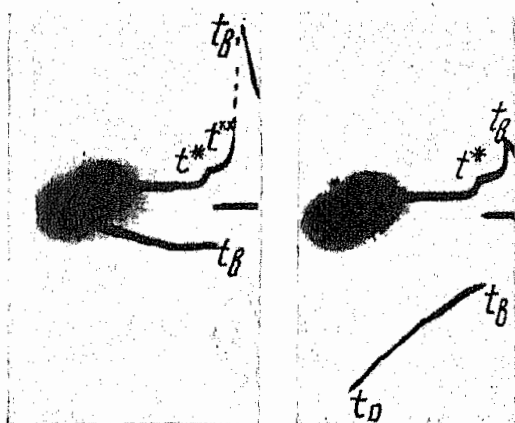


3

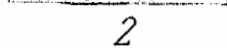


4

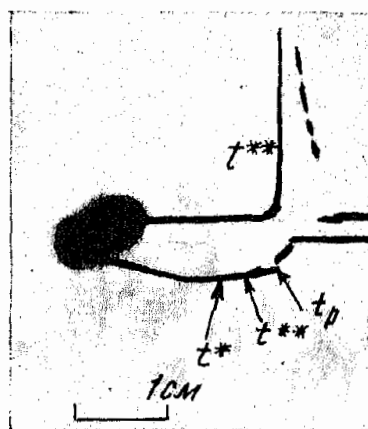
Рис. 4



1



2



3

Рис. 5

рис. 4. Осциллограммы $V_R(t)$ (верхние кривые) и $V_p(t)$ (нижние кривые) вольфрамовой проволоки диаметром $6 \cdot 10^{-3}$ см, $l \approx 0,3$ см в канифоли; $j = 5 \cdot 10^6$ А/см², $r = 0,5 \Omega$, $a = 115$ В/см; $b = 6,4 \cdot 10^{-6}$ сек/см. 1 и 2 — проволока сильно оплавлена; 3 и 4 — проволока сплавилась в шарики

Рис. 5. Осциллограммы вольфрамовой проволоки диаметром 0,01 см, $l = 0,5$ см в вакууме. Ток j падает от 10^6 до $4 \cdot 10^5$ А/см², $r = 1,2 \Omega$, $a = 52$ В/см, $b = 6 \cdot 10^{-4}$ сек./см. Анодное напряжение создается конденсатором, заряженным до $V_+ = 700$ В. 1 — $V_p(t) = \rho I_a(t)$ при $\rho = 100 \Omega$ (верхняя кривая) и $V_R(t)$ (нижняя кривая). Проволока не разрушается. 2 — $V(t)$ при $\rho = 100 \Omega$ (верхняя кривая) и $V_R(t)$ (нижняя кривая). Проволока не разрушается. 3 — $V_p(t)$ при $\rho = 6 \Omega$ (верхняя кривая), $V_R(t)$ (нижняя кривая). Проволока разрушается. Верхние кривые смещены относительно нижних на 0,3 см вправо

на рис. 3, 1, 2 и 4. В этих опытах⁶ импульсы тока i были недостаточно однообразны и через 1—3 повторных опыта проволока плавилась, повидимому, в результате того, что сила тока или продолжительность импульса оказывались несколько увеличенными.

На рис. 3, 3 показана осциллограмма для случая плавления, когда после опыта вся проволока приняла вид мелких капелек, соединенных тонкими перемычками (одна перемычка разорвана). Осциллограммы 2 рис. 3 получены при предыдущем импульсе с того же кусочка проволоки, что и осциллограммы 3 рис. 3. После опыта 3, 2 на поверхности проволоки не было видно следов подтеков (после опыта 3, 2 и перед опытом 3, 3 этот кусочек проволоки на 1—2 сек. был нагрет докрасна слабым током в воздухе, причем, судя по равномерному накали, на проволоке не было утолщений). Энергия, поступившая в металл после момента t' , в обоих случаях почти одинакова. Одинаковы и условия остывания. Поэтому, если бы в случае 3, 2 металл был жидким, как в случае 3, 3, то вид проволок после опытов не мог бы быть совершенно различным. Отсутствие подтеков на поверхности проволок в опытах 3, 1; 3, 2; 3, 4 указывает, что металл в этих опытах не был жидким. Следовательно, уже в начале области малого dR/dE состояние вольфрама отличается от обычного жидкого состояния. Состояние с малым dR/dE не является и обычным твердым состоянием. Это видно из того, что введенная энергия превышает W_n и что величина dR/dE при $t > t'$ значительно меньше, чем для вольфрама в обычном твердом состоянии.

Как показывает подсчет, энергия $E_{t'}^{t_b}$ в рассматриваемых опытах превышает энергию $W_{пл}$, необходимую для плавления металла в обычных условиях. Например, по осциллограммам 2 рис. 3 находим

$$E_{t'}^{t_b} \approx i^2 R_{пл}^{TB} (t_b - t') \approx 1,5 W_{пл}.$$

Так как к моменту t' в проволоку уже поступила энергия W_n , то $E_{t'}^{t_b}$ представляет собой избыток по сравнению с обычной энергией вольфрама в твердом состоянии при температуре плавления. Потери энергии здесь можно не учитывать, так как, например, в опыте 3, 2 сила тока i в момент его выключения в 6,5 раза превышает максимальную силу тока ($i_m = 1,3$ А), которую выдерживает рассматриваемая проволока в вакууме при стационарном режиме. Следовательно, в момент t_b энергия поступает в проволоку в $\frac{i^2(t_b) R(t_b)}{i_m^2 R_{пл}^{TB}} \approx \frac{i^2(t_b)}{i_m^2} = 43$ раза быстрее, чем рассеивается при температуре плавления (в опыте 3, 1 $\frac{i^2(t_b)}{i_m^2} = 256$).

Такая оценка потерь пригодна и для вольфрамовых проволок, находящихся в масле. (Это утверждение проверялось опытами с последовательно включенными одинаковыми проволоками, одна из которых находилась в масле, а другая в вакууме. При этом получались одинаковые осциллограммы $V_R(t)$.⁷) Итак, в рассматриваемых опытах при $j \approx 5 \cdot 10^5$ А/см² проволока не приходит в обычное жидкое состояние, хотя заключенная в ней энергия в течение некоторого времени не меньше, чем $W_n + W_{пл}$ (в опыте 3, 2, $t_b - t' \approx 7 \cdot 10^{-4}$ сек.).

⁶ Осциллограммы и опыты, в которых эти осциллограммы получены, нумеруются одинаково.

⁷ При $j \leq 5 \cdot 10^5$ А/см² удавалось подобрать такую продолжительность импульсатора, что до момента t_b разряда вдоль проволоки не возникало даже в вакууме, хотя вольфрам успевал нагреться до $R \approx R_{пл}^{TB}$. Проволоки, находящиеся в вакууме, были предварительно обезгажены.

б) При токе $j \geq 5 \cdot 10^6$ А/см² проволока всегда оплавляется или совсем разрушается, если выключение тока происходит после момента t' . При этом по мере перемещения момента выключения тока t_b от t' к t_c наблюдается более сильное оплавление проволоки. На рис. 4 приведены осциллограммы, полученные при импульсах тока различной длительности и одинаковой плотности $j = 5 \cdot 10^6$ А/см². После опытов 4, 1 и 4, 2 проволока оказалась сильно оплавленной, а в опытах 4, 3 и 4, 4 она сплавилась в мелкие шарики. В подобных опытах при $j \approx 5 \cdot 10^5$ А/см² (осциллограммы 3, 1; 3, 2; 3, 4) оплавления проволоки не наблюдалось. Но оплавление должно быть более сильным в том случае, когда энергия больше, а не меньше. Поскольку в опытах 3, 2 и 3, 4 энергия $E_{tr}^{t_b}$ заметно больше, чем, например, в опыте 4, 1⁸, то энергия $E_{t_0}^{t'}$ в случае 4, 1 должна быть больше, чем в случае 3, 2 и 3, 4. Таким образом качественно подтверждаются результаты измерения энергии $E_{t_0}^{t'}$, полученные в [1]. Однако количественно результаты не совпадают: при измерении по осциллограммам в [1] получалось, что величина

$$\mathcal{E}(t') = \frac{1}{r} \int_{t_0}^{t'} V_R(t) V_r(t) dt - W_n$$

составляет заметную долю от W_n только при $j \geq 10^7$ А/см², но не при $j = 5 \cdot 10^6$ А/см², как это можно заключить по оплавлению проволок из опытов 3 и 4.

В [1] отмечалось, что измерение энергии $E_{t_0}^{t'}$ по осциллограммам было ненадежным потому, что при увеличении плотности тока время $t' - t_0$ уменьшается, и могут оказаться существенными искажения осциллограмм, которые наблюдаются в момент включения тока i . Так как эти искажения заметны только в начале осциллограмм, то они не могут привести к ошибке при измерении $E_{tr}^{t_b}$. Таким образом большая величина $E_{tr}^{t_b}$ в опыте 3, 2 по сравнению с $E_{tr}^{t_b}$ в опыте 4, 1 не вызывает сомнения. Однако может возникнуть подозрение, что появление натеков на проволоках при переходе к более сильным токам вызвано возросшими электродинамическими силами, а не тем, что состояние металла в момент t_b при различных j различно. Это подозрение кажется нам неосновательным. Действительно, электродинамические силы исчезают в момент t_b выключения тока i , а до этого момента натеков на проволоке нет. Отсутствие натеков при $t \leq t_b$ видно по величине сопротивления проволоки R , которое не превышает $R_{пл}^{tr}$ (при отклонении формы проволоки от цилиндрической ее сопротивление при данной длине должно было бы возрасти)⁹.

Кроме различия состояния металла в момент t_b мы не видим других причин, которые могли бы привести к различному виду поверхности проволок после опытов с токами различной плотности. Если таких причин действительно нет, то, сравнивая результаты опытов при $j \approx 5 \cdot 10^5$ А/см² и при $j = 5 \cdot 10^6$ А/см², можно заключить, что одному и тому же значению $(t - t_0)/(t' - t_0)$ в случае большей плотности тока соответствует большая энергия. В частности, уменьшение dR/dE ,

⁸ Это видно из того, что величина $(t_b - t')/(t' - t_0)$ для осциллограмм 3, 2 и 3, 4 больше, чем для осциллограмм 4, 1.

⁹ Так как в опытах 4, 1 — 4, 4 при $t' < t \leq t_b$, $R \approx R_{пл}^{tr}$, то ясно, что появление натеков и разрушение проволоки происходит в этих опытах уже после выключения тока i .

которое начинается при $(t - t_0)/(t' - t_0) = 1$, в случае $j = 5 \cdot 10^6 \text{ А/см}^2$ происходит при большей величине энергии E_{t_0}'' , чем в случае $j \approx 5 \times 10^5 \text{ А/см}^2$.

Иными словами, состояние вольфрама является аномальным уже в самом начале области малого dR/dE , поскольку изменение зависимости R от E (при $t = t'$) определяется не только энергией E_{t_0}'' , но и плотностью тока, которым эта энергия вводилась.

3. Появление признаков аномальной эмиссии во время нарастания избытка энергии

В наших экспериментах наблюдаются три признака аномального состояния вольфрама:

- 1) необычно большая электронная эмиссия [2];
- 2) особенности зависимости R от E (в частности, зависимость величины энергии E , при которой происходит резкое изменение dR/dE , от плотности нагревающего тока);
- 3) металл не становится жидким (во всяком случае при $j \approx 5 \times 10^5 \text{ А/см}^2$), хотя в течение некоторого времени $E > W_n + W_{пл}$.

Как нам кажется, аномалии эмиссии естественно рассматривать как следствие избытка энергии $\mathcal{E}(t) = E_{t_0}' - W(t)$ [$W(t)$ — энергия, необходимая для нагревания исследуемой проволоки в нормальном состоянии до температуры, при которой ее сопротивление равно значению сопротивления $R(t)$ этой проволоки в рассматриваемом опыте].

Чтобы проследить, существует ли определенная связь между $\mathcal{E}$ и аномальной эмиссией, все сделанные нами эксперименты удобно разбить на две группы по величине плотности тока.

I группа. Плотность тока $j \gtrsim 5 \cdot 10^6 \text{ А/см}^2$.

В этом режиме об аномалиях эмиссии мы судили по зажиганию разряда, шунтирующего исследуемую проволоку (в вакууме). При $j \gtrsim 10^7 \text{ А/см}^2$ зажигание разряда наблюдается еще при $R < R_{пл}^{тв}$. Вообще же, чем больше плотность нагревающего тока, тем при меньшем R вспыхивает разряд [2]. С другой стороны, чем больше плотность тока, тем при меньшем R обнаруживается появление избытка энергии $\mathcal{E}$ [1]. Таким образом появление и нарастание аномалий эмиссии и избытка энергии $\mathcal{E}$ наблюдается при одних и тех же условиях эксперимента. Эти данные о связи аномалий эмиссии и энергии являются только ориентировочными, так как при $j \gtrsim 5 \cdot 10^6 \text{ А/см}^2$ эмиссия непосредственно не измерялась, а измерение избытка энергии $\mathcal{E}$ при $t < t'$ было недостаточно надежным. После зажигания разряда, шунтирующего проволоку, увеличение ее энергии прекращается. Для более сильного нагревания проволоку приходится помещать в среду, мешающую появлению разряда, например, в масло. При этом для соответственно более поздних моментов времени уже бесспорно наблюдается большой избыток энергии. Однако масло препятствует получению сведений об эмиссии. (В опытах с короткими нитями в вакууме с быстро убывающим током i разряд не зажигался, и нарастание анодного тока измерялось непосредственно [2]. Однако V_r и, особенно, V_R в момент появления аномальной эмиссии были настолько малы, что измерение энергии с необходимой точностью в этих опытах было невозможно.)

II группа. Плотность тока $j \approx 5 \cdot 10^5 \text{ А/см}^2$.

Как говорилось в разделе 2, при $j \approx 5 \cdot 10^5 \text{ А/см}^2$ удается наблюдать избыток энергии $\mathcal{E}(t_b) = E_{t_b}' - W_n$ даже на неплавящихся проволоках.

В этом режиме наблюдаются также и аномалии эмиссии,

которые наиболее отчетливо видны по нарушению закона Богуславского — Лэнгмюра [3]¹⁰.

Для сопоставления роста эмиссии и избытка энергии рассмотрим рис. 5. В опытах 5, так же как в опытах 3, 1 и 3, 2, при R , близком к $R_{\text{пл}}^{\text{н}}$, появляется избыток энергии $\mathcal{E}$, который нарастает до момента $t_{\text{в}}$ выключения тока i . Из рис. 5, 1 видно, что анодный ток I_a при этом возрастает сверх нормальной величины I_a^* , соответствующей закону Богуславского — Лэнгмюра [уступ $V_p(t)$ при $t = t^*$ на рис. 5, 1 и 5, 2]. Нарастание I_a сверх I_a^* происходит как раз в то время, когда становится заметным уменьшение dR/dE , т. е. когда происходит нарастание $\mathcal{E}$. Действительно, аномалии I_a уже хорошо заметны, например, в момент t^{**} [$I_a(t^{**}) = 2I_a^*$], причем, как показывает подсчет, $R(t^{**}) - R(t^*) \approx 0,15R_{\text{пл}}^{\text{н}}$ и $E_{t^{**}}^{f**} \approx 0,3W_{\text{н}}$. По этим данным находим, что $[R(t^{**}) - R(t^*)]/E_{t^{**}}^{f**}$ приблизительно в два раза меньше обычного значения dR/dE перед началом плавления. Следовательно, часть энергии $E_{t^{**}}^{f**}$ представляет собой избыток энергии $\mathcal{E}_{t^{**}}^{f**}$. На рис. 5, 3 приведена осциллограмма, полученная для той же лампы, при той же самой проволочке, что и осциллограмма 5, 1, но при более продолжительном импульсе тока той же амплитуды. Масштаб по оси I_a осциллограммы 5, 3 составляет 0,06 от соответствующего масштаба осциллограммы 5, 1. Поэтому на рис. 5, 3 замечен только сильный ток между нитью и анодом. В опыте 5, 3 ток I_a достигает очень большой величины, вследствие чего, повидимому, возникает разряд на анод. Однако ток между нитью и анодом быстро прекращается, так как источником анодного напряжения служит конденсатор, который разряжается самим анодным током. Как видно по осциллограмме $V_R(t)$ (рис. 5, 3), в момент t_p вдоль проволоки вспыхивает разряд (падение V_R), причем в моменты t^{**} и t_p проволока еще цела ($R \approx R_{\text{пл}}^{\text{н}}$). Подсчет показывает, что энергия $E_{t_p}^{t_p} \approx W_{\text{н}}/2$ и что $[R(t_p) - R(t^*)]/E_{t_p}^{t_p}$ приблизительно в три раза меньше обычной величины dR/dE перед началом плавления. Следовательно, нарастание избытка энергии продолжается до момента t_p .

Итак, при $j \approx 5 \cdot 10^5 - 10^6 \text{ А/см}^2$ при R , близком к $R_{\text{пл}}^{\text{н}}$, на неразрушающихся проволоках наблюдается постепенное нарастание избытка энергии $\mathcal{E}$ и одновременно с этим появление признаков аномально большой эмиссии. Аномально большая эмиссия приводит сначала к нарушению закона Богуславского — Лэнгмюра, а при дальнейшем росте к зажиганию разряда вдоль проволоки. В опытах 5 до момента t^* нарушения закона Богуславского — Лэнгмюра еще не наблюдается, но уже в момент t^{**} , $I_a = 2I_a^*$, причем $\mathcal{E}(t^{**}) - \mathcal{E}(t^*) < E_{t^{**}}^{f**} \approx 0,3W_{\text{н}}$. Разряд вдоль проволоки возникает после того, как в нее поступает еще $E_{t_p}^{t_p} \approx 0,2W_{\text{н}}$, следовательно, $\mathcal{E}(t_p) - \mathcal{E}(t^{**}) < 0,2W_{\text{н}}$. В опытах 5 при $j \approx 5 \cdot 10^5 - 10^6 \text{ А/см}^2$ аномалии эмиссии (нарушение закона Богуславского — Лэнгмюра и вспышка разряда вдоль проволоки) наблюдаются только при $t > t'$, когда dR/dE заметно уменьшается. Судя по вспышке разряда вдоль проволоки в опытах с различными j можно заключить, что величина эмиссии для заданного значения $(t - t_0)/(t' - t_0)$ возрастает при переходе к большим j , так что при $j > 10^7 \text{ А/см}^2$ аномально большая эмиссия появляется при $t < t'$.

¹⁰ Сопоставление анодного тока с нормальной эмиссией проволоки затруднительно, так как ошибки при измерении R и E не позволяют аккуратно рассчитать нормальную эмиссию. Это затруднение отпадает только при работе с большим анодным напряжением на той стадии нагревания вольфрама, когда ток I_a становится очень большим, и его имеет смысл сравнивать с максимально возможной нормальной эмиссией (с эмиссией при температуре плавления).

4. Предположение о характере изменений, происходящих в металле при нагревании его током большой плотности

Подчеркнем, что в наших экспериментах не наблюдается никаких признаков отклонения от закона Ома. В частности, не наблюдается зависимости значений сопротивления проволоки $R(t_c)$ или $R(t_n)$ от мгновенного значения напряженности поля в металле. Правда, в момент включения тока величина $\frac{V_R}{V_r} r$ превышает сопротивление исследуемой проволоки при комнатной температуре $R(t_0)$. Однако, по нашему мнению, отличие $\frac{V_R(t_0)}{V_r(t_0)} r$ от $R(t_0)$ объясняется тем, что $V_R(t_0) \neq i(t_0) R(t_0)$ и $V_r(t_0) \neq i(t_0) r$ вследствие влияния самоиндукции участков контура между точками подключения осциллографа¹¹. В противоположность этому, в статье [5] отличие $\frac{V_R(t_0)}{V_r(t_0)} r$ от $R(t_0)$ рассматривается как признак отклонения от закона Ома. Уменьшение разности $\frac{V_R}{V_r} r - R$ после момента t_0 в [5] объясняется тем, что отклонение от закона Ома уменьшается с ростом температуры. По нашим данным, уменьшение этой разности происходит вследствие затухания высокочастотных колебаний, возникающих в момент включений тока i . Таким образом наши выводы резко расходятся с выводами, сделанными в [5].

Характерной чертой изучаемых аномалий является то, что они появляются или пропадают не сразу после появления или исчезновения сильного поля в металле. Например, аномально большой анодный ток наблюдается в течение $\sim 10^{-5}$ сек. после выключения тока i ¹².

Наблюдаемые аномалии dR/dE , эмиссии и плавления кажутся непонятными, если изменение состояния металла под действием тока большой плотности сводится только к изменению температуры. Поэтому естественно предположить, что при больших j , кроме изменения температуры T , в металле происходят и другие изменения, которые можно характеризовать изменением некоторой величины α . Выяснение физического смысла этих предполагаемых изменений сильно затруднено тем, что мы не знаем температуру исследуемой проволоки $T = T(t)$ и не можем отделить друг от друга слагаемые в правой части выражения $\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dT} \frac{dT}{dt} + \frac{\partial E}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dt}$ и в аналогичных выражениях для изменения других определяемых из опыта величин — эмиссии $I(T, \alpha)$ и сопротивления $R(T, \alpha)$.

Существующая теория металлов не только не предсказала результатов наших опытов, но, повидимому, вообще не может дать им объяснения, если не дополнить этой теории какой-то новой физической гипотезой. Поскольку предполагаемый процесс, связанный с изменением α , не вяжется с существующей теорией, затруднительно представить себе его физический механизм.

Рассмотрим следующую схему подобного процесса, не обоснованную теоретически, но позволяющую качественно увязать между собой наблюдаемые аномалии dR/dE , эмиссии и плавления. Предположим, что возрастание энергии $(\partial E / \partial \alpha) d\alpha$ связано с переходом электронов из нижней зоны в зону проводимости (зоны в металле полностью не перекрываются). При этом должно было бы происходить уменьшение

¹¹ Этот вопрос подробнее рассмотрен в [1].

¹² См. [3], раздел 2.

dR/dE , так как часть поступающей энергии шла бы не на увеличение теплового движения ионного остова металла и связанное с этим увеличение сопротивления, а на возбуждение электронов (в результате чего естественно ожидать уменьшения сопротивления). В этом случае плавление происходило бы при большей, чем обычно, энергии. Действительно, часть вводимой в металл энергии расходовалась бы не на увеличение энергии теплового движения ионной решетки, стремящегося ее разрушить, а на переброс электронов в верхнюю зону. Наконец, повышение уровня электронов в верхней зоне означает уменьшение работы выхода, т. е. приведет к увеличению эмиссии. Изложенная схема не убедительна, в основном, в том пункте, что согласно обычной теории металлов не должно происходить перехода электронов из нижней зоны в верхнюю в условиях наших опытов (в постоянном электрическом поле).

Независимо от конкретной модели металла основной смысл нашего предположения заключается в том, что появление наблюдаемого на опыте избытка энергии $\mathcal{E}$ связывается с медленным изменением состояния электронов, определяющих силы связи¹³ в металле (медленным сравнительно с обычным изменением распределения электронов после включения поля). Как вторичный эффект могло бы происходить повышение температуры плавления за счет увеличения сил связи. Тогда часть избытка энергии $\mathcal{E}$ могла бы быть локализована в виде тепловых колебаний решетки.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
1 августа 1953 г.

Литература

- [1] С. В. Лебедев и С. Э. Хайкин. ЖЭТФ, 26, 629, 1954. — [2] С. В. Лебедев и С. Э. Хайкин. ЖЭТФ, 26, 723, 1954. — [3] С. В. Лебедев. ЖЭТФ, 27, 487, 1954. — [4] А. Вильсон. Квантовая теория металлов, ОГИЗ, 1944. — [5] Л. А. Игнатьева и С. Г. Калашников. ЖЭТФ, 22, 385, 1952.

¹³ В модели свободного электронного газа в металле энергию $\mathcal{E}$ следовало бы приписать этому газу, так как увеличение энергии решетки привело бы к увеличению R , чего не наблюдается. Для вольфрама при $j \approx 10^7$ А/см² на 1 г/атом $\mathcal{E}(t_c) = E_{t_0}^{t_c} - W_H \approx \approx 2,7 W_H = 2,7 \cdot 10^{12}$ эрг. Считая по одному свободному электрону на атом, находим температуру газа Ферми $T(t_c) = \sqrt{[2\mathcal{E}(t_c) / \gamma] - T_0^2} \approx 3 \cdot 10^4$ °К $\left(\frac{2\mathcal{E}}{\gamma} \gg T_0^2 \right)$, $\gamma = \frac{\pi^2 k^2 N}{2\mu} = 6 \cdot 10^3$ эрг / град², $\mu = 9,3 \cdot 10^{-12}$ эрг, k — постоянная Больцмана, N — число Авогадро). $\mathcal{E}$, повидимому, не может рассматриваться как энергия свободных электронов, так как неправдоподобно, чтобы разность температур электронов и решетки $\sim 10^4$ °К не выравнялась за $10^{-6} - 10^{-5}$ сек. после выключения поля.

ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИОНИЗАЦИОННЫХ КАМЕР

Н. И. Штейнбок

Рассматривается работа плоской ионизационной камеры при постоянной ионизации, в отсутствие диффузии ионов и пространственных зарядов.

В общем виде задача полного описания вольтамперных характеристик ионизационных камер с учетом диффузии еще не решена. Даже без учета диффузии эта задача решена некоторыми авторами (Ми, Зеелигер) лишь приближенно для предельных случаев (линейный участок и участок насыщения), с введением ряда эмпирических постоянных (см., например, [1], стр. 15 и [2], стр. 149). Решения, полученные указанными авторами, описывают вольтамперные характеристики не полностью и ввиду этого не вскрывают существующих закономерностей.

Ниже приводится полученное нами более строгое решение рассматриваемой задачи, которое описывает вольтамперные характеристики ионизационных камер полнее и точнее, чем указанные ранее решения.

Пренебрежение пространственным зарядом при описании вольтамперных характеристик ионизационных камер вполне допустимо, по крайней мере, для большинства случаев использования ионизационных камер, так как ионизационный ток редко превосходит 10^{-8} А.

1. Вольтамперная характеристика

Рассмотрим случай, когда между двумя бесконечно большими плоскими электродами, находящимися друг от друга на расстоянии h , приложена некоторая разность потенциалов U так, что электрическое поле $E = U/h = \text{const}$ и направлено вдоль оси x (рис. 1). В пространстве между электродами под действием какого-либо внешнего агента происходит непрерывная однородная ионизация, и число пар ионов, возникающих в единице объема за единицу времени, равно N_0 . При этом считаем, что ионизация внутри рассматриваемого объема достаточно мала и не влияет заметным образом на напряженность электрического поля, создаваемого внешним источником. Кроме того, принимаем коэффициент отражения ионов на электродах равным нулю, что вполне справедливо при не очень больших скоростях ионов. В результате одновременно идущих процессов ионизации, рекомбинации и уноса ионов электрическим полем в ионизационной камере устанавливается стационарный электрический ток I , зависящий от приложенной разности потенциалов U .

Нашей задачей является установление зависимости $I = f(U)$ при различных значениях подвижности и рекомбинации ионов.

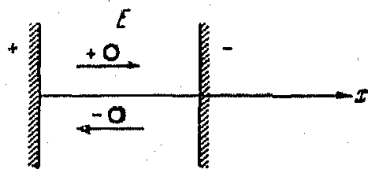


Рис. 1

При учете принятых допущений уравнения баланса концентраций положительных n_1 и отрицательных n_2 ионов имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial n_1}{\partial t} &= N_0 - \alpha n_1 n_2 - k_1 E \frac{\partial n_1}{\partial x} + D_1 \frac{\partial^2 n_1}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial n_2}{\partial t} &= N_0 - \alpha n_1 n_2 + k_2 E \frac{\partial n_2}{\partial x} + D_2 \frac{\partial^2 n_2}{\partial x^2}.\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь α — коэффициент рекомбинации ионов, k_1 и k_2 — подвижности положительных отрицательных ионов, D_1 и D_2 — их коэффициенты диффузии и E — напряженность электрического поля. Правые части уравнений выражают изменение концентраций ионов во времени в результате одновременно идущих процессов ионизации, N_0 , и исчезновения ионов вследствие рекомбинации, $\alpha n_1 n_2$, уноса электрическим полем, $kE \frac{\partial n}{\partial x}$, а также вследствие диффузии, $D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$.

Диффузия ионов влияет на распределение ионов обоих знаков лишь вблизи электродов. Относительная величина потери тока насыщения вследствие диффузии равна [3]

$$\left(-\frac{\Delta I}{I_{\infty}}\right)_{\text{дифф}} = \frac{2,5 \cdot 10^{-2}}{U} (\varepsilon^+ + \varepsilon^-),$$

где ε — средняя энергия движения ионов или электронов, в долях энергии теплового движения при 15°C , которая для ионов близка к единице, а для электронов — порядка нескольких сот.

Из приведенного выражения следует, что унос ионов за счет диффузии замечен лишь при малых значениях напряжения U , порядка вольта и меньше. Напряжение же между электродами ионизационных камер обычно достигает значений порядка нескольких десятков — сотен вольт, поэтому пренебрежение диффузией ионов по сравнению с другими процессами уноса ионов вполне допустимо.

Поскольку унос ионов за счет диффузии пренебрежимо мал, рассмотрим случай отсутствия диффузии. В этом случае диффузионные члены правых частей равенств (1) можно отбросить, и в стационарном состоянии $\partial n / \partial t = 0$ эти равенства примут вид:

$$\begin{aligned}N_0 - \alpha n_1 n_2 - k_1 E \frac{\partial n_1}{\partial x} &= 0, \\ N_0 - \alpha n_1 n_2 + k_2 E \frac{\partial n_2}{\partial x} &= 0,\end{aligned}\quad (2)$$

с граничными условиями:

$$\begin{aligned}\text{при } x = 0: n_1(0) &= 0 \text{ (на одной пластине),} \\ \text{при } x = h: n_2(h) &= 0 \text{ (на другой пластине).}\end{aligned}$$

Вычитая одно уравнение (2) из другого, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} [k_1 E n_1 + k_2 E n_2] = 0,$$

и, следовательно, плотность электрического тока постоянна вдоль камеры

$$j = e(k_1 E n_1 + k_2 E n_2) = \text{const.} \quad (3)$$

Для сокращения дальнейших расчетов введем безразмерные переменные ξ , μ и ν , где

$$x = h\xi, \quad n_1 = \frac{h}{k_1} \frac{N_0}{E} \nu(\xi), \quad n_2 = \frac{h}{k_2} \frac{N_0}{E} \mu(\xi).$$

Тогда уравнения (2) примут вид

$$\begin{aligned} 1 - \lambda \mu \nu - \frac{d\nu}{d\xi} &= 0, \\ 1 - \lambda \mu \nu + \frac{d\mu}{d\xi} &= 0; \end{aligned} \quad (4)$$

при $\xi = 0$, $\nu(0) = 0$, а при $\xi = 1$, $\mu(1) = 0$. Здесь

$$\lambda = \frac{\alpha h^2 N_0}{k_1 k_2 E^2} = \frac{\alpha N_0 h^4}{k_1 k_2 U^2}.$$

Из уравнений (4) непосредственно следует, что

$$\nu + \mu = \text{const} = C = j / eh N_0.$$

Подставляя $\mu = C - \nu$ в (4), получаем уравнение

$$d\nu / d\xi = 1 - \lambda C \nu + \lambda \nu^2. \quad (5)$$

Разделяя в (5) переменные и интегрируя, получаем

$$\frac{\lambda C}{2} \sqrt{\frac{4}{\lambda C^2} - 1} \xi = \text{arctg} \frac{(2\nu(\xi)/C) - 1}{\sqrt{(4/\lambda C^2) - 1}} + A, \quad (6)$$

где $4/\lambda C^2 > 1$, что видно из (8). Постоянная интегрирования A определяется из граничного условия $\nu(0) = 0$,

$$A = \text{arctg} \frac{1}{\sqrt{(4/\lambda C^2) - 1}}.$$

Второе граничное условие $\nu(1) = C$ дает нам уравнение

$$\frac{\lambda C}{2} \sqrt{(4/\lambda C^2) - 1} = 2 \text{arctg} \frac{1}{\sqrt{(4/\lambda C^2) - 1}}. \quad (7)$$

Последнее уравнение (7) представляет в неявном виде искомую зависимость I от U . Действительно:

$$1) \quad \frac{4}{\lambda C^2} = \frac{4 k_1 k_2 e^2 S^2 N_0 U^2}{\alpha h^2 I^2} = \frac{R^2}{R_0^2}, \quad (8)$$

где R_0 есть начальное сопротивление ионизационной камеры на линейном участке вольтамперной характеристики, $R = U/I$ — сопротивление ионизационной камеры при напряжении на электродах $U = Eh$; $I = jS$ — ионизационный ток, S — площадь пластин камеры и h — расстояние между электродами.

Учитывая, что $R = U/I$, находим из (8)

$$R_0 = \frac{h}{2eS} \sqrt{\frac{\alpha}{k_1 k_2 N_0}}; \quad (9)$$

$$2) \quad \frac{\lambda C}{4} = \frac{\alpha h^2}{4 k_1 k_2 e^2 S^2 N_0} \frac{I^2 e \tau N_0}{U^2 I} = \frac{R_0^2 I_\infty}{R^2 I}, \quad (10)$$

где $I_\infty = e \tau N_0$ и $\tau = hS$.

Подставляя (8) и (10) в (7), получаем окончательно искомую зависимость, выраженную в относительных координатах I/I_∞ и R/R_0 :

$$\frac{I}{I_\infty} = \frac{\sqrt{(R^2/R_0^2) - 1}}{(R^2/R_0^2) \text{arccctg} \sqrt{(R^2/R_0^2) - 1}}. \quad (11)$$

Выражение (11), представляющее зависимость ионизационного тока I от сопротивлений камер R и R_0 , более точно и полно описывает вольтамперную характеристику, чем известные выражения Ми, Зеелера и др. [1, 2, 4-6], полученные приближенными методами.

Из анализа (11) следует, что при $I \rightarrow 0$, $R \rightarrow R_0$; таким образом R_0 есть сопротивление ионизационной камеры при $I \rightarrow 0$.

График функции (11) изображен на рис. 2, а исходные данные приведены в табл. 1.

График $I/I_\infty = F(R/R_0)$, изображенный на рис. 2, представляет собой в неявном виде $I = f(U)$, что легко усмотреть, построив его в координатах I/I_∞ и $U/I_\infty R_0$. Значение $U/I_\infty R_0$ получается простым перемножением данных для I/I_∞ и R/R_0 , приведенных в табл. 1. В самом деле, умножая правую и левую части (11) на R/R_0 , получаем

$$\frac{U}{I_\infty R_0} = \frac{U}{U_0} = \frac{\sqrt{(R^2/R_0^2) - 1}}{(R/R_0) \operatorname{arccctg} \sqrt{(R^2/R_0^2) - 1}}. \quad (12)$$

Значения этой функции приведены в табл. 1 и нанесены на рис. 2 совместно с графиком $I/I_\infty = F(R/R_0)$.

Таблица 1

R/R_0	I/I_∞	$U/I_\infty R_0$
1,00	0	0
1,05	0,196	0,197
1,10	0,333	0,366
1,20	0,467	0,553
1,40	0,621	0,870
1,50	0,678	1,03
1,70	0,757	1,29
2,00	0,827	1,65
2,50	0,887	2,22
3,00	0,926	2,78
4,00	0,960	3,84
5,00	0,975	4,87
8,00	0,992	7,94
10,00	0,993	9,95
20,00	0,996	19,92
50,00	0,9996	49,98
100,00	0,9998	99,98
1000,00	0,99999	999,99

$U_0 = I_\infty R_0$ есть напряжение, кратное напряжению, при котором достигается насыщение. Из табл. 1 видно, что $U = U_0$ при $I \approx 0,67 I_\infty$.

На графике рис. 3 нанесены вольтамперные характеристики в относительных координатах I/I_∞ и $U/I_\infty R_0$, подсчитанные согласно выражению (11) для двух значений R_0 , равных 1 и 2. На рис. 4 те же графики в произвольных единицах построены в координатах I и U ,

для чего масштаб по оси абсцисс умножен на $I_{\infty} R_0$; последние графики со всей очевидностью показывают, что (11) действительно описывает вольтамперную характеристику.

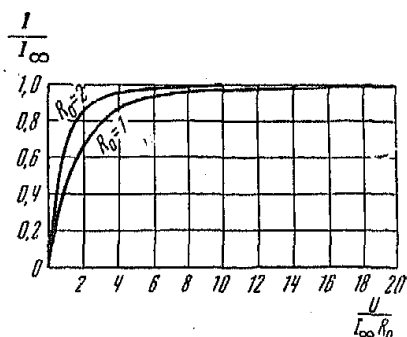


Рис. 3. Наступление насыщения при различных значениях начального сопротивления ионизационной камеры

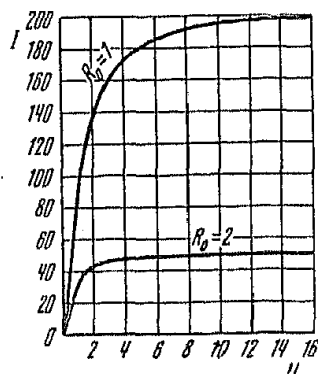


Рис. 4. Вольтамперные характеристики при различных значениях начального сопротивления ионизационной камеры R_0

Из графиков рис. 3 и 4 непосредственно следует, что с уменьшением R_0 увеличивается во столько же раз напряжение, при котором достигается та же степень насыщения, и, кроме того, что ток насыщения обратно пропорционален квадрату начального сопротивления.

2. Приближенные выражения

А. Слабые поля. В слабых полях при $I \rightarrow 0$, $R/R_0 \rightarrow 1$ и $\text{arcsctg} \sqrt{(R^2/R_0^2) - 1} \rightarrow \pi/2$. Подставляя в (11) вместо арккотангенса $\pi/2$, находим приближенное выражение для I/I_{∞}

$$\frac{I}{I_{\infty}} = \frac{2}{\pi} \frac{R_0^2}{R^2} \sqrt{\frac{R^2}{R_0^2} - 1}. \quad (13)$$

Решая эту функцию относительно U методом разложения в ряд, находим приближенное выражение:

$$U = IR_0 \left(1 + C_U \frac{I^2}{I_{\infty}^2} \right), \quad (14)$$

где $C_U = 1$ при $I/I_{\infty} < 0,6$. При $C_U = 1$ расхождение (14) с точным выражением (11) составляет не более 1,5%. Выражение (14) напоминает по форме решения Ми и Зеелигера, но отличается от них квадратом отношения I/I_{∞} .

Б. Сильные поля. При больших напряженностях поля и соответственно отношениях $R/R_0 > 3$, $\text{arcsctg} \sqrt{(R^2/R_0^2) - 1}$ можно принять равным R_0/R . Тогда приближенные выражения для I/I_{∞} (11) и U/U_0 (12) принимают простой вид:

$$\frac{I}{I_{\infty}} = \frac{R_0}{R} \sqrt{\frac{R^2}{R_0^2} - 1}, \quad (15)$$

$$\frac{U}{U_0} = \sqrt{\frac{R^2}{R_0^2} - 1}. \quad (16)$$

Получающиеся отклонения (15) и (16) от точных решений (11) и (12) составляют 1,8% при $R/R_0 = 3$ и 0,3% при $R/R_0 = 10$. Решая (16) относительно U , получаем после замены R через U/I и простых преобразований

$$U = \frac{IR_0}{\sqrt{1 - (I^2/I_\infty^2)}}. \quad (17)$$

Сравнивая между собой выражение (17) с выражением (18), полученным в [5] другим методом,

$$U = \frac{IR_0}{\sqrt{1 - (I/I_\infty)}}, \quad (18)$$

замечаем, что эти выражения сходны по форме, но различаются знаменателями. Допущение того, что $I/I_\infty = I^2/I_\infty^2$ возможно лишь при $I/I_\infty > 0,98$. Если же пользоваться этим допущением, начиная с $I/I_\infty = 0,94$, как указывает автор работы [5], то возникает большая погрешность.

3. Сравнение с опытом

Опытная проверка выражения (11) производилась с плоской ионизационной камерой, изображенной на рис. 5. Указанная камера имела два алюминиевых электрода A и B диаметром 20 см и толщиной 0,2 см, а расстояние между электродами равнялось 4 см. В качестве ионизирующего агента применялось α -излучение $\approx 0,01$ мг RaCl_2 , нанесенного на позолоченную пластину C диаметром 1 см. Излучающая пластина устанавливалась заподлицо в центре одного из электродов, изолированных от корпуса полистироловыми изоляторами D . При выборе диаметра электродов учитывалось, что все ионы, образуемые α -излучением, должны улавливаться электродами камеры.

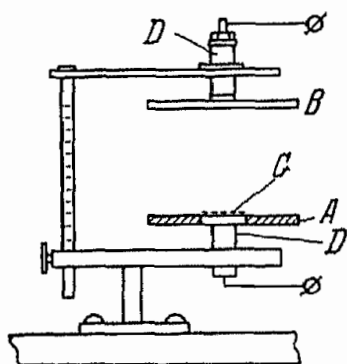


Рис. 5. Вид экспериментальной ионизационной камеры

Ионизационная камера находилась в воздухе при атмосферном давлении. В момент измерения ионизационных токов давление составляло 757 мм рт. ст., а температура

комнаты 15°C. С целью электростатической защиты камера экранировалась металлическим ящиком с размерами 70 × 50 × 50 см. Измерение ионизационных токов производилось при помощи электрометрической установки на лампе 6Ж1Ж.

Результаты измерений ионизационных токов при различных напряжениях, подаваемых на камеру, а также расчетные значения I/I_∞ и $U/I_\infty R_0$ сведены в табл. 2. Начальное сопротивление камеры R_0 и ток насыщения I_∞ определялись на основании данных измерений при 12 и 2000 В соответственно. Точность измерений ионизационных

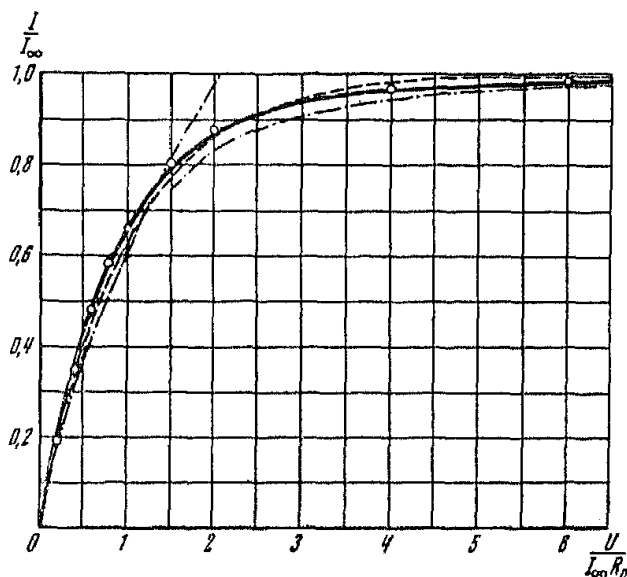
Таблица 2

U (В)	I ($\alpha \cdot 10^{10}$)	I/I_∞	$U/I_\infty R_0$
12	5,60	0,10	0,10
25	11,20	0,20	0,21
58	22,40	0,40	0,47
78	28,00	0,50	0,63
100	33,60	0,60	0,80
140	39,20	0,70	1,12
186	44,80	0,80	1,49
265	50,40	0,90	2,13
330	55,20	0,95	2,65
720	55,40	0,99	5,79
2000	56,00	0,995	16,70

токов на линейном участке вольтамперной характеристики составляла $\pm 1\%$, а на участке насыщения $\pm 0,5\%$.

На графике рис. 6 нанесена вольтамперная характеристика в координатах I/I_∞ и $U/I_\infty R_0$, подсчитанная согласно выражению (11). Для сравнения на том же рисунке нанесены графики из решений Зеелигера [1,2,4,5] и Грейнахера [6], а также экспериментальные точки согласно табл. 2.

Рис. 6. Вольтамперные характеристики по данным различных авторов: сплошная кривая — по формуле (11) настоящей работы, пунктир — по Грейнахеру [6], штрих-пунктир — по Зеелигеру [1,2,4,5], $\circ$ — экспериментальные точки



Как видно из рис. 6, выражение (11), полученное автором настоящей статьи, лучше других совпадает с опытом. Кроме того, полученные результаты показывают, что выражение (11) оказывается с достаточной точностью пригодным и за пределами его применимости, т. е. при неоднородной ионизации (α -лучи) и при пренебрежении действием диффузии ионов и пространственными зарядами.

4. Соотношение между начальным сопротивлением ионизационной камеры и током насыщения

Соотношение между начальным сопротивлением ионизационной камеры R_0 и током насыщения I_∞ непосредственно вытекает из решения дифференциального уравнения (10). В самом деле, сокращая правую и левую части на IR^2 , получаем

$$I_\infty R_0^2 = \frac{\alpha}{4ek_1k_2} \frac{h^3}{S}. \quad (19)$$

Это соотношение не зависит от интенсивности излучения N_0 и устанавливает простую и неразрывную связь между током насыщения и начальным сопротивлением ионизационной камеры.

Все величины, входящие в правую часть соотношения (19), являются постоянными для данной ионизационной камеры и условий опыта. Поэтому правая часть может быть обозначена одной постоянной Ω :

$$I_\infty R_0^2 = \Omega, \quad (20)$$

где

$$\Omega = \frac{\alpha}{4ek_1k_2} \frac{h^3}{S}. \quad (21)$$

Полученное соотношение позволяет определить ток насыщения на основании измерения R_0 :

$$I_\infty = \Omega/R_0^2. \quad (22)$$

Это может оказаться полезным для измерения интенсивности излучений мощных ионизирующих источников, при которых прямое измерение тока насыщения затруднено или даже невозможно. Кроме того, данное соотношение может представить теоретический интерес для изучения закономерностей ионизационных камер.

Постоянную Ω (21) для данной ионизационной камеры лучше всего определить экспериментально на основании измерения I_∞ и R_0 при небольшой интенсивности излучения N_0 . Эту же постоянную легко подсчитать в случае однородной ионизации на основании известных размеров h и S ионизационной камеры и табличных данных α , k_1 и k_2 . Однако в случае измерения интенсивности, например, α -источников, создающих неоднородную ионизацию, необходимо при подсчете постоянной Ω подставить в (21) эффективную площадь α -излучателя с учетом углового распределения вылетающих α -частиц. Опытом установлено для случая плоской камеры, когда диаметр электродов камеры много больше диаметра излучателя, что $S_{\text{эфф}} \approx 3,5 S_{\text{изл}}$.

Воспользуемся результатами измерений вольтамперных характеристик, выполненных в работе [7], для проверки соотношения (20). По данным [7] указанные измерения были выполнены в плоской ионизационной камере с диаметром электродов 20 см и расстоянии между ними 4 см. В качестве ионизирующего агента применялся полоний, наносившийся на платиновую пластинку диаметром 2 см. Полониевый излучатель устанавливался в центре одного из электродов.

Расчетные данные проверки в единицах CGSE сведены в табл. 3. Начальное сопротивление R_0 подсчитывалось на основании результатов измерения при 10% степени насыщения.

Таблица 3

Ток насыщения в CGSE	R_0 в CGSE	R_0^2	$\Omega \cdot 10^3$
1	$1,67 \cdot 10^{-1}$	$2,78 \cdot 10^{-2}$	2,78
10	$4,00 \cdot 10^{-2}$	$1,60 \cdot 10^{-3}$	1,60
50	$1,60 \cdot 10^{-2}$	$2,56 \cdot 10^{-4}$	1,28
100	$1,26 \cdot 10^{-2}$	$1,60 \cdot 10^{-4}$	1,60
300	$7,55 \cdot 10^{-3}$	$5,75 \cdot 10^{-5}$	1,72
600	$5,55 \cdot 10^{-3}$	$3,10 \cdot 10^{-5}$	1,86
1000	$4,27 \cdot 10^{-3}$	$1,84 \cdot 10^{-5}$	1,84
2000	$2,70 \cdot 10^{-3}$	$0,73 \cdot 10^{-5}$	1,46
Среднее			1,77

Как видно из таблицы, большинство значений Ω , найденных для весьма широкого интервала интенсивностей, достаточно близко совпадают со средним значением, что свидетельствует о правильности соотношения (20). Значительное отличие Ω от среднего значения для токов в 1 и 50 CGSE, повидимому, объясняется неточностью измерений автора [7]. Действительно, если предположить, что результаты измерений при 1 CGSE являются правильными, то, как известно, согласно теории колонной рекомбинации коэффициент рекомбинации α при 1 CGSE должен быть во всяком случае меньше, чем при 10—1000 CGSE, и тогда постоянная Ω при 1 CGSE, исходя из (21), должна быть меньше, чем при 10—1000 CGSE. Между тем из таблицы видно, что Ω при 1 CGSE значительно больше, чем при 10—2000 CGSE. Этим подтверждается, что, скорее всего, результаты измерений при

1 и 50 CGSE неточны, и что постоянная Ω должна быть близка к среднему значению для всего интервала значений токов насыщения от 1 до 1000 CGSE.

Заслуживает быть отмеченным тот факт, что соотношение (20) оказалось неожиданно справедливым при неоднородной ионизации, создаваемой α -лучами. Вероятно, это объясняется тем, что последнее учитывается изменением R_0 .

5. Соотношение между напряжением и током насыщения

Теоретически, согласно (11), для достижения тока насыщения требуется бесконечно большое напряжение, так как функция $I/I_\infty = F(R/R_0)$ асимптотически приближается к единице при R/R_0 , стремящемся к бесконечности. Практически же еще далеко до достижения полного насыщения наступает электрический разряд, определяемый другими процессами. Поэтому измеряемые на практике токи насыщения отличаются, хотя и на небольшую величину, от действительных значений токов насыщения. Для многих практических целей, однако, не требуется очень высокой точности измерений, и ошибка, например, в 0,5—1% является вполне приемлемой. В связи с этим представляет интерес нахождение напряжения, необходимого для получения насыщения с наперед заданной точностью.

Известные соотношения: $U \sim \sqrt{P}$ (P — мощность дозы), полученное Аглинцевым, и $U \sim \sqrt{N_0}$ — полученное Зеелигером — приближенными методами, — предусматривают эмпирические постоянные и не учитывают степени насыщения [2].

Приведем простое и более точное решение этой задачи, вытекающее из (20). На основании закона Ома пишем

$$U = I_\infty R, \quad (23)$$

где U и R — значения напряжения и сопротивления ионизационной камеры на участке насыщения. Умножим и разделим правую часть (23) на R_0 , тогда, подставляя в числителе вместо R_0 его значение из (20), находим искомое соотношение:

$$U = \sqrt{\Omega} \sqrt{I_\infty} \frac{R}{R_0}. \quad (24)$$

Полученное соотношение показывает, что напряжение, приложенное к ионизационной камере, на участке насыщения пропорционально $\sqrt{I_\infty}$ и зависит от геометрии ионизационной камеры, плотности и состава газа, которые учитываются Ω . Кроме того, напряжение зависит от степени насыщения, которая определяется отношением R/R_0 . Соответствующие значения функции $R/R_0 = \varphi(I/I_\infty)$ для заданной степени насыщения I/I_∞ можно получить из графика рис. 2 или из табл. 1.

Аглинцев [2] проверил соотношение $U \sim \sqrt{I_\infty}$ и получил хорошее совпадение с опытом. Этим косвенно подтверждается правильность полученных нами соотношений (20) и (24).

Выводы

1. Получено новое выражение вольтамперной характеристики ионизационных камер [формула (11)] для случая отсутствия диффузии ионов и пренебрежения влиянием пространственного заряда на поле. Законность сделанных приближений подтверждается опытом, поставленным автором с плоской ионизационной камерой и ионизацией, созданной α -излучением ≈ 10 микрокури RaCl_2 .

Так как в выражение (11), полученное для плоской камеры, не входят размеры камер, то оно должно быть справедливым для любой формы ионизационных камер. При подсчете R_0 для различных форм камер необходимо воспользоваться известными формулами перехода от плоской камеры (9) к другим формам камер.

2. Получено простое соотношение, $I_\infty R_0^2 = \Omega$, связывающее ток насыщения I_∞ с начальным сопротивлением ионизационной камеры R_0 . Имеются основания предполагать, что данное соотношение является выражением общей закономерности ионизационных камер. Для подтверждения нашего предположения требуется более широкая проверка его на базе разностороннего экспериментального материала.

3. Получено соотношение $U = \sqrt{\Omega} \sqrt{I_\infty} (R/R_0)$, связывающее ток насыщения с напряжением, необходимым для получения данной степени насыщения R/R_0 . Это соотношение может оказаться полезным при расчетах и исследованиях ионизационных камер.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить глубокую признательность проф. О. М. Тодесу за ценные советы и замечания, способствовавшие решению рассматриваемых вопросов.

Поступила в редакцию
8 июня 1953 г.

Литература

- [1] В. Векслер, Л. Грошев и Б. Исаев. Ионизационные методы исследования излучений, Гостехиздат, 1949. — [2] К. К. Аглинцев. Дозиметрия ионизирующих излучений, Гостехиздат, 1950. — [3] Б. Росси и Г. Штауб. Ионизационные камеры и счетчики, ГИИЛ, 1951. — [4] Handbuch d. Phys., XIV, Kap. I, 1927. — [5] R. Seeliger. Phys. ZS., 18, 326, 1917. — [6] H. Greinacher. Ann. d. Phys., 37, 561, 1912. — [7] H. Fönovits. Wien. Ber., 128, 761, 1919.

ВЫБОР КОНДЕНСОРА ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ КОМБИНАЦИОННОГО РАССЕЯНИЯ СВЕТА

С. Г. Раутман

Дан расчет конденсорной системы при фотографической и фотоэлектрической регистрации спектров комбинационного рассеяния.

Внимание авторов большинства работ, посвященных расчету освещения щели спектрографа рассеянным светом, было обращено главным образом на вопрос о светосиле осветительной установки [1-4], и в этой части проблема выяснена. Однако при решении задач, связанных с изучением рассеянного света, в частности комбинационного рассеяния, приходится считаться и с другой стороной проблемы: с предохранением спектрографа от паразитного света, однородностью освещения достаточно высокой части щели, достаточным удалением осветителя от щели и т. д. В том случае, когда мы располагаем большим объемом вещества и можно применить сосуд диаметром в 20—25 мм при длине около 100 мм, эти трудности не возникают, и можно осуществить правильную юстировку практически с любой конденсорной линзой. Однако обычно мы не можем рассчитывать на такие большие рассеивающие объемы. Приходится работать с сосудами, диаметры которых не превышают 8—10 мм, а нередко бывают и меньше. В этих случаях правильный выбор конденсорной системы невозможен без ясного понимания работы конденсора.

Общая теория освещения спектрографа объемным источником света была дана в работах [1,5]. Однако анализ как вопроса светосилы, так и выбора оптимального конденсора и юстировки был проведен очень сложным и не наглядным методом. Кроме того, постановка задачи о роли и назначении конденсора в [1,5] не соответствует современным условиям.

Некоторые попытки [3,6,7] упростить рассуждения автора работ [1,5], повидимому, не достигли цели, ибо его результаты не стали достоянием широкого круга практических работников. Это доказывает тот факт, что комплект, приданный к спектрографу ИСП-51, и инструкция к его использованию, в соответствующей нашей теме части, составлены неудовлетворительно; об этом же свидетельствует ряд ошибок в монографии Кольрауша [8] (в § 9,11).

В соответствии с вышеизложенным целью настоящей статьи являются конкретизация и развитие общей теории применительно к типичным задачам спектроскопии комбинационного рассеяния (качественный и количественный анализ фотографическим и фотоэлектрическим методами).

1. Яркость щели спектрографа при использовании объемного источника света

На рис. 1 представлена обычная схема освещения спектрографа рассеянным светом. Ось сосуда *C* (обычно цилиндр кругового сечения), содержащего рассеивающую жидкость, совпадает с осью кол-

лиматора спектрографа; между сосудом и щелью расположен конденсор K .

Светосила установки при наиболее распространенной фотографической методике определяется освещенностью спектра на фотопластинке. Для ее вычисления надо знать поток, заполняющий коллиматор через элемент $d\sigma$ щели. Величину этого потока можно вычислить, если рассматривать отображение коллиматора (т. е. его двух диафрагм — щели и оправы объектива) при помощи конденсора K на сосуд, а не наоборот, как делают обычно. Законность такого рассмотрения станет очевидной, если заметить, что любой луч, проходящий через щель и коллиматорный объектив, проходит и через их изображения. В то же время при таком рассмотрении анализ значительно упрощается.

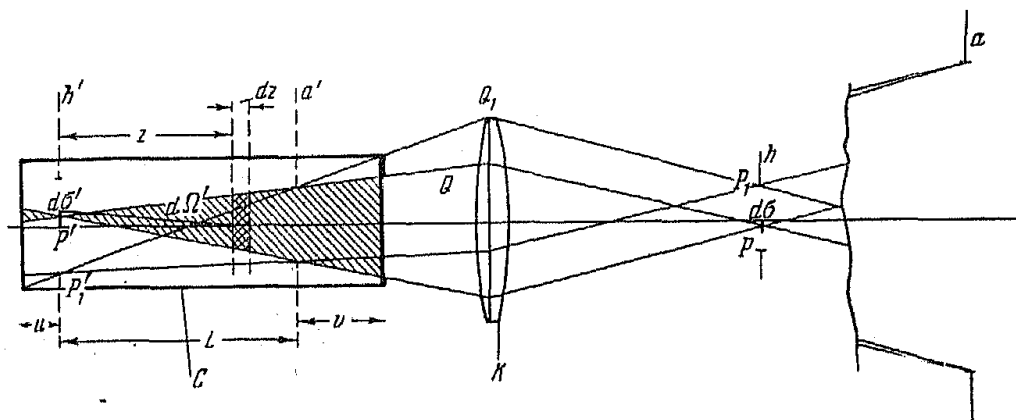


Рис. 1. Схема отображения коллиматора спектрографа на сосуд через конденсор K ; h' — изображение щели h ; a' — изображение коллиматорной диафрагмы a

Пусть h' и a' обозначают изображения щели h и коллиматорной диафрагмы a через конденсор K . Вычислим поток $d\Phi$, заполняющий коллиматорный объектив через элемент площади $d\sigma$, расположенный в плоскости щели около произвольно выбранной точки P . Из рис. 1 видно, что не все точки жидкости будут давать вклад в эту величину, но лишь те, которые расположены внутри заштрихованной части объема. Действительно, лучи и их продолжения, проведенные из любой другой точки сосуда, не пройдут одновременно и через a' и через точку P' , являющуюся изображением точки P , а следовательно, не пройдут и через самую точку P и апертуру коллиматора. Вычислим поток $d^2\Phi$, посылаемый через a и $d\sigma$ объемом источника, заключенным между двумя бесконечно близкими плоскостями, перпендикулярными оси и отстоящими от h' на расстоянии z ; пусть I есть величина потока, изотропно излучаемого единицей объема в единицу телесного угла; тогда¹

$$d^2\Phi = IdVd\Omega'.$$

Здесь $d\Omega'$ есть телесный угол, в котором распространяется поток $d^2\Phi$; он определяется, очевидно, тем телесным углом, под которым из выделенного элемента объема видно изображение $d\sigma'$ элемента щели $d\sigma$; dV — величина этого объема (на рис. 1 он заштрихован дважды).

¹ Здесь все расчеты делаются в первом приближении, т. е. углы между лучами и оптической осью считаются малыми.

Следовательно,

$$dV = z^2 \Omega_{P'}' dz, \quad d\Omega' = d\sigma' / z^2,$$

где $\Omega_{P'}'$ есть телесный угол изображения коллиматорной диафрагмы из точки P' . Таким образом в случае однородного и непоглощающего источника поток

$$d^2\Phi = I \Omega_{P'}' dz d\sigma' \quad (1)$$

не зависит от того, на каком расстоянии z от $d\sigma'$ находится выделенная область. Это является следствием того, что поток от единицы площади пропорционален $1/z^2$, а величина «работающей» площади пропорциональна z^2 . Поток от всего рассеивающего сосуда находится из (1) интегрированием по z :

$$d\Phi = I \Omega_{P'}' d\sigma' \int_0^l dz = I l \Omega_{P'}' d\sigma',$$

где l есть длина освещенной части сосуда.

Согласно обобщенной теореме Лагранжа—Гельмгольца ([⁹], стр. 138)

$$n^2 \Omega_{P'}' d\sigma' = d\sigma \Omega_P,$$

где Ω_P есть телесный угол коллиматорного объектива из точки P щели, n — показатель преломления жидкости. Итак,

$$d\Phi = \frac{I}{n^2} l \Omega_P d\sigma. \quad (2)$$

Освещенность ² щели E_P в точке P равна

$$E_P = \frac{I}{n^2} l \Omega_P. \quad (3)$$

Несмотря на сделанные приближения, формулы (2) и (3) являются точными. Из них вытекает следующее:

1. Освещенность щели спектрографа не зависит ни от параметров конденсора (если, разумеется, он обеспечивает заполнение спектрографа), ни от положения сосуда, ни от его поперечных размеров, но определяется лишь удельной мощностью излучения I рассеянного света, длиной сосуда l и телесным углом коллиматора Ω_P .

2. Так как телесный угол Ω_P коллиматора практически одинаков для всех точек щели (при $h = 20$ мм и $a/f = 1/5$ различие для осевой и крайней точки щели составляет $0,2\%$), то щель освещена однородно. Поэтому можно написать для любой точки щели

$$E = \frac{I}{n^2} l \Omega,$$

и тогда поток через всю щель равен

$$\Phi = \frac{I}{n^2} l \Omega s h;$$

здесь s — ширина щели, f — фокусное расстояние.

3. Коллиматорная диафрагма освещена однородно с точностью $1,5\%$ (для случая $h/f = 1/15$, $a = 60$ мм).

4. Очевидно, что общие формулы (2) и (3) совершенно не зависят ни от формы коллиматорной диафрагмы, ни от формы щели, ни от

² E_P есть «полезная» освещенность; таким образом та часть потока, которая перезаполняет коллиматор, не учитывается.

формы поперечного сечения сосуда, лишь бы в него можно было вписать изображения щели и коллиматорной диафрагмы.

Каковы же возможности повышения эффективности установки? Исключая очевидные пути, — применение светосильного спектрографа и чувствительных пластинок, — есть только две возможности: увеличить удельную мощность излучения I и освещать более длинные сосуды. Следовательно, в готовых установках, т. е. там, где уже выбран метод освещения образца (чем и определяется I и l), освещенность задана.

Итак, изменение поперечных размеров сосуда не изменит освещенности спектра, а может лишь, как будет показано ниже, изменить высоту однородно освещенной части щели, т. е. длину пригодной для фотометрирования части спектральных линий. То же самое относится и к конденсору: при любом конденсоре, обеспечивающем заполнение коллиматора, освещенность спектра будет одна и та же, меняться будут лишь высота спектра и расстояния сосуда до щели. Эти положения очень часто забываются.

В настоящее время в большинстве случаев применяются более или менее стандартные источники — ртутные лампы типа ПРК-2 — при освещении образца по Вуду при помощи цилиндрического зеркала эллиптического сечения. В этих условиях для увеличения светосилы можно лишь повышать яркость лампы, работая в повышенном режиме; следует отметить, однако, что это всегда влечет за собой резкое возрастание фона и значительное уширение линий.

Увеличить светосилу можно, либо конструируя новые, более длинные лампы и соответствующие осветители и сосуды, либо более полно используя излучение лампы для освещения образца (именно это осуществлено, например, в [10] для ламп типа АРК).

2. Расчет конденсорной системы

В предыдущем параграфе мы вычисляли освещенность щели, не заботясь о величине ее однородно освещенной части. Между тем в настоящее время этот вопрос приобрел большое значение в связи с необходимостью работать со сравнительно малыми объемами жидкости.

Рассмотрим картину, получающуюся на щели спектрографа при отображении на нее некоторой плоскости сосуда (рис. 1). Центральная часть щели будет освещена только рассеянным светом. На более удаленные участки щели, начиная с некоторой точки P_1 , будет падать свет от стенок сосуда. Это приводит к следующему: во-первых, эти участки щели будут освещаться паразитным светом, возникающим из-за рассеяния возбуждающего потока на неоднородностях стекла стенок сосуда; во-вторых, доля рассеянного света, приходящаяся на эти участки щели, будет меньше, чем на оси, причем неоднородность может достигать 15—20%. Последнее связано с тем, что область источника, освещающая эти точки щели, диафрагмируется стенками сосуда; недостаток потока восполняется за счет рассеянного света, претерпевающего полное внутреннее отражение на границе жидкость — стекло и стекло — воздух [3, 6]; однако из-за того, что коэффициент отражения всегда меньше единицы, а также из-за конечности толщины стенок яркость соответствующих точек щели оказывается меньше, чем на оси.

По этим причинам в большинстве случаев можно использовать лишь центральную часть щели. Размеры этой части сильно зависят от размеров сосуда, параметров конденсора, положения сосуда и конденсора относительно друг друга и относительно щели. При произвольном выборе конденсора размеры этой части могут даже равняться

нулю. При сосудах большого диаметра гораздо легче подобрать условия, когда размер полезной части щели вполне достаточен. Если же объем жидкости мал, а длину сосуда уменьшать нежелательно (чтобы не уменьшить светосилы), то необходимо работать с узкими сосудами. При этом выбор конденсора становится затруднительным, ибо удовлетворительные условия обеспечиваются лишь при определенных его параметрах. Например ³, конденсор с фокусным расстоянием 90 мм может обеспечить лишь 1 мм полезной высоты щели при сосуде с длиной $l = 100$ мм и радиусом $R = 4$ мм, в то время как с рационально выбранным конденсором и тем же сосудом можно получить щель 3 мм или, если высота $h = 1$ мм достаточна, использовать сосуд $R = 2,5$ мм, т. е. имеющий в 2,5 раза меньший объем.

Кроме перечисленных требований (получить наперед заданную полезную высоту щели с минимальным количеством жидкости без снижения светосилы, т. е. без изменения длины сосуда), конденсор должен удовлетворять ряду других необходимых условий: устранять перезаполнение коллиматора, позволять достаточно далеко отнести сосуд от щели и др.

Таким образом задача расчета конденсора и юстировки сосуда состоит в том, чтобы определить условия, при которых получается максимальная высота h однородно освещенной части щели. При этом следует считать фиксированными длину l и внутренний радиус R сосуда, диаметр a и фокусное расстояние f коллиматорного объектива; необходимо также удовлетворить двум основным требованиям: 1) заполнить коллиматор от каждой точки щели ⁴ и 2) не допустить попадания в спектрограф света от стенок сосуда.

Для решения задачи рассмотрим опять заполнение коллиматора при отображении на него рассеивающего объема при помощи конденсора K . При этом будет достаточно рассмотреть только вертикальное сечение пучков, так как горизонтальное сечение получится из вертикального при высоте щели, равной нулю, ибо ширина щели всегда очень мала. Пусть h' и a' обозначают размеры изображений h и a через K (рис. 1). Сначала предположим, что плоскости изображений щели и коллиматорной диафрагмы расположены произвольно внутри сосуда. Затем, варьируя их положения, найдем интересующие нас оптимальные условия.

Согласно известной формуле Лагранжа — Гельмгольца ([⁹], стр. 95) имеет место соотношение:

$$h' \frac{a'}{L} n = h \frac{a}{f}$$

или

$$h = \frac{a'h'}{L} \frac{f}{a} n, \quad (4)$$

где L есть расстояние между изображениями щели и коллиматорной диафрагмы. Выясним максимально допустимую величину a' и h' при данном их положении, т. е. при данных h и v (рис. 1).

На рис. 1 заштрихована та область сосуда, свет от которой через точку P щели полностью заполняет коллиматорную диафрагму. При движении точки P' (изображение точки P через K) от оси вдоль изображения щели крайний луч $P'Q$ пучка будет приближаться к диа-

³ Все цифры соответствуют комплекту, приданному к ИСП-51.

⁴ Выполнение этого условия будет эквивалентно постоянству освещенности спектра по высоте лишь тогда, когда пучки от всех точек щели нигде после коллиматорной линзы не виньетируются. Для обеспечения этого необходимо, в частности, чтобы диаметр камерного объектива был больше диаметра коллиматорного; в противном случае необходимо несколько диафрагмировать объектив коллиматора.

фрагме выходного окна сосуда. Для некоторой точки P'_1 луч $P'_1 Q_1$ коснется этой диафрагмы; следовательно, пучок от более высоких точек изображения щели будет виньетироваться диафрагмой выходного окна, и в соответствующих точках щели освещенность будет меньше, чем на оси.

Учитывая, далее, необходимость устранить паразитный свет стенок сосуда, максимальные размеры изображения щели и коллиматорной

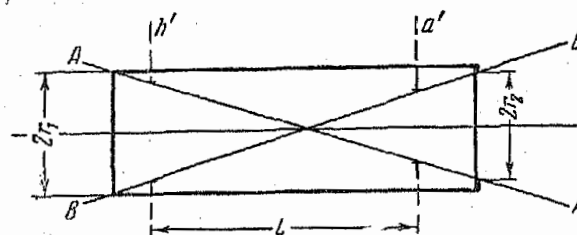


Рис. 2

диафрагмы при данном их положении определяем следующим образом: проведем прямые AA' и BB' через края диафрагмы передней и задней плоскостей сосуда; на рис. 2 указаны наибольшие h' и a' , при которых еще можно удовлетворить поставленным условиям.

Теперь надо определить максимальное значение множителя $h'a'/L$ в зависимости от положения h' и a' . Соответствующий расчет показывает, что этот множитель принимает наибольшее значение при

$$u = v = 0, \quad (5)$$

т. е. когда задняя плоскость сосуда проектируется на щель, а передняя — на коллиматор спектрографа. Следовательно, максимальная высота h_m однородно освещенной части щели равна, согласно (4),

$$h_m = \frac{4r_1 r_2}{l} \frac{f}{a} n, \quad (6)$$

где r_1 и r_2 обозначают соответственно радиусы диафрагм на задней и передней плоскостях сосуда. Оптимальные условия юстировки (5) обладают преимуществом и перед теми случаями, когда либо h' , либо a' , либо h' и a' находятся вне сосуда.

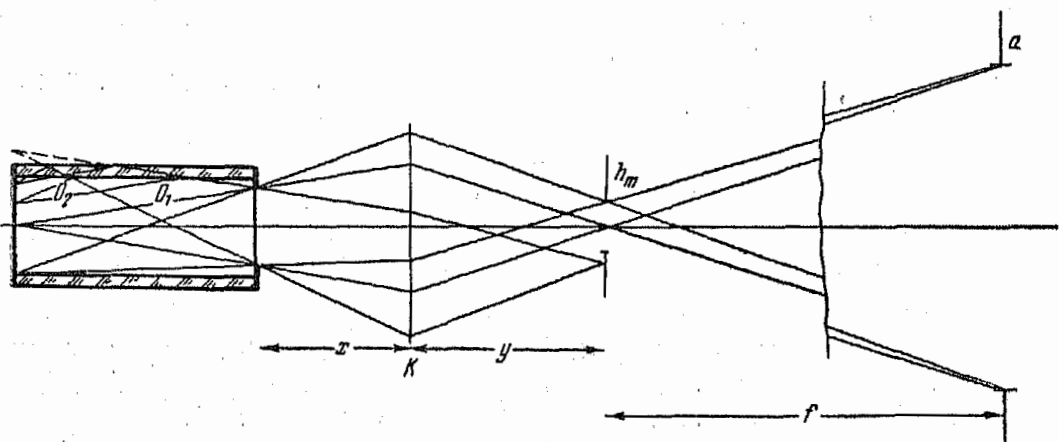


Рис. 3. Оптимальная юстировка сосуда

Положение конденсора, осуществляющего оптимальные условия юстировки (5), его фокусное расстояние F и минимальное относительное отверстие D/F , определяются следующими формулами⁵ (рис. 3):

⁵ В этих формулах и в (6) l обозначает расстояние между диафрагмами задней и передней плоскостей сосуда. Это расстояние обычно не совпадает с длиной освещенной части сосуда.

$$F = 2r_2 \frac{f}{a} \frac{1}{1 - (2r_2/a)^2 (f/l)n}; \quad \frac{D}{F} = \frac{a + h_m}{f} + 2n \frac{r_1 + r_2}{l};$$

$$x = F \left(1 + \frac{2r_2}{a}\right); \quad y = F \left(1 + \frac{h_m}{2r_1}\right). \quad (7)$$

Необходимо подчеркнуть, что F и D/F задаются независимо и однозначно⁶. Использование любого другого конденсора, отличающегося хотя бы по одному параметру, приводит либо к незаполнению коллиматора, либо к получению меньшей высоты равномерно освещенной части щели, либо к попаданию в спектрограф паразитного света от стенок.

Отметим также влияние размеров сосуда на величины параметров схемы при ее оптимальной юстировке. Фокусное расстояние F конденсора совсем не зависит от r_1 и очень мало от длины l (второй член знаменателя обычно не более 0,2—0,3). Относительное отверстие конденсора в основном определяется членом $2n \frac{r_1 + r_2}{l} \approx 4n \frac{R}{l}$, который обычно больше первых двух. Высота же щели приблизительно пропорциональна R^2/l .

На рис. 3 показана оптимальная юстировка сосуда; первая диафрагма h_m ограничивает тот участок щели, который освещен однородно и на который не попадает свет от стенок. На более высокие точки щели будет падать свет комбинационного рассеяния, непосредственно идущий к щели (из области O_1 сосуда), а также отраженный на границах жидкость — стекло и стекло — воздух (область O_2). Кроме того, они будут освещены паразитным светом от стенок трубки.

Однако, если непрерывный спектр излучения лампы достаточно мало интенсивен⁷, эти участки щели можно использовать, что может оказаться очень полезным при работе с малыми количествами жидкости и при фотоэлектрической регистрации.

При измерении интенсивностей методами фотографической фотометрии этот способ увеличения h может оказаться неприемлемым, так как из-за конечной толщины стенок и неполного отражения на границе стекло — воздух освещенность периферийных участков щели оказывается меньше, чем на оси; эта неоднородность может достигать 15—20%.

3. Расчет конденсорной системы для ИСП-51

Рассмотрим типичную установку со спектрографом ИСП-51 и прилагаемым к нему эллиптическим осветителем. Параметры этой установки таковы:

$$a = 61 \text{ мм}; \quad f = 304 \text{ мм}; \quad l = 100 \text{ мм}.$$

В настоящее время наиболее часто встречаются следующие три задачи⁸: 1) измерение частот линий; 2) измерение интенсивностей

⁶ В противоположность случаю отображения на щель плоского источника. Объясняется это тем, что полезное излучение столба рассеивающей жидкости заключено в определенном телесном угле, строго заданном размерами сосуда.

⁷ В лампах ПРК этого можно добиться лишь в пониженном режиме или путем их охлаждения; и то и другое связано с уменьшением яркости ламп. Кроме того, в настоящее время предпринимаются первые успешные попытки создать специальные лампы с очень слабым непрерывным и достаточно интенсивным линейчатый спектр [11,12].

⁸ Мы не касаемся методов поляризационных измерений и работы с очень малыми количествами жидкости в силу их существенной специфичности.

методами фотографической фотометрии; 3) фотоэлектрическая регистрация.

При измерении частот высота щели не очень существенна, можно считать оптимальной высоту щели 2 мм. При измерении интенсивностей марки почернения обычно наносятся от постороннего источника; тогда при фотографировании спектра рассеяния достаточно иметь $h = 2$ мм; при фотоэлектрической регистрации светосила установки пропорциональна высоте щели⁹; поэтому естественно применять такие сосуды, чтобы можно было использовать всю высоту щели спектрографа, т. е. $h = 15$ мм.

Таким образом рационально иметь набор из двух сосудов и двух конденсоров, которые могли бы обеспечить высоты щели 2 и 15 мм. Обсудим трудности, возникающие при использовании требуемых сосудов.

При расчете сосуда и соответствующего конденсора надо иметь в виду, что формулы (6) и (7) получены без учета неизбежных аберраций конденсора, дифракции на диафрагме выходного окна и возможной неоднородности этого окна вблизи линии припоя. Перечисленные обстоятельства ведут к тому, что каждая точка предмета изображается конденсором в виде пятна конечных размеров. Поэтому, чтобы получить нужную высоту щели, свободную от паразитного света стенок сосуда, необходимо поперечные размеры сосуда брать несколько больше, чем дает формула (6).

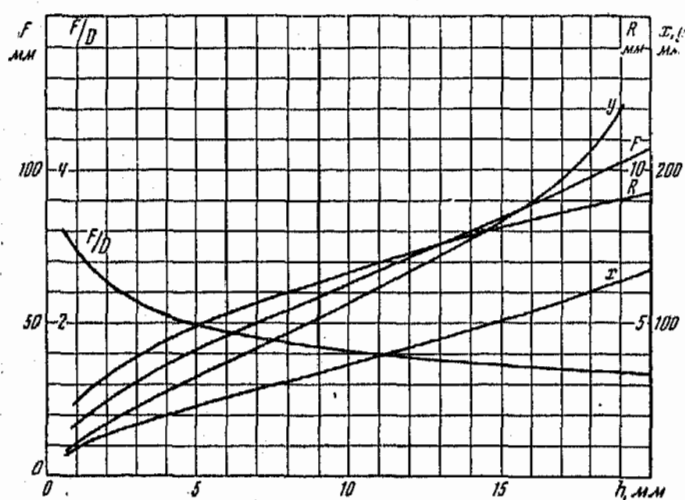


Рис. 4. Зависимость параметров осветительной системы от требуемой высоты щели в случае спектрографа ИСП-51 при оптимальной истировке. R — внутренний радиус сосуда; F и D/F — фокусное расстояние и относительное отверстие конденсора; x и y — расстояния конденсора от выходного окна сосуда и щели спектрографа соответственно

По этим соображениям при расчете, результаты которого представлены на рис. 4, было положено

$$2r_1 = 2r_2 = (2R - 1) \text{ мм}; a = 70 \text{ мм};$$

последнее число больше диаметра коллиматорного объектива на 15%.

1. Низкая щель, $h = 2$ мм. Из графика (рис. 4) находим необходимые значения параметров:

$$2R = 6,5 \text{ мм}; 2r_2 = 5,5 \text{ мм}; F = 25 \text{ мм}; D/F = 1/2,5; x = 27 \text{ мм}; y = 34 \text{ мм}.$$

Единственным неудобством при осуществлении оптимальных условий в этом случае является недостаточная величина расстояния между щелью спектрографа и осветителем: при $x + y = 61$ мм осветитель будет сильно нагревать щель. Увеличить это расстояние можно только

⁹ Ширина щели обычно определяется решаемой физической или аналитической задачей.

за счет раздвижения главных плоскостей конденсора, делая его многолинзовым. Достаточно простым для осуществления и использования является трехлинзовый конденсор, у которого первые две одинаковые линзы составляют телескопическую систему с увеличением $\beta = -f_2/f_1 = -1$, а третьей служит линза, рассчитанная выше (рис. 5).

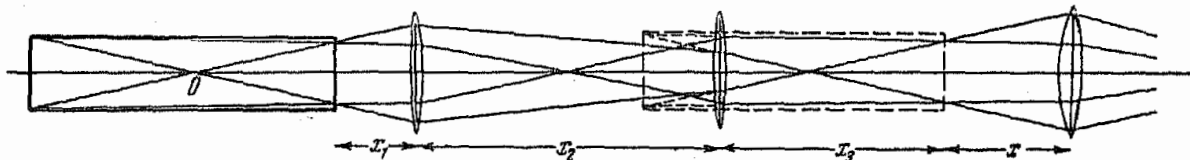


Рис. 5. Схема трехлинзового конденсора

Известно, что телескопическая система с $|\beta| = 1$ «переносит» предмет¹⁰ на расстояние $4f_1$, независимо от ее положения (это обстоятельство может быть полезным при юстировке). Значит, если между щелью и выходным окном сосуда необходимо расстояние X , то компоненты телескопической системы должны иметь фокусное расстояние

$$f_1 = f_2 = \frac{X - x - y}{4}. \quad (8)$$

Пусть $X = 300$ мм, тогда $f_1 = 60$ мм. Диаметры d_1 и d_2 зависят от положения телескопической системы; минимальное значение относительных отверстий d_1/f_1 и d_2/f_2 равно

$$\frac{d_1}{f_1} = \frac{d_2}{f_2} = 2n \frac{r_1 + r_2}{l} = \frac{1}{5,5} \quad (9)$$

и соответствует тому случаю, когда фокус первой линзы совпадает с точкой O (рис. 5); тогда

$$x_1 = 29 \text{ мм}; \quad d_1 = d_2 = 11 \text{ мм}.$$

Таким образом окончательная юстировка такова:

$$x_1 = 29 \text{ мм}; \quad x_2 = 2f_1 = 120 \text{ мм}; \quad x_3 + x = 118 \text{ мм};$$

$$f_1 = f_2 = 60 \text{ мм}; \quad d_1 = d_2 = 11 \text{ мм}.$$

Удобно все три линзы смонтировать в общую трубку, укрепленную на одном рейтере¹¹.

Как указывалось выше, при измерении интенсивностей методами фотографической фотометрии марки почернения обычно наносятся от постороннего источника света. Многие авторы (например, [13]) используют в качестве такого источника флуоресценцию водного раствора сернокислого хинина; следовательно, марки почернения в этих случаях наносятся от объемного источника. При этом сосуд с флуоресцирующим раствором ставится на то же место, что и сосуд с исследуемым веществом. Естественно, возникает вопрос: каковы должны быть размеры сосуда с флуоресцирующим веществом и параметры конденсора, чтобы без изменений условий юстировки, оптимальных для сосуда с исследуемым веществом, можно было бы однородно осветить ступенчатый ослабитель ($h = 8$ мм) светом

¹⁰ Существование промежуточного изображения можно использовать для более полного устранения паразитного света. Для этого достаточно поставить соответствующую диафрагму в плоскости промежуточного изображения задней плоскости сосуда. При этом необходимо: $f_1 > (l/2n) + x_1$.

¹¹ Предполагаемая схема не является, конечно, единственным решением вопроса.

флуоресценции? При решении этого вопроса необходимо иметь в виду, что в спектрографе ИСП-51 пучки от верхних точек щели виньетируются оправой камерного объектива (рис. 6), так как размеры его равны размерам коллиматорного объектива. Нетрудно подсчитать, что при $h = 8$ мм освещенность спектральной линии в крайней точке будет отличаться от освещенности на оси не менее чем на 10—12%. Эти соображения остаются верными и в тех случаях, когда апертурной диафрагмой является не оправка коллиматорного объектива, а первая призма спектрографа. Таким образом при фотографировании марок почернения с высокой щелью необходимо, чтобы коллиматор был не заполнен по высоте. При этом в горизонтальном направлении должно быть обеспечено такое же заполнение коллиматора, как и при фотографировании спектра комбинационного рассеяния. Все эти требования можно удовлетворить, если на выходном окне сосуда поместить диафрагму, показанную на рис. 6 справа. В условиях оптимальной юстировки диафрагма выходного окна сосуда отображается на коллиматор и, «закрывая» верхнюю и нижнюю части оправы коллиматора, устраняет указанную опасность неоднородности освещенности спектра по высоте.

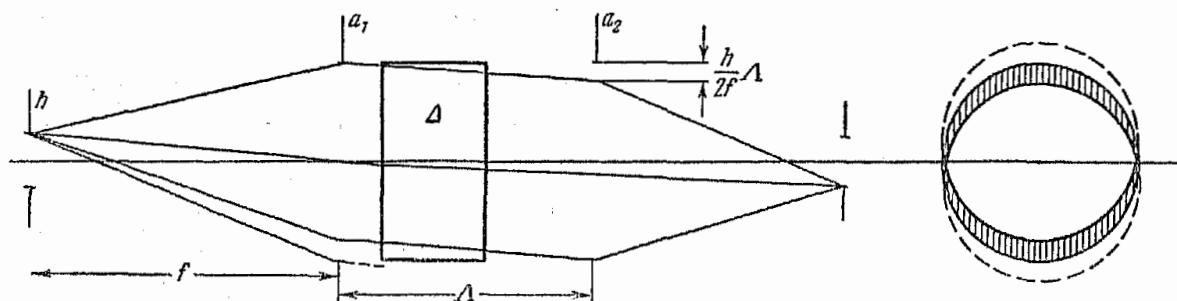


Рис. 6. Схема виньетирования верхних точек щели оправой камерного объектива спектрографа; h — щель спектрографа; a_1 и a_2 — оправы коллиматорного и камерного объективов соответственно; Λ — расстояние между ними; Δ — диспергирующая система

Неизменность условий юстировки означает, что фокусное расстояние и положение конденсора относительно сосуда и спектрографа должны быть одинаковыми при фотографировании комбинационного расстояния и марок почернения. Из (7) видно, однако, что увеличение высоты щели требует увеличения относительного отверстия конденсора. Для $h = 8$ мм (при юстировке, оптимальной для $h = 2$ мм) имеем

$$h' = 22 \text{ мм},$$

$$D/F = [(a + h)/f] + [(a' + h')n/l] = 1/1,6.$$

Соответствующим образом увеличатся и относительные отверстия первых двух компонент трехлинзового конденсора

$$d_1/f_1 = d_2/f_2 = 1/2,4.$$

Выбор параметров сосуда для флуоресцирующего вещества определяется следующими соображениями. Если отраженный от стенок свет не обеспечивает однородного освещения щели, то нужно увеличить диаметр сосуда. Однако нет необходимости добиваться $2R = h'$, ибо ту часть сосуда, свет от которой попадает на щель после отражения от стенок (область O_2 на рис. 3), можно закрыть от возбуждающего света. Повидимому, оптимальным диаметром будет 15 мм. При этом область O_2 составляет половину длины сосуда.

2. Высокая щель, $h = 15$ мм. Для ее получения требуется

$$2R = 16 \text{ мм}; 2r_2 = 15 \text{ мм}; F = 84 \text{ мм}; D/F = 1/1,45; x = 100 \text{ мм}; \\ y = 166 \text{ мм}.$$

Так как при фотоэлектрической регистрации светосилу определяет суммарный поток, проходящий через объектив камеры, а однородность спектральной линии не обязательна, то нет надобности диафрагмировать коллиматор. Значения параметров вполне приемлемы.

4. Выводы

1. Изложенные расчеты, основанные на данных работ [1,5], позволяют рационально выбирать параметры осветительной системы в установках для регистрации спектров комбинационного рассеяния жидкостей применительно к той или иной задаче.

2. Рассмотрение комплекта, приданного к спектрографу ИСП-51, с точки зрения удобства решения типичных задач спектроскопии комбинационного рассеяния света, показывает недостатки в его составлении. К прилагаемым сосудам с внутренними диаметрами 7 и 16 мм необходимы конденсоры с фокусными расстояниями 25 и 84 мм и относительными отверстиями 1/1,6 и 1/1,45 соответственно, в то время как прилагается один конденсор с $F = 94$ мм и $D/F = 1/1,9$.

Для малого сосуда, повидимому, рационально придавать трехлинзовый конденсор. Диафрагма на выходном окне большого сосуда должна иметь диаметр 15 мм.

В заключение считаю своим долгом выразить благодарность акад. Г. С. Ландсбергу за постановку задачи и В. И. Малышеву за повседневную помощь в работе.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
12 января 1954 г.

Литература

- [1] J. R. Nielsen. Journ. Opt. Soc. Amer., 20, 704, 1930. — [2] P. Donzelot, J. Barriol. Journ. de phys. et le rad. 7, 1936, Bull. Soc. fr. de phys., 36, S. — [3] Г. Г. Слюсарев и В. М. Чулановский. Журн. техн. физ., 18, 664, 1948. — [4] В. М. Чулановский. Введение в молекулярный спектральный анализ, Гостехиздат, Москва, 1950. — [5] J. R. Nielsen. Journ. Opt. Soc. Amer., 36, 544, 1947. — [6] G. Hansen. Optik, 6, 337, 1950. — [7] W. Becker. Optik, 8, 173, 1951. — [8] К. Кольрауш. Спектры комбинационного рассеяния, ИИЛ, Москва, 1950. — [9] Г. Г. Слюсарев. Геометрическая оптика, Изд-во АН СССР, М.—Л., 1946. — [10] Я. С. Бобович. Зав. лаб., 16, 885, 1950. — [11] М. Л. Сосинский. Изв. АН СССР, сер. физич., 17, 621, 1953. — [12] R. F. Stamm, C. F. Solzmann. Journ. Opt. Soc. Amer., 43, 126, 1953. — [13] М. М. Сущинский. Диссертация, Труды ФИАН, 5, 185, 1950.

О КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЕ В СПЕКТРАХ ОКИСИ ЦИНКА

П. С. Литвинова

В спектрах поглощения и излучения окиси цинка обнаружена система слабых максимумов. Система описывается электронно-вибрационной формулой для двух значений энергии электронного возбуждения. Электронный переход связывается с возбуждением активатора. При этом в спектрах поглощения и излучения проявляются колебательные состояния решетки, с которой активатор связан энергетически.

1. Введение

Некоторые авторы связывают изменение цвета свечения твердых люминофоров с изменением расположения активатора относительно структурных составляющих основного вещества. Изменение расположения активатора, однако, должно повести к изменению связей активатора с ближайшим окружением. Таким образом изменение цвета свечения фосфора должно сопровождаться одновременным изменением колебательной структуры в спектре его излучения.

Спектры излучения окиси цинка были изучены рядом авторов^[1,2] как на кристаллических порошках, так и на сублимат-фосфорах. Было показано, что в зависимости от тепловой обработки образцов и температуры исследования цвет свечения ZnO может изменяться от зеленого до желто-оранжевого. Были приведены также экспериментальные данные, которые дают основания предполагать, что активатором для образцов как с оранжево-желтой, так и с зеленой люминесценцией являются ионы активатора^[1], избыточного цинка, расположенные различно относительно основной решетки окиси цинка: в первом случае — в узлах решетки, во втором — в междоузлиях. Данное исследование и было поставлено с целью выявления изменения колебательной структуры для окиси цинка с различным спектральным составом излучения.

2. Эксперимент

Мы исследовали люминесценцию ZnO в основном для кристаллических порошкообразных образцов. Порошки с оранжево-желтым, желтым и зеленым свечением были получены дифференциальной возгонкой паров окиси цинка и последующим прогреванием порошков в течение различного времени при $1000^\circ C$. Фотографирование спектров проводилось в основном при температуре жидкого воздуха. Свечение возбуждалось ртутной лампой ПРК-4 с фиолетовым фильтром. Спектры фотографировались спектрографом-монокроматором УМ-2 с дисперсией в области $6000 \text{ \AA} - 140 \text{ \AA}$ на 1 мм и в области $4550 \text{ \AA} - 55 \text{ \AA}$ на 1 мм. Щель спектрографа была взята 0,05 мм. Снимки фотометрировались на микрофотометре МФ-1.

Результаты фотометрирования трех образцов окиси цинка с оранжевой, желтой и зеленой полосами люминесценции приведены на рис. 1. Сопоставление вида фотометрических кривых указывает на

одинаковый во всех случаях характер тонкой структуры полос. Независимо от области излучения, тонкая структура налагается на спектр как слабая модуляция интенсивности.

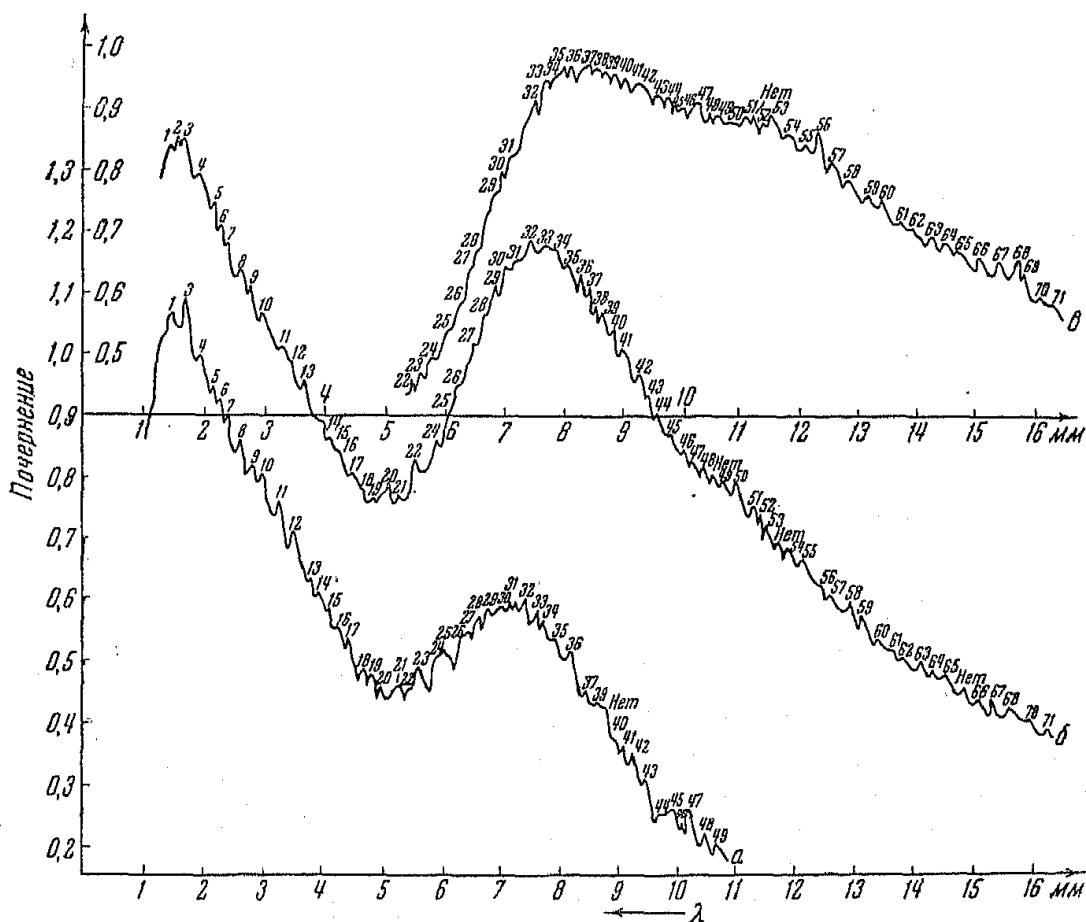


Рис. 1. Спектры излучения окиси цинка для оранжевой, желтой и зеленой полосы люминесценции. а — оранжевая, б — желтая, в — зеленая

Ниже приводится ряд экспериментов и следствий из них, которые показывают, что эти модуляции отражают действительную структуру спектральных полос.

а) Прежде всего была проверена повторяемость результатов фотометрирования спектрограмм при повторном фотометрировании на микрофотометрической установке. На рис. 2 представлено двукратное фотометрирование одного и того же участка спектрограммы. Сдвиг кривых по ординате получен изменением накала лампы фотометра. Кривые повторяют детально один и тот же ход изменения почернения. Никаких лишних максимумов в тонкой структуре спектра за счет фотометрирования не появляется.

б) Снимки были сделаны на различных сортах пленок (изопан, изопанхром, фэд, агфа-изопан) при их обработке различными проявителями. Сопоставление снимков, сделанных на различных пленках, показывало во всех случаях достаточно точное повторение тонкой структуры в полосах люминесценции.

в) Снимки фотометрировались при трех интервалах между отсчетами 0,2; 0,05; 0,02 мм. При переходе от интервала фотометрирования 0,2 мм к интервалу 0,05 мм число максимумов значительно возрастало, однако дальнейшее уменьшение интервала до 0,02 мм не приводило к увеличению их числа.

г) При вычислении ошибок измерения, детально описанного в разделе 4, оказалось, что средняя величина модуляций в почернении

в 3,6 раза превышает среднюю ошибку при фотографировании и фотометрировании спектра.

д) При расшифровке спектров с учетом ангармоничности колебаний, детально описанном в разделе 4, было обнаружено плавное изменение

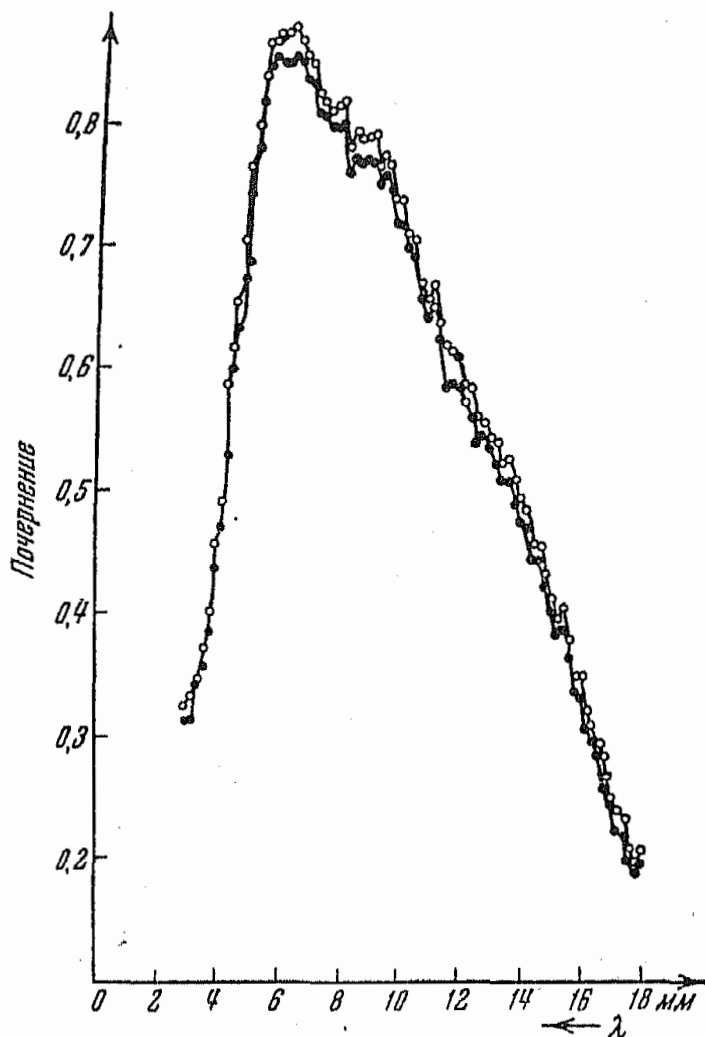


Рис. 2. Микрофотограммы одного и того же участка спектра: ○ — первое фотометрирование; ● — вторичное фотометрирование

среднего расстояния между максимумами на снимках, сделанных с различных образцов и в разное время (рис. 5).

е) Статистическая обработка материала показала, что экспериментально определенные положения модуляционных максимумов группируются вокруг их рассчитанного положения, и разброс наблюдаемых значений распределяется по кривой ошибок Гаусса.

ж) Было обнаружено также, что спектры рассеяния окиси цинка, снятые в одних и тех же условиях, изменяются с изменением температуры на образце.

Все это указывало, что наблюдаемые модуляции в интенсивности являются характеристикой самого вещества и не зависят от примененной методики исследования.

3. Расшифровка спектров

Структура спектральных полос поглощения и излучения кристаллофосфоров как системы слабо выраженных максимумов, разделенных почти постоянными частотными интервалами, исследовалась неоднократно [3-5]. Для ряда фосфоров эта система была описана электронно-

вибрационной формулой. При этом было отмечено, что частотные характеристики для колебаний кристаллической решетки отличны от частотных характеристик молекулярных спектров этих веществ. Значение $\nu_{\text{эл}}$, соответствующее границе серии, связывалось или с одной из линий спектра металла решетки, или с границей собственного поглощения кристаллофосфора.

Для окиси цинка колебательная структура была исследована для фиолетовой и близкой ультрафиолетовой области спектра [5]. Мы расширили исследование на обычно наблюдаемые полосы излучения окиси цинка, лежащие в более длинноволновой области.

Как было указано, тонкая структура в спектрах излучения окиси цинка проявляется как слабая модуляция в интенсивности. Величина этой модуляции постоянна как в максимуме, так и на краях спектральных полос излучения. Проявление этой слабой по интенсивности модуляции делается возможным благодаря существованию интенсивных полос излучения. Мы попробовали, воспользовавшись частотными характеристиками, известными из других работ [4,5], применить для расшифровки полученной системы максимумов молекулярную электронно-вибрационную формулу при трех значениях верхнего колебательного квантового числа $v': 0, 1, 2$. Рассчитанная таким образом система довольно хорошо совпадала по положению с экспериментально определенными по фотометрическим кривым максимумами, но общее число экспериментально определенных максимумов было почти точно вдвое больше рассчитанного, т. е. найденная нами система или имела дублетную структуру, или более широкую полосу значений для верхнего квантового числа.

Работы Кудрявцевой [5] по колебательной структуре в сульфиде и окиси цинка не давали основания придавать $\nu_{\text{эл}}$ какое-либо другое значение для получения дублетной системы максимумов, так как $\nu_{\text{эл}}$ связывалось ею с положением границы собственного поглощения. Однако детальная расшифровка колебательного спектра окиси кальция [4], например, приводит к двум значениям $\nu_{\text{эл}}$ в электронно-вибрационном спектре: $\lambda_1 = 3632 \text{ \AA}$ и $\lambda_2 = 3870 \text{ \AA}$, а измерения поглощения CaO [6] показывают, что окись кальция собственного поглощения в этой спектральной области не имеет.

Предположение о дублетной структуре спектра окиси цинка кажется обоснованным, если принять во внимание ряд работ по спектрам поглощения и излучения сублимат-фосфоров окисей и галогенидов металлов [2,7]. В этих работах показано, что металл и, в частности Zn , введенный в решетку сублимат-фосфора, дает в поглощении узкую полосу, скорее, линию при $3750 \text{ \AA}$, что близко к значению для границы серии, равному $3736 \text{ \AA}$, найденному из экспериментальных исследований колебательной структуры. В некоторых случаях линия $3750 \text{ \AA}$ дает дублетное или триплетное расщепление. В порошкообразных фосфорах спектральная область возбуждения активатора расширена благодаря тесному взаимодействию с решеткой.

Указания на дублетную структуру спектра излучения для порошкообразной окиси цинка приведены в работах [1,8]. Эти же авторы нашли в поглощении два слабых максимума, которые они связывали с поглощением самого активатора. Энергетическая разность максимумов в обоих случаях, в поглощении и излучении, приблизительно одинакова. Таким образом для процессов, связанных с активаторами, дублетной структуре в излучении соответствует дублетная структура в поглощении, а это возможно в том случае, если поглощение на активаторе приводит только к возбуждению, т. е. поглощение на активаторе не сопровождается отрывом электрона. Поэтому мы попробовали подобрать второе значение $\nu_{\text{эл}}$ из данных о дублетной структуре спектра активатора в окиси цинка.

Согласно [1,8], максимумы в поглощении порошкообразной окиси цинка расположены при 378 и при 563 или 362 м μ . В электронно-вибрационной формуле при применении ее к окиси цинка $\nu_{эл} = 3736 \text{ \AA}$, т. е. имеет значение, близкое к первому из приведенных. Положение второго максимума согласно [1,8] отличается от первого приблизительно на 0,1 eV. Мы приняли его равным 0,108 eV. Не придавая этому особого значения, укажем, однако, что эта величина точно соответствует разности дублетных уровней иона цинка в газовой фазе. Принятое значение $\nu_{эл}$ соответствует 3612 $\text{\AA}$, что близко к значению 362 м μ , определенному в работе [8].

Вторую систему значений для положения максимумов мы рассчитали, приняв те же самые значения для колебательных квантов возбужденного ($\omega' = 322 \text{ см}^{-1}$) и нормального ($\omega'' = 571 \text{ см}^{-1}$) состояний, что и в первом случае, так как считали, что одни и те же колебания решетки налагаются на дублетный спектр электронного возбуждения.

Результаты расшифровки спектров (рис. 1) приведены в табл. 1. В первых трех столбцах таблицы даны положения максимумов на экспериментальных фотометрических кривых для образцов, имевших зеленую, желтую и оранжевую люминесценции. В четвертом столбце приведены вычисленные значения частоты. В пятом и шестом — принятые при вычислениях значения $\nu_{эл}$ и квантовых чисел верхнего и нижнего состояний.

Расчеты были проведены также при введении в электронно-вибрационную формулу более широкой области изменения для верхнего квантового числа (от 0 до 5). При этом, однако, согласие экспериментально найденных значений с рассчитанными стало хуже.

Таким образом первый вариант расчета оказался предпочтительнее. Однако в работе [5] по изучению колебательной структуры в поглощении не было указания на существование второй колебательной системы, поэтому мы поставили дополнительные эксперименты по изучению поглощения. При этом мы расширили области возбуждения, применив вместо электрической лампы накаливания, как было сделано у Кудрявцевой, водородную трубку.

На рис. 3 приведены фотометрические кривые двух снимков, сделанных при одной установке, на одной фотопленке, но при разных температурах (а и б). Кривая в дает непосредственно излучение водородной трубки. Излучение водородной трубки было снято с той же экспозицией, что и для образцов. Снимки, сделанные при разных температурах, отличались между собой. На всех снимках при комнатной температуре можно было видеть довольно мелкую структуру, на снимках при температуре жидкого воздуха проявляется более или менее четко закономерность с большим частотным интервалом.

Для описания системы максимумов табл. 1 была продолжена до области интенсивного поглощения окиси. Оказалось, что рассчитанные значения можно поставить в соответствие с наблюдаемой системой максимумов, если не вводить для колебательной системы возбужденного состояния фактора ангармоничности. Это обстоятельство может быть связано с тем, что в твердом теле для состояний возбуждения в разложении энергии по степеням смещения возможно ожидать возрастания членов более высокого порядка, чем квадратичный, что приводит к частичной или полной компенсации квадратичного члена, учет которого в обычно применяемой формуле и дает ангармоническую систему термов. На рис. 3 каждому максимуму на экспериментально полученных фотометрических кривых поставлено в соответствие рассчитанное по электронно-вибрационной формуле значение. Оказалось, что и в случае поглощения мы не смогли описать все наблюдаемые максимумы значениями, рассчитанными для одной систе-

Таблица 1

Положение максимумов полосы люминесценции			Частота перехода, вычисленная	Первая система $\nu_{эл}=28786 \text{ см}^{-1}$	Вторая система $\nu_{эл}=27676 \text{ см}^{-1}$
зеленая	желтая	оранжевая			
---	15660	15690	15643	1—24	
---	15715	—	15744		0—23
---	15770	15780	15780	0—21	
---	15920	15920	15933		2—24
---	—	—	15957	2—22	
---	16050	16050	16066		1—23
---	16105	16100	16102	1—21	
---	16185	16190	16203		0—22
---	16250	16270	16249	0—20	
---	16360	16370	16388		2—23
---	16435	16440	16424	2—21	
---	16585	16565	16571	1—20	
---	—	—	16527		1—22
---	16665	16675	16669		0—21
---	16755	16790	16724	0—19	
---	16865	16830	16847		2—22
---	16910	16910	16893	2—20	
---	16975	16945	16992		1—21
---	17060	17040	17046	1—19	
---	17135	17140	17139		0—20
---	17200	17205	17204	0—18	
---	17305	17265	17314		2—21
---	17370	17345	17368	2—19	
17450	17490	17470	17461		1—20
17530	—	17590	17526	1—18	
17605	17630	17650	17614		0—19
17710	17710	17690	17689	0—17	
17795	17760	17815	17783		2—20
17875	17880	17880	17848	2—18	
17920	17960	17940	17936		1—19
18025	18045	18005	18011	1—17	
18090	18105	18090	18094		0—18
18165	18165	18185	18178	0—16	
18275	18255	18260	18258		2—19
18370	18360	18340	18333	2—17	
18390	18440	18380	18416		1—18
18505	18500	18460	18500	1—16	
18540	18600	18560	18579		0—17
18660	18660	18660	18673	0—15	
18700	18700	—	—		
18760	18740	18740	18738		2—18
18820	18820	18800	18822	2—16	
18900	18880	18920	18901		1—17
18980	18995	18990	18995	1—15	
19120	19070	19070	19068		0—16
19175	19120	19150	19172	0—14	
19235	19215	19250	19223		2—17
19290	19315	19335	19317	2—15	
19370	19370	19370	19390		1—16
19470	19450	19485	19494	1—14	
19525	19590	19540	19563		0—15
19625	19660	—	19676	0—13	
19720	19780	—	19712		2—16
19810	19810	—	19816	2—14	
19865	19920	—	19885		1—15
19970	19975	—	19998	1—13	
20055	20065	—	20062		0—14
20140	20170	—	20185	0—12	
20210	20225	—	20207		2—15
20305	20340	—	20320	2—13	
20425	20390	—	20384		1—14

Таблица 1 (продолжение)

Положение максимумов полосы люминесценции			Частота перехода, вычисленная	Первая система $\nu_{эл}=28786 \text{ см}^{-1}$	Вторая система $\nu_{эл}=27676 \text{ см}^{-1}$
зеленая	желтая	оранжевая			
20510	20490	—	20507	1—12	
20610	20590	—	20566		0—13
20690	20645	—	20698	0—11	
20790	20745	—	20706		2—14
20830	20805	—	20828	2—12	
20915	20865	—	20888		1—13
—	20965	—	—		
21040	21040	—	21020	1—11	
21125	21090	—	21075		0—12
21205	21180	—	21216	0—10	
21225	—	—	21210		2—13
21390	21290	—	21342	2—11	
21380	21355	—	21397		1—12

мы, но должны были принять существование второй системы. На рис. 3 для первой системы рассчитанное состояние обозначено над соответствующим максимумом, для второй — под ним. Первое из чисел в этих обозначениях относится к верхнему колебательному состоянию,

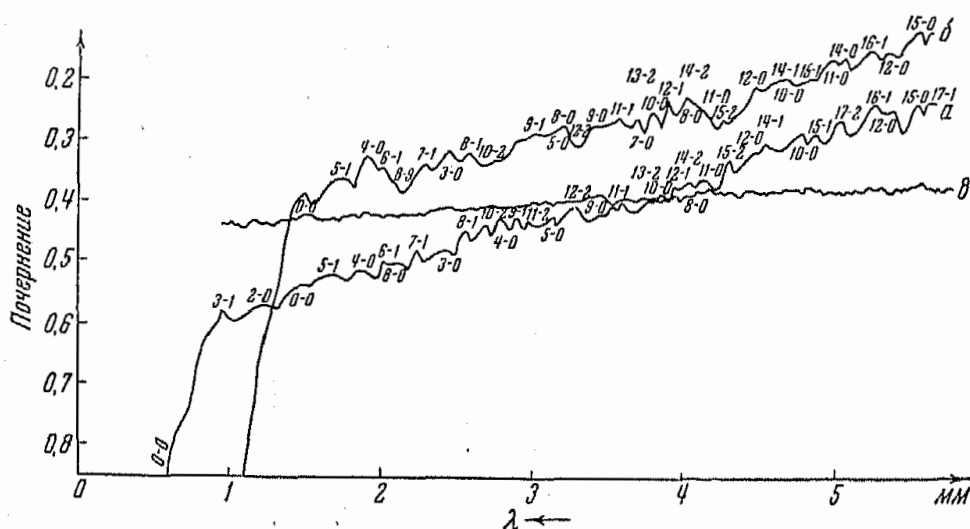


Рис. 3. Спектры поглощения окиси цинка: а — комнатная температура; б — температура жидкого воздуха; в — излучение водородной трубки

второе — к нижнему. Максимумы при комнатной температуре описываются в первой системе в основном квантовыми числами нижнего состояния 1 и 2, для второй системы — нулевыми значениями этого числа. Характер спектра, снятого при жидком воздухе, как и можно было ожидать, меняется благодаря исчезновению переходов со второго уровня нижнего состояния и росту интенсивностей в максимумах для переходов с первого и нулевого нижнего уровня.

4. Оценка ошибок измерения

Наши выводы по расшифровке спектров были сделаны, как обычно, прямо из данных по изменению почернения без перехода к кривым интенсивностей. Опыты, описанные в разделе 2, и плавный ход

для излучения водородной трубки на рис. 3 указывают, что модуляционные максимумы не связаны с изменением характеристик фотопленки.

Мы обрабатывали снимки спектров излучения, показанных на рис. 1, всегда одним и тем же способом в отношении проявителя, времени проявления и т. д. Ошибки в измерении полученного почернения могли получаться в дальнейшем при фотометрировании снимков.

Рис. 2, иллюстрирующий повторимость результатов фотометрирования, позволяет также рассчитать ошибку, которую вносит в измерение почернения само фотометрирование. Подсчеты показали, что средняя ошибка фотометрирования равна $\pm 0,004$ по шкале микрофотометра. Если таким же методом из рис. 1 подсчитать среднюю ширину интервала, в котором расположены модуляции интенсивности, то получим в среднем из всех трех полос ширину интервала, равную 0,0295 в делениях шкалы, т. е. величина модуляций в 3,6 раза больше ошибки, определяемой фотометрированием. Снимки, приведенные на рис. 1, были получены в разное время и с разных образцов, однако величина модуляций не изменяется и полученное значение (3,6 раза) далеко превосходит возможную ошибку измерения.

Другая группа наших измерений относилась к определению отклонения измеренных по рис. 1 положений максимумов от их положений, рассчитанных по электронно-вибрационной формуле (табл. 1).

Если модуляционные максимумы не имеют какого-либо случайного происхождения, а являются единой системой, описываемой электронно-вибрационной формулой с определенными частотными характеристиками, то экспериментально найденные положения максимумов должны группироваться вокруг их рассчитанного положения, и отклонения от рассчитанного положения должны распределяться по кривой ошибок Гаусса.

Результаты первоначального подсчета по данным [5] показали, что большинство экспериментальных значений для первой системы имеет положительную ошибку, а для второй системы — отрицательную. Так как кривые были смещены в целом, то, очевидно, неправильно было взято значение $\nu_{эл}$. Величина $\nu_{эл}$ может слегка меняться в зависимости от условий изготовления образцов. Если принять $\nu_{эл}$ равным $26\,786\text{ см}^{-1}$, т. е. исправить на $+22\text{ см}^{-1}$, то экспериментальные точки расположатся симметрично относительно вычисленных значений. На рис. 4. сплошная кривая — это кривая ошибок Гаусса для данного случая. Точками обозначены экспериментально полученные значения. Если для второй системы принять $\nu_{эл}$ вместо $27\,686\text{ см}^{-1}$ равным $27\,676\text{ см}^{-1}$, то экспериментальные точки также распределятся согласно кривой ошибок Гаусса. Средняя квадратичная ошибка при этом для первой системы 20 см^{-1} , для второй $22,5\text{ см}^{-1}$.

Таким образом статистическая обработка экспериментальных данных указывает, что модуляционные максимумы являются не случайными флуктуациями, а подчиняются определенной закономерности. Статистическая обработка позволила также уточнить значение энергии электронного перехода для наших образцов.

Третья группа подсчетов относилась к определению проявления ангармоничности экспериментально полученной системы максимумов.

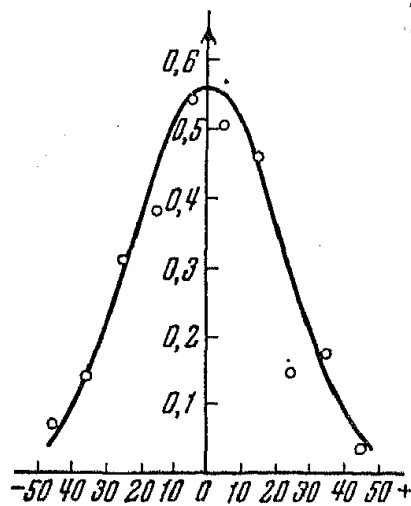


Рис. 4. Распределение ошибок измерения. Первая система

Рассмотрение кривых рис. 1 не позволяет с первого взгляда заметить ангармоничность системы по увеличению числа максимумов на определенном интервале фотометрических кривых (например, на 1 мм).

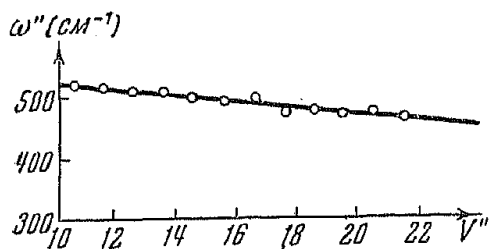


Рис. 5. Изменение среднего значения частоты колебательного кванта ω'' с изменением квантового числа V''

Поэтому мы сопоставили на рис. 5 средние значения для частоты колебательных квантов ω'' при изменении квантового числа V'' , определенные из экспериментальных кривых, с вычисленными их значениями. На рис. 5 сплошная кривая построена по вычисленным значениям, точки соответствуют средним значениям частот, полученным из табл. 1. Так как мы учиты-

вали все максимумы на экспериментальных кривых, то полученное уменьшение среднего расстояния между максимумами также подтверждает наши соображения о реальности наблюдаемых модуляций интенсивности.

Заключение

Опытами на сублимат-фосфорах для кратковременного свечения, которое связывается с поглощением на активаторе, показано, что длительность жизни в возбужденном состоянии для центра излучения соизмерима с длительностью возбуждения свободной частицы [2], т. е. в этом случае поглощение приводит только к возбуждению активатора. Этот вывод может быть распространен и на поведение активатора в порошкообразных фосфорах. При этом естественно ожидать, что возбуждение активатора, энергетически связанного с окружением, будет сопровождаться появлением в спектре его поглощения и излучения колебательных состояний.

Эти колебательные состояния будут отражать, по нашему мнению, колебательное состояние решетки, так как активатор, введенный в решетку в атомно-дисперсном состоянии, должен будет принять участие в общем колебательном движении, установившемся в решетке, и с частотой, свойственной колебаниям всего коллектива молекул.

Общие теоретические предпосылки [9,10] и экспериментальные работы по изучению спектров поглощения и люминесценции органических молекулярных кристаллов [11] показали, что в результате возбуждения в кристаллах могут проявляться как в поглощении, так и в излучении кроме молекулярных особые «кристаллические» электронно-колебательные состояния, связанные с закономерностями кристаллического коллектива молекул. Для простых решеток, типа окиси цинка, где молекулярная ячейка слабо изолирована, можно ожидать, что основными состояниями, проявляющимися в спектрах, и будут эти «кристаллические» состояния. С этой точки зрения, наблюдаемая нами колебательная структура не должна отражать специфики в расположении активатора, а исследование не позволяет дать ответ на поставленный выше вопрос о различии в расположении активатора в решетке для фосфоров с различным свечением.

Вынужденный характер колебаний активатора, как атомно-дисперсной частицы, помещенной в кристаллическую решетку, может явиться также причиной, обуславливающей слабость проявления колебательной структуры в спектрах исследуемого вещества.

Литература

- [1] Ф. И. Вергунас и Г. А. Коновалов. ЖЭТФ, **23**, 712, 1952; Г. А. Коновалов, Диссертация, Томский гос. университет, 1952. — [2] К. В. Шалимова. ДАН СССР, **78**, 1127, 1951; Изв. АН СССР, сер. физ., **15**, 678, 1951. — [3] E. L. Nichols, H. L. Howes and D. T. Wilber. *Catodoluminescence and the luminescence of incandescent solids*, Washington, 1928. — [4] J. Ewles. *Proc. Roy. Soc.*, **167**, 34, 1938. — [5] В. М. Кудрявцева. ДАН СССР, **52**, 499, 585, 1946. — [6] Н. Л. Гастинг. Сиб. ФТИ, Отчет за 1947. — [7] П. Н. Коханенко. Изв. АН СССР, сер. физ., **15**, 685, 1951. — [8] Л. А. Суворова. Дипломная работа, Томский гос. университет, 1952. — [9] Я. И. Френкель. *Phys. Rev.*, **37**, 17, 1276, 1931. — [10] А. С. Давыдов. Теория поглощения света в молекулярных кристаллах, Изд-во АН УССР, Киев, 1951. — [11] А. Ф. Прихотько. ЖЭТФ, **19**, 383, 487, 1949; Изв. АН СССР, сер. физ., **15**, 608, 1951; ЖЭТФ, **21**, 665, 1951.
-

ДИСКУССИИ

К ВОПРОСУ О ПРИМЕНИМОСТИ ВТОРОГО ЗАКОНА
ТЕРМОДИНАМИКИ К БОЛЬШИМ ОБЪЕКТАМ ВСЕЛЕННОЙ

М. И. Шахпаров

В последнее время Я. П. Терлецким предпринята попытка доказать неприменимость второго закона термодинамики к большим объектам Вселенной и тем самым подтвердить известную флуктуационную гипотезу Больцмана. Свое доказательство Терлецкий пытается построить при помощи методов статистической термодинамики (т. е., в конечном счете, при помощи того же второго закона термодинамики).

Рассматривая газ, имеющий объем V , температуру T и давление p , отличающийся от идеального наличием гравитационных сил между его молекулами, при помощи соотношений

$$\overline{(\Delta V)^2} = -kT \frac{\partial V}{\partial p}, \quad p = \frac{NkT}{V} - \frac{\partial U}{\partial V}; \quad U = -\alpha \frac{\kappa M^2}{V^{1/2}}, \quad (1)$$

Я. П. Терлецкий получает следующее выражение для относительной флуктуации объема газа [1,2]:

$$\frac{\overline{(\Delta V)^2}}{V^2} = \frac{1}{N} \left(1 - \frac{4}{9} \alpha \frac{\kappa M^2}{V^{1/2}} \frac{1}{NkT} \right)^{-1}, \quad (2)$$

где M — масса всего газа, κ — гравитационная постоянная; α — числовой коэффициент, по порядку близкий к единице; N — число молекул газа.

Исходя из полученного им уравнения (2), Я. П. Терлецкий приходит к выводам принципиального характера. Согласно Терлецкому, формула (2) «... с несомненностью показывает, что существуют некоторые критические объемы, выше которых второй закон термодинамики теряет силу». Поэтому «возможно наличие иных областей, в которых физические процессы протекают вопреки второму началу термодинамики, и где вечный круговорот материи проходит через другие стадии» [2].

Если бы все эти выводы были правильны, то потребовалась бы серьезная перестройка не только современной теоретической астрофизики, но и статистической термодинамики, в которой со времени Смолуховского принято считать, что флуктуации не могут привести к нарушениям термодинамического равновесия в макроскопических масштабах. Однако формула (2) не верна, а следовательно, и полученные из нее выводы ошибочны.

Как известно, термодинамическое равновесие газовой массы под влиянием одних лишь сил тяготения невозможно [3]. Поэтому уравнения (1) несовместимы. Если бы уравнения (1) были совместимы, то по теореме о вириале

$$\alpha (\kappa M^2 / V^{1/2}) = 3NkT$$

и тогда

$$\overline{(\Delta V)^2}/V = -\frac{3}{N},$$

что не имеет смысла.

Таким образом предпринятая Я. П. Терлецким попытка обоснования флуктуационной гипотезы Больцмана является несостоятельной. Это и не удивительно, так как флуктуационная гипотеза Больцмана в сущности представляет собою статистический вариант гипотезы о тепловой смерти Вселенной.

Философский анализ гипотезы Больцмана и некоторых связанных с нею вопросов термодинамики дан нами в статье [4]. Поэтому в настоящей заметке на философской стороне затронутой здесь темы мы не останавливаемся.

Поступило в редакцию
24 марта 1954 г.

Литература

- [1] Я. П. Терлецкий. ЖЭТФ, 22, 506, 1952. — [2] Я. П. Терлецкий. Труды второго совещания по вопросам космогонии, Изд-во АН СССР, 1953 г., стр. 507—512. — [3] Я. И. Френкель. Статистическая физика, Изд-во АН СССР, 1948, стр. 268—270. — [4] М. И. Шапаронов. Вестн. МГУ, 6, 15, 1953.

ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

ТОЧКИ РОСЫ СМЕСЕЙ ИЗОТОПОВ ГЕЛИЯ

Б. Н. Есельсон и Н. Г. Березняк

Для получения данных, необходимых для построения диаграммы пар — жидкость системы $\text{He}^3 - \text{He}^4$, была проведена серия опытов по определению связи между упругостью пара смесей изотопов гелия и составом газовой фазы. Указанные данные можно было получить, измеряя давление, при котором начинается конденсация газовой смеси с известным содержанием легкого изотопа (точка росы). Для этой цели использовался прибор, состоящий из двух резервуаров, один из которых заполнялся жидким He^4 , а в другой подавались определенные порции газовой смеси. Измерялась зависимость разности давлений Δp в этих сосудах от количества газа q , поданного во второй сосуд, до начала конденсации и после образования в нем жидкости. Острый излом на кривой $\Delta p - q$ давал возможность определить точку росы.

При помощи описанной методики были определены точки росы смесей изотопов гелия с содержанием He^3 : 2,4; 5,18; 14,5; 34,7; 41,8 и 63,8% как в области He II, так и в области He I. Полученные результаты даны в табл. 1 и частично представлены на рисунке¹.

Таблица 1

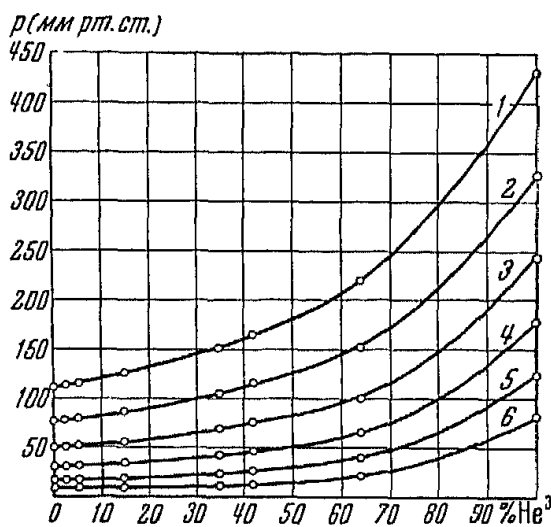
Зависимость давления p начала конденсации от температуры для смесей с различным содержанием He^3

$c \%$	$T^\circ \text{ К}$	p (мм рт. ст.)	$c \%$	$T^\circ \text{ К}$	p (мм рт. ст.)
2,4	2,037	26,4	41,8	1,404	3,3
	2,166	37,2		1,836	21,9
	2,369	59,7		2,044	40,2
	2,520	81,5		2,159	54,4
	2,776	129,3		2,298	76,4
	3,033	193,5		2,516	121,1
5,18	1,748	10,4	63,8	2,706	167,6
	2,077	30,2		2,808	197,0
	2,441	66,4		2,899	225,7
	2,732	122,3		3,100	299,7
	3,040	198,7		3,355	418,6
	—	—		—	—
14,5	1,350	1,9	—	1,433	5,7
	1,795	14,0		1,581	13,8
	2,131	38,0		1,811	31,5
	2,309	58,7		1,963	47,8
	2,628	111,8		1,998	51,4
	2,853	164,2		2,101	66,5
34,7	3,229	281,6		2,444	137,4
	1,410	3,3		2,652	204,4
	1,768	15,5		2,825	267,4
	1,986	31,5		—	—
	2,349	78,4		—	—
	2,533	112,7		—	—
	2,676	146,3		—	—
	2,826	187,0		—	—
	3,012	248,3		—	—
	—	—		—	—

¹ Данные об упругости пара чистого He^3 взяты из работы [1].

Анализ данных, полученных в настоящей работе и в работе [2], посвященной изучению зависимости упругости пара растворов He^3 в He^4 от состава жидкой фазы, дает возможность сделать заключение о том, что диаграмма пар — жидкой смеси изотопов гелия — типа сигары. Изложенные результаты падаются в удовлетворительном согласии с данными, полученными для этих же смесей в работе [3], автор которой провел аналогичные измерения только между 1,3 и 2,18° К.

Зависимость упругости пара смесей изотопов гелия от состава газовой фазы. 1—2,7; 2—2,5; 3—2,3; 4—2,1; 5—1,9; 6—1,7° К



Подробное сообщение о проведенных опытах будет опубликовано в ближайшее время.

Пользуемся случаем поблагодарить проф. Н. Е. Алексеевского за проведение анализов смесей на содержание легкого изотопа, а также проф. Б. Г. Лазарева за интерес, проявленный к работе.

Физико-технический институт
Академии наук Украинской ССР

Поступило в редакцию
13 июля 1954 г.

Литература

[1] В. М. Abraham, D. W. Osborne and B. Weinstock. Phys. Rev., 80, 366, 1950. — [2] Б. Н. Есельсон. ЖЭТФ, 26, 744, 1954. — [3] Н. S. Sommers. Phys. Rev., 88, 113, 1952.

НЕУПРУГОЕ ОТРАЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ С ПОВЕРХНОСТИ ЗАКИСИ МЕДИ

Н. Б. Горный

В нашей работе по исследованию распределения по энергиям истинно-вторичных электронов с монокристаллической поверхности закиси меди [1] было установлено наличие дополнительных максимумов. Эти дополнительные максимумы обусловлены электронами кристаллической решетки, получившими от первичных электронов определенные порции энергии, соответствующие переходам электронов из одной энергетической зоны кристаллической решетки в другие разрешенные зоны, расположенные выше уровня Ферми. Значения энергий, передаваемых при этом первичным электроном электронам кристаллической решетки, могут быть выражены формулой [2,3]

$$W = \frac{\hbar^2}{8\pi^2} \left(\frac{2\pi n}{d} \right)^2,$$

где $\hbar$ — постоянная Планка, m — масса электрона, d — постоянная кристаллической решетки и $n^2 = h^2 + k^2 + l^2$ (h , k и l — миллеровские индексы соответствующих граней решетки). Некоторые из первичных электронов после потери вышеуказанных

значений энергий могут отразиться, и в кривой распределения кроме упруго-отраженных первичных электронов должны появиться еще группы неупруго-отраженных электронов. Мы исследовали неупругое отражение, изучая распределение электронов по энергиям с монокристаллических и поликристаллического образцов закиси меди методом электрического дифференцирования, полученные методом задерживающего поля, могут быть искажены в диапазоне близких к нулю отрицательных значений потенциала на коллекторе V_k и в интересующем нас диапазоне V_k , близком к энергии первичных электронов V_p [5]. Это искажение вызывается изменением числа третичных электронов, вылетающих из коллектора под действием вторичных электронов и попадающих

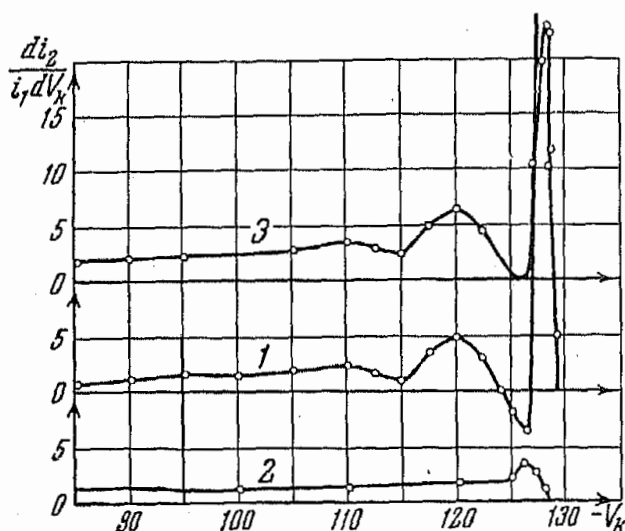


Рис. 1

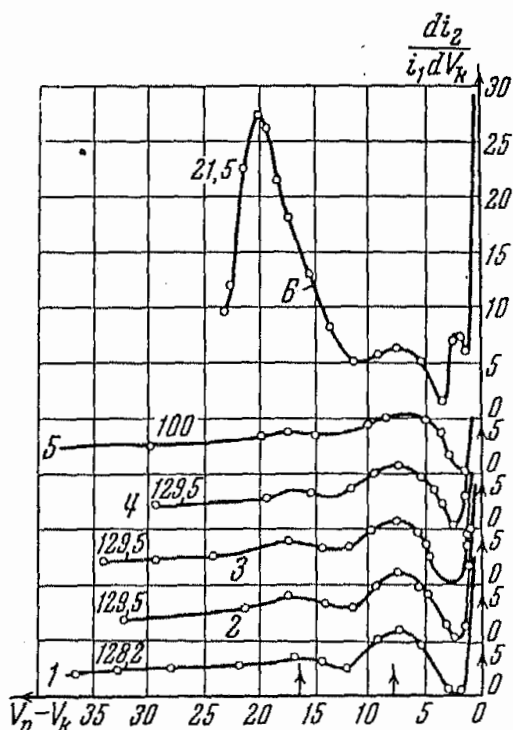


Рис. 2

Рис. 1. Кривые, полученные при $V_p = 128,2$ В. 1 — кривая распределения, полученная экспериментально; 2 — кривая, дающая величину изменений третичного тока с изменением V_k ; 3 — исправленная кривая распределения

Рис. 2. Кривые зависимости относительного числа вторичных электронов от величины потерь при различных значениях V_p (обозначенных у каждой кривой): 1, 2 и 6 — для монокристаллической поверхности (100); 3 и 5 — для монокристаллической поверхности (110) и 4 — для поликристаллической поверхности. Кривая 6 изображена в масштабе, в 3,34 раза большем, чем остальные кривые

щих на электрод с эмиттером, с изменением V_k в указанных диапазонах. Для учета и исправления этого искажения был применен вакуумный прибор, в котором коллектор из аквадага, нанесенного на сферическую часть прибора, разделен на две полусферы K и K' , изолированные друг от друга, причем вторичные электроны могут попасть только на верхнюю полусферу K . Вторичные электроны, попадая на коллектор K , выбивают третичные электроны, которые могут попасть обратно на коллектор K , на электрод с эмиттером или на коллектор K' .

Мы производили измерения при включении в измерительную схему коллекторов K и K' (схема 1) одного коллектора K (схема 2) и одного коллектора K' (схема 3). При всех измерениях потенциал коллекторов K и K' был одинаков. Магнитное поле Земли компенсировалось двумя катушками диаметром в 1 м.

На рис. 1 изображены кривые, полученные для монокристаллической поверхности (100) при $V_p = 128,2$ В и температуре эмиттера $t = 420^\circ$ С; 1 — кривая распределения получена при проведении измерений по схеме 1; 2 — кривая получена при проведении измерений по схеме 3. Значения кривой 2 дают величину изменений тока падающих на коллектор третичных электронов с изменением V_k . Исходя из геометрических данных прибора и учета закон косинуса для распределения вторичных и третичных электронов по углам, мы нашли, что приближенно эти же значения дают величину изменений тока третичных электронов, падающих на эмиттер. Следовательно, величина погрешности точек экспериментальной кривой распределения (кривая 1) определяется значениями соответствующих точек кривой 2. Суммируя значения соответствующих точек кривых 1 и 2, мы получим точки исправленной кривой распределения (кривая 3). В исправленной кривой (рис. 1, кривая 3) так же,

как и в экспериментальной (неисправленной) кривой 1, явно выражены два пика, соответствующие первичным электронам с потерей энергии в 8,2 и 17,5 V.

На рис. 2 приведены исправленные кривые зависимости относительного числа вторичных электронов от величины потерь, полученные при $V_p \approx 130$ V (кривые 1—4), при $V_p = 100$ V (кривая 5) и при $V_p = 21,5$ V (кривая 6). Стрелки под кривыми указывают значения потерь энергий, вычисленные по вышеприведенной формуле для n^2 , равных 1 и 2 (8,3 и 16,6 V). Во всех кривых, приведенных на рис. 2, имеются явно выраженные пики, хорошо совпадающие с вычисленными значениями потерь энергии, кроме одного (при $V_h \approx 2,5$ V) в кривой распределения, полученной при $V_p = 21,5$ V.

Следует отметить, что в то время как при исследовании распределения истинно-вторичных электронов дополнительные максимумы наблюдались лишь для монокристаллической поверхности закиси меди [1], пики, обусловленные неупруго-отраженными электронами, имеются в кривых распределения, полученных как для монокристаллических поверхностей, так и для поликристаллической поверхности. Следует также отметить, что с уменьшением V_p уменьшается второй пик, соответствующий потере энергии первичными электронами в 16,6 V. В кривой распределения, полученной при $V_p = 21,5$ V, второй пик вовсе отсутствует. Также имеется один пик, соответствующий потере энергии $V_h = 8$ V в кривой распределения для закиси меди (не приведенной здесь), полученной нами на другом вакуумном приборе при $V_p = 75$ V. В недавно опубликованной работе Шульмана и Мякинина [6] в кривых распределения, полученных для никеля при нескольких значениях V_p в пределах 20—50 V, также отмечается наличие одного пика, соответствующего неупруго-отраженным электронам. Авторы предполагают, что максимуму вторичных электронов малых энергий соответствует пик неупруго-отраженных электронов на той же кривой распределения. Однако следует указать, что значение потери, соответствующее этому пику, хорошо совпадает со значением энергии, вычисленным по вышеприведенной формуле для никеля при $n^2 = 1$ (12,2 eV).

Таким образом исследования по неупругому отражению первичных электронов подтверждают наш вывод, сделанный на основании экспериментального изучения распределения истинно-вторичных электронов по энергиям, о наличии механизма дискретных потерь энергии первичными электронами при их движении в твердом теле [1].

Подробное изложение работы, включающее рассмотрение влияния третичных электронов и способ нахождения поправок на искажение, вносимое изменением тока третичных электронов, будет опубликовано позже.

Ленинградский электротехнический
институт связи

Поступило в редакцию
23 февраля 1954 г.

Литература

- [1] Н. Б. Горный. ЖЭТФ, 27, 171, 1954. — [2] А. Я. Вятский. ЖЭТФ, 20, 547, 1950; 21, 851, 1951. — [3] D. E. Wooldridge. Phys. Rev., 56, 562, 1939. — [4] Н. Б. Горный и Л. М. Рахович. ЖЭТФ, 26, 454, 1954. — [5] Н. Б. Горный. ЖЭТФ, 26, 327, 1954. — [6] А. Р. Шульман и Е. И. Мякинин. ДАН СССР, 91, 1075, 1953.

О РАСЧЕТЕ ПОЛЯРОНОВ ПРЯМЫМИ ВАРИАЦИОННЫМИ МЕТОДАМИ

С. И. Пекар

В интересных работах Ли и Пайнс [1] и Ли, Лоу и Пайнс [2] полярон рассчитывается прямым вариационным методом. Разлагая энергию системы E по степеням полного импульса p , авторы получили выражение

$$E = E_0 + \frac{p^2}{2M} + \dots,$$

где

$$-\frac{E_0}{\hbar\omega} = \alpha \mp \frac{e^2}{2\hbar} \left(\frac{2\mu}{n\omega} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\varepsilon} \right), \quad M = \mu \left(1 + \frac{\alpha}{6} \right). \quad (1)$$

Здесь ω — частота продольных оптических колебаний ионов, ϵ — диэлектрическая постоянная, n — показатель преломления света, μ — эффективная масса электрона в обычной зонной теории (при ионах, закрепленных в узлах решетки). При $\alpha = 5,2$, $\omega = 4,8 \cdot 10^{13}$ сек. $^{-1}$ и $\mu = m$ (m — масса свободного электрона) получается $E_0 = -0,16$ eV, $M = 1,9 m$.

Сравнивая эти результаты с моими и отмечая, что при тех же значениях параметров кристалла у меня получается энергия основного состояния $H = -0,09$ eV и $M = 17 m$, авторы работы [2] заключают, что мой метод расчета (основанный на адиабатическом приближении) неприменим, ибо полученный ими прямым вариационным методом энергетический уровень E_0 оказался, якобы, значительно ниже, чем у меня: $H/E_0 = 0,56$. Полученные Ландау и мной [3-5], а затем, другим методом, и Боголюбовым [6] очень большие значения эффективной массы полярона M , доходящие у щелочно-галогидных кристаллов до 150—400 m [5], Ли, Лоу и Пайне [2] считают следствием неприменимости нашего метода расчета к щелочно-галогидным кристаллам.

Я проверил расчеты авторов работы [2] и убедился, что число $H = -0,09$ eV получено ими ошибочно. Повидимому, авторы [2] при этом использовали формулу моей полуклассической теории поляронов [7], в которой движение ионов рассматривается классически, тогда как следовало их квантовую теорию сравнивать с моей тоже квантовой теорией, так как результаты полуклассической теории могут существенно отличаться от результатов квантовой теории. Например, если при аппроксимации авторов [2] сделать предельный переход к полуклассической теории, полагая в (1) $\omega \rightarrow 0$, то получится $E_0 = 0$. У меня в квантово-механической теории энергии основного состояния системы H , после вычета энергии нулевых колебаний ионов, дается формулой (см. [5], стр. 251, формула (Д, 21) или [4])

$$-\frac{H}{\hbar\omega} = 0,109 \alpha^2 + 3/2. \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что абсолютный минимум H/E_0 равен 0,81 и достигается при $\alpha = 3,7$. Следовательно, ни при каких значениях параметров кристалла не может получиться такое соотношение между H и E_0 , как указано в [2,1]. Утверждение авторов работ [1,2] о неприменимости моего метода расчета к щелочно-галогидным кристаллам основано на вышеуказанной неточности и потому отпадает.

Сравнение результатов работы [2] (1) с результатами моего квантово-механического расчета (2) дается в таблице (см. также ниже). Здесь для щелочно-галогидных кристаллов взяты параметры, тщательно определенные в [5], глава 6. Таблица показывает, что для кристаллов с сильной связью электрона с колебаниями ионов, в частности для всех щелочно-галогидных кристаллов, следует отдать предпочтение моему методу расчета перед методом [2]. По мере ослабления связи (при $\alpha < 5$) мой метод утрачивает точность, вследствие слабого выполнения критерия адиабатичности, что подробно оговорено в [5] и в других моих работах. В этой области «промежуточной» связи для вычисления самого нижнего уровня энергии системы следует предпочесть метод работы [2], если только другие вариационные методы не позволят получить более низкие значения энергии.

	NaCl	KCl	KBr	KJ	Минимум $H/E_0 = 0,81$	
$-\frac{E_0}{\hbar\omega} = \alpha$	8,8	7,8	7,7	7,6	5,2	3,7
$-\frac{H}{\hbar\omega}$	9,9	8,1	8,0	7,8	4,5	3,0

Покажем теперь неприменимость прямого вариационного метода, в частности метода [1,2], для вычисления эффективной массы полярона M . Аппроксимация волновой функции зависит от полного импульса p , как от параметра. Существует бесконечное множество аппроксимаций, совпадающих с точной волновой функцией системы при $p = 0$, но имеющих самый различный, в том числе и бессмысленный ход с p . Все эти аппроксимации дадут при $p = 0$ одно и то же точное значение энергии системы, но различную зависимость энергии от p , т. е. различные эффективные массы M . Чем неправильнее будет выбранная зависимость аппроксимации от p , тем больше будет обусловленное прямым вариационным методом завышение энергии при $p \neq 0$, тем быстрее получится рост энергии с p , т. е. тем меньше получится M . Упомянутое выше множество аппроксимаций даст множество значений M , заполняющих интервал от нуля до точного значения эффективной массы. Последнее, следовательно, является верхним пределом M , получаемых прямым вариационным методом при оговоренном выше множестве аппроксимаций. Поэтому нельзя согла-

ситься с авторами [1,2], которые, получив сравнительно точное значение E_0 , считают это признаком того, что их значение M разумно. Тот факт, что их M значительно меньше, чем у ряда других авторов, скорее говорит против этого. При другом множестве аппроксимаций, которые при $p=0$ дают одинаковое, но не точное значение энергии, положение будет, конечно, хуже: диапазон получаемых значений M будет неограничен, и нет признаков, по которым следует отдать предпочтение какому-нибудь из них.

Вышеизложенные соображения объясняют большой разброс, противоречивость, а иногда и бессмысленность значений M , вычисляемых прямыми вариационными методами. Так, если и в [1,2] аппроксимацию дополнительно ограничить требованием $\sum_k |f(k)|^2 k = 0$, то E_0 остается точно таким, как в (1), но, в отличие от (1), получается $M = \mu$. Если же, наоборот, аппроксимацию [2] обобщить, как это в одномерном случае сделал Гросс [8], то, при почти таком же значении E_0 M получается во много раз больше, чем в [2], и приближается к значению, полученному Ландау и мной [3-5] при помощи адиабатического приближения. В работе [9] прямым вариационным методом получено для щелочно-галогидных кристаллов $M \approx \mu$; Тябликов [10] для тех же кристаллов получил M порядка сотни μ . Таким образом вычисление M прямым вариационным методом, как это делалось в упомянутых работах, не имеет смысла, ибо дает несравненно более произвольные результаты, чем вычисление основного энергетического уровня системы.

Несомненное преимущество адиабатического приближения [3,5,6] состоит в том, что зависимость энергии от p не навязывается прямым вариационным методом, а определяется последовательным решением дифференциального уравнения. Прямой вариационный метод здесь используется лишь для решения более простой задачи, не содержащей p и допускающей полное исключение всех параметров кристалла — для определения ψ -функции электрона в самосогласованной потенциальной яме [7]. Эта одномерная задача допускает предварительное качественное исследование хода $\psi(r)$ и была решена с точностью, значительно превышающей общую точность теории.

Трактовка метода [2] как метода малых возмущений приводит в следующем приближении к слишком большой положительной поправке M в случае щелочно-галогидных кристаллов.

Институт физики
Академии наук Украинской ССР

Поступило в редакцию
18 июня 1954 г.

Литература

- [1] T. D. Lee and D. Pines. Phys. Rev., 88, 960, 1952.— [2] T. D. Lee, F. E. Low and D. Pines. Phys. Rev., 90, 297, 1953.— [3] Л. Д. Ландау и С. И. Пекар. ЖЭТФ, 18, 419, 1948.— [4] С. И. Пекар. ЖЭТФ, 19, 796, 1949.— [5] С. И. Пекар. Исследования по электронной теории кристаллов, ИТТЛ, 1951.— [6] Н. Н. Боголюбов. Украинский математ. журнал, 2, 3, 1950.— [7] С. И. Пекар. ЖЭТФ, 16, 335, 341, 1946; Journ. of Phys., 10, 341, 347, 1946.— [8] E. P. Gross. Phys. Rev., 88, 153, 1952.— [9] H. Fröhlich, H. Pelzer and S. Zienau. Phil. Mag., 41, 224, 1950.— [10] С. А. Тябликов. ЖЭТФ, 25, 688, 1953.

ВЛИЯНИЕ ИОНОВ НА ХИМИЧЕСКУЮ РЕАКЦИЮ В ГАЗЕ

Б. Л. Тиман

Изучение влияния ионов на химическую реакцию в газе представляет как теоретический, так и практический интерес. Оказывается, что в том случае, когда продукты реакции и исходные вещества по-разному взаимодействуют с ионами, это влияние может оказаться значительным. Например, в реакции синтеза аммиака, которую мы для определенности рассмотрим, исходными веществами являются молекулы N_2 и H_2 , которые при отсутствии электрического поля не обладают дипольным моментом, а молекулы NH_3 обладают сравнительно большим дипольным моментом ($1,56 \cdot 10^{-18}$ CGSE).

Если мы будем рассматривать равновесный состав такой реакции, то он должен определяться из условия, что в состоянии равновесия система обладает минимальной энергией, если энтропия и температура остаются постоянными. В присутствии ионов в рассматриваемой газовой смеси уменьшение общей энергии системы должно осуществляться за счет увеличения в газе количества молекул NH_3 , так как эти молекулы взаимодействуют с ионами сильнее, чем молекулы N_2 и H_2 , и энергия этого взаимодействия отрицательна. Поэтому равновесный состав реакции при наличии ионов должен смещаться в сторону увеличения количества аммиака.

Можно произвести оценку влияния ионов на равновесные концентрации молекул рассматриваемой реакции. Эта оценка приводит к следующей формуле

$$\frac{c_2 c_3^2}{c_1^2} = pK(T) \exp \left\{ -\frac{4\pi d^2 e^2}{3(kT)^2 r_0} p_{\text{и}} \right\}, \quad (1)$$

где c_1 , c_2 и c_3 — соответственно концентрации аммиака, водорода и азота, d — дипольный момент аммиака, r_0 — радиус иона, $pK(T)$ — константа равновесия реакции синтеза аммиака, e — заряд иона, $p_{\text{и}}$ — парциальное давление ионов. Учет взаимодействия частиц был произведен аналогично тому, как это делалось в работе [1], с обобщением метода Дебая — Гюккеля [2] для газовой смеси, в которой находятся ионы.

Из выражения (1) следует, что с ростом парциального давления ионов равновесие смещается в сторону увеличения концентрации аммиака.

Заметим, что одной из причин наблюдающейся реакции синтеза аммиака в тлеющем разряде [3,4], повидимому, было рассматриваемое в настоящей работе неодинаковое взаимодействие с ионами исходных веществ и продуктов реакции, вследствие чего химическое равновесие сдвигалось в сторону увеличения выхода аммиака.

Днепропетровский горный
институт

Поступило в редакцию
23 февраля 1954 г.

Литература

[1] Б. Л. Тиман. ЖЭТФ, 25, 733, 1953. — [2] P. Debye и E. Hückel. Phys. ZS., 24, 185, 1923. — [3] Brewer и Westhaver. Journ. Phys. Chem., 33, 883, 1929. — [4] Peters и Küster. Brennstoffchemie, 12, 122, 1931.

К ВОПРОСУ ОБ ЭФФЕКТЕ СВЯЗАННЫХ РАСЩЕПЛЕНИЙ В КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧАХ

И. М. Граменицкий, Г. С. Емельянова и М. И. Подгорецкий

В работах [1,2] было обнаружено, что наблюдаемые в фотоэмульсии «звезды» космических лучей располагаются близко друг к другу (например, на расстояниях, меньших 1 мм) чаще, чем это следует из закона Пуассона, описывающего случайное пространственное распределение. Отдельные очень резко выраженные случаи такого (или аналогичного) явления были еще раньше отмечены Ждановым [3,4]. В дальнейшем вопрос о связанных «звездах» исследовался во многих работах (см. [5-12]), но определенных достоверных результатов пока нет, хотя само существование эффекта в большинстве случаев подтверждается. Трудность заключается в необходимости предварительного исключения обычно очень большого фона «звезд», образовавшихся случайно близко друг к другу, в соответствии с законом Пуассона. В этих условиях приходится считаться с различными трудно контролируемыми методическими особенностями, могущими привести к кажущемуся эффекту связанных «звезд» [5-10]. Вместе с тем, вопрос о том, существует ли эффект связанных «звезд» в действительности, представляет немалый интерес и заслуживает дальнейшего изучения.

Анализируя 820 «звезд», найденных при просмотре 380 см² эмульсии толщиной 200 м, экспонированной на высоте около 15 км, мы наблюдали эффект связанных «звезд» при расстояниях, меньших 0,5 мм. Величина эффекта оказалась примерно такой же, как было найдено в [1,2]. В отличие от предыдущих работ, мы рассматривали не только «двойки», но и «тройки» близко расположенных расщеплений. При этом оказалось, что две «звезды», находящиеся на расстоянии, меньшем 300 ÷ 400 м, сопровождаются, как правило, третьей «звездой», расположенной в среднем значительно ближе, чем при случайном распределении. Проведенная статистическая обработка показала, что если полученные результаты и могут быть объяснены, исходя из случайного распределения, то с вероятностью, не превосходящей 0,001.

Хотя выводы, основанные на анализе «троек», представляют нам значительно более надежными, чем полученные ранее, все же и они не могут считаться окончательными, так как фон попрежнему остается большим, и различные методические погрешности могут существенно отразиться на результатах. Вместе с тем вопрос о том, существует ли эффект связанных «звезд» в действительности, представляет немалый интерес. В настоящем письме мы хотим указать метод, свободный от отмеченных выше трудностей и могущий дать однозначное решение вопроса. Искомые связанные «звезды» отличаются от «звезд», случайно расположенных рядом друг с другом, тем, что первые образуются одновременно, а вторые — в разные моменты времени. Поэтому установление факта одновременности является решающим для идентификации случаев истинных связанных расщеплений.

Недавно Такибаевым было отмечено, что применение пар движущихся относительно друг друга фотопластинок позволяет определить момент времени, соответствующий пролету заряженных частиц через эмульсию [13]. Нам кажется, что метод Такибаева хорош не столько для определения момента времени, сколько для установления одновременности двух событий, в частности, для установления одновременности образования двух или нескольких пространственно близких ядерных расщеплений. Проведенные нами простые расчеты показывают, что при рациональном выборе варианта этот метод позволяет решить вопрос об эффекте связанных расщеплений.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
18 февраля 1954 г.

Литература

- [1] L. Leprince-Renguet a. J. Heidman. Nature, 161, 844, 1948.— [2] T. T. Li a. D. M. Perkins. Nature, 161, 844, 1948.— [3] А. П. Жданов. ДАН СССР, 23, 29, 1939.— [4] А. П. Жданов. ДАН СССР, 64, 657, 1949.— [5] T. T. Li. Phil. Mag., 41, 1952, 1950.— [6] M. M. Addario a. S. Tamburino. Phys. Rev., 80, 749, 1950.— [7] E. O. Salant, J. Hornbostel a. E. M. Dollman. Phys. Rev., 74, 694, 1948.— [8] K. E. Davis, J. B. Marion, J. F. Delord a. K. M. King. Phys. Rev., 88, 368, 1952.— [9] F. B. Brown a. A. V. Masket. Phys. Rev., 88, 1204, 1952.— [10] G. Davis. Phil. Mag., 43, 472, 1952.— [11] L. Barbanti Silva, C. Deietri, G. Lovera, E. Perilli Fedeli. Nuovo Cim., 9, 630, 1952.— [12] F. B. Brown a. A. V. Masket. Phys. Rev., 91, 210, 1953.— [13] Ж. С. Такибаев. ЖЭТФ, 24, 636, 1953.

ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОЙ ЗАВИСИМОСТИ МАГНИТНОЙ ВОСПРИИМЧИВОСТИ ХЛОРИСТОГО МАРГАНЦА НИЖЕ 4,2°K

М. О. Кострюкова

Шалыт [1] исследовал магнитную восприимчивость хлористого марганца и установил, что $MnCl_2$ остается нормальным парамагнетиком вплоть до 4,2°K.

При исследовании теплоемкости хлористого марганца нами была обнаружена аномалия, с максимумом теплоемкости при 1,96°K, связанная, как можно было предположить, с переходом хлористого марганца из парамагнитного в антиферромагнитное со-

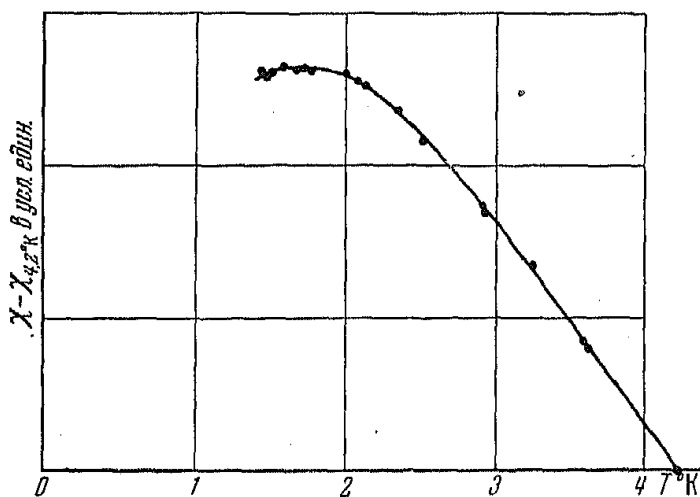


Рис. 1

стояние [2]. Для выяснения характера этого перехода мы предприняли измерения температурной зависимости магнитной восприимчивости хлористого марганца в области температур от 4,2 до 1,4°K.

Измерения проводились на магнитных весах методом Гуи¹. Тонкостенная цилиндрическая стеклянная ампула диаметром 5 мм и длиной 100 мм, заполненная безводным хлористым марганцем, подвешивалась к весам на стеклянном стержне. Ампула с под-

¹ Измерения восприимчивости были проделаны на магнитных весах, предоставленных Н. Е. Алексеевским, которому я выражаю свою искреннюю благодарность.

весом помещалась в стеклянной рубашке, окруженной дьюаром и расположенной между полюсами магнита. Сила, с которой образец втягивался в неоднородное магнитное поле, компенсировалась электродинамическим взаимодействием системы катушек.

При измерениях восприимчивости поле не превышало 160 Ое, и поэтому нет оснований ожидать сколько-нибудь существенной зависимости восприимчивости от напряженности поля.

Образец безводного хлористого марганца готовился из обычной соли, содержащей 4 молекулы кристаллизационной воды, сушкой в вакууме при температуре до 200°C, а затем возгонялся при температуре 650°C. Чистый сублимат конденсировался на холодных стенках кварцевого прибора в виде мелких кристаллов. Заполнение ампулы порошкообразным хлористым марганцем производилось в атмосфере сухого азота, затем азот откачивался, в ампулу впускался сухой газообразный телий, и она запаивалась. Отдельными контрольными экспериментами было установлено, что пустая стеклянная ампула не обнаруживала сколько-нибудь существенного температурного хода восприимчивости.

Результаты наших измерений между 4,2° и 1,4°K приведены на рис. 1, где по оси абсцисс отложены значения температуры T в °K, а по оси ординат — изменение восприимчивости $\chi - \chi_{4,2^\circ K}$ в условных единицах. Полученные нами значения указывают на наличие максимума восприимчивости в области температур 1,6—1,95°K. Аналогичные максимумы восприимчивости при переходе из парамагнитного в антиферромагнитное состояние наблюдались прежде у безводных хлоридов группы железа [3, 4].

Результаты измерений не противоречат сделанному ранее предположению о наличии антиферромагнитного превращения в хлористом марганце. Температура перехода, определенная нами из измерений теплоемкости, оказалась равной 1,96°K.

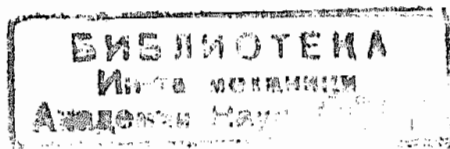
Выражаю свою глубокую благодарность П. Г. Стрелкову за советы и постоянное внимание к работе.

Институт физических проблем
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
13 марта 1954

Литература

[1] С. С. Шалыт. ЖЭТФ, 15, 246, 1945.—[2] М. О. Костюкова. ДАН СССР, 96, 959, 1954.—[3] С. С. Шалыт. ЖЭТФ, 8, 518, 1938.—[4] С. С. Шалыт. ЖЭТФ, 9, 1073, 1939.



К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция ЖЭТФ просит авторов при направлении статей в печать руководствоваться изложенными ниже правилами. СТАТЬИ, ПРИСЛАННЫЕ БЕЗ СОБЛЮДЕНИЯ ПЕРЕЧИСЛЕННЫХ ПРАВИЛ, К РАССМОТРЕНИЮ РЕДАКЦИЕЙ ПРИНИМАТЬСЯ НЕ БУДУТ.

1. Статьи, являющиеся результатами работ, проведенных в институтах, должны обязательно иметь направление от соответствующего института.

2. Редакция в особенности обращает внимание авторов на то, что статьи должны быть изложены с предельной краткостью, совместной с ясностью изложения, и окончательно обработаны. Следует избегать повторения данных таблиц или графиков в тексте статьи, а также представления численных результатов в виде таблиц и графиков одновременно.

Статья объемом свыше 1 печ. листа (т. е. 21—22 стр. текста на пишущей машинке) вообще не допускаются. Как текст, так и графический материал должны представляться обязательно в двух экземплярах.

3. Статья должна иметь краткую аннотацию, указывающую цель и результаты работы. Аннотация и раздел «Выводы» (если таковой имеется в статье) не должны, однако, дублировать друг друга.

4. Статьи должны быть напечатаны на пишущей машинке с одной стороны листа; рукописные вставки не допускаются. Формулы должны быть вписаны четко чернилами. Все страницы рукописи должны быть пронумерованы. Таблицы должны быть напечатаны на отдельных от текста страницах.

СТАТЬИ ДОЛЖНЫ БЫТЬ ОБЯЗАТЕЛЬНО ПОДПИСАНЫ АВТОРОМ, А ПРИ НАЛИЧИИ НЕСКОЛЬКИХ АВТОРОВ ВСЕМИ СОАВТОРАМИ.

5. Во избежание недоразумений и ошибок следует делать ясное различие между заглавными и строчными буквами в формулах. В тех случаях, когда заглавные и строчные буквы одинаковы по начертанию и отличаются только своим размером (*V* и *v*, *U* и *u*, *W* и *w*, *O* и *o*, *K* и *k*, *S* и *s*, *I* и *i*, *C* и *c*, *P* и *p*), — необходимо заглавные буквы подчеркивать снизу двумя черточками (например, S), а строчные помечать двумя черточками сверху (например, s). Необходимо делать различие между буквой *C* (большой), *o* (малой) и 0 (нулем), для чего буквы *O* и *o* подчеркивать двумя черточками: O и o, а ноль оставлять без подчеркивания. Необходимо также различать буквы *I* и *J*, для чего в рукописи букву *I* писать, как римскую единицу, с точкой вверху. Греческие буквы должны подчеркиваться красным карандашом. Векторы подчеркивать синим или черным карандашом.

6. Подстрочные примечания должны иметь сплошную нумерацию по всей статье. Цитируемая литература должна даваться не в виде подстрочных примечаний, а общим списком в конце статьи, с указанием в тексте статьи ссылки порядковой цифрой над строкой, в прямых скобках (например, [1]). Цитируемая литература должна быть оформлена в следующем порядке: а) для журнальных статей указываются инициалы и фамилии авторов, название журнала, номер тома (подчеркнуть снизу), страница и год; б) для книг надо указывать инициалы и фамилии авторов полное название книги, год и место издания (для книг иностранного происхождения указывать данные русского перевода, если таковой имеется).

7. Все рисунки и чертежи должны быть представлены отдельно от рукописи и ни в коем случае не должны приклеиваться к оригиналу. Рисунки желательно снабжать разъясняющими подписями, которые должны быть собраны на отдельном листе. На обороте рисунков должна быть указана фамилия автора, название статьи и номер рисунка. Надписи на рисунках следует по возможности заменять цифрами или буквенными обозначениями в подписи к рисунку или в тексте.

Редакция просит авторов ограничиваться минимальным числом рисунков к статьям.

8. Редакция просит авторов отмечать на полях рукописи места, которые могут быть набраны петитом.

9. Редакция посылает автору одну корректуру. Изменения и дополнения в тексте не допускаются. Корректура с подписью автора должна быть выслана обратно в редакцию в течение суток с момента ее получения.

10. К рукописи должен быть приложен точный адрес, фамилия, имя и отчество автора, а также номер телефона, служебного или домашнего (для авторов, проживающих в Москве).

11. РУКОПИСИ, НЕ ПРИНЯТЫЕ РЕДАКЦИЕЙ, АВТОРУ НЕ ВОЗВРАЩАЮТСЯ.

Адрес редакции, Москва, Подсосенский пер., д. 21, Изд-во АН СССР.

Цена 12 руб.

40
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ВОССЕ 9
ИНСТ. Т. МЕХАНИКИ
АН СССР
4 2 12 Ш 37117

ПРИНИМАЕТСЯ ПОДПИСКА НА 1955 год
на
журнал Академии наук Союза ССР
„УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК“

Журнал рассчитан на широкие круги научных работников в области теоретической и экспериментальной физики и смежных с нею областей знания, аспирантов и студентов физических факультетов, инженерно-технических работников и преподавателей физики.

Выходит 12 номеров в год.

Подписная цена на журнал с 1 января 1955 г. снижена на 20%.

Подписная цена:

на год	96 руб.
на полугодие	48 руб.
на квартал	24 руб.

Чтобы обеспечить получение полного годового комплекта журнала на 1955 год, необходимо подписаться на журнал своевременно.

Журнал в розничную продажу не поступает.

Подписка принимается в городских и районных отделах „Союзпечати“, в конторах, отделениях и агентствах связи, общественных уполномоченными по подписке в учебных заведениях и учреждениях.