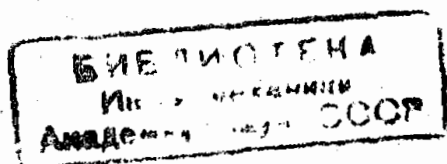


735

ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 27

Вып. 3 (9)



СЕНТЯБРЬ 1954 г.

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

СОДЕРЖАНИЕ

Академик Петр Леонидович Капица (К шестидесятилетию со дня рождения)	265
В. П. Силин. О спектре возбуждений системы многих частиц	269
В. Т. Хозяинов. К теории столкновений частиц с заданным угловым моментом.	275
С. П. Дьяков. Ударные волны в бинарных смесях	283
С. П. Дьяков. Об устойчивости ударных волн	288
Г. Ф. Жарков. Рассеяние π -мезонов на пуклонах в теории затухания.	296
С. М. Рытов. Магнитный поток, создаваемый диполем, находящимся внутри ферромагнитной круглой проволоки	307
А. А. Грачев, К. А. Горонина, Н. Н. Колачевский и И. А. Андропова. Экспериментальное исследование изменения магнитного потока в проволоке при перемagnичивании одного домена	313
Я. С. Бобович и Д. Б. Гуревич. Применение фотоэлектрического метода регистрации к молекулярному анализу по спектрам комбинационного рассеяния света	318
Г. М. Авакьянц. К теории приконтактных явлений	333
Н. П. Калабухов. О процессе окрашивания кристаллов щелочно-галлоидных солей путем рентгенизации	347
В. П. Пешков. Измерение термомеханического эффекта в телии II в окрестности 1° К.	351
Е. С. Боровик. Эффект Холла и изменение сопротивления свинца, меди и магния в магнитном поле	355
Г. Е. Пикус. Фотоэффект с поверхностных уровней	369

Письма в редакцию

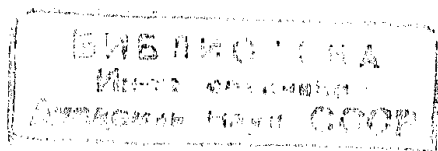
А. И. Базь и Я. А. Смородинский. Взаимодействие протонов с H^+ и возбужденные состояния α -частицы	382
А. В. Бравин. Расчет поляризуемости некоторых атомов и ионов.	384
И. А. Вайсман. О магнитных моментах дважды-нечетных ядер	386
В. С. Шпинель. γ -лучи Tc^{95}	387
И. М. Граменицкий и М. И. Подгорецкий. Об определении времени регрессии и коэффициента усадки толстослойных фотоэмульсий	389
Ю. П. Мироненко и Ж. С. Такибаев. Новый метод фотометрирования следа частиц в фотоэмульсии	390

Главный редактор **Н. Н. АНДРЕЕВ**

Зам. гл. редактора **М. М. СИНСКИЙ**



*АКАДЕМИК
ПЕТР ЛЕОНИДОВИЧ КАПИЦА*



АКАДЕМИК ПЕТР ЛЕОНИДОВИЧ КАПИЦА

(К шестидесятилетию со дня рождения)

Выдающийся физик и инженер Петр Леонидович Капица родился в Кронштадте 26 июля (старого стиля) 1894 г. Его отец, военный инженер, был одним из строителей Кронштадтской крепости. Мать Петра Леонидовича вела работу в области фольклора и была широко известна как замечательная детская писательница.

После окончания Кронштадтского реального училища П. Л. Капица поступил на электромеханический факультет Петроградского политехнического института. Свою научную деятельность он начал еще на студенческой скамье, в лаборатории А. Ф. Иоффе, широко привлекавшего к работе молодежь. Эта лаборатория была центром нового и свежего направления экспериментальной физики того времени. С молодежью, работавшей в лаборатории, Петра Леонидовича связывали не только общие научные интересы, но и близкие личные отношения. Первая же научная работа, выполненная П. Л. Капицей, характерна для его блестящего экспериментального стиля. Опыт по измерению момента вращения электронов в намагниченном стержне был исключительно интересен как по замыслу, так и по выполнению. При решении этой тонкой задачи Петр Леонидович разработал замечательно остроумный способ получения тонких кварцевых нитей, которые были необходимы для изготовления подвеса прибора, а также простой и эффективный метод компенсации земного магнитного поля при помощи соленоида, имеющего форму эллипсоида вращения.

Вместе с Н. Н. Семеновым, Я. И. Френкелем, Я. Г. Дорфманом и другими П. Л. Капица был одним из первых сотрудников созданного в 1918 г. Государственного физико-технического института в Ленинграде.

В 1921 г. Петр Леонидович был послан в заграничную командировку и начал свою работу в Кэвендишской лаборатории в Кембридже. Общение с Резерфордом — главой ядерной физики — не мешало П. Л. Капице продолжать свою работу в избранном им собственном направлении, не связанном с идеями школы Резерфорда.

Работы, выполненные Петром Леонидовичем в Кембридже, были исключительно интересны: поместив камеру Вильсона в магнитное поле, он получил возможность наблюдать в ней изогнутый путь α -частицы.

Для достаточного искривления путей α -частиц П. Л. Капице пришлось создать сильные магнитные поля, напряжением порядка 100 000 эрстед. Им был применен новый принцип, заключающийся в замыкании накоротко на катушку специальной аккумуляторной батареи; развивая эту идею, он сконструировал и построил электрический генератор, при помощи которого ему удалось получить рекордно высокие напряженности магнитного поля, достигающие полумиллиона эрстед. Разработка этой сложнейшей импульсной методики, в которой энергия мгновенного торможения ротора генератора перекачивается в виде электрической энергии в катуш-

ку, создающую магнитное поле, характеризует стиль работы Петра Леонидовича, сочетающего в себе блестящего инженера-расчетчика с не менее блестящим физиком-экспериментатором. Установка П. Л. Капицы для создания сверхсильных магнитных полей до настоящего времени является шедевром экспериментального искусства и инженерного расчета.

Плодотворная идея создания сверхсильных, но кратковременных магнитных полей позволила Петру Леонидовичу применить для целей исследования электрических свойств металлов полностью автоматизированную методику, значительно ускорившую проведение измерений. Все управление сложнейшей аппаратурой и генератором производилось движением кассеты шлейф-осциллографа, на фотопластинке которой одновременно записывались все характеристики опыта. Располагая сверхсильными магнитными полями для изучения металлов, Петр Леонидович не мог пройти мимо новых возможностей, которые открываются в этих исследованиях при применении низких температур. Область низких температур до того момента, как ею заинтересовался П. Л. Капица, была практически полностью монополизирована лабораторией Камерлинг-Оннеса в Лейдене. Аппаратура для получения низких температур, которой располагала Лейденская лаборатория, представляла собой сложнейшую систему: работа с ней требовала большого искусства и затраты труда. Петр Леонидович со свойственной ему смелостью взялся за задачу упрощения этой аппаратуры, используя новые принципы и приемы. Эта задача была решена с поразительной легкостью — им была создана аппаратура, очень простая и значительно превышающая лейденскую по производительности. Водородный ожижитель П. Л. Капицы, использующий вместо химически чистого технический водород, запускался в течение пятнадцати минут и обладал производительностью 6—7 л жидкого водорода в час, при затрате на 1 л жидкого водорода около 2 л жидкого воздуха. Гелиевый ожижитель был построен на принципе использования поршневого детандера для получения холода, не требовал жидкого водорода, запускался в течение часа и выдавал 2—3 л жидкого гелия в час при затрате на 1 л жидкого гелия 2—3 л жидкого воздуха. Разработанный П. Л. Капицей и примененный в гелиевом ожижителе детандер работал при температуре около 12° К без всякой смазки. Этот ожижитель гелия являлся рекордным по простоте и производительности. Достаточно сказать, что жидкий гелий, который до самого последнего времени был редкостью в научных институтах за границей, в Москве с 1938 г. использовался в работах обычного студенческого практикума.

В 1936 г. Петр Леонидович начал серию исследований в направлении промышленного использования низких температур, в частности для получения больших количеств кислорода. Наибольший вклад в эту область техники Петр Леонидович внес разработанным им оригинальным высокоэффективным турбодетандером. Этот турбодетандер, по ротору которого воздух движется в радиальном направлении от периферии к центру, обладает рекордно высоким к.п.д., превышающим 80 %, что намного выше к.п.д. турбодетандеров прежних конструкций. Петр Леонидович, используя этот детандер, разработал и построил установки для ожижения воздуха и получения жидкого кислорода с применением одного только низкого давления. Теплообменники в этих установках были заменены регенераторами, которые позволяют обойтись без предварительной очистки воздуха, обязательной для циклов, использующих высокое давление. Применение этих принципов позволило значительно упростить схему установок для разделения воздуха, применяя воздух, сжатый только до 4—5 ат, т. е. до давления, необходимого для нормальной работы нижней колонны воздухоразделительного аппарата. Направляя часть перерабатываемого воздуха (~20 %) в турбодетандер, а затем в верхнюю колонну, оказалось возможным, не нарушая режима ректификации, получить необходимое количество холода для обеспечения устойчивой работы всей установки.

Промышленная практика показала правильность идей П. Л. Капицы — все дальнейшее развитие техники получения больших количеств кислорода, остро необходимого для химии и металлургии, пошло именно по этому пути.

Исключительно напряженная работа П. Л. Капицы для промышленности не помешала ему живо интересоваться проблемами физики низких температур. Таинственная природа жидкого гелия, над разгадкой которой трудились все криогенные лаборатории мира, привлекла внимание Петра Леонидовича, и он со свойственной ему целеустремленностью начал работу в этом направлении.

Результаты его исследований привели к неожиданным и замечательным результатам. Вместо парадоксальной сверхтеплопроводности, которую приписывали жидкому гелию II, Петр Леонидович обнаружил в гелии исчезающе малую вязкость. Таким образом он открыл совершенно новое физическое явление, получившее название сверхтекучести. Петр Леонидович не ограничился открытием самого этого явления, им же были установлены основные законы, управляющие сверхтекучим гелием, что дало возможность Л. Д. Ландау построить полную его теорию.

Так, при помощи ряда блестящих по остроумию экспериментов по перетеканию гелия II через тонкие щели П. Л. Капица установил обратимость перетекания гелия II, невозможного ни у какой другой жидкости. Под непосредственным влиянием работ П. Л. Капицы возник и ряд других работ как экспериментальных, так и теоретических, благодаря которым руководимый им Институт физических проблем Академии наук СССР был выдвинут в области физики низких температур на первое место в мире.

Несмотря на то, что со времени работ Петра Леонидовича по жидкому гелию прошло уже свыше 10 лет, они не только не потеряли своего значения, но продолжают оставаться одним из основных источников наших знаний в этой области.

Удивительной особенностью Петра Леонидовича является его способность заинтересоваться каким-либо, казалось бы, совершенно далеким от области его непосредственных интересов вопросом и получить новые результаты. Так, ему принадлежит ряд оригинальных работ в области гидродинамики и ряд остроумных изобретений в различных областях техники. Особенно любопытно в этой связи отметить, что Петром Леонидовичем выведены новые формулы для суммы степеней корней бесселевых функций. Отличительной чертой П. Л. Капицы как настоящего экспериментатора является то, что все его работы выполнены непосредственно им самим при участии его неизменного помощника С. И. Филимонова.

При встречах и беседах с Петром Леонидовичем каждый подпадает под обаяние его личности. Поражает его живой интерес ко всякому делу, с которым ему приходится соприкасаться, и умение глубоко проникать в сущность явлений. Самый обыденный вопрос, когда его обсуждают с Петром Леонидовичем, как бы начинает играть новыми красками и освещается с неожиданной точки зрения, открывающей новые стороны или перспективы явления.

Работоспособность Петра Леонидовича поразительна: часто, заканчивая поздно ночью опыт, он ранним утром приносит точно исполненные чертежи, в которых уже отражены новые замыслы. Замечателен П. Л. Капица и как организатор. Его идеи организации исследовательской работы принесли большую пользу советской науке. Много пользы он принес, руководя советской кислородной промышленностью. Вся его организационная деятельность настолько чужда всякой суете, что он всегда находил достаточно времени, чтобы подолгу работать в лаборатории. Хотя Петр Леонидович мало занимался преподаванием, но каждая его лекция в Московском университете привлекала самые широкие круги физиков своей свежестью и поразительной глубиной изложения.

Заслуги П. Л. Капицы перед советской наукой и техникой высоко оценены Правительством. Он награжден тремя орденами Ленина и орденом Красного Знамени. В 1945 г. ему присвоено звание Героя Социалистического Труда. Дважды ему присуждалась Сталинская премия 1-й степени. С 1929 г. он член-корреспондент, а с 1939 г. — действительный член Академии наук СССР.

Петр Леопидович избран членом более 15 иностранных научных обществ и академий, в том числе академий наук Англии, Индии, США, Дании и др.; в 1942 г. ему присуждена медаль Фарадея, а в 1945 г. — медаль Франклина.

О СПЕКТРЕ ВОЗБУЖДЕНИЙ СИСТЕМЫ МНОГИХ ЧАСТИЦ

В. П. Силин

При помощи аппроксимации бинарной функции распределения, позволяющей учесть корреляцию частиц, обусловленную их тождественностью, найдены спектры системы многих частиц, слабо отличающиеся от получаемых в приближении самосогласованного взаимодействия. Показано, что для вырожденной электронно-ионной плазмы приближение самосогласованного взаимодействия неприменимо, если энергия взаимодействия частиц сравнима с их кинетической энергией или больше последней.

В работах [1-3] спектры систем многих частиц рассматривались при помощи квантового кинетического уравнения, полученного в предположении о мультипликативности бинарной функции распределения. Это предположение, естественно, является приближенным. Для того чтобы выяснить пределы применимости результатов работ [1-3], мы рассмотрим более точную аппроксимацию бинарной функции распределения, учитывающую корреляцию частиц, обусловленную их тождественностью.

1. Следуя [4], принимаем¹

$$\rho_2(\mathbf{q}'_1, \mathbf{q}'_2; \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = \rho(\mathbf{q}'_1, \mathbf{q}_1) \rho(\mathbf{q}'_2, \mathbf{q}_2) \pm \rho(\mathbf{q}'_1, \mathbf{q}_2) \rho(\mathbf{q}'_2, \mathbf{q}_1). \quad (1)$$

Верхний знак соответствует статистике Бозе, а нижний — статистике Ферми. Аппроксимация (1) учитывает корреляцию, обусловленную тождественностью частиц, учета же корреляции частиц, обусловленной их взаимодействием, мы проводить здесь не будем.

Соотношение (1) приводит к следующему уравнению для квантовой функции распределения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} + \frac{i}{\hbar} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{q}' d\vec{\tau} d\mathbf{p}' d\mathbf{p}'' \left[U\left(\left|\mathbf{q} - \mathbf{q}' + \frac{\hbar\vec{\tau}}{2}\right|\right) - \right. \\ \left. - U\left(\left|\mathbf{q} - \mathbf{q}' - \frac{\hbar\vec{\tau}}{2}\right|\right) \right] \left[\exp\{i\vec{\tau}(\mathbf{p}'' - \mathbf{p})\} f(\mathbf{q}, \mathbf{p}'') f(\mathbf{q}', \mathbf{p}') \pm \right. \\ \left. \pm \exp\left\{i\vec{\tau}\left(\frac{\mathbf{p}' + \mathbf{p}''}{2} - \mathbf{p}\right)\right\} \exp\{i(\mathbf{q}' - \mathbf{q})(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'')/\hbar\} \times \right. \\ \left. \times f\left(\frac{\mathbf{q} + \mathbf{q}'}{2} - \frac{\hbar\vec{\tau}}{4}, \mathbf{p}'\right) f\left(\frac{\mathbf{q} + \mathbf{q}'}{2} + \frac{\hbar\vec{\tau}}{4}, \mathbf{p}''\right) \right] = 0. \quad (2) \end{aligned}$$

Отличие уравнения (2) от соответствующего уравнения работы [1] заключается в выражении, стоящем после $\pm$. Интересуясь слабо возбужденными состояниями, ищем решение уравнения (2) в виде:

$$f = f_0(\mathbf{p}) + \varphi(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t), \quad \varphi \ll f. \quad (3)$$

Линеаризуя уравнение (2) и принимая

$$\varphi = \varphi_k(\mathbf{p}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{q}}, \quad (4)$$

¹ Ниже мы везде пользуемся обозначениями, принятыми в [1-3].

получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + \frac{ikp}{m} \varphi_k - \frac{i}{\hbar} \left[f_0 \left(\mathbf{p} + \frac{\hbar \mathbf{k}}{2} \right) - f_0 \left(\mathbf{p} - \frac{\hbar \mathbf{k}}{2} \right) \right] \int d\mathbf{p}' \varphi_k(\mathbf{p}', t) \left[\nu(k) \pm \nu \left(\left| \frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}'}{\hbar} \right| \right) \right] = \\ = \pm \frac{i}{\hbar} \varphi_k \int d\mathbf{p}' \nu \left(\left| \frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}'}{\hbar} \right| \right) \left[f_0 \left(\mathbf{p}' - \frac{\hbar \mathbf{k}}{2} \right) - f_0 \left(\mathbf{p}' + \frac{\hbar \mathbf{k}}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Воспользовавшись преобразованием Лапласа

$$\varphi_{k,s} = \int_0^\infty e^{-st} \varphi_k(t) dt, \quad \varphi_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\sigma}^{+i\infty+\sigma} e^{st} \varphi_{k,s} ds,$$

получаем

$$\begin{aligned} \left\{ s + \frac{ikp}{m} \mp \frac{i}{\hbar} \int d\mathbf{p}' \nu \left(\left| \frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}'}{\hbar} \right| \right) \left[f_0 \left(\mathbf{p}' - \frac{\hbar \mathbf{k}}{2} \right) - f_0 \left(\mathbf{p}' + \frac{\hbar \mathbf{k}}{2} \right) \right] \right\} \varphi_{k,s}(\mathbf{p}) - \\ - \frac{i}{\hbar} \left[f_0 \left(\mathbf{p} + \frac{\hbar \mathbf{k}}{2} \right) - f_0 \left(\mathbf{p} - \frac{\hbar \mathbf{k}}{2} \right) \right] \int d\mathbf{p}' \varphi_{k,s}(\mathbf{p}') \left[\nu(k) \pm \nu \left(\left| \frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}'}{\hbar} \right| \right) \right] = G_k(\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (6)$$

Далее мы рассмотрим решения уравнения (6) для случая, когда эффекты, связанные с тождественностью частиц, невелики. Представим $\varphi_{k,s}$ в виде

$$\varphi_{k,s} = \varphi_{k,s}^{(0)} + \varphi_{k,s}^{(1)} + \varphi_{k,s}^{(2)} + \dots, \quad \varphi_{k,s}^{(0)} \ll \varphi_{k,s}^{(1)} \ll \varphi_{k,s}^{(2)} \ll \dots, \quad (7)$$

где $\varphi_{k,s}^{(0)}$ есть решение уравнения (6) в пренебрежении членами, обусловленными тождественностью частиц². Тогда из (6) получаем

$$\left(s + \frac{ikp}{m} \right) \varphi_{k,s}^{(0)} - \frac{i}{\hbar} \left[f_0 \left(\mathbf{p} + \frac{\hbar \mathbf{k}}{2} \right) - f_0 \left(\mathbf{p} - \frac{\hbar \mathbf{k}}{2} \right) \right] \nu(k) \int d\mathbf{p}' \varphi_{k,s}^{(0)}(\mathbf{p}') = G_k(\mathbf{p}), \quad (8a)$$

$$\begin{aligned} \left(s + \frac{ikp}{m} \right) \varphi_{k,s}^{(n)} \pm \frac{i}{\hbar} \varphi_{k,s}^{(n-1)} \int d\mathbf{p}' \nu \left(\left| \frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}'}{\hbar} \right| \right) \left[f_0 \left(\mathbf{p}' + \frac{\hbar \mathbf{k}}{2} \right) - f_0 \left(\mathbf{p}' - \frac{\hbar \mathbf{k}}{2} \right) \right] - \\ - \frac{i}{\hbar} \left[f_0 \left(\mathbf{p} + \frac{\hbar \mathbf{k}}{2} \right) - f_0 \left(\mathbf{p} - \frac{\hbar \mathbf{k}}{2} \right) \right] \times \\ \times \int d\mathbf{p}' \left[\nu(k) \varphi_{k,s}^{(n)}(\mathbf{p}') \pm \nu \left(\left| \frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}'}{\hbar} \right| \right) \varphi_{k,s}^{(n-1)}(\mathbf{p}') \right] = 0. \end{aligned} \quad (8b)$$

С точностью до членов первого порядка включительно из (8a) и (8b) следует

$$\begin{aligned} \rho_{k,s} = \int [\varphi_{k,s}^{(0)}(\mathbf{p}) + \varphi_{k,s}^{(1)}(\mathbf{p})] d\mathbf{p} = \\ = \left\{ 1 - \frac{i}{\hbar} \nu(k) \int \frac{f_0 \left(\mathbf{p} + \frac{\hbar \mathbf{k}}{2} \right) - f_0 \left(\mathbf{p} - \frac{\hbar \mathbf{k}}{2} \right)}{s + (ikp/m)} d\mathbf{p} \pm \right. \\ \pm \frac{\nu(k)}{2\hbar^2 m^2} \int d\mathbf{p} d\mathbf{p}' \nu \left(\left| \frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}'}{\hbar} \right| \right) (k, \mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 \left(s + i \frac{kp}{m} \right)^{-2} \left(s + i \frac{kp'}{m} \right)^{-2} \times \\ \times \left[f_0 \left(\mathbf{p} + \frac{\hbar \mathbf{k}}{2} \right) - f_0 \left(\mathbf{p} - \frac{\hbar \mathbf{k}}{2} \right) \right] \left[f_0 \left(\mathbf{p}' + \frac{\hbar \mathbf{k}}{2} \right) - f_0 \left(\mathbf{p}' - \frac{\hbar \mathbf{k}}{2} \right) \right] \}^{-1} \times \\ \times \int d\mathbf{p} \frac{G_k(\mathbf{p})}{s + ikp/m} \left\{ 1 \mp \frac{i}{\hbar} \int d\mathbf{p}' \nu \left(\left| \frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}'}{\hbar} \right| \right) \left[\left(s + i \frac{kp}{m} \right)^{-1} - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(s + i \frac{kp'}{m} \right)^{-1} \right] \left[f_0 \left(\mathbf{p}' + \frac{\hbar \mathbf{k}}{2} \right) - f_0 \left(\mathbf{p}' - \frac{\hbar \mathbf{k}}{2} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

² Отметим, что для случая вырожденного бозе-газа такое разложение не применимо (см. ниже).

Используя соображения, высказанные в [5], и выбирая должным образом контуры интегрирования, получаем следующее дисперсионное уравнение для колебаний плотности (9):

$$1 - \frac{i}{\hbar} \nu(k) \int \frac{f_0\left(\mathbf{p} + \frac{\hbar \mathbf{k}}{2}\right) - f_0\left(\mathbf{p} - \frac{\hbar \mathbf{k}}{2}\right)}{s + (i\mathbf{k}\mathbf{p}/m)} d\mathbf{p} \pm \\ \pm \frac{\nu(k)}{2\hbar^2 m^2} \int d\mathbf{p} d\mathbf{p}' \nu\left(\left|\frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}'}{\hbar}\right|\right) (\mathbf{k}, \mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 \left(s + i\frac{\mathbf{k}\mathbf{p}}{m}\right)^{-2} \left(s + i\frac{\mathbf{k}\mathbf{p}'}{m}\right)^{-2} \times \\ \times \left[f_0\left(\mathbf{p} + \frac{\hbar \mathbf{k}}{2}\right) - f_0\left(\mathbf{p} - \frac{\hbar \mathbf{k}}{2}\right)\right] \left[f_0\left(\mathbf{p}' + \frac{\hbar \mathbf{k}}{2}\right) - f_0\left(\mathbf{p}' - \frac{\hbar \mathbf{k}}{2}\right)\right] = 0. \quad (10)$$

Для возбуждений, импульс которых много меньше среднего квадратичного импульса частиц, уравнение (10) принимает несколько более простой вид:

$$1 - i\nu(k) \int \mathbf{k} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} \frac{d\mathbf{p}}{s + (i\mathbf{k}\mathbf{p}/m)} \pm \frac{\nu(k)}{2m^2} \int d\mathbf{p} d\mathbf{p}' \nu\left(\left|\frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}'}{\hbar}\right|\right) \times \\ \times \left(\mathbf{k} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}\right) \left(\mathbf{k} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}'}\right) (\mathbf{k}, \mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 \left(s + i\frac{\mathbf{k}\mathbf{p}}{m}\right)^{-2} \left(s + i\frac{\mathbf{k}\mathbf{p}'}{m}\right)^{-2} = 0. \quad (11)$$

Рассмотрим более подробно случай еще больших длин волн ($|s| \gg \gg |\mathbf{k}\mathbf{p}/m|$) (ср. [1]). Уравнение (11) тогда дает (затуханием пренебрегаем)

$$\omega^2 = \frac{n_0 \nu(k) k^2}{m} + 3 \int d\mathbf{p} f_0 \left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{p}}{m}\right)^2 \mp \\ \mp \frac{1}{2n_0 m k^2} \int d\mathbf{p} d\mathbf{p}' \nu\left(\left|\frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}'}{\hbar}\right|\right) \left(\mathbf{k} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}}\right) \left(\mathbf{k} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}'}\right) (\mathbf{k}, \mathbf{p} - \mathbf{p}')^2. \quad (12)$$

Для электронной плазмы $\nu(k) = 4\pi e^2 / k^2$, поэтому

$$\omega^2 = \omega_0^2 + k^2 \frac{\overline{p^2}}{m^2} + \omega_0^2 \frac{\hbar^2 k^2}{n_0^2} \times \\ \times \frac{4\pi^2}{15} \int_0^\infty p dp \frac{\partial f_0}{\partial p} \int_0^\infty p' dp' \frac{\partial f_0}{\partial p'} \left\{ \frac{(p^2 - p'^2)^2}{4pp'} \ln \left(\frac{p + p'}{p - p'} \right)^2 - p^2 - p'^2 \right\}. \quad (13)$$

При высоких температурах, когда f_0 представляет собой распределение Максвелла, из (12) получаем

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3\pi T}{m} k^2 - \omega_0^2 \frac{\hbar^2 k^2}{15\pi T} \frac{m}{n_0^2}. \quad (14)$$

В области низких температур, когда электроны находятся в состоянии вырождения, (13) дает

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{5} \frac{p_0^2 k^2}{m^2} - \omega_0^2 \frac{3}{10} \frac{\hbar^2 k^2}{p_0^2}. \quad (15)$$

Условием применимости формул (14) и (15) является требование малости двух последних слагаемых правых частей (14) и (15) по сравнению с ω_0^2 . В частности, малость третьего члена, возникшего из-за учета корреляции, обусловленной тождественностью частиц, обеспечивается условием малости $\hbar k$ в сравнении со средним квадратичным импульсом частиц.

Для системы бозе-частиц, взаимодействующих по закону Кулона, в области высоких температур вместо (14) получаем

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3\pi T}{m} k^2 + \omega_0^2 \frac{\hbar^2 k^2}{15\pi T} \frac{m}{n_0^2}. \quad (14')$$

В случае же бозе-вырождения, как уже отмечалось выше, используемое разложение неприменимо. Причина этого заключается в том, что $\hbar k$ оказывается всегда больше среднего квадратичного импульса частиц, так как он в этом случае равен нулю.

Спектры (14), (14') и (15) мало отличаются от спектров, получаемых при пренебрежении корреляцией, возникающей из-за тождественности частиц, если только третье слагаемое формул (14), (14'), (15) мало в сравнении со вторым слагаемым. Это выполняется всегда, когда энергия колебания $\sim \hbar \omega_0$ оказывается много меньшей средней энергии частиц. Для спектра (15) это условие имеет вид:

$$\hbar \omega_0 \ll p_0^2 / 2m \text{ или } e^2 m / \hbar^2 \ll n_0^{1/2},$$

что представляет собой условие малости энергии взаимодействия электронов по сравнению с их кинетической энергией. В противоположном случае, т. е. когда электронная плазма является существенно неидеальной, наличие последнего члена в формуле (14) становится существенным для определения скорости распространения колебаний. Таким образом ясно, что для вырожденной электронной плазмы, по крайней мере в области больших длин волн возбуждений, мультипликативное приближение бинарной функции распределения неприменимо для случая, когда энергия взаимодействия частиц сравнима с их кинетической энергией или больше последней.

В случае высоких температур ($kT \gg \epsilon_0 = p_0^2 / 2m$) область, где существенен учет тождественности частиц, как это и понятно, значительно уже. Именно, тождественность частиц можно не учитывать, пока средняя энергия взаимодействия частиц $\sim e^2 n_0^{1/2}$ много меньше kT (kT / ϵ_0).

2. Рассмотрим теперь влияние корреляции, обусловленной тождественностью электронов, на спектр акустических колебаний электронно-ионной плазмы. Уравнения для функций распределения электронов и ионов имеют при этом следующий вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_i}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m_i} \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{q}} - \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{i}{\hbar} \int d\mathbf{q}' d\vec{\tau} d\vec{\eta} d\mathbf{p}' \exp \{i\vec{\tau}(\vec{\eta} - \mathbf{p})\} f_i(\mathbf{q}, \vec{\eta}) \times \\ & \times \left\{ f_i(\mathbf{q}', \mathbf{p}') \left[U_{ii} \left(\left| \mathbf{q} - \mathbf{q}' - \frac{\hbar \vec{\tau}}{2} \right| \right) - U_{ii} \left(\left| \mathbf{q} - \mathbf{q}' + \frac{\hbar \vec{\tau}}{2} \right| \right) \right] + \right. \\ & + f_e(\mathbf{q}', \mathbf{p}') \left[U_{ie} \left(\left| \mathbf{q} - \mathbf{q}' - \frac{\hbar \vec{\tau}}{2} \right| \right) - U_{ie} \left(\left| \mathbf{q} - \mathbf{q}' + \frac{\hbar \vec{\tau}}{2} \right| \right) \right] \Big\} = 0, \quad (16) \\ & \frac{\partial f_e}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m_e} \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{q}} - \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{i}{\hbar} \int d\mathbf{q}' d\vec{\tau} d\vec{\eta} d\mathbf{p}' e^{i\vec{\tau}(\vec{\eta} - \mathbf{p})} f_e(\mathbf{q}, \vec{\eta}) \times \\ & \times \left\{ f_e(\mathbf{q}', \mathbf{p}') \left[U_{ee} \left(\left| \mathbf{q} - \mathbf{q}' - \frac{\hbar \vec{\tau}}{2} \right| \right) - U_{ee} \left(\left| \mathbf{q} - \mathbf{q}' + \frac{\hbar \vec{\tau}}{2} \right| \right) \right] + \right. \\ & + f_i(\mathbf{q}', \mathbf{p}') \left[U_{ei} \left(\left| \mathbf{q} - \mathbf{q}' - \frac{\hbar \vec{\tau}}{2} \right| \right) - U_{ei} \left(\left| \mathbf{q} - \mathbf{q}' + \frac{\hbar \vec{\tau}}{2} \right| \right) \right] \Big\} = \\ & = \frac{i}{\hbar} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{q}' d\vec{\tau} d\mathbf{p}' d\mathbf{p}'' \exp \left\{ i\vec{\tau} \left(\frac{\mathbf{p}' + \mathbf{p}''}{2} - \mathbf{p} \right) + i(\mathbf{q}' - \mathbf{q})(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'') / \hbar \right\} \times \\ & \times f_e \left(\frac{\mathbf{q} + \mathbf{q}'}{2} - \frac{\hbar \vec{\tau}}{4}, \mathbf{p}' \right) f_e \left(\frac{\mathbf{q} + \mathbf{q}'}{2} + \frac{\hbar \vec{\tau}}{4}, \mathbf{p}'' \right) \times \\ & \times \left[U_{ee} \left(\left| \mathbf{q} - \mathbf{q}' + \frac{\hbar \vec{\tau}}{2} \right| \right) - U_{ee} \left(\left| \mathbf{q} - \mathbf{q}' - \frac{\hbar \vec{\tau}}{2} \right| \right) \right]. \quad (17) \end{aligned}$$

Уравнение (16) совпадает с соответствующим уравнением работы [3], а уравнение (17) отличается от соответствующего уравнения той же работы наличием правой части, учитывающей корреляцию частиц.

Решая систему уравнений (16), (17) совершенно аналогично тому, как решалось уравнение (2), получаем с точностью до величин первого порядка следующее выражение для фурье-представителя неравновесной плотности электронов:

$$\begin{aligned} \rho_e(s, \mathbf{k}) = & \left\{ 1 - \frac{i}{\hbar} v_{il}(k) \int \frac{f_{oi}(\mathbf{p} + \frac{\hbar \mathbf{k}}{2}) - f_{oi}(\mathbf{p} - \frac{\hbar \mathbf{k}}{2})}{s + (i\mathbf{k}\mathbf{p} / m_i)} d\mathbf{p} - \frac{i}{\hbar} v_{ee}(k) \times \right. \\ & \times \int \frac{f_{oe}(\mathbf{p} + \frac{\hbar \mathbf{k}}{2}) - f_{oe}(\mathbf{p} - \frac{\hbar \mathbf{k}}{2})}{s + (i\mathbf{k}\mathbf{p} / m_e)} d\mathbf{p} - \frac{v_{ee}(k)}{2\hbar^2 m_e^2} \int d\mathbf{p} d\mathbf{p}' v_{ee}\left(\left|\frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}'}{\hbar}\right|\right) \times \\ & \times \left(s + i\frac{\mathbf{k}\mathbf{p}}{m_e}\right)^{-2} \left(s + i\frac{\mathbf{k}\mathbf{p}'}{m_e}\right)^{-2} (\mathbf{k}, \mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 \left[f_{oe}\left(\mathbf{p} + \frac{\hbar \mathbf{k}}{2}\right) - \right. \\ & \left. - f_{oe}\left(\mathbf{p} - \frac{\hbar \mathbf{k}}{2}\right)\right] \left[f_{oe}\left(\mathbf{p}' + \frac{\hbar \mathbf{k}}{2}\right) - f_{oe}\left(\mathbf{p}' - \frac{\hbar \mathbf{k}}{2}\right)\right]^{-1} \times \\ & \times \left\{ 1 - \frac{i}{\hbar} v_{il}(k) \int \frac{f_{oi}(\mathbf{p} + \frac{\hbar \mathbf{k}}{2}) - f_{oi}(\mathbf{p} - \frac{\hbar \mathbf{k}}{2})}{s + (i\mathbf{k}\mathbf{p} / m_i)} d\mathbf{p} \right\} \times \\ & \times \int \frac{d\mathbf{p}}{s + (i\mathbf{k}\mathbf{p} / m_e)} \left\{ G_k^e(\mathbf{p}) + \frac{i}{\hbar} v_{el}(k) \left[f_{oe}\left(\mathbf{p} + \frac{\hbar \mathbf{k}}{2}\right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - f_{oe}\left(\mathbf{p} - \frac{\hbar \mathbf{k}}{2}\right)\right] \int \frac{G_k^i(\mathbf{p}'')}{s + (i\mathbf{k}\mathbf{p}'' / m_i)} \right\} \left\{ 1 + \frac{i}{\hbar} \int v_{ee}\left(\left|\frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}'}{\hbar}\right|\right) \times \right. \\ & \left. \times \left[f_{oe}\left(\mathbf{p}' + \frac{\hbar \mathbf{k}}{2}\right) - f_{oe}\left(\mathbf{p}' - \frac{\hbar \mathbf{k}}{2}\right)\right] \frac{i(\mathbf{k}, \mathbf{p}' - \mathbf{p}) d\mathbf{p}'}{[s + (i\mathbf{k}\mathbf{p} / m_e)][s + (i\mathbf{k}\mathbf{p}' / m_e)]} \right\}. \quad (18) \end{aligned}$$

Из (18) следует кинетическое уравнение колебаний электронно-ионной плазмы:

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{i}{\hbar} v_{il}(k) \int \frac{f_{oi}(\mathbf{p} + \frac{\hbar \mathbf{k}}{2}) - f_{oi}(\mathbf{p} - \frac{\hbar \mathbf{k}}{2})}{s + (i\mathbf{k}\mathbf{p} / m_i)} d\mathbf{p} - \\ & - \frac{i}{\hbar} v_{ee}(k) \int \frac{f_{oe}(\mathbf{p} + \frac{\hbar \mathbf{k}}{2}) - f_{oe}(\mathbf{p} - \frac{\hbar \mathbf{k}}{2})}{s + (i\mathbf{k}\mathbf{p} / m_e)} d\mathbf{p} = \\ & = \frac{v_{ee}(k)}{2\hbar^2 m_e^2} \int d\mathbf{p} d\mathbf{p}' v_{ee}\left(\left|\frac{\mathbf{p} - \mathbf{p}'}{\hbar}\right|\right) \left(s + i\frac{\mathbf{k}\mathbf{p}}{m_e}\right)^{-2} \left(s + i\frac{\mathbf{k}\mathbf{p}'}{m_e}\right)^{-2} (\mathbf{k}, \mathbf{p} - \mathbf{p}')^2 \times \\ & \times \left[f_{oe}\left(\mathbf{p} + \frac{\hbar \mathbf{k}}{2}\right) - f_{oe}\left(\mathbf{p} - \frac{\hbar \mathbf{k}}{2}\right)\right] \left[f_{oe}\left(\mathbf{p}' + \frac{\hbar \mathbf{k}}{2}\right) - f_{oe}\left(\mathbf{p}' - \frac{\hbar \mathbf{k}}{2}\right)\right]. \quad (19) \end{aligned}$$

Правая часть уравнения (19) учитывает эффекты, связанные с тождественностью электронов. При пренебрежении правой частью уравнение (19) переходит в соответствующее уравнение работы [3].

Интересуясь акустическими колебаниями плазмы, из (19) получаем следующее выражение для скорости звука в электронно-ионной плазме в случае, когда электроны находятся в состоянии вырождения:

$$v \equiv \frac{\omega}{k} = \left\{ \frac{n_{oi} v_{il}}{n_{oe} v_{ee}} \frac{p_{0e}^2}{3m_i m_e} \right\}^{1/2} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{(\hbar \omega_{0e})^2}{(p_{0e}^2 / m_e)^2} \right] = v_{ид} \left[1 - \frac{3}{2} \left(\frac{\hbar \omega_{0e}}{p_{0e}^2 / m_e} \right)^2 \right], \quad (20)$$

где $v_{\text{ид}}$ — скорость звука в идеальной электронно-ионной плазме, получающаяся в предположении о мультипликативном виде бинарной функции распределения.

Условием применимости решения уравнений (16), (17) для спектра (20) является требование малости энергии взаимодействия электронов по сравнению с их кинетической энергией в равновесном состоянии. В этом случае скорость звука v слабо отличается от $v_{\text{ид}}$. Напротив, в случае, когда энергия взаимодействия становится сравнимой с кинетической энергией частиц, решение уравнений (16), (17) уже не может мало отличаться от соответствующего решения работы [3]. Однако необходимо отметить, что в этом случае нужно пользоваться также более точным выражением для бинарной функции распределения, учитывающим также и корреляцию частиц, обусловленную их взаимодействием.

В заключение выражаю благодарность проф. В. Л. Гинзбургу за советы и интерес к работе.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
21 декабря 1953 г.

Литература

- [1] Ю. Л. Климонтович и В. П. Силин. ДАН СССР, 82, 361, 1952; ЖЭТФ, 23, 151, 1952.— [2] В. П. Силин. ЖЭТФ, 23, 644, 1952.— [3] В. П. Силин. ЖЭТФ, 23, 649, 1952.— [4] Н. Н. Боголюбов и К. П. Гуров. ЖЭТФ, 17, 614, 1947.— [5] Л. Д. Ландау. ЖЭТФ, 16, 574, 1946.
-

К ТЕОРИИ СТОЛКНОВЕНИЙ ЧАСТИЦ С ЗАДАННЫМ УГЛОВЫМ МОМЕНТОМ

В. Т. Хозяинов

Релятивистская волновая функция системы двух фермионов, обладающих некоторым взаимным угловым моментом, получена при помощи шаровых векторных функций, а затем представлена в виде суперпозиции волновых функций типа плоских волн (со спином). Проведенное рассмотрение дает метод исследования различных процессов при заданном моменте количества движения.

Известно, что успехи, достигнутые за последнее время в квантовой электродинамике, основаны в значительной степени на новой инвариантной формулировке теории возмущений [1]. Новая форма теории возмущений, давая возможность ввести соответствующие правила регуляризации, принесла помимо этого большую пользу, значительно упростив вычисления при исследовании различных конкретных процессов.

Однако новые методы теории возмущений мало удобны для решения задач, в которых существенную роль играет момент количества движения, например задачи определения вероятности того или иного процесса при заданной величине углового момента сталкивающихся частиц (в квазиклассическом приближении — при заданном прицельном состоянии). Действительно, обычные правила написания матричных элементов в импульсном пространстве здесь неприменимы. Вычисление же матричных элементов при помощи волновых функций состояний с данным угловым моментом очень громоздко. Оно требует перестройки вычислительного аппарата (функция $K(2, 1)$ и т. д.) на основе системы собственных функций момента.

Значительно проще искомый матричный элемент, зависящий от величины момента количества движения частиц в начальном или конечном состояниях, представить в виде суперпозиции матричных элементов в энерго-импульсном представлении, каждый из которых должен рассматриваться как компонента Фурье искомого матричного элемента. Это достигается разложением релятивистской волновой функции двух частиц по плоским волнам, причем коэффициенты разложения просто выражаются через шаровые функции и шаровые векторы.

1. Релятивистская волновая функция системы двух частиц

Система, состоящая из двух частиц со спином $1/2$, обладающая данным значением полного углового момента j и его проекции m на ось z , может находиться, вообще говоря, в четырех независимых состояниях, которые в нерелятивистском приближении сводятся к синглетному состоянию ($l = j$) и трем состояниям ($l = j, l = j \pm 1$), образующим триплет (здесь l — орбитальный момент). Волновая функция, описывающая указанную систему, преобразуется (при преобразованиях Лоренца), как произведение двух четырехкомпонентных функций Дирака, и представляет собой, таким образом, шестнадцатикомпонентную величину:

$$\Psi_{\rho\sigma} \sim \Psi_\rho \Psi_\sigma \quad (\rho, \sigma = 1, 2, 3, 4).$$

Исключая координаты и импульсы центра инерции, получим волновое уравнение для искомой функции:

$$[2E - i(\vec{\alpha}^{(1)} I^{(2)} - I^{(1)} \vec{\alpha}^{(2)}) \nabla + M(\beta^{(1)} I^{(2)} + I^{(1)} \beta^{(2)})] \Psi = 0, \quad (1)$$

где $\vec{\alpha}$ и β — обычные дираковские четырехрядные матрицы, $I^{(i)}$ — четырехрядные единичные матрицы, а знаки (1) и (2) указывают, на какой индекс волновой функции $\Psi_{\sigma\sigma}$ действует данная матрица.

Релятивистская задача двух тел, где обе частицы подчиняются уравнению Дирака, рассматривалась в свое время в [2]. Найдем нужные нам волновые функции, используя для этой цели удобный аппарат так называемых шаровых (L, l) -векторных функций [3].

Четыре шестнадцатирядные матрицы $\vec{\alpha}^{(1)} I^{(2)} - I^{(1)} \vec{\alpha}^{(2)}$ и $\beta^{(1)} I^{(2)} + I^{(1)} \beta^{(2)}$ вместе со всеми линейно независимыми матрицами, которые могут быть получены из них, образуют приводимое представление соответствующей группы преобразований. Это шестнадцатирядное представление можно разложить на его составные неприводимые части, которыми, как известно, являются десятирядное, пятирядное и однорядное представления [4]. Следовательно, 16 уравнений (1) могут быть при помощи линейного преобразования сведены к трем независимым системам из 10, 5 и 1 уравнения. Базисы неприводимых представлений обозначим через U_{α} ($\alpha = 1, 2, \dots, 10$), V_{β} ($\beta = 1, 2, \dots, 5$) и W ; они представляют собой определенные комбинации из компонент волновой функции $\Psi_{\sigma\sigma}$, которые мы не будем явно выписывать. Классифицируя эти комбинации еще и по их поведению по отношению к действию оператора $\vec{\sigma}^{(1)} I^{(2)} + I^{(1)} \vec{\sigma}^{(2)}$, который в нерелятивистском приближении сводится к оператору спина, легко видеть, что компоненты базиса каждого из неприводимых представлений делятся на группы, преобразующиеся одна через другую по соответствующим представлениям D_0 и D_8 : (U_1, U_2, U_3) , U_4 , (U_5, U_6, U_7) , (U_8, U_9, U_{10}) ; $V_1, (V_2, V_3, V_4)$, V_5 ; W .

Если теперь иметь в виду, например, состояние с полным моментом количества движения j , то угловая зависимость компонент волновой функции полностью определена. Действительно, функциями, преобразующимися одна через другую по D_L -представлению, являются $(2L + 1)$ компонент L -вектора $Y_{LM}(\vartheta, \varphi)$.

Поскольку здесь мы имеем произведение $D_L \times D_j$, где $L = 0, 1$, то, воспользовавшись рядом Клебша—Жордана:

$$Y_{LM} Y_{lm} = \sum_{\lambda=-L}^L \rho_{L,l}^{L+\lambda} [Y_{lm}^{\lambda}]_M, \quad (2)$$

который дает разложение прямого произведения представлений D_L и D_l на неприводимые части, определяемые согласно правилу сложения моментов

$$D_L \times D_l = D_{l+L} + D_{l+L-1} + \dots + D_{|l-L|}, \quad (3)$$

можем искать нужные нам компоненты волновой функции в виде:

$$U = a^1(r) Y_{jm}^{(-1)} + a(r) Y_{jm}^{(0)} + a^2(r) Y_{jm}^{(1)}, \quad (4)$$

$$U_4 = b(r) Y_{jm}(\vartheta, \varphi), \quad (5)$$

и аналогично для остальных компонент, заменяя лишь обозначения для неизвестных радиальных функций. Здесь $(-l \leq m \leq l, -L \leq M \leq L; \lambda \leq L, L \leq l)$

$$[Y_{lm}^{L\lambda}]_M = \sqrt{\frac{2l+1}{2l+2\lambda+1}} C_{LM,lm}^{L+\lambda, m+M} Y_{l+\lambda, m+M} \quad (6)$$

— так называемый (L, l) -вектор типа λ , определенный в работе [3]; в формулу (4) входят шаровые трехмерные векторы, соответствующие случаю $L=1, \lambda=0 \pm 1$. Выражение для коэффициентов $C_{LM,lm}^{L+\lambda, m+M}$ приводится в [3,5]; $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ — нормированная шаровая функция Лапласа. Подставляя эти выражения в волновые уравнения, получим уравнения для радиальных функций. Нетрудно видеть [2], что уравнения разбиваются на три независимые группы.

Не выписывая здесь этих уравнений, укажем лишь, что исключением неизвестных функций можно найти, например, уравнение для $b(r)$

$$(E^2 - M^2) b(r) + \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{j(j+1)}{r^2} \right] b(r) = 0, \quad (7)$$

решением которого является функция

$$(\text{const} / \sqrt{pr}) J_{j+1/2}(pr), \quad p^2 = E^2 - M^2, \quad (8)$$

где $J_{j+1/2}$ — функция Бесселя полуцелого порядка. Остальные радиальные функции в рассматриваемом нами случае не взаимодействующих частиц представляют собой комбинации функций типа (8). Окончательно получающееся выражение содержит четыре независимых постоянных. Полагая три из этих постоянных равными нулю, найдем одно из четырех независимых решений, описывающих четыре возможных состояния системы двух фермионов.

Запишем волновую функцию в исходном представлении $\Psi_{\sigma\sigma}$, которое дает возможность естественным образом сделать переход к нерелятивистскому случаю. Удобно в четырехрядной матрице, образованной компонентами функции, выделить двухрядные матрицы:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_{\xi\xi} & \Psi_{\xi\eta} \\ \Psi_{\eta\xi} & \Psi_{\eta\eta} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Тогда, как известно, в нерелятивистском приближении, соответствующем уравнению Паули, «большими» оказываются компоненты, составляющие $\Psi_{\eta\eta}$, при этом компоненты $\Psi_{\xi\eta}$ и $\Psi_{\eta\xi}$ будут первого, а $\Psi_{\xi\xi}$ — второго порядка малости по величине скорости частиц.

Выразим компоненты каждой из двухрядных матриц следующим образом через компоненты некоторого шарового вектора $\mathbf{A}$ и скаляра B :

$$\begin{pmatrix} A_{-1} & \frac{A_0+B}{\sqrt{2}} \\ \frac{A_0-B}{\sqrt{2}} & A_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -A_x + iA_y & A_z + B \\ A_z - B & A_x + iA_y \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Тогда волновую функцию, описывающую систему двух частиц спина $1/2$, обладающих заданным взаимным полным угловым моментом, можно написать в следующем виде ($-j \leq m \leq j$):

Синглет ($l=j$)

$$\begin{aligned} A_{\xi\xi} &= 0, & B_{\xi\xi} &= (E-M) R_j Y_{jm}, \\ A_{\xi\eta} &= A_{\eta\xi} = i \nabla (R_j Y_{jm}), & B_{\xi\eta} &= B_{\eta\xi} = 0, \\ A_{\eta\eta} &= 0, & B_{\eta\eta} &= (E+M) R_j Y_{jm}. \end{aligned} \quad (11)$$

Триплет ($l = j + \lambda$; $\lambda = 0, \pm 1$)

$$\begin{aligned} A_{\xi\xi} &= (E - M) \left\{ R_{j+\lambda} Y_{jm}^{(\lambda)} - \frac{2}{p^2} [\nabla, [\nabla, R_{j+\lambda} Y_{jm}^{(\lambda)}]] \right\}, \quad B_{\xi\xi} = 0, \\ -A_{\xi\eta} &= A_{\eta\xi} = [\nabla, R_{j+\lambda} Y_{jm}^{(\lambda)}], \quad B_{\xi\eta} = B_{\eta\xi} = i(\nabla, R_{j+\lambda} Y_{jm}^{(\lambda)}), \\ A_{\eta\eta} &= (E + M) R_{j+\lambda} Y_{jm}^{(\lambda)}, \quad B_{\eta\eta} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

При этом

$$R_j(r) = (2Er)^{-1/2} J_{j+1/2}(pr). \quad (13)$$

В этих формулах для краткости опущены аргументы, от которых зависят радиальные и угловые функции. Оператор ∇ определяется обычным образом:

$$\nabla_0 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \nabla_{\pm 1} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \pm i \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (14)$$

Аналогично определяются дивергенции и роторы, входящие в формулы (10) и (11). В развернутом виде результаты применения этих операций к шаровым векторам приведены в работе [3].

Здесь указана также нерелятивистская классификация состояний, которая может быть получена, если в нерелятивистском случае рассматривать только «большие» компоненты, составляющие $\Psi_{\eta\eta}$. Состояния с $l = j \pm 1$ в (12) разделены, что можно сделать только в случае свободных частиц. Если введено взаимодействие, состояния $l = j \pm 1$ не разделяются, в этом случае соответствующая комбинация $\Psi^{(+1)}$ и $\Psi^{(-1)}$ описывает смешанное состояние.

Волновая функция нормирована на $\delta(E - E')$, при нормировке надо учитывать известное интегральное представление δ -функции:

$$\delta(p - p') = p \int_0^\infty r J_m(pr) J_m(p'r) dr, \quad (15)$$

где $0 \leq p, p' < \infty$.

2. Разложение по плоским волнам

Волновая функция, задаваемая соотношениями (10) — (12), выраженная через шаровые векторы и шаровые функции, может быть представлена в виде суперпозиции волновых функций, описывающих движение частиц с определенным значением импульса $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$ (в системе координат, где покоится центр инерции частиц), т. е. «разложена по плоским волнам». Волновая функция типа плоской волны имеет вид:

$$\Psi_{p, \nu_1, \nu_2}(\mathbf{r}) = a(\mathbf{p}, \nu_1, \nu_2) e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}, \quad (16)$$

где

$$a_{\rho\sigma} = c(p) b_\rho(\mathbf{p}, \nu_1) b_\sigma(-\mathbf{p}, \nu_2) \quad (\rho, \sigma = 1, 2, 3, 4)$$

есть произведение соответствующих спинорных амплитуд Дирака и нормировочного множителя (ν_1, ν_2 — спиновые индексы первой и второй частиц).

Спиновые амплитуды выразим при помощи шаровых спиноров:

$$b(\mathbf{p}, \nu_i) = \begin{cases} -2\nu_i \sqrt{\frac{p(E-M)}{4\pi^2}} \hat{Y}_{1/2, \nu_i}^{(1/2)}(\vartheta_p, \varphi_p), \\ 2\nu_i \sqrt{\frac{p(E+M)}{4\pi^2}} \hat{Y}_{1/2, \nu_i}^{(-1/2)}(\vartheta_p, \varphi_p), \end{cases} \quad (17)$$

где $\nu_i = \pm 1/2$, а нормировка — на δ -функцию от энергии. Компоненты шарового спинора определяются формулой (6), где $L = 1/2$, $\lambda = \pm 1/2$ [3]. Если нормировать функцию (16) на $\delta(E - E')\delta(\Omega - \Omega')$, то $c(p) = (2\pi)^{3/2} / \sqrt{pE}$. Запишем искомое разложение в виде:

$$\Psi_{jm, p}^{(\chi)}(\mathbf{r}) = \sum_{\nu_1, \nu_2} \int d\mathbf{k} \alpha_{jm}^{(\chi)}(\mathbf{k}, \nu_1, \nu_2) \Psi_{\mathbf{k}\nu_1\nu_2}(\mathbf{r}), \quad (18)$$

где индекс (χ) показывает, какое из четырех независимых состояний имеют в виду ($\chi = s, \lambda$; $\lambda = 0, \pm 1$). Интегрирование распространено на все пространство $\mathbf{k}$, суммирование — по всем возможным значениям $\nu_1, \nu_2 = \pm 1/2$. Таким образом каждая из 16 компонент волновой функции разлагается в интеграл Фурье.

Для нахождения коэффициентов $\alpha_{jm}^{(\chi)}$ поступаем, как обычно: умножаем обе части равенства на $\alpha_{\rho\sigma}^*(\mathbf{k}', \nu'_1, \nu'_2) e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}}$, суммируем по ρ и σ и интегрируем по $\mathbf{r}$. Тогда получаем

$$\alpha_{jm}^{(\chi)} = \frac{1}{kK} \sum_{\rho, \sigma} \int d\mathbf{r} \alpha_{\rho\sigma}^* \Psi_{\rho\sigma}^{(\chi)}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad (19)$$

где $K = \sqrt{k^2 + M^2}$. Это выражение, воспользовавшись известным разложением

$$e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = 4\pi \sum_{l, \mu} i^l f_l(kr) Y_{l\mu}^*(\vartheta_k, \varphi_k) Y_{l\mu}(\vartheta, \varphi), \quad (20)$$

где

$$f_l(kr) = (\pi/2kr)^{1/2} J_{l+1/2}(kr), \quad (21)$$

можно записать так:

$$\alpha_{jm}^{(\chi)} = \frac{4\pi}{kK} \sum_{l, \mu} (-i)^l \sum_{\rho, \sigma} \alpha_{\rho\sigma}^*(\mathbf{k}, \nu_1, \nu_2) Y_{l\mu}(\vartheta_k, \varphi_k) \int d\mathbf{r} \Psi_{\rho\sigma}^{(\chi)} Y_{l\mu}^*(\vartheta, \varphi) f_l(kr). \quad (22)$$

Рассмотрим для примера наиболее простой случай $\chi = s$, т. е. состояние, соответствующее нерелятивистскому синглетному. Подставляя в предыдущую формулу явный вид компонент функции $\Psi_{\rho\sigma}$, учитывая (15) и свойство ортогональности шаровых функций Лапласа, получим выражение:

$$\begin{aligned} \alpha_{jm}^{(s)} = & \frac{4\pi}{kK} \sqrt{\frac{k}{K}} (-i)^j \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\delta(k-p)}{k^2} \times \\ & \times \left\{ \left[\frac{K+M}{2} (a_{12}^* - a_{21}^*) + \frac{K-M}{2} (a_{34}^* - a_{43}^*) \right] Y_{jm}(\vartheta_k, \varphi_k) + \right. \\ & + \frac{k}{\sqrt{2}} (a_{13}^* + a_{31}^*) \left[\sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} (Y_{jm}^{(1)})_{-1} - \sqrt{\frac{j}{2j+1}} (Y_{jm}^{(-1)})_{-1} \right] + \\ & + \frac{k}{2} (a_{14}^* + a_{23}^* + a_{32}^* + a_{41}^*) \left[\sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} (Y_{jm}^{(1)})_0 - \sqrt{\frac{j}{2j+1}} (Y_{jm}^{(-1)})_0 \right] + \\ & \left. + \frac{k}{\sqrt{2}} (a_{24}^* + a_{42}^*) \left[\sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} (Y_{jm}^{(1)})_1 - \sqrt{\frac{j}{2j+1}} (Y_{jm}^{(-1)})_1 \right] \right\}. \quad (23) \end{aligned}$$

Вычисляя входящие сюда комбинации из $a_{\rho\sigma}^*$, имеем

$$\begin{aligned} a_{12}^* - a_{21}^* &= (K-M)\Delta, \quad a_{24}^* + a_{42}^* = (k_x - ik_y)\Delta, \\ a_{34}^* - a_{43}^* &= (K+M)\Delta, \quad a_{13}^* + a_{31}^* = -(k_x + ik_y)\Delta, \\ a_{14}^* + a_{23}^* + a_{32}^* + a_{41}^* &= 2k_z\Delta, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\Delta = \frac{2v_1 \delta_{v_1, -v_2}}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{k}{4K}}.$$

Подставляя, далее, эти величины в (23), получаем для выражения в фигурных скобках:

$$\Delta \left\{ (K^2 + M^2) Y_{jm}(\vartheta_k, \varphi_k) + k^2 \left[\sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} (nY_{jm}^{(1)}) - \sqrt{\frac{j}{2j+1}} (nY_{jm}^{(-1)}) \right] \right\}, \quad (25)$$

но, поскольку скалярные произведения равны

$$(nY_{jm}^{(1)}) = \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} Y_{jm}, \quad (nY_{jm}^{(-1)}) = -\sqrt{\frac{j}{2j+1}} Y_{jm}, \quad (26)$$

имеем для амплитуды Фурье в этом случае

$$\alpha_{jm}^{(s)}(\mathbf{k}, v_1, v_2) = \exp \left\{ -\frac{i\pi}{2} (j+2) \right\} \frac{\delta(k-p)}{k^2} \frac{2v_1 \delta_{v_1, -v_2}}{\sqrt{2}} Y_{jm}(\vartheta_k, \varphi_k). \quad (27)$$

Аналогичным образом проводится вычисление коэффициентов $\alpha_{jm}^{(\lambda)}$ для состояний, образующих триплет. Довольно громоздкое вычисление, после использования соотношений

$$(Y_{1\mu}^{*(-1)}, Y_{jm}^{(\lambda)}) = \frac{|\mu|}{\sqrt{4\pi}} (Y_{jm}^{(\lambda)})_{-\mu}, \quad (28)$$

$$(Y_{1\mu}^{*(1)}, Y_{jm}^{(\lambda)}) = \frac{|\mu|}{i} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} [nY_{jm}^{(\lambda)}]_{-\mu}, \quad (29)$$

$$(Y_{1\mu}^{*(1)}, Y_{jm}^{(\lambda)}) = \frac{|\mu|}{\sqrt{8\pi}} \{ (Y_{jm}^{(\lambda)})_{-\mu} - 3(nY_{jm}^{(\lambda)})_{-\mu} \}, \quad (30)$$

которые нетрудно проверить непосредственным вычислением, приводит к следующему выражению:

$$\alpha_{jm}^{(\lambda)}(\mathbf{k}, v_1, v_2) = \exp \left\{ -\frac{i\pi}{2} (j+\lambda+2) \right\} \frac{\delta(k-p)}{k^2} \left[\delta_{v_1, v_2} + \frac{\delta_{v_1, -v_2}}{\sqrt{2}} \right] (Y_{jm}^{(\lambda)})_{-\nu} \quad (31)$$

$$(\lambda = 0, \pm 1; \nu = v_1 + v_2).$$

Как видно из формул (27) и (31), разложение (18) есть разложение по плоским волнам всевозможных направлений, но одного абсолютного значения импульса $k=p$, где p — модуль импульса частиц в состоянии с определенным полным моментом j .

Как и следовало ожидать, в разложение синглетного состояния входит только антисимметричная по спиновым состояниям комбинация спинорных множителей, соответствующих противоположным ориентациям спина. Состояния, входящие в триплет, разлагаются по симметричным комбинациям спинорных множителей.

Заметим, что функция, описывающая движение одной частицы со спином $1/2$, в сферических координатах имеет вид

$$\Psi_{j\mu\lambda}(\mathbf{r}) = \begin{cases} i \hat{Y}_{j\mu}^{(-\lambda)}(\vartheta, \varphi) F_{j\lambda}(r), \\ \hat{Y}_{j\mu}^{(\lambda)}(\vartheta, \varphi) G_{j\lambda}(r), \end{cases} \quad (32)$$

где для свободной частицы

$$F_{j\lambda} = -\sqrt{\frac{p(E-M)}{\pi}} f_{j-\lambda}(pr); \quad G_{j\lambda} = -2\lambda \sqrt{\frac{p(E+M)}{\pi}} f_{j+\lambda}(pr)$$

(j — полный момент, μ — его проекция на ось z , $l = j + \lambda$ — орбитальный момент; функция f определяется формулой (21)). Эта функция может быть также представлена в виде интеграла

$$\Psi_{j\mu\lambda}(\mathbf{r}) = \sum_{\sigma} \int d\mathbf{k} \beta_{j\mu}^{(\lambda)}(\mathbf{k}, \sigma) \Psi_{h\sigma}(\mathbf{r}), \quad (33)$$

где

$$\beta_{j\mu}^{(\lambda)}(\mathbf{k}, \sigma) = 2\sigma \exp \left\{ -\frac{i\pi}{2} (j - \lambda - 1) \right\} \frac{\delta(k - \mu)}{k^2} [\hat{Y}_{j\mu}^{(\lambda)}(\vartheta_h, \varphi_h)]_{-\sigma}, \quad (34)$$

причем $\Psi_{h\sigma}$ есть плоская волна со спинорным множителем (17), а $\sigma = \pm 1/2$ указывает на состояние спина частицы.

Представление функций (18) и (33) дает возможность вычислить вероятность любого процесса, связанного со столкновением фермионов, обладающих заданным угловым моментом количества движения как в электродинамике, так и в мезонной теории. При этом обычный матричный элемент в энерго-импульсном представлении, вычисленный при помощи плоских волн, должен рассматриваться как компонента Фурье искомого матричного элемента. Вероятность перехода в единицу времени из начального состояния энергии E в конечное состояние той же полной энергии в непрерывном спектре дается тогда формулой:

$$W = (2\pi / N) F \rho(E), \quad (35)$$

где $\rho(E)$ — плотность конечных состояний на единичный интервал энергии, а

$$F = \frac{1}{4(2j+1)} \sum_{m=-j}^j \sum_{(z)} \left| \sum_{\nu_1, \nu_2} \int d\mathbf{k} \alpha_{jm}^{(z)}(\mathbf{k}, \nu_1, \nu_2) \mathfrak{M}(\mathbf{k}, \nu_1, \nu_2) \right|^2, \quad (36)$$

поскольку обычно физический интерес представляет средняя вероятность, не зависящая от направления момента j . Здесь $\mathfrak{M}$ — матричный элемент перехода в энерго-импульсном представлении, который может быть написан непосредственно согласно общим правилам теории возмущений; N — постоянная нормировки, которая зависит от способа нормировки волновых функций частиц, принимающих участие в процессе. Если конечное состояние выражено при помощи плоских волн, то в формуле (36) должно быть произведено суммирование по спиновым состояниям конечных частиц. В тех же случаях, когда нас интересует угловой момент также и конечного состояния, мы будем иметь дело с двойной суммой и двойным интегралом.

При конкретных расчетах в теории возмущений необходимость вычисления интегралов от выражений вида

$$Y_{jm}(\vartheta, \varphi) / (\Delta \mp \mathbf{n} \mathbf{n}_i),$$

где $\mathbf{n}(\vartheta, \varphi)$ и $\mathbf{n}_i(\vartheta_i, \varphi_i)$ — единичные векторы, а $\Delta > 1$ не зависит от углов. Такие выражения возникают, например, при раскрытии обратных операторов Дирака, входящих обычно в матричный элемент $\mathfrak{M}$.

Воспользовавшись разложением [8]

$$\frac{1}{\Delta \mp \cos \gamma} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\pm \cos \gamma) Q_n(\Delta), \quad (37)$$

где P_n — полином Лежандра, а Q_n — функция Лежандра второго рода, получаем

$$\int \frac{Y_{jm}(\vartheta, \varphi) d\Omega}{(\Delta_i \mp \mathbf{n} \mathbf{n}_i)} = 4\pi (\pm 1)^j Q_j(\Delta_i) Y_{jm}(\vartheta_i, \varphi_i). \quad (38)$$

Аналогично имеем

$$\iint \frac{(Y_{jm}^{*\prime(\lambda)}, Y_{jm}^{(\lambda)}) d\Omega' d\Omega}{(\Delta_l \mp \mathbf{n}' \mathbf{n}_l)(\Delta_h \mp \mathbf{n} \mathbf{n}_l)} =$$

$$= (4\pi)^2 (\pm 1)^j Q_{j+\lambda}(\Delta_l) Q_{j+\lambda}(\Delta_l) (Y_{jm}^{*\prime(\lambda)}(\vartheta_l, \varphi_l), Y_{jm}^{(\lambda)}(\vartheta_l, \varphi_l)), \quad (39)$$

причем в $(\pm 1)^j$ надо брать знак $+$, если знак в обоих множителях в знаменателе одинаковый, и знак $-$, если эти знаки разные.

Институт физических проблем
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
6 ноября 1953 г.

Литература

- [1] R. P. Feynman. Phys. Rev., 76, 749, 769, 1949.— [2] Н. Кеммер. Helv. Phys. Acta, 10, 47, 1937.— [3] В. Берестецкий, А. Долгинов и К. Тер-Мартirosян. ЖЭТФ, 20, 527, 1950.— [4] В. Паули. Релятивистская теория элементарных частиц, ИИЛ, 1947.— [5] Л. Ландау и Е. Лифшиц. Квантовая механика, ГТТИ, 1949.— [6] Е. В. Гобсон. Теория сферических и эллипсоидальных функций, ИИЛ, 1952, стр. 60.

УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В БИНАРНЫХ СМЕСЯХ

С. П. Дьяков

Рассматривается структура слабой ударной волны в бинарной смеси с учетом явлений диффузии, термодиффузии и бародиффузии.

Известно, что ударная волна малой интенсивности представляет собой фактически переходный слой с конечной толщиной, обратно пропорциональной амплитуде волны [1]. Распределение всех величин в переходном слое легко находится при помощи обычных гидродинамических законов сохранения с учетом потоков, обусловленных вязкостью и теплопроводностью. При рассмотрении ударной волны в смеси в уравнениях надо еще учесть потоки, обусловленные диффузией, термодиффузией и бародиффузией. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением слабой ударной волны в бинарной смеси.

Выпишем законы сохранения в системе координат, движущейся вместе с волной в отрицательном направлении оси x . Закон сохранения вещества имеет вид:

$$\rho v = \rho_0 v_0 \equiv j \quad (1)$$

(здесь и в дальнейшем индексом нуль обозначается состояние перед ударной волной).

Закон сохранения импульса с учетом вязкого потока импульса запишется следующим образом:

$$p + \rho v^2 - \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) \frac{dv}{dx} = p_0 + \rho_0 v_0^2, \quad (2)$$

где η и ζ — первый и второй коэффициенты вязкости, соответственно.

Уравнение сохранения количества одного из компонентов смеси мы напомним в виде условия постоянства во всем переходном слое полного потока этого компонента, включающего диффузионный поток i . Обозначив массовую концентрацию через c , запишем это условие в виде

$$jc + i = jc_0. \quad (3)$$

Наконец, закон сохранения энергии будет выражаться следующим равенством:

$$\rho v \left(w + \frac{v^2}{2} \right) - \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) v \frac{dv}{dx} + q = \rho_0 v_0 \left(w_0 + \frac{v_0^2}{2} \right), \quad (4)$$

где w — энтальпия единицы массы вещества, q — тепловой поток.

Потоки i и q в бинарной смеси равны, как известно [1],

$$i = -\rho D \left(\frac{dc}{dx} + \lambda \frac{dT}{dx} + b \frac{dp}{dx} \right), \quad (5)$$

$$q = \left(T \lambda \left(\frac{\partial \mu}{\partial c} \right)_{p, T} - T \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{c, p} + p \right) i - \kappa \frac{dT}{dx}, \quad (6)$$

где D — коэффициент диффузии, λ — коэффициент термодиффузии, $b = (\partial \mu / \partial p)_{c, T} / (\partial \mu / \partial c)_{p, T}$ — коэффициент бародиффузии, κ — коэффициент теплопроводности, μ — надлежащим образом определенный химический потенциал, удовлетворяющий термодинамическому тождеству

$$dw = T ds + (1/\rho) dp + \mu dc. \quad (7)$$

Формулы (1)–(4) вместе с соотношениями (5) и (6) образуют полную систему гидродинамических уравнений нашей задачи. Для дальнейшего эти уравнения целесообразно привести к более удобному виду, исключив из них скорость. Уравнение (2) при помощи (1) можно записать в виде:

$$p - p_0 + j^2(V - V_0) - \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right)j \frac{dV}{dx} = 0, \quad (8)$$

где $V = 1/\rho$ — удельный объем. Далее умножим уравнение (8) почленно на $1/2(V + V_0)$ и вычтем из (4), учтя соотношение (1). При этом получим

$$w - w_0 - \frac{1}{2}(p - p_0)(V + V_0) - \frac{j^2}{2}\left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right)(V - V_0)\frac{dV}{dx} - \frac{q}{j} = 0. \quad (9)$$

Уравнение (3) удобно писать в виде:

$$c - c_0 = i/j. \quad (10)$$

В интересующей нас слабой ударной волне изменения всех величин $p - p_0$, $V - V_0$ и т. д. малы. Выбрав в качестве независимых переменных давление p , энтропию s и концентрацию c , разложим разности $w - w_0$ и $V - V_0$ в уравнениях (8) и (10) по степеням $p - p_0$, $s - s_0$, $c - c_0$, удерживая члены второго порядка малости. В дальнейшем мы убедимся, что изменение энтропии и концентрации — второго порядка малости по $p - p_0$; поэтому в разложениях достаточно сохранить линейные по $s - s_0$ и $c - c_0$ члены, а по $p - p_0$ разлагать до членов второго порядка включительно. Так как ширина переходного слоя обратно пропорциональна амплитуде волны, дифференцирование по x увеличивает на единицу порядок малости величин. Таким образом dp/dx — второго, а ds/dx и dc/dx — третьего порядка малости; в дальнейшем члены с градиентами энтропии и концентрации повсюду опускаются.

С учетом этих замечаний уравнение (8) можно написать:

$$(p - p_0) \left[1 + j^2 \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_{s, c} \right] + \frac{j^2}{2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_{s, c} (p - p_0)^2 + j^2 \left(\frac{\partial V}{\partial s} \right)_{p, c} (s - s_0) + j^2 \left(\frac{\partial V}{\partial c} \right)_{p, s} (c - c_0) - \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta \right) j \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_{s, c} \frac{dp}{dx} = 0. \quad (11)$$

В уравнении (9) член, обусловленный вязкостью, — третьего порядка малости, и его можно опустить; в выражении для q следует сохранить лишь градиенты p и T . Разложение уравнения (9) дает следующий результат:

$$T(s - s_0) = \left[\frac{\kappa}{j} \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_{s, c} + \frac{\rho DT}{j} \left(\lambda \left(\frac{\partial \mu}{\partial s} \right)_{p, T} - \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{c, p} \right) \times \right. \\ \left. \times \left(b + \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_{s, c} \right) \right] \frac{dp}{dx}. \quad (12)$$

Наконец, из уравнения (10) следует

$$c - c_0 = \frac{\rho D}{j} \left[b + \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_{s,c} \right] \frac{dp}{dx}. \quad (13)$$

Подставляя в (11) вместо $s - s_0$ и $c - c_0$ их выражения (12) и (13), получим следующее дифференциальное уравнение для p :

$$a \frac{dp}{dx} = - \frac{1}{4 V^2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_{s,c} (p - p_0) (p - p_1), \quad (14)$$

где p_1 — давление за ударной волной (при $x \rightarrow +\infty$),

$$a = \frac{1}{2 \rho u^3} \left\{ \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta \right) + \frac{\kappa \rho^2 u^2}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_{s,c}^2 + \rho^3 u^2 D \left(\frac{\partial \mu}{\partial c} \right)_{p,T} \left(b + \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_{s,c} \right)^2 \right\},$$

u — скорость звука.

Как и следовало ожидать, коэффициент a связан с коэффициентом поглощения звука в бинарной смеси γ [2] соотношением $\gamma = a \omega^2$.

Уравнение (14) интегрируется элементарно:

$$p = \frac{p_1 + p_0}{2} + \frac{p_1 - p_0}{2} \operatorname{th} \left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_{s,c} \frac{(p_1 - p_0) x}{8 V^2 a} \right]. \quad (15)$$

«Ширина» разрыва, определяемая как расстояние, на котором практически происходит все изменение давления от p_0 до p_1 ,

$$\delta = \frac{8 V^2 a}{\Delta p} / \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_{s,c}, \quad (16)$$

обратно пропорциональна амплитуде волны $\Delta p = p_1 - p_0$. Это оправдывает допущение о том, что дифференцирование повышает на единицу порядок малости. Вне интервала δ p быстро приближается к своим асимптотическим значениям p_0 и p_1 . По порядку величины для газовой смеси

$$\delta \sim l p / \Delta p, \quad (17)$$

где l — длина пробега газовой молекулы. Отсюда видно, что для достаточно интенсивных ударных волн гидродинамический метод рассмотрения перестает быть законным.

Дифференцируя (15) и подставляя в (13), получим выражение для $c - c_0$:

$$c - c_0 = \frac{D}{u} \left[b + \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_{s,c} \right] \frac{(p_1 - p_0)^2}{16 V^2 a} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_{s,c} \times \\ \times \left\{ \operatorname{ch}^2 \left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_{s,c} \frac{(p_1 - p_0) x}{8 V^2 a} \right] \right\}^{-1}, \quad (18)$$

которое, как мы и ожидали, — второго порядка малости по Δp . Вне интервала δ c асимптотически равна своему начальному значению c_0 ; где-то внутри переходного слоя c достигает экстремума. Таким образом в ударной волне происходит концентрирование одного из компонентов смеси на длинах порядка δ . Полное избыточное количество «собранного» ударной волной компонента на единицу поверхности волны получится интегрированием (18):

$$M = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} (c - c_0) dx = \frac{\rho D}{u} \left[b + \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_{s,c} \right] (p_1 - p_0). \quad (19)$$

Заметим, что полное количество собранного вещества пропорционально амплитуде волны.

Определим теперь ход энтропии в переходном слое при помощи уравнения (12). Имеем

$$s - s_0 = \frac{(\Delta p)^2}{16T_0V^2a} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_{s,c} \left[\frac{\kappa}{\rho u} \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_{s,c} + \frac{DT}{u} \left(\lambda \left(\frac{\partial \mu}{\partial c} \right)_{p,T} - \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_{c,p} \right) \times \right. \\ \left. \times \left(b + \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_{s,c} \right) \right] \left\{ \text{ch}^2 \left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} \right)_{s,c} \frac{(p_1 - p_0)x}{8V^2a} \right] \right\}^{-1}. \quad (20)$$

Применим выведенные формулы к конкретному случаю идеального газа. Простые вычисления показывают, что коэффициент бародиффузии имеет следующий вид:

$$b = \frac{m_2 - m_1}{m_1 m_2} \frac{c(1-c)[(m_2 - m_1)c + m_1]}{p},$$

где m_1 — масса молекулы того компонента смеси, концентрация которого c , m_2 — масса молекулы другого компонента. Подставляя все это в формулу (19), найдем

$$M = \frac{\rho D}{u} \left[\frac{m_2 - m_1}{m_2 m_1} \frac{c(1-c)[(m_2 - m_1)c + m_1]}{p} + \lambda \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_{s,c} \right] \Delta p. \quad (21)$$

При $m_1 < m_2$ бародиффузионный член положителен, т. е. он способствует концентрированию в переходном слое более легкого компонента; знак λ при $m_1 < m_2$ для большинства смесей будет при этом отрицательным. Знак M зависит от соотношения величин баро- и термодиффузионного членов.

Оценим порядок величины эффекта. Принимая во внимание, что $D \sim lu$, найдем

$$M \sim l \rho c \Delta p / p. \quad (22)$$

В то время как формулы (16), (19) и (21) справедливы лишь для слабых ударных волн, оценки (17) и (22), основанные, по сути дела, на соображениях размерности, сохраняют свою силу и для сильных ударных волн, где $\Delta p \sim p$. Мы можем сказать, таким образом, что в сильной ударной волне происходит концентрирование одного компонента на длинах порядка длины свободного пробега, а полная масса «собранного» компонента — порядка $M \sim l \rho c$.

Формула (21) применима к случаю взвеси макроскопических частиц («пылинок») в газе; под c надо понимать тогда весовую концентрацию «пылинок». В бародиффузионном члене необходимо тогда учесть, что $m_1 \gg m_2$; что касается термодиффузионного члена, то им вообще можно пренебречь. В самом деле, «коэффициент термодиффузии» шарообразных твердых частиц, взвешенных в газе, равен, как легко видеть,

$$\lambda = \frac{12\pi\eta R c}{kT} \frac{\kappa_2}{\kappa_1 + 2\kappa_2},$$

где R — радиус «пылинок», η — так называемый коэффициент теплового скольжения, κ_1 и κ_2 — коэффициенты теплопроводности вещества «пылинок» и газа, соответственно. Таким образом термодиффузионный член пропорционален $\sim R$. Бародиффузионный член пропорционален m_1 , т. е. $\sim R^3$. Простые оценки показывают, что оба члена сравнимы по величине при $R \sim l \sqrt{\rho_2 \kappa_2 / \rho_1 \kappa_1}$ (ρ_1 — плотность вещества «пылинок», ρ_2 — газа), поэтому термодиффузионным членом можно всегда пренебречь. Далее в выражении для a можно наряду с термодиффузионным членом пренебречь членами, обусловленными вязкостью и

теплопроводностью. В самом деле, оценим, например, отношение бародиффузионного члена к члену, обусловленному вязкостью:

$$\frac{\rho^2 u^2 D}{\eta} \left(\frac{\partial \mu}{\partial c} \right)_{p, T} b^2 \sim \frac{\rho u^2 m_1 c}{\eta^2 R} \sim \frac{\rho_1 c}{\rho_2} \left(\frac{R}{l} \right)^2 \gg 1. \quad (23)$$

Мы воспользовались здесь для коэффициента диффузии «пылинок» формулой Эйнштейна $D = kT/6\pi\eta R$. Таким образом величина a для суспензий равна $a = (\rho^2 D/2u) (\partial \mu/\partial c)_{p, T} b^2$. Отсюда сразу легко оценить δ :

$$\delta \sim l \frac{\rho}{\Delta \rho} \frac{\rho_1 c}{\rho_2} \left(\frac{R}{l} \right)^2.$$

Мы видим, что в суспензиях δ значительно больше, чем в однородных средах; в частности $\delta \gg R$.

Вычислим теперь M , пренебрегая λ в формуле (21) и полагая $m_1 \gg m_2$. Для $c \ll 1$ будем иметь

$$M = - \frac{2}{9} \frac{\rho_1 R^2}{u \eta} c \Delta p. \quad (24)$$

Таким образом переходный слой ударной волны обедняется взвешенными частицами.

Выводы

1. Рассмотрена структура переходного слоя слабой ударной волны, распространяющейся в бинарной смеси. Показано, что в переходном слое происходит концентрация одного из компонентов.

2. Приведены формулы для случая идеального газа и взвеси твердых частиц в газе. В последнем случае наблюдается обеднение переходного слоя твердыми частицами; ширина переходного слоя в этом случае значительно больше, чем в однородной среде.

Автор признателен акад. Л. Д. Ландау за указания и интерес к работе.

Институт физических проблем
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
30 декабря 1953 г.

Литература

- [1] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред, Гостехиздат, М., 1944, § 67, 93.— [2] И. Шапошников и З. Гольдберг, ЖЭТФ, 23, 425, 1952.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ УДАРНЫХ ВОЛН

С. П. Дьяков

Исследуется вопрос об устойчивости ударных волн в произвольных средах.

1. Вывод характеристического уравнения

Рассмотрим плоскую стационарную ударную волну произвольной интенсивности, не конкретизируя свойств среды. Мы будем предполагать лишь выполнение следующих обязательных условий:

$$s > s_0; \quad v_0 > c_0; \quad v < c. \quad (1)$$

Справедливости теоремы Цемплена мы, вообще говоря, не будем требовать; наше рассмотрение будет включать, таким образом, и случай ударных волн разрежения.

Направим ось y по нормали к волне, направление скорости пусть совпадает с положительным направлением оси y .

Для исследования вопроса об устойчивости допустим, что поверхность разрыва испытывает слабое возмущение, так что уравнение возмущенной поверхности имеет следующий вид:

$$\eta = \eta_0 e^{i(kx - \omega t)}. \quad (2)$$

Эта «рябь» на поверхности разрыва вызовет возмущение течения при $y < 0$ (течение в области $y > 0$ не испытывает возмущения в силу условия $v_0 > c_0$). Обозначим через δs , δp , δv , δV малые изменения энтропии, давления, скорости и удельного объема при возмущении. Подставляя в уравнения гидродинамики возмущенные значения величин и ограничиваясь линейным приближением по малым возмущениям, получим следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \delta s}{\partial t} + v \frac{\partial \delta s}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

(уравнение энтропии),

$$\frac{\partial \delta v}{\partial t} + v \frac{\partial \delta v}{\partial y} + V \nabla \delta p = 0 \quad (4)$$

(уравнение Эйлера),

$$\frac{\partial \delta p}{\partial t} + v \frac{\partial \delta p}{\partial y} + \rho c^2 \operatorname{div} \delta v = 0 \quad (5)$$

(уравнение непрерывности).

Ищем решение этой системы, в котором все величины пропорциональны множителю вида $\exp \{i(kx + ly - \omega t)\}$. Тогда из уравнений (3) — (5) получим¹

$$(vl - \omega) \delta s = 0; \quad (6)$$

$$(vl - \omega) \delta v_x + V k \delta p = 0; \quad (7)$$

¹ Здесь и повсюду в дальнейшем под величинами δs , δv и т. д. будем понимать только коэффициенты при возмущениях; экспоненциальный множитель будет предполагаться опущенным.

$$(vl - \omega) \delta v_y + Vl \delta p = 0; \quad (8)$$

$$(vl - \omega) \delta p + \rho c^2 (k \delta v_x + l \delta v_y) \neq 0. \quad (9)$$

На основании уравнения (6) заключаем, что возможны два типа решений (все величины, относящиеся к решениям этих двух типов, будем обозначать индексами 1 и 2). Решению первого типа соответствует $vl_1 - \omega = 0$, а $\delta s^{(1)}$ отлично от нуля. Тогда из (7) и (8) получаем $\delta p^{(1)} = 0$, а из (9)

$$k \delta v_x^{(1)} + l_1 \delta v_y^{(1)} = 0. \quad (10)$$

Величина $\delta V^{(1)}$ также отлична от нуля и связана с $\delta s^{(1)}$ соотношением $\delta V^{(1)} = (\partial V / \partial s)_p \delta s^{(1)}$. Это решение, «энтропийно-вихревая» волна, представляет собой, очевидно, просто перенос движущимся газом возмущений энтропии и ротора скорости.

В решении второго типа согласно (6) $vl_2 - \omega \neq 0$, а $\delta s^{(2)} = 0$. Умножив уравнение (7) на k , уравнение (8) на l_2 , сложив их и исключив в полученном уравнении $\delta v_x^{(2)}$ и $\delta v_y^{(2)}$ при помощи (9), получим следующую связь l_2 и ω :

$$(\omega - vl_2)^2 = c^2 (k^2 + l_2^2). \quad (11)$$

Связь величин $\delta v^{(2)}$ с $\delta p^{(2)}$ определяется любыми двумя из уравнений (7) — (9), например,

$$(vl_2 - \omega) \delta v_x^{(2)} + V k \delta p^{(2)} = 0; \quad (12)$$

$$(vl_2 - \omega) \delta v_y^{(2)} + V l_2 \delta p^{(2)} = 0. \quad (13)$$

Кроме того, в силу условия $\delta s^{(2)} = 0$, имеем

$$\delta p^{(2)} = -(c^2 / V^2) \delta V^{(2)}. \quad (14)$$

Это есть решение типа звуковой волны, а соотношение (11) есть связь частоты с волновым вектором с учетом эффекта Доплера. Общее решение уравнений представится линейной комбинацией решений двух типов. Необходимая комбинация решений должна удовлетворять граничным условиям на разрыве, получающимся при разложении условий на возмущенной ударной волне. Выпишем здесь соотношения на возмущенном разрыве и потребуем их удовлетворения. Введем единичные векторы касательной $\mathbf{t}$ и нормали $\mathbf{n}$ к возмущенному разрыву; легко видеть, что компоненты этих векторов в первом приближении равны $\mathbf{t}(1, ik\eta)$ и $\mathbf{n}(-ik\eta, 1)$. Условие равенства тангенциальных компонент скоростей на возмущенном разрыве имеет вид:

$$\mathbf{v}_0 \mathbf{t} = (\mathbf{v} + \delta \mathbf{v}) \mathbf{t},$$

где $\delta \mathbf{v} = \delta \mathbf{v}^{(1)} + \delta \mathbf{v}^{(2)}$ есть искомая комбинация. С точностью до величин первого порядка это условие переписывается следующим образом:

$$\delta v_x^{(1)} + \delta v_x^{(2)} = ik(v_0 - v)\eta. \quad (15)$$

Аналогичным образом условие для скачка нормальных скоростей

$$\mathbf{v}_0 \mathbf{n} - (\mathbf{v} + \delta \mathbf{v}) \mathbf{n} = \sqrt{(p - p_0 + \delta p)(V_0 - V - \delta V)}$$

после разложения по малым возмущениям приобретает вид:

$$\delta v_y^{(1)} + \delta v_y^{(2)} = \frac{v - v_0}{2} \left[\frac{\delta p^{(2)}}{p - p_0} - \frac{\delta V^{(1)} + \delta V^{(2)}}{V_0 - V} \right] \quad (16)$$

(здесь мы учли, что $\delta p^{(1)} = 0$).

Теперь необходимо написать условие, накладываемое адиабатой Гюгонио на возмущенный разрыв. Адиабата Гюгонио представляет собой некоторую функциональную зависимость $p = p(V)$, определяемую термодинамическими характеристиками среды, в которой распространяется ударная волна. Поэтому связь δp и δV определится формулой

$$\delta p^{(2)} = (\partial p / \partial V)_H (\delta V^{(1)} + \delta V^{(2)}), \quad (17)$$

где индекс H означает, что производная берется вдоль адиабаты Гюгонио.

Наконец, последнее соотношение получится из выражения скорости разрыва, как функции скачков p и V . Обозначив через D нормальную скорость точек профиля возмущенной волны, запишем это условие следующим образом:

$$[(\mathbf{v}_0 - D) \mathbf{n}]^2 = V_0^2 \frac{p - p_0 + \delta p}{V_0 - V - \delta V}.$$

В первом приближении можно считать, что D направлено вдоль оси y ; тогда $D \approx -i\omega\eta$ (поправка на то, что D имеет составляющую вдоль оси x , будет второго порядка малости). Разлагая нашу формулу и воспользовавшись выражением для D , получим искомое условие

$$\frac{2i\omega}{v_0} \eta = \frac{\delta p^{(2)}}{p - p_0} + \frac{\delta V^{(1)} + \delta V^{(2)}}{V_0 - V}. \quad (18)$$

Формулы (10), (12) — (18) образуют систему восьми уравнений с восемью неизвестными $\delta p^{(2)}$, $\delta V^{(1)}$, $\delta V^{(2)}$, $\delta \mathbf{v}^{(1)}$, $\delta \mathbf{v}^{(2)}$, ω . Исключив все гидродинамические величины, можно получить характеристическое уравнение для частоты ω , исследование которого позволит указать критерии устойчивости ударной волны. Исключим $\delta V^{(1)} + \delta V^{(2)}$ из уравнения (18) при помощи (17); будем иметь

$$\frac{\delta p^{(2)}}{p - p_0} \left[1 + \frac{1}{j^2} \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_H \right] = \frac{2i\omega}{v_0 j^2} \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_H \eta, \quad (19)$$

где $j = v_0/V_0 = v/V$ есть поток вещества через разрыв.

Далее уравнение (16), после предварительного исключения $\delta V^{(1)} + \delta V^{(2)}$ посредством (18), умножим на ω/v , а уравнение (15) на k и сложим. В силу (10), (12) и (13), будем иметь

$$(v - v_0) \left(k^2 + \frac{\omega^2}{v v_0} \right) (v l_2 - \omega) i \eta = V \left(k^2 + \frac{\omega^2}{v^2} \right) \delta p^{(2)}. \quad (20)$$

Перемножив уравнения (19) и (20), получим

$$\frac{2\omega v}{v_0} \left(k^2 + \frac{\omega^2}{v^2} \right) = \left(\frac{\omega^2}{v v_0} + k^2 \right) (\omega - v l_2) \left[1 + j^2 \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_H \right]. \quad (21)$$

Это и есть характеристическое уравнение частот; l_2 здесь надо понимать как функцию от ω , определяемую равенством (11).

2. Исследование устойчивости ударных волн

Для дальнейшего удобно преобразовать уравнение (21). Именно, введем угол ϑ между волновым вектором (k, l_2) и нормалью к разрыву. Пусть

$$l_2 = \frac{\Omega}{c} \cos \vartheta, \quad k = \frac{\Omega}{c} \sin \vartheta, \quad (22)$$

где Ω , для которого справедливо очевидное соотношение

$$\Omega^2 = c^2 (k^2 + l_2^2), \quad (23)$$

есть не что иное, как частота звука в системе координат, движущейся вместе с веществом за ударной волной. Далее, согласно (11) имеем

$$\omega = \Omega + vl_2 = \Omega \left(1 + \frac{v}{c} \cos \vartheta \right). \quad (24)$$

Подставляя (22) и (24) в (21), получим квадратное относительно $\cos \vartheta$ уравнение

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{c^2} \left[\frac{4}{1 + j^2 (\sigma V / \sigma p)_H} + \frac{v_0}{v} - 1 \right] \cos^2 \vartheta + \frac{2v}{c} \left[\frac{3 + (v^2/c^2)}{1 + j^2 (\sigma V / \sigma p)_H} - 1 \right] \cos \vartheta + \\ + \frac{2[1 + (v^2/c^2)]}{1 + j^2 (\sigma V / \sigma p)_H} - \left(1 + \frac{vv_0}{c^2} \right) = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

исследование которого значительно проще, чем исходного уравнения с дополнительным условием (11).

Величины l_2 и ω выражаются через $\cos \vartheta$ равенствами:

$$l_2 = k \operatorname{ctg} \vartheta, \quad \omega = ck \frac{1 + (v/c) \cos \vartheta}{\sin \vartheta}. \quad (26)$$

Обычное условие неустойчивости заключается в существовании экспоненциально растущего со временем решения; причем величина возмущения экспоненциально спадает на бесконечности при $y \rightarrow \infty$; для этого мнимые части, вообще говоря, комплексных выражений для частоты ω и y -компоненты волнового вектора l_2 должны быть положительны, т. е.

$$\operatorname{Im}(\omega) > 0; \operatorname{Im}(l_2) > 0. \quad (27)$$

Невыполнение хотя бы одного из этих условий означает устойчивость разрыва. Заметим, что при этом величины ϑ и Ω комплексны, а $\cos \vartheta$ комплексен или действителен, но по модулю больше единицы.

В дальнейшем мы убедимся, что помимо экспоненциально растущих и экспоненциально падающих со временем решений система допускает в некоторых случаях решения с действительными ω и l_2 ; смысл таких решений мы обсудим ниже, а сейчас приступим к рассмотрению случая комплексных ω и l_2 , удовлетворяющих условиям (27). Введем величину²

$$\xi = \rho e^{i\varphi} \equiv \operatorname{ctg}(\vartheta/2). \quad (28)$$

Тогда, как легко видеть,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} l_2 = k \operatorname{Im} \operatorname{ctg} \vartheta = \frac{k}{2} \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) \sin \varphi; \\ \operatorname{Im} \omega = ck \operatorname{Im} \frac{1 + (v/c) \cos \vartheta}{\sin \vartheta} = \frac{ck}{2} \left[\left(1 + \frac{v}{c} \right) \rho - \left(1 - \frac{v}{c} \right) \frac{1}{\rho} \right] \sin \varphi. \end{aligned} \quad (29)$$

Первое из условий (27) означает

$$\sin \varphi > 0, \text{ т. е. } 0 < \varphi < \pi. \quad (30)$$

² Излагаемый метод исследования характеристического уравнения был указан акад. Л. Д. Ландау.

Второе условие дает

$$\rho^2 > \frac{1 - (v/c)}{1 + (v/c)}. \quad (31)$$

В уравнении (25) целесообразно переменную $\cos \vartheta$ заменить другой переменной

$$x = \frac{1 + \cos \vartheta}{1 - \cos \vartheta} = \frac{1 + (v/c)}{1 - (v/c)},$$

после чего уравнение примет вид:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left[\frac{2(1 + (v/c))}{1 + j^2(\partial V/\partial p)_H} - 1 \right] x^2 + 2 \left\{ \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left[\frac{1 - j^2(\partial V/\partial p)_H}{1 + j^2(\partial V/\partial p)_H} \right] - \frac{2vv_0}{c^2} \right\} x + \\ + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left[\frac{2(1 - (v/c))}{1 + j^2(\partial V/\partial p)_H} - 1 \right] = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Условие (31) означает тогда, что x должно быть по модулю большим единицы, а $\cos \vartheta$ комплексным или действительным, но по модулю большим единицы.

Известно, что если x_1 и x_2 суть корни квадратного уравнения с действительными коэффициентами

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

то

$$\begin{aligned} \text{при } |a| > |c|, |b| < |a + c|, |x_1|, |x_2| < 1; \\ \text{» } |a| < |c|, |b| < |a + c|, |x_1|, |x_2| > 1; \\ \text{» } |a| \geq |c|, |b| > |a + c|, |x_1| < 1, |x_2| > 1, \end{aligned}$$

причем в последнем случае в силу действительности коэффициентов x_1 и x_2 должны быть действительными. Нас интересует случай, когда, по крайней мере, один из корней уравнения (32) по модулю больше единицы, т. е. когда осуществляется второе или третье из выше перечисленных условий. Легко видеть, что второе из этих условий никогда не может быть выполненным. В самом деле, условие $|a| < |c|$ для уравнения (32) имеет вид

$$j^2(\partial V/\partial p)_H > 1,$$

а условие $|b| < |a + c|$

$$\frac{vv_0}{c^2} < \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{1 - j^2(\partial V/\partial p)_H}{1 + j^2(\partial V/\partial p)_H},$$

очевидно, ему противоречит. Таким образом вне единичного круга плоскости комплексной переменной x может лежать лишь один и притом действительный корень уравнения (32).

Однако выполнения условия $|x| > 1$ еще недостаточно для неустойчивости; именно, необходимо также потребовать, как это указывалось выше, чтобы $\cos \vartheta$ был комплексным или действительным, но по модулю большим единицы. Комплексным $\cos \vartheta$ быть не может в силу действительности x ; далее, в соответствии с выражением для x при $x > 1$, $|\cos \vartheta| < 1$, а при $x < -1$, $|\cos \vartheta| > 1$. Таким образом дополнительное условие, обеспечивающее неустойчивость, заключается в требовании, чтобы корень уравнения (32) был меньше -1 . Сравнивая знаки квадратичного полинома (32) при значениях $x = \pm 1, \pm \infty$, легко найти, что условия неустойчивости суть

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_H < -\frac{1}{j^2}, \quad (33)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_H > \frac{1}{j^2} \left(1 + 2 \frac{v}{c}\right). \quad (34)$$

До сих пор мы рассматривали случай комплексных ω и l_2 ; теперь рассмотрим случай действительных ω и l_2 , когда решение описывает реальные распространяющиеся звуковые и энтропийные волны. Звуковая волна в решениях такого типа может быть как «приходящей», т. е. падающей на разрыв извне против течения, так и «уходящей», т. е. излучаемой разрывом. Первый тип решения, которому соответствует, очевидно, $l_2 < 0$ и $\cos \vartheta < 0$, не представляет интереса и не имеет никакого отношения к проблеме устойчивости; задача в этом случае сводится к нахождению такой связи частоты и волнового вектора звуковой волны, падающей извне и «догоняющей» ударную волну, при выполнении которой отсутствует отраженная звуковая волна.

Случай спонтанного излучения звука разрывом, которому соответствует $l_2 > 0$ и $\cos \vartheta > 0$, представляет большой интерес. Применяя известную теорему Штурма к уравнению (25), легко найти условие, при котором корень $\cos \vartheta$ лежит между нулем и единицей

$$\frac{1}{j^2} \frac{1 + 2(v^2/c^2) - (vv_0/c^2)}{1 + (vv_0/c^2)} < \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_H < \frac{1}{j^2} \left(1 + 2 \frac{v}{c}\right). \quad (35)$$

Не вполне ясно, что означает физически возможность спонтанного излучения звука разрывом; весьма вероятно, что это свидетельствует о неустойчивости разрыва весьма своеобразного типа. Следует думать, что исследование устойчивости в этом случае во втором приближении принципиально позволило бы выяснить вопрос, однако задача в такой постановке сталкивается с большими математическими трудностями.

Результаты исследования устойчивости сведены в таблице, приводимой ниже.

Т а б л и ц а

Условие	Результат
$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_H < -\frac{1}{j^2}$	Абсолютная неустойчивость
$-\frac{1}{j^2} < \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_H < \frac{1}{j^2} \frac{1 + 2(v^2/c^2) - (vv_0/c^2)}{1 + (vv_0/c^2)}$	Устойчивость
$\frac{1}{j^2} \frac{1 + 2(v^2/c^2) - (vv_0/c^2)}{1 + (vv_0/c^2)} < \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_H < \frac{1}{j^2} \left(1 + 2 \frac{v}{c}\right)$	Возможность спонтанного излучения звука
$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_H > \frac{1}{j^2} \left(1 + 2 \frac{v}{c}\right)$	Абсолютная неустойчивость

3. Обсуждение результатов

Переходя теперь к обсуждению вопроса о возможности реального осуществления неустойчивости, мы не будем претендовать на исчерпывающий обзор типов адиабат Гюгонио, для которых выполняется условие неустойчивости; мы ограничимся рассмотрением наиболее простых видов адиабат. Рассмотрим вначале условия буквальной неустойчивости (33) и (34), при которых существует экспоненциально нарастающее со временем решение. Первое условие, означающее, что наклон касательной к адиабате Гюгонио отрицателен и по модулю меньше наклона прямой Михельсона, может осуществляться лишь в случае, когда производная $(\partial p / \partial V)_H$,

отрицательная на начальном участке адиабаты вблизи точки p_0, V_0 , переходя через бесконечность, меняет знак на положительный и затем, переходя через нуль, опять становится отрицательной. На рис. 1 и 2 мы схематически изобразили формы адиабат Гюгонио для волн сжатия и разрежения, соответственно, при которых это условие может выполняться. На участке ab выполняется условие неустойчивости (33).

Условие (34) менее жесткое, так как оно не требует обращения $(\partial p / \partial V)_H$ в нуль, выполняется в области положительности производной $(\partial p / \partial V)_H$ и требует лишь, чтобы наклон адиабаты был достаточно мал. На рис. 1 и 2 это условие обязательно выполняется на отрезках ca и bd ,

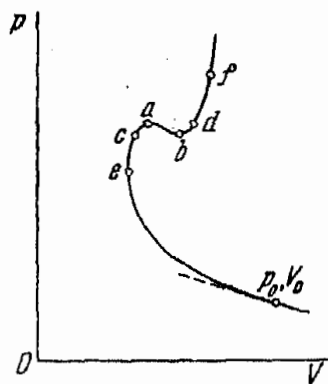


Рис. 1

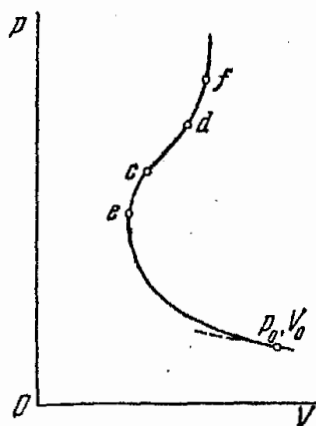


Рис. 3

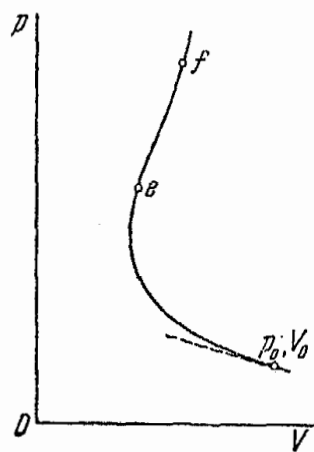


Рис. 5

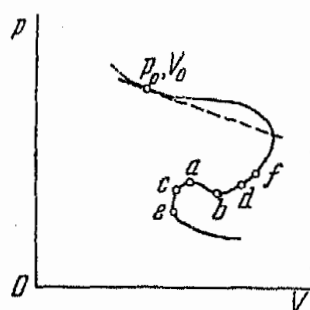


Рис. 2

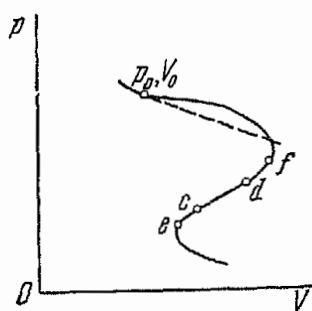


Рис. 4

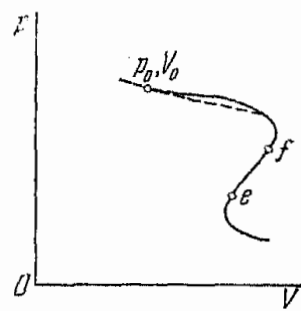


Рис. 6

непосредственно прилегающих к ab , и заметно расширяет область неустойчивости. Условие (34) может быть выполнено и для адиабат, схематично изображенных на рис. 3 и 4, для которых область типа ab вообще отсутствует; для этого необходимо лишь, чтобы наклон в окрестности точки перегиба был достаточно мал (отрезок cd).

Рассмотрение «перегибающихся» адиабат, имеющих точку касания с одной из прямых Михельсона, не представляет интереса в связи с проблемой устойчивости, так как участок, лежащий за точкой касания, не реализуется фактически в силу нарушения последнего из условий (1).

Рассмотрим теперь случай спонтанного излучения звука. Условие возможности спонтанного излучения звука (35) еще менее жестко, чем условие (34). Наличие на адиабате участка типа cd , на котором выполняется условие (34), автоматически обеспечивает существование прилегающих к cd с двух сторон участков (ec и df на рисунках), на которых выполняется условие (36). Таким образом условие спонтанного излучения звука еще дополнительно расширяет область неустойчивости.

Условие (36) может быть выполнено на дуге адиабаты, где $(\partial p / \partial V)_H > 0$, и при отсутствии участка типа cd (рис. 5 и 6); более того,

это условие может принципиально выполняться и в области, где $(\partial p / \partial V)_H < 0$, если при этом

$$c^2 < vv_0 - 2v^2.$$

Поэтому, точка f на рис. 3 и 5 может в принципе лежать сколь угодно высоко на адиабате, а точка e может лежать ниже той точки адиабаты, где касательная к ней вертикальна. Более того, участок типа ef может существовать на адиабате обычной формы, где производная $(\partial p / \partial V)_H$ всюду отрицательна (рис. 7, 8).

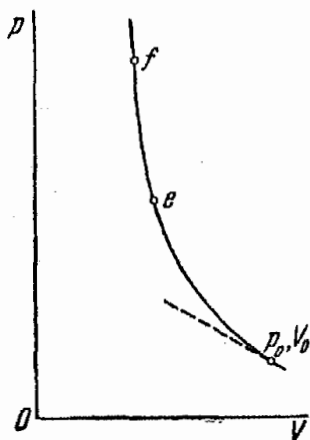


Рис. 7

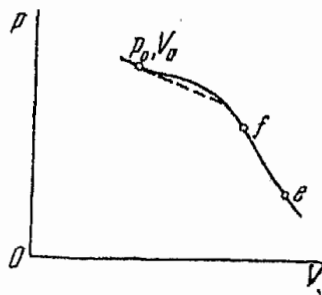


Рис. 8

Интересно поставить вопрос о возможности экспериментального наблюдения неустойчивости ударных волн. По всей вероятности, весьма трудно указать вещества с адиабатами Гюгонио типа изображенных на рис. 1—2. Значительно более реальные случаи, изображенные на рис. 3, 5, 7. Адиабаты формы рис. 3, 5 должны наблюдаться в двух- и многоатомных газах, диссоциирующих при повышении температуры; адиабата типа изображенной на рис. 7 является обычной. Численные расчеты для адиабат таких типов, позволяющие выяснить возможность выполнения условий неустойчивости, были бы весьма полезными.

Выводы

1. Рассмотрена задача об устойчивости ударных волн в произвольной среде.
2. Найдены условия неустойчивости ударных волн, при выполнении которых происходит экспоненциальное нарастание возмущений со временем.
3. Обнаружено своеобразное явление спонтанного излучения звука ударной волной и определены условия возможности его осуществления.
4. Приводятся примеры форм адиабат Гюгонио, при которых возможно выполнение условий неустойчивости и возможности спонтанного излучения звука. Указывается, в каких веществах можно ожидать выполнение этих условий.

Автор весьма признателен акад. Л. Д. Ландау за ценные указания и постоянный интерес к работе.

Институт физических проблем
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
30 декабря 1953 г.

РАССЕЯНИЕ π -МЕЗОНОВ НА НУКЛОНАХ В ТЕОРИИ ЗАТУХАНИЯ

Г. Ф. Жарков

Рассмотрено рассеяние псевдоскалярных π -мезонов на нуклонах согласно ковариантной теории затухания с учетом произвольной смеси псевдоскалярной и псевдовекторной связей. Показано, что теорию затухания, так же как и теорию возмущений, невозможно согласовать с экспериментом, за исключением, быть может, узкого интервала энергий вблизи 30—40 MeV, где пока имеется недостаточно экспериментальных данных.

1. Введение

Экспериментальные данные по рассеянию π -мезонов свидетельствуют о том, что полное поперечное сечение рассеяния отрицательных мезонов быстро растет с энергией, достигает некоторого максимума и после этого начинает уменьшаться. Хотя эксперимент еще не обнаружил такого же поведения сечения для рассеяния положительных мезонов, однако многочисленная совокупность разнообразных опытных данных заставляет полагать, что и в этом случае сечение даст такую же качественную зависимость. Известно, однако, что теория возмущений приводит к неограниченному росту сечений с энергией (если рассматриваются взаимодействия, включающие производные полей) и не в состоянии объяснить проявляющийся в опыте характерный максимум сечений. Кроме того, теория возмущений дает неправильное отношение сечений рассеяния положительных и отрицательных π -мезонов, а также обладает и другими недостатками (см. обзор [1]). Известно также, что теория затухания устраняет неограниченный рост сечений и приводит к появлению некоторого максимума, вследствие чего она имеет качественное преимущество перед теорией возмущений. Однако было неясно, способна ли теория затухания привести к количественному согласию с экспериментом, может ли она объяснить энергетический ход и дать правильное отношение сечений. Для того чтобы ответить на эти вопросы, в настоящей работе задача о рассеянии π -мезонов исследуется при помощи решения интегрального уравнения теории затухания в ее ковариантной формулировке [2,3] для общего случая смеси псевдоскалярного и псевдовекторного взаимодействия.

2. Постановка задачи

Как известно, ковариантная теория затухания [1,3] исходит из системы двух уравнений, которые соответствуют точной постановке задачи рассеяния в квантовой теории волновых полей. Одно из них имеет вид

$$\bar{R} = \bar{K} - \frac{i}{2} \bar{K} \bar{R}, \quad (1)$$

где матрица $\bar{R}$ связана с обычной S -матрицей соотношением

$$S = 1 - i\bar{R},$$

а другое уравнение для оператора $\bar{K}$ можно представить в виде

$$\bar{K} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{K}_n, \quad (2)$$

где

$$\bar{K}_n = (-i/2)^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} H(x_1) \epsilon(\sigma_1 \sigma_2) H(x_2) \cdots H(x_n) dx_1 \cdots dx_n, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \epsilon(\sigma_1 \sigma_2) &= 1 \quad \text{при } \sigma_1 > \sigma_2, \\ \epsilon(\sigma_1 \sigma_2) &= -1 \quad \text{при } \sigma_1 < \sigma_2. \end{aligned} \quad (4)$$

В качестве оператора взаимодействия $H(x)$ возьмем инвариантное относительно поворотов в изотопическом пространстве выражение, соответствующее симметричной псевдоскалярной теории

$$H(x) = ig \bar{\psi} \gamma_5 \vec{\tau} \psi \vec{\phi} + i \frac{g'}{\mu} \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\mu \vec{\tau} \psi \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial x_\mu}, \quad (5)$$

где ψ — оператор нуклонного поля, ϕ — оператор мезонного поля, $\vec{\tau}$ — вектор изотопического спина нуклонов, γ_μ , γ_5 — обычные матрицы Дирака. Как уже отмечалось, система уравнений (1) и (2) соответствует точной формулировке проблемы рассеяния. Однако в этом виде задача слишком сложна, и при конкретном расчете приходится прибегать к некоторым упрощающим приближениям. Эти приближения могут состоять либо в том, что неточно решается уравнение (1), либо в том, что в разложении (2) удерживаются лишь первые члены, либо в приближенном рассмотрении обоих уравнений (1) и (2). В настоящей работе мы ограничимся членом $\bar{K}_2$ в разложении (2) и пренебрежем высшими членами, но уравнение (1) будет решено точно. Следует отметить, что в (5) опущен так называемый контактный член взаимодействия, который в рассматриваемом нами приближении не дает вклада в рассеяние мезонов.

Как известно, основное уравнение теории затухания (1) можно записать в матричном виде [2]

$$(p|\bar{R}|p_0) = (p|\bar{K}|p_0) - \frac{i}{2} (p|\bar{K}|q)(q|\bar{R}|p_0) \delta^4(Q - P_0) \Pi \frac{d^3q}{(2\pi)^3}. \quad (6)$$

При этом, используя равенство

$$\bar{K}_2 = iS_2, \quad (7)$$

где

$$S_2 = \frac{(-i)^2}{2!} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(x_1) \epsilon(\sigma_1 \sigma_2) H(x_2) dx_1 dx_2,$$

$$\epsilon(\sigma_1 \sigma_2) = 1 \quad \text{при } \sigma_1 > \sigma_2,$$

$$\epsilon(\sigma_1 \sigma_2) = 0 \quad \text{при } \sigma_1 < \sigma_2,$$

мы получаем для случая рассеяния мезона на нуклоне матричный элемент K от оператора $\bar{K}_2$ в виде:

$$\begin{aligned}
K = & -(2\pi)^4 \delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) b_{i_1}^*(k_2) b_{i_1}(k_1) \times \\
& \times \left[\bar{u}(p_2 s_2 t_2) \gamma_5 \left(g - i \frac{g'}{\mu} \hat{k}_2 \right) \frac{i(\hat{p}_1 + \hat{k}_1) - M}{(p_1 + k_1)^2 + M^2} \gamma_5 \left(g + i \frac{g'}{\mu} \hat{k}_1 \right) \times \right. \\
& \times u(p_1 s_1 t_1) (\tau_{i_1} \tau_{i_1})_{t_2 t_1} + \bar{u}(p_2 s_2 t_2) \gamma_5 \left(g + i \frac{g'}{\mu} \hat{k}_1 \right) \times \\
& \left. \times \frac{i(\hat{p}_1 - \hat{k}_2) - M}{(p_1 - k_2)^2 + M^2} \gamma_5 \left(g - i \frac{g'}{\mu} \hat{k}_2 \right) u(p_1 s_1 t_1) (\tau_{i_1} \tau_{i_2})_{t_2 t_1} \right]. \quad (8)
\end{aligned}$$

В (8) обозначено:

$$k = \{\mathbf{k}, i\varepsilon_k\}, \quad \hat{k} = k_\mu \gamma_\mu, \quad \varepsilon_k = \sqrt{\mu^2 + k^2},$$

μ — масса мезона, $\mathbf{k}$ — импульс мезона, $p = \{\mathbf{p}, iE_p\}$, $E_p = \sqrt{M^2 + p^2}$, M — масса нуклона, $\mathbf{p}$ — импульс нуклона, s — спин нуклона, t — изотопический спин нуклона, i — изотопическое состояние мезона, b_i — амплитуда мезона. Индекс 1 соответствует состоянию до рассеяния, индекс 2 — после рассеяния. Переходя в систему центра инерции, характеризуемую равенством

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{p}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{p}_2 = 0, \quad (9)$$

мы можем записать уравнение (1) для случая рассеяния мезона на нуклоне в виде

$$\begin{aligned}
R(k' s_2 t_2 i_2 | k s_1 t_1 i_1) = & K(k' s_2 t_2 i_2 | k s_1 t_1 i_1) - \\
& - \frac{i}{2} \frac{E_k \varepsilon_k}{(E_k + \varepsilon_k)} \frac{k}{(2\pi)^6} \frac{2\pi}{\varepsilon_k} \int d\Omega_q K(k' s_2 t_2 i_2 | q s' t' i') R(q s' t' i' | k s_1 t_1 i_1), \quad (10)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
K(k' s_2 t_2 i_2 | k s_1 t_1 i_1) = & (2\pi)^4 \delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) \times \\
& \times \left[\bar{u}_2 \frac{A_1 \gamma_4 + B_1}{2\varepsilon_k W - \mu^2} u_1 (\tau_{i_1} \tau_{i_1})_{t_2 t_1} + \bar{u}_2 \frac{A_2 \gamma_4 + B_2}{2\varepsilon_k E_k - \mu^2 + 2k^2 \cos \vartheta_{kk'}} u_1 (\tau_{i_1} \tau_{i_2})_{t_2 t_1} \right]. \quad (11)
\end{aligned}$$

Величины A_1 , A_2 , B_1 , B_2 определены соотношениями

$$A_1 + B_1 = (W - M) \left[g - g' \frac{(W - M)}{\mu} \right]^2; \quad (12)$$

$$(A_1 - B_1) = (W + M) \left[g + g' \frac{(W + M)}{\mu} \right]^2; \quad (12')$$

$$\begin{aligned}
A_2 + B_2 = & (W - M) \left[g + g' \frac{(W - M)}{\mu} \right]^2 - \\
& - 2 \left[\frac{2gg'}{\mu} + \frac{g'^2}{\mu} \frac{(W + M)}{\mu} \right] [(W - M)^2 - \varepsilon^2 + k^2 \cos \vartheta_{kk'}], \quad (13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 - B_2 = & (W + M) \left[g - g' \frac{(W + M)}{\mu} \right]^2 - \\
& - 2 \left[-\frac{2gg'}{\mu} + \frac{g'^2}{\mu} \frac{(W - M)}{\mu} \right] [(W + M)^2 - \varepsilon^2 + k^2 \cos \vartheta_{kk'}]. \quad (13')
\end{aligned}$$

W обозначает полную энергию системы

$$W = E_k + \varepsilon_k. \quad (14)$$

Интегральное уравнение (10) является основным для нашей задачи. Найдя амплитуду рассеяния R из (10), мы по формуле

$$d\sigma = \frac{\varepsilon_k^2 E_k^2}{W^2} \frac{d\Omega}{(2\pi)^2} \frac{1}{2} \sum_{\text{спин}} |R|^2 \quad (15)$$

получим сечения для рассеяния π -мезонов на нуклонах с учетом затухания.

3. Решение интегрального уравнения

Для решения (10) удобно прежде всего отделить изотопические переменные. Для этой цели представим амплитуду рассеяния R в виде

$$R(\mathbf{k}' s_2 t_2 i_2 | \mathbf{k} s_1 t_1 i_1) = \\ = R_1(\mathbf{k}' s_2 | \mathbf{k} s_1) \Psi_m^{3/2*}(t_1 i_1) \Psi_m^{3/2}(t_2 i_2) + R_2(\mathbf{k}' s_2 | \mathbf{k} s_1) \Psi_m^{1/2*}(t_1 i_1) \Psi_m^{1/2}(t_2 i_2), \quad (16)$$

где $\Psi_m^{3/2}$ и $\Psi_m^{1/2}$ — собственные функции оператора полного изотопического момента $\hat{I}$, соответствующие $I = 3/2$ и $I = 1/2$. Пользуясь соотношениями (ср., например, [4]):

$$(\tau_{i_2'} \tau_{i_1'})_{t_2' t_1'} \Psi_m^{3/2}(t_2' i_2') = 0,$$

$$(\tau_{i_2'} \tau_{i_1'})_{t_2' t_1'} \Psi_m^{1/2}(t_2' i_2') = 3\Psi_m^{1/2}(t_2 i_2),$$

$$\tau_i \tau_j + \tau_j \tau_i = 2\delta_{ij},$$

легко получить после подстановки (16) в (10) уравнения для амплитуд R_1 и R_2 :

$$R_1(\mathbf{k}' s_2 | \mathbf{k} s_1) = \Psi_m^{3/2*}(t_2 i_2) K(\mathbf{k}' s_2 t_2 i_2 | \mathbf{k} s_1 t_1 i_1) \Psi_m^{3/2}(t_1 i_1) - \\ - \frac{i}{2} \frac{E_k}{W} \frac{k}{2\pi} \int d\Omega_q 2M_2(\mathbf{k}' s_2 | \mathbf{q} s') R_1(\mathbf{q} s' | \mathbf{k} s_1); \quad (17)$$

$$R_2(\mathbf{k}' s_2 | \mathbf{k} s_1) = \Psi_m^{1/2*}(t_2 i_2) K(\mathbf{k}' s_2 t_2 i_2 | \mathbf{k} s_1 t_1 i_1) \Psi_m^{1/2}(t_1 i_1) - \\ - \frac{i}{2} \frac{E_k}{W} \frac{k}{2\pi} \int d\Omega_q [3M_1(\mathbf{k}' s_2 | \mathbf{q} s') - M_2(\mathbf{k}' s_2 | \mathbf{q} s')] R_2(\mathbf{q} s' | \mathbf{k} s_1). \quad (17')$$

$$M_1(\mathbf{k} s_2 | \mathbf{q} s') = \frac{1}{N_h^2} \frac{[(E_h + M)(A_1 + B_1) + (\vec{\sigma} \mathbf{k})(\vec{\sigma} \mathbf{q})(A_1 - B_1)]_{s_2 s'}}{2\varepsilon_h W - \mu^2}; \quad (18)$$

$$M_2(\mathbf{k}' s_2 | \mathbf{q} s') = \frac{1}{N_h^2} \frac{[(E_h + M)(A_2 + B_2) + (\vec{\sigma} \mathbf{k}')(\vec{\sigma} \mathbf{q})(A_2 - B_2)]_{s_2 s'}}{2\varepsilon_h E_h - \mu^2 + 2k^2 \cos \vartheta_{qh'}}, \quad (18')$$

$$N_h = \sqrt{2E_h(E_h + M)}.$$

При получении (18) и (18') мы использовали соотношения:

$$\bar{u}(\mathbf{p} s) u(\mathbf{q} s') = (1/N_p N_q) [(E_p + M)(E_q + M) - (\vec{\sigma} \mathbf{p})(\vec{\sigma} \mathbf{q})]_{ss'},$$

$$\bar{u}(\mathbf{p} s) \gamma_4 u(\mathbf{q} s') = (1/N_p N_q) [(E_p + M)(E_q + M) + (\vec{\sigma} \mathbf{p})(\vec{\sigma} \mathbf{q})]_{ss'},$$

где σ_i — двухрядные матрицы Паули.

Для решения уравнений (17), (17') разложим R_1 и R_2 в ряд по функциям W_M^J , собственным для оператора полного момента:

$$R_1(\mathbf{q} s' | \mathbf{k} s_1) = \sum_{l, M} \{A_1(l) W_M^{J=l+1/2*}(\Omega_h s_1) W_M^{J=l+1/2}(\Omega_q s') + \\ + A_2(l) W_M^{J=l-1/2*}(\Omega_h s_1) W_M^{J=l-1/2}(\Omega_q s')\}; \quad (19)$$

$$R_2(qs' | ks_1) = \sum_{l, M} \{ B_1(l) W_M^{J=l+1/2*}(\Omega_h s_1) W_M^{J=l+1/2}(\Omega_q s') + \\ + B_2(l) W_M^{J=l-1/2*}(\Omega_h s_1) W_M^{J=l-1/2}(\Omega_q s') \}. \quad (19')$$

Функции W_M^J имеют следующий вид (см., например, [5]):

$$W_M^{J=l+1/2}(\Omega_s) = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} [\sqrt{l+M+1/2} Y_{M-1/2}^l(\Omega) S_{1/2}^{1/2}(s) - \\ - \sqrt{l-M-1/2} Y_{M+1/2}^l(\Omega) S_{-1/2}^{1/2}(s)], \quad (20) \\ W_M^{J=l-1/2}(\Omega_s) = \frac{1}{\sqrt{2l+1}} [\sqrt{l-M-1/2} Y_{M-1/2}^l(\Omega) S_{1/2}^{1/2}(s) + \\ + \sqrt{l+M+1/2} Y_{M+1/2}^l(\Omega) S_{-1/2}^{1/2}(s)],$$

где $S_{\pm 1/2}^{1/2}(s)$ — обычные спинные функции нуклона, соответствующие проекции спина на ось z , равной $\pm 1/2$, Y_m^l — нормированные шаровые функции. Представим далее величину $[2\varepsilon_h E_h - \mu^2 + 2k^2 \cos \vartheta_{h'q}]^{-1}$, входящую в (18'), в виде

$$[2\varepsilon_h E_h - \mu^2 + 2k^2 \cos \vartheta_{h'q}]^{-1} = \sum_n \frac{2n+1}{2} K_n P_n(\cos \vartheta_{h'q}), \quad (21)$$

где $P_n(\cos \vartheta)$ — полином Лежандра, нормированный условием

$$\int_{-1}^{+1} P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1},$$

и используем соотношение

$$P_n(\cos \vartheta_{h'q}) = \sum_m \frac{4\pi}{2n+1} Y_m^{n*}(\Omega_q) Y_m^n(\Omega_{h'}), \quad (22)$$

имеющее место при

$$\cos \vartheta_{h'q} = \cos \vartheta_{h'} \cos \vartheta_q + \sin \vartheta_{h'} \sin \vartheta_q \cos(\varphi_{h'} - \varphi_q). \quad (23)$$

Подставив (18) — (23) в (17) и (17'), можно легко провести интегрирование по углам и получить

$$\sum \{ A_1(l) W_M^{J=l+1/2*}(\Omega_h s_1) W_M^{J=l+1/2}(\Omega_{h'} s_2) + \\ + A_2(l) W_M^{J=l-1/2*}(\Omega_h s_1) W_M^{J=l-1/2}(\Omega_{h'} s_2) \} = \\ = \Psi_m^{1/2}(t_2 i_2) K(k' s_2 t_2 i_2 | k s_1 t_1 i_1) \Psi_m^{1/2}(t_1 i_1) - \\ - \frac{i}{2} \frac{E_h}{W} \frac{k}{2\pi} \frac{4\pi}{N_h^2} \sum \{ A_1(l) F_1(l) W_M^{J=l+1/2*}(\Omega_h s_1) W_M^{J=l+1/2}(\Omega_{h'} s_2) + \\ + A_2(l) F_2(l) W_M^{J=l-1/2*}(\Omega_h s_1) W_M^{J=l-1/2}(\Omega_{h'} s_2) \}, \quad (24)$$

$$\sum \{ B_1(l) W_M^{J=l+1/2*}(\Omega_h s_1) W_M^{J=l+1/2}(\Omega_{h'} s_2) + \\ + B_2(l) W_M^{J=l-1/2*}(\Omega_h s_1) W_M^{J=l-1/2}(\Omega_{h'} s_2) \} = \\ = \Psi_m^{1/2}(t_2 i_2) K(k' s_2 t_2 i_2 | k s_1 t_1 i_1) \Psi_m^{1/2}(t_1 i_1) - \\ - \frac{i}{2} \frac{E_h}{W} \frac{k}{2\pi} \frac{2\pi}{N_h^2} \sum \{ B_1(l) F_3(l) W_M^{J=l+1/2*}(\Omega_h s_1) W_M^{J=l+1/2}(\Omega_{h'} s_2) + \\ + B_2(l) F_4(l) W_M^{J=l-1/2*}(\Omega_h s_1) W_M^{J=l-1/2}(\Omega_{h'} s_2) \}, \quad (24')$$

где

$$F_1(l) = a(E+M)K_l + b(E+M) \left(\frac{l+1}{2l+1} K_{l+1} + \frac{l}{2l+1} K_{l-1} \right) +$$

$$+ a' (E - M) K_{l+1} + b' (E - M) \left(\frac{l+2}{2l+3} K_{l+1} + \frac{l+1}{2l+3} K_l \right); \quad (25)$$

$$F_2(l) = a (E + M) K_l + b (E + M) \left(\frac{l+1}{2l+1} K_{l+1} + \frac{l}{2l+1} K_{l-1} \right) + \\ + a' (E - M) K_{l-1} + b' (E - M) \left(\frac{l}{2l-1} K_l + \frac{l-1}{2l-1} K_{l-2} \right); \quad (25')$$

$$F_3(l) = - \frac{6}{2\varepsilon_h W - \mu^2} (A_1 + B_2) (E + M) \delta(l) - F_1(l); \quad (26)$$

$$F_4(l) = - \frac{6}{2\varepsilon_h W - \mu^2} (A_1 - B_1) (E - M) \delta(l-1) E_2(l); \quad (26')$$

$$\delta(l) = 0 \text{ при } l \neq 0 \text{ и } \delta(l) = 1 \text{ при } l = 0.$$

Величины a, b, a', b' находятся из (13) и (13') при помощи тождеств:

$$A_2 + B_2 \equiv a + b \cos \vartheta, \quad A_2 - B_2 = a' + b' \cos \vartheta,$$

K_l находятся из (21).

Из (24), (24') легко определить искомые коэффициенты $A(l)$ и $B(l)$. Для этого умножаем, например, (24) на $W_M^{J=l+1/2}(\Omega_h s_1) W_M^{J=l+1/2*}(\Omega_{h'} s_2)$, суммируем по s_1 и s_2 и интегрируем по Ω_h и $\Omega_{h'}$. Появляющееся после этого выражение

$$\sum_{s_1 s_2} \int d\Omega_h d\Omega_{h'} \Psi_m^{s_1 s_2}(t_2 i_2) W_M^{J=l+1/2*}(\Omega_{h'} s_2) \times \\ \times K(k' s_2 t_2 i_2 | k s_1 t_1 i_1) W_M^{J=l+1/2}(\Omega_h s_1) \Psi_m^{s_1 s_2}(t_1 i_1)$$

вычисляется при помощи разложения величины $K(k' s_2 t_2 i_2 | k s_1 t_1 i_1)$ по собственным функциям полного момента совершенно так же, как вычислялся интегральный член уравнения (10), и оказывается равным

$$(2\pi)^4 \delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2) (2\pi)^2 (1/E_h \varepsilon_h) F_1(l).$$

Пользуясь ортонормированностью функций W_M^J , мы получаем из (24) выражение для $A_1(l)$. Остальные коэффициенты находятся аналогично и имеют вид:

$$A_1(l) = \rho \frac{G' F_1(l)}{1 - i G F_1(l)}, \quad A_2(l) = \rho \frac{G' F_2(l)}{1 - i G F_2(l)}, \\ B_1(l) = \rho \frac{1/2 G' F_3(l)}{1 - (i/2) G F_3(l)}, \quad B_2(l) = \rho \frac{1/2 G' F_4(l)}{1 - (i/2) G F_4(l)}, \quad (27)$$

где:

$$G' = (2\pi)^2 / E_h \varepsilon_h, \quad G = k / 2W, \quad \rho = (2\pi)^4 \delta(p_1 + k_1 - p_2 - k_2). \quad (28)$$

Формулы (15), (16), (19), (27) позволяют без труда найти сечения для рассеяния мезонов на нуклонах.

4. Вычисление дифференциальных и полных сечений

Рассмотрим рассеяние положительных π -мезонов на протонах. В этом случае амплитуда рассеяния дается величиной R_1 [1], и мы имеем¹

$$d\sigma^{(+)} = \frac{\varepsilon_h^2 E_h^2}{W^2} \frac{d\Omega}{(2\pi)^2} \frac{1}{2} \sum_{\text{спин}} |R_1|^2 =$$

¹ При вычислении сечений по формуле (15) следует, как обычно, опустить появляющийся у R множитель $\rho = (2\pi)^4 \delta(p_1 + p_1 - k_2 - k_2)$.

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\pi}{k^2} \left\{ \sum_l (|\alpha_1|^2 [(l+1)^2 (P_l)^2 + (P_1^l)^2] + |\alpha_2|^2 [l^2 (P_l)^2 + (P_1^l)^2] + \right. \\
&\quad + (\alpha_1 \alpha_2^* + \text{к. с.}) [(l+1)l (P_l)^2 + (P_1^l)^2]) + \\
&\quad + \sum_{l_1} \sum_{l' < l''} ((\alpha_1 \alpha_1'^* + \text{к. с.}) [(l+1)(l'+1) P_l P_{l'} + P_1^l P_1^{l'}] + \\
&\quad + (\alpha_2 \alpha_2'^* + \text{к. с.}) [l l' P_l P_{l'} + P_1^l P_1^{l'}] + (\alpha_1 \alpha_2'^* + \text{к. с.}) [(l+1)l' P_l P_{l'} - P_1^l P_1^{l'}] + \\
&\quad \left. + (\alpha_2 \alpha_1'^* + \text{к. с.}) [l(l'+1) P_l P_{l'} - P_1^l P_1^{l'}] \right\} \sin \vartheta d\vartheta, \quad (29)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \equiv \alpha_1(l) &= \frac{GF_1(l)}{1 - iGF_1(l)}; & \alpha_2 \equiv \alpha_2(l) &= \frac{GF_2(l)}{1 - iGF_2(l)}; \\
\alpha' &\equiv \alpha(l').
\end{aligned} \quad (30)$$

$P_l(\cos \vartheta)$ и $P_1^l(\cos \vartheta)$ — обычный и первый присоединенный полиномы Лежандра, ϑ — угол рассеяния.

В случае упругого рассеяния отрицательных π -мезонов на протонах амплитуда рассеяния равна $1/3(R_1 + 2R_2)$, и для сечения $d\sigma^{(-,-)}$ получается формула, отличающаяся от (29) наличием множителя $1/9$ и тем, что величины $\alpha_1(l)$ и $\alpha_2(l)$ заменяются соответственно на

$$\beta_1(l) = \frac{GF_1(l)}{1 - iGF(l)} + \frac{GF_3(l)}{1 - (i/2)GF_3(l)} \quad (31)$$

и

$$\beta_2(l) = \frac{GF_2(l)}{1 - iGF_2(l)} + \frac{GF_4(l)}{1 - (i/2)GF_4(l)}.$$

В случае рассеяния отрицательных π -мезонов с перезарядкой на протонах амплитуда рассеяния равна $(\sqrt{2}/3)(R_1 - R_2)$ и для сечения $d\sigma^{(-,0)}$ получается формула, отличающаяся от (30) наличием множителя $2/9$ и тем, что величины $\alpha_1(l)$ и $\alpha_2(l)$ заменяются соответственно на

$$\begin{aligned}
\gamma_1(l) &= \frac{GF_1(l)}{1 - iGF_1(l)} - \frac{1/2 GF_3(l)}{1 - (i/2)GF_3(l)}, \\
\gamma_2(l) &= \frac{GF_2(l)}{1 - iGF_2(l)} - \frac{1/2 GF_4(l)}{1 - (i/2)GF_4(l)}.
\end{aligned} \quad (32)$$

Полные проинтегрированные по углам сечения имеют вид

$$\sigma^{(+)} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l \{ |\alpha_1(l)|^2 (l+1) + |\alpha_2(l)|^2 l \}, \quad (33)$$

$$\sigma^{(-,-)} = \frac{1}{9} \frac{4\pi}{k^2} \sum_l \{ |\beta_1(l)|^2 (l+1) + |\beta_2(l)|^2 l \}, \quad (34)$$

$$\sigma^{(-,0)} = \frac{2}{9} \frac{4\pi}{k^2} \sum_l \{ |\gamma_1(l)|^2 (l+1) + |\gamma_2(l)|^2 l \}. \quad (35)$$

Если в знаменателях в формулах (30) — (32) пренебречь величинами GF по сравнению с единицей, что соответствует случаю пренебрежения затуханием, то из (33) — (35) получаются выражения, совпадающие с результатами обычной теории возмущений².

² При этом формулы (33) и (34) имеют лишний коэффициент, равный 4, по сравнению, например, с [6]. Это обусловлено использованием нами изотопически инвариантной симметричной теории, что, как известно [7], приводит к константе взаимодействия, в $\sqrt{2}$ раз большей обычной константы.

В целях полноты приведем здесь дифференциальные сечения для рассеяния π -мезонов, вычисленные по теории возмущений. Эти сечения можно представить в виде

$$d\sigma = v(2\pi/W^2) \{ (E+M)^2(A+B)^2 + (E-M)^2(A-B)^2 + \\ + 2k^2 \cos \vartheta (A+B)(A-B) \} \sin \vartheta d\vartheta,$$

где в случае рассеяния $\pi^+ \rightarrow \pi^+$, $v=1$,

$$A+B = \frac{A_2+B_2}{2\varepsilon_k E_k - \mu^2 + 2k^2 \cos \vartheta}, \quad A-B = \frac{A_2-B_2}{2\varepsilon_k E_k - \mu^2 + 2k^2 \cos \vartheta};$$

в случае рассеяния $\pi^- \rightarrow \pi^-$, $v=1$,

$$A+B = \frac{A_1+B_1}{2\varepsilon_k W - \mu^2}; \quad A-B = \frac{A_1-B_1}{2\varepsilon_k W - \mu^2};$$

в случае рассеяния $\pi^- \rightarrow \pi^0$, $v=1/2$,

$$A+B = \frac{A_1+B_1}{2\varepsilon_k W - \mu^2} - \frac{A_2+B_2}{2\varepsilon_k E_k - \mu^2 + 2k^2 \cos \vartheta},$$

$$A-B = \frac{A_1-B_1}{2\varepsilon_k W - \mu^2} - \frac{A_2-B_2}{2\varepsilon_k E_k - \mu^2 + 2k^2 \cos \vartheta}.$$

5. Численные результаты, обсуждение и выводы

Полученные формулы (33) — (35) необходимо исследовать в том отношении, чтобы определенным выбором констант взаимодействия g и g' добиться возможно лучшего описания экспериментальных данных. Для того чтобы легче ориентироваться в том, какие значения констант представляются наиболее подходящими, удобно найти прежде всего отношение $\sigma^{(+)} / \sigma^{(-,-)}$, вычисленное в приближении пренебрежения затуханием, т. е. в приближении теории возмущений. На рис. 1 приведено это отношение в зависимости от величины g'/g для энергий падающего мезона (в лабораторной системе координат), равных, соответственно, 37, 56, 85, 135 MeV.

Таблица 1

Некоторые экспериментальные результаты по данным работ [8-16]

Энергия, MeV	$\sigma^{(+)} \cdot 10^{27} \text{ см}^2$	$\sigma^{(-,0)} \cdot 10^{27} \text{ см}^2$	$\sigma^{(-,0)} \cdot 10^{27} \text{ см}^2$
34			$5,0 \pm 1,5$
37	17 ± 4	3 ± 2	
55-58	$27,8 \pm 2,5$		
70	35 ± 15	$\sim 2,5$	21 ± 8
75-85	41 ± 15	~ 3	
82-89	50 ± 13		
120		$6,1 \pm 1,7$	$40,6 \pm 2,3$
135	121 ± 19	$16,2 \pm 2,3$	
136-16	152 ± 14		

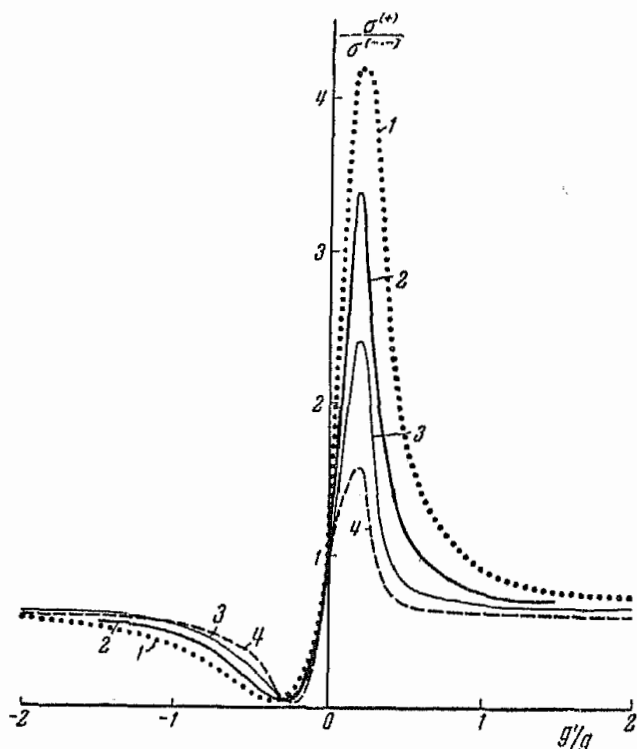
Экспериментальные данные [8-16] относительно этой величины можно получить из табл. 1, в которой приведены полные сечения $\sigma^{(+)}$ и $\sigma^{(-,-)}$ для различных энергий мезонов. Из табл. 1 следует, что отношение

Результаты теории

Энергия, MeV	$\sigma^{(+)} \cdot 10^{27} \text{ см}^2$	$\sigma^{(-, -)} \cdot 10^{27} \text{ см}^2$	$\sigma^{(-, 0)} \cdot 10^{27} \text{ см}^2$
	$g'/g = 1/3, g^2 = 1$		
37	18 (18)	4 (4)	7 (7)
85	25 (26)	12 (13)	13 (14)
135	35 (37)	20 (26)	18 (20)
~270	57	29	24
~500	52	31	14
~850	46	28	8

В таблице приводятся результаты расчета абсолютных величин сечений возмущений.

$\sigma^{(+)} / \sigma^{(-, -)}$ во всяком случае составляет несколько единиц. Из рис. 1 видно, что для теории наиболее благоприятна область значений вели-



чины g'/g вблизи $g'/g \sim \sim 1/5 \div 1/3$, при остальных значениях g'/g получается резкое расхождение с экспериментом. По формулам, соответствующим пренебрежению затуханием, легко также найти зависимость $\sigma^{(+)}(\epsilon) / \sigma^{(+)}(\epsilon')$ для разных энергий ϵ и ϵ' . Так, например, при $g'/g = 1/3$:

Рис. 1. Отношение сечений $\sigma^{(+)} / \sigma^{(-, -)}$ в зависимости от g'/g , вычисленное по теории возмущений для энергий в лабораторной системе координат: 1—37 MeV, $k=0,657$; 2—85 MeV, $k=0,822$; 3—85 MeV, $k=1,032$; 4—135 MeV, $k=1,341$ (—кимпультс в единицах μ)

$$\sigma^{(+)}(37 \text{ MeV}) : \sigma^{(+)}(85 \text{ MeV}) : \sigma^{(+)}(135 \text{ MeV}) = 1 : 1,5 : 2, \quad (36)$$

в то время как эксперимент дает для этих энергий отношение $\sim 1 : 3 : 8$. При меньших g'/g расхождение еще более увеличивается, что естественно, так как с уменьшением величины g'/g уменьшается вклад псевдовекторного взаимодействия, дающего рост сечения с энергией по сравнению с псевдоскалярным, дающим падение сечения [17]. При $g'/g = 1$ отношение (36) равно $1 : 3 : 6,5$, что лучше согласуется с экспериментом, однако в этом случае невозможно согласовать отношение $\sigma^{(+)} / \sigma^{(-, -)}$, что видно из рис. 1. Таким образом теория возмущений, очевидно, не может объяснить эксперименты по рассеянию мезонов на нуклонах. Из приведенных ниже в табл. 2 данных следует, что учет затухания не меняет этого отрицательного вывода: в том приближении теории затухания, которое использовалось в настоящей работе, невозможно согласовать теоретические и экспери-

Таблица 2

ческого расчета		
$\sigma^{(+)} \cdot 10^{27} \text{ см}^2$	$\sigma(-, -) \cdot 10^{27} \text{ см}^2$	$\sigma(-, 0) \cdot 10^{27} \text{ см}^2$
$g'/g = 1, g^2 = 0,1$		
21 (21)	16 (17)	13 (13)
61 (67)	47 (66)	35 (43)
95 (131)	60 (131)	47 (87)
120	73	39
108	76	13
84	54	4

согласно теории затухания. Цифры в скобках соответствуют расчету по теории

ментальные отношения сечений и одновременно получить удовлетворительную зависимость сечений от энергии.

Можно предположить, что наблюдаемый быстрый рост $\sigma^{(+)}$ с энергией обусловлен влиянием изобарного состояния нуклона, не учитываемого теорией затухания, и что при помощи этой теории можно попытаться описать экспериментальные данные лишь при достаточно малых энергиях, где еще не сказывается наличие изобарного состояния, и при достаточно больших энергиях, где роль изобарного состояния может быть уже несущественной.

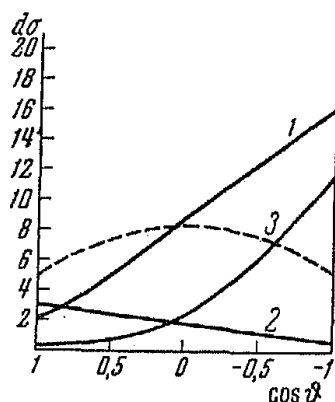


Рис. 2. Угловые распределения мезонов в системе центра инерции, вычисленные по теории возмущений для энергии, соответствующей 37 MeV в лабораторной системе координат; $g'/g = 1/3$, $g^2 = 1$, симметричная теория. 1— $d\sigma^{(+)}$, 2— $d\sigma^{(-,-)}$, 3— $d\sigma^{(-,0)}$, пункт — $d\sigma^{(-,0)}$ по несимметричной теории

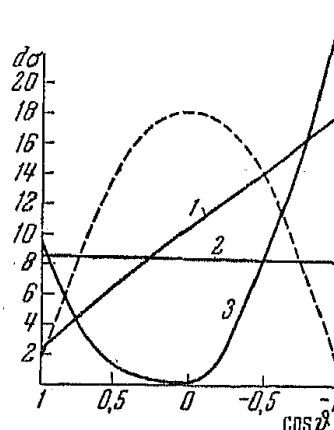


Рис. 3. Угловые распределения мезонов в системе центра инерции, вычисленные по теории возмущений для энергии, соответствующей 37 MeV в лабораторной системе координат; $g'/g = 1/3$, $g^2 = 0,1$, симметричная теория. 1— $d\sigma^{(+)}$, 2— $d\sigma^{(-,-)}$, 3— $d\sigma^{(-,0)}$, пункт — $d\sigma^{(-,0)}$ по несимметричной теории

В промежуточной области энергий, наряду с учетом изобарного состояния, представляет интерес исследовать также и те выводы, которые можно получить при помощи более точного рассмотрения системы уравнений (1), (2), чем это сделано в настоящей работе, ввиду того, что остается не вполне ясным, обусловлено ли расхождение

теории с экспериментом неучетом изобарного состояния, или сделанными приближениями, или же какими-то другими причинами.

Поскольку совершенно ясно, что борновское приближение теории возмущений не годится для описания экспериментальных данных при больших энергиях, а при совсем малых энергиях становятся существенными не учитываемые эффекты кулоновского взаимодействия, а также специфическое ядерное взаимодействие между мезоном и нуклоном [4], то можно предположить, что теория возмущений имеет отношение к действительности лишь в узком интервале энергии вблизи, например, $\epsilon \sim 30-40$ MeV.

Представляет некоторый интерес исследовать в этой области предсказания теории возмущений относительного углового распределения и отношения сечений.

На рис. 2 и 3 приведена зависимость сечений $d\sigma^{(+)}$, $d\sigma^{(-,-)}$ и $d\sigma^{(-,0)}$ от угла рассеяния в системе центра инерции, вычисленная при $g'/g=1/3$, $g'/g=1$ и $\epsilon=37$ MeV. Затухание при такой энергии сказывается слабо, поэтому результаты теории затухания совпадают с результатами, вычисленными по теории возмущений. Там же приведены угловые распределения $d\sigma^{(-,0)}$ для случая несимметричной псевдоскалярной теории, в которой заряд нейтрального мезона по отношению к протону и нейтрону имеет одинаковый знак.

Угловая зависимость $d\sigma^{(+)}$, повидимому, не противоречит эксперименту [18]. К сожалению, в настоящее время не имеется данных относительно угловых распределений при рассеянии $\pi^- \rightarrow \pi^-$ и $\pi^- \rightarrow \pi^0$ при малых энергиях ~ 40 MeV, что позволило бы провести более полное сравнение теории с экспериментом. Такие данные были бы интересны прежде всего в том отношении, что они позволили бы определить, имеется ли хотя ограниченная область применимости теории возмущений для описания рассеяния мезонов при достаточно малых энергиях.

В заключение пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность проф. М. А. Маркову за интерес к работе и ценные советы.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
1 декабря 1953 г.

Литература

- [1] В. П. Силин и В. Я. Файнберг. Усп. физ. наук, 50, 325, 1953.—[2] N. Fukuda a. T. Miyazima. Progr. Theor. Phys., 5, 849, 1950.—[3] J. Pirenne. Phys. Rev., 86, 395, 1951.—[4] В. П. Силин. ЖЭТФ, 24, 389, 1953.—[5] Ван-дер-Варден. Теория групп в квантовой механике, Гостехиздат, 1938.—[6] И. Я. Померанчук и В. Б. Берестецкий. ЖЭТФ, 21, 1313, 1951.—[7] Г. Вентцель. Введение в квантовую теорию волновых полей, Гостехиздат, 1947.—[8] H. Anderson, E. Fermi и др. Phys. Rev., 85, 934, 1952.—[9] P. J. Isaaks и др. Phys. Rev., 85, 803, 1952.—[10] G. Goldhaber. Phys. Rev., 87, 220, 1952.—[11] E. Fowler и др. Phys. Rev., 86, 1053, 1952.—[12] H. Anderson, E. Fermi и др. Phys. Rev., 86, 413, 1952.—[13] G. Goldhaber. Phys. Rev., 89, 1117, 1953.—[14] A. Roberts a. J. Tinlot. Phys. Rev., 90, 951, 1953.—[15] E. Fowler и др. Phys. Rev., 91, 135, 1953.—[16] H. Anderson, E. Fermi и др. Phys. Rev., 91, 155, 1953.—[17] I. Ashkin, A. Simon, M. Marshak. Progr. Theor. Phys., 5, 634, 1950.—[18] J. Reny a. C. Angel. Phys. Rev., 91, 1289, 1953.

МАГНИТНЫЙ ПОТОК, СОЗДАВАЕМЫЙ ДИПОЛЕМ, НАХОДЯЩИМСЯ ВНУТРИ ФЕРРОМАГНИТНОЙ КРУГЛОЙ ПРОВОЛОКИ

С. М. Рытов

Получено общее выражение для потока индукции от магнитного диполя, находящегося внутри ферромагнитной бесконечной круглой проволоки. Вычислен поток через круглую площадку с центром на оси проволоки и перпендикулярную к ней. Дана приближенная формула для случая, когда радиусы проволоки и площадки малы по сравнению с расстоянием последней от диполя.

Для обсуждения результатов опытов, в которых баллистически измеряется импульс э.д.с., создаваемый перемагничиванием отдельного домена в ферромагнитной проволоке [1], нужно знать, как выражается для какого-либо сечения проволоки поток магнитной индукции, обусловленный отдельным доменом.

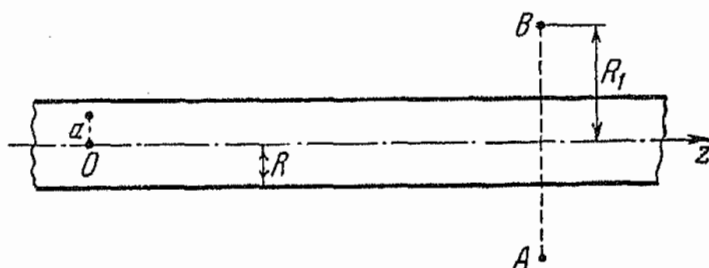


Рис. 1

Пусть имеется бесконечная круглая проволока из материала с проницаемостью μ и в сечении $z = 0$ на расстоянии a от оси находится малый объем с заданным магнитным моментом p (рис. 1). Требуется найти магнитный поток через круглую площадку AB , вообще говоря, превышающую сечение проволоки. Очевидно, для расстояний z , больших по сравнению с размерами домена, можно считать последний точечным диполем. В свою очередь, задача для диполя тотчас же сводится к аналогичной задаче для точечного заряда. Действительно, допустим, что мы нашли интересующий нас магнитный поток для точечного заряда m . Очевидно, этот поток будет зависеть только от z и a , но не от азимутальной координаты заряда:

$$\Phi = mf(a, z). \quad (1)$$

Для второго заряда $(-m)$, удаленного от оси проволоки на расстояние $a - \Delta a$ и от сечения $z = 0$ на расстояние $-\Delta z$, поток через AB будет

$$\Phi' = -mf(a - \Delta a, z + \Delta z).$$

Если учесть, что $p_r = m\Delta a$ и $p_z = m\Delta z$, то для потока, обусловленного диполем, получим

$$\Phi_{\text{дип}} = \Phi + \Phi' = p_r \frac{\partial f}{\partial a} - p_z \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (2)$$

При отыскании $f(a, z)$ можно считать, что заряд не сосредоточен в точке, а распределен по окружности радиуса a , т. е. можно взять

для объемной плотности заряда выражение $\frac{m}{2\pi a} \delta(r-a) \delta(z)$ и, соответственно, искать магнитный потенциал ψ , не зависящий от азимута. Внутри проволоки потенциал удовлетворяет, таким образом, уравнению Пуассона:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} = - \frac{4\pi}{\mu} \frac{m}{2\pi a} \delta(r-a) \delta(z),$$

а вне проволоки — уравнению Лапласа:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi_2}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} = 0.$$

На поверхности проволоки ($r = R$), поскольку $\mathbf{H} = -\nabla\psi$, должны выполняться граничные условия

$$\psi_1 = \psi_2, \quad \mu \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = \frac{\partial \psi_2}{\partial r}.$$

Так как ψ является четной функцией z , будем искать потенциал в виде следующих интегралов Фурье:

$$\begin{aligned} \psi_1(r, z) &= \int_0^\infty u(\lambda, r) \cos \lambda z d\lambda, \\ \psi_2(r, z) &= \int_0^\infty v(\lambda, r) \cos \lambda z d\lambda. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя эти разложения в написанные выше уравнения и граничные условия, учитывая при этом, что

$$\delta(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos \lambda z d\lambda,$$

и вводя обозначения

$$\xi = \lambda r, \quad \alpha = \lambda a, \quad \rho = \lambda R, \quad (4)$$

получаем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{du}{d\xi} \right) - u &= - \frac{2m}{\pi\mu} \frac{\delta(\xi - \alpha)}{\alpha}, \\ \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left(\xi \frac{dv}{d\xi} \right) - v &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

с условиями при $\xi = \rho$:

$$u = v, \quad \mu \frac{du}{d\rho} = \frac{dv}{d\rho}. \quad (6)$$

Общее решение однородного уравнения для u есть

$$u = AI_0(\xi) + BK_0(\xi), \quad (7)$$

где I_0 — бесселева функция мнимого аргумента [$I_0(\xi) = J_0(i\xi)$], а K_0 — функция Макдональда, имеющая логарифмическую особенность при $\xi = 0$ и экспоненциально убывающая при $\xi \rightarrow \infty$. Методом вариации произвольных постоянных A и B нетрудно получить¹, что

¹ При этом используется соотношение $I'_0 K_0 - I_0 K'_0 = I_1 K_0 + I_0 K_1 = 1/\xi$, см. [2], стр. 95.

$$A' = -\frac{2m\xi}{\pi\mu\alpha} \delta(\xi - \alpha) K_0(\xi), \quad B' = \frac{2m\xi}{\pi\mu\alpha} \delta(\xi - \alpha) I_0(\xi).$$

Интегрируя эти выражения по ξ от 0 до ξ , получаем

$$A = \begin{cases} A_0 & (\xi < \alpha), \\ A_0 - \frac{2m}{\pi\mu} K_0(\alpha) & (\xi \geq \alpha), \end{cases} \quad B = \begin{cases} 0 & (\xi < \alpha), \\ \frac{2m}{\pi\mu} I_0(\alpha) & (\xi \geq \alpha). \end{cases}$$

Постоянная B_0 положена равной нулю, так как и должно быть конечным на оси проволоки ($\xi = 0$). Внося найденные выражения A и B в (7), получаем

$$u = \begin{cases} A_0 I_0(\xi) & (\xi < \alpha), \\ A_0 I_0(\xi) - \frac{2m}{\pi\mu} [K_0(\alpha) I_0(\xi) - I_0(\alpha) K_0(\xi)] & (\xi \geq \alpha). \end{cases} \quad (8)$$

Вне проволоки решение должно стремиться к нулю с ростом ξ . Мы берем поэтому для v выражение

$$v = CK_0(\xi). \quad (9)$$

Подставляя (8) и (9) в граничные условия (6), получаем два уравнения, из которых определяются постоянные A_0 и C :

$$A_0 = \frac{2m}{\pi\mu} \left[K_0(\alpha) + I_0(\alpha) \frac{(\mu - 1) K_0(\rho) K_1(\rho)}{I_0(\rho) K_1(\rho) + \mu I_1(\rho) K_0(\rho)} \right], \quad (10)$$

$$C = \frac{2m}{\pi\mu} \frac{I_0(\alpha)}{I_0(\rho) K_1(\rho) + \mu I_1(\rho) K_0(\rho)}.$$

Подсчитаем теперь магнитный поток через круглую площадку радиуса $R_1 \geq R$, расположенную в сечении z . Согласно (3) имеем

$$\begin{aligned} \Phi &= 2\pi \int_0^{R_1} B_z r dr = -2\pi \left\{ \mu \int_0^R \frac{\partial \psi_1}{\partial z} r dr + \int_R^{R_1} \frac{\partial \psi_2}{\partial z} r dr \right\} = \\ &= 2\pi \int_0^\infty \lambda \sin \lambda z d\lambda \left\{ \mu \int_0^R u r dr + \int_R^{R_1} v r dr \right\}. \end{aligned}$$

Подставляя сюда выражения (8) и (9) для u и v , получаем далее ($\rho_1 = \lambda R_1$):

$$\begin{aligned} \Phi &= 2\pi \int_0^\infty \frac{\sin \lambda z}{\lambda} d\lambda \left\{ \mu A_0 \int_0^\rho I_0(\xi) \xi d\xi - \frac{2m}{\pi} \int_\alpha^\rho [K_0(\alpha) I_0(\xi) - I_0(\alpha) K_0(\xi)] \xi d\xi + \right. \\ &\quad \left. + C \int_\rho^{\rho_1} K_0(\xi) \xi d\xi \right\} = 2\pi \int_0^\infty \frac{\sin \lambda z}{\lambda} d\lambda \left\{ \mu A_0 \rho I_1(\rho) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2m}{\pi} (\rho [K_0(\alpha) I_1(\rho) + I_0(\alpha) K_1(\rho)] - 1) - C [\rho_1 K_1(\rho_1) - \rho K_1(\rho)] \right\}, \end{aligned}$$

где вновь использовано соотношение $K_0(\alpha) I_1(\alpha) + I_0(\alpha) K_1(\alpha) = 1/\alpha$. Наконец, внося сюда значения (10) для A_0 и C , находим

$$\Phi = 4m \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda z}{\lambda} \left\{ 1 - \frac{I_0(\lambda a) K_1(\lambda R)}{I_0(\lambda R) K_1(\lambda R) + \mu I_1(\lambda R) K_0(\lambda R)} \right\} d\lambda - \\ - \frac{4m}{R} \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda z}{\lambda} \frac{I_0(\lambda a) [R_1 K_1(\lambda R_1) - R K_1(\lambda R)]}{I_0(\lambda R) K_1(\lambda R) + \mu I_1(\lambda R) K_0(\lambda R)} d\lambda. \quad (11)$$

Первый член дает поток через поперечное сечение проволоки, второй — через кольцевую поверхность между проволокой и внешним краем рассматриваемой площадки. Целесообразно объединить оба члена, что дает более простое окончательное выражение

$$\Phi = 4m \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda z}{\lambda} \left\{ 1 - \frac{R_1}{R} \frac{I_0(\lambda a) K_1(\lambda R_1)}{I_0(\lambda R) K_1(\lambda R) + \mu I_1(\lambda R) K_0(\lambda R)} \right\} d\lambda. \quad (12)$$

Проверим этот результат на некоторых частных случаях. При $\mu \rightarrow \infty$, когда весь поток концентрируется в проволоке, второй член исчезает, а первый дает

$$\Phi = 4m \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda z}{\lambda} d\lambda = 2\pi m,$$

как это и должно быть. При $\mu = 1$ (точечный заряд в воздухе) знаменатель второго члена равен $1/\lambda R$, и мы получаем

$$\Phi = 4m \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda z}{\lambda} \{ 1 - \lambda R_1 I_0(\lambda a) K_1(\lambda R_1) \} d\lambda = \\ = 2\pi m - 4m R_1 \int_0^{\infty} \sin \lambda z I_0(\lambda a) K_1(\lambda R_1) d\lambda.$$

Входящий сюда интеграл можно преобразовать следующим образом (см. [2], стр. 426):

$$P \equiv \int_0^{\infty} \sin \lambda z I_0(\lambda a) K_1(\lambda R_1) d\lambda = - \int_0^z dz \frac{\partial}{\partial R_1} \int_0^{\infty} \cos \lambda z I_0(\lambda a) K_0(\lambda R_1) d\lambda = \\ = - \int_0^z dz \frac{\partial}{\partial R_1} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{V z^2 + (R_1 + a)^2 - 4a R_1 \sin^2 \theta} = \\ = z \int_0^{\pi/2} \frac{(R_1 + a - 2a \sin^2 \theta) d\theta}{[(R_1 + a)^2 - 4a R_1 \sin^2 \theta] V z^2 + (R_1 + a)^2 - 4a R_1 \sin^2 \theta}.$$

Это выражение можно свести к полным эллиптическим интегралам, но в нашем случае a и R_1 малы по сравнению с z . Разлагая подынтегральное выражение по степеням $1/z$, нетрудно получить

$$P = \frac{\pi}{2R_1} \left(1 - \frac{R_1^2}{2z^2} \right)$$

и, следовательно,

$$\Phi = 2\pi m - 4m R_1 P = \frac{m}{z^2} \pi R_1^2,$$

т. е. мы получили поток через площадку πR_1^2 от удаленного на достаточно большое расстояние z точечного заряда m . Заметим, что сдвиг заряда с оси z (расстояние a) в этом приближении полностью выпадает. Если положить $a = 0$ в общем выражении для P , то получим

$$P = \frac{\pi z}{2R_1 \sqrt{z^2 + R_1^2}},$$

и, соответственно,

$$\Phi = 2\pi m \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R_1^2}} \right),$$

что дает и элементарный расчет.

Нас интересует $z \gg R_1$ (и, следовательно, $z \gg R$ и a). Замечая, что фактор $(\sin \lambda z)/\lambda$ в (12) практически обрезает подинтегральное выражение на $\lambda \sim 1/z$, т. е., когда аргументы цилиндрических функций порядка R_1/z , R/z , a/z , мы воспользуемся разложениями этих функций для малых аргументов (см. [2], стр. 91 и 95):

$$I_0(x) = 1 + \frac{x^2}{4} + \dots \approx 1, \quad I_1 = \frac{x}{2} \left(1 + \frac{x^2}{8} + \dots \right) \approx \frac{x}{2},$$

$$K_0(x) = -I_0(x) \ln \frac{x}{2} - \gamma + \frac{1-\gamma}{4} x^2 - \dots \approx \ln \frac{2}{x},$$

$$K_1(x) = \frac{1}{x} + \frac{x}{2} \left(\ln \frac{x}{2} - \frac{1-2\gamma}{2} \right) + \dots \approx \frac{1}{x} - \frac{x}{2} \ln \frac{2}{x}.$$

Здесь $\gamma = 0,5772157$ — постоянная Эйлера. С указанной точностью получаем из (12)

$$\Phi = 2m \int_0^\infty \left[(\mu - 1) R^2 \ln \frac{2}{\lambda R} + R_1^2 \ln \frac{2}{\lambda R_1} \right] \frac{\lambda \sin \lambda z d\lambda}{1 + (\mu - 1) (\lambda^2 R^2 / 2) \ln (2 / \lambda R)}. \quad (13)$$

Расстояние a здесь снова не фигурирует. Так как логарифм — медленно изменяющаяся функция, мы положим под знаком логарифма $\lambda = \pi / 2z$ (половина интервала до первого нуля $\sin \lambda z / \lambda$). Тогда (см. [3], стр. 185):

$$\Phi = 2m \left[(\mu - 1) R^2 \ln \frac{4z}{\pi R} + R_1^2 \ln \frac{4z}{\pi R_1} \right] \int_0^\infty \frac{\lambda \sin \lambda z d\lambda}{1 + (\mu - 1) (R^2 / 2) \ln (4z / \pi R) \lambda^2} =$$

$$\parallel 2\pi m \left[1 + \frac{R_1^2 \ln (4z / \pi R_1)}{(\mu - 1) R^2 \ln (4z / \pi R)} \right] \exp \left(- \frac{z}{R} \sqrt{\frac{2}{(\mu - 1) \ln (4z / \pi R)}} \right). \quad (14)$$

Заметим, что, уже начиная с (13), наши формулы пригодны только для $\mu > 1$. Если $\mu \gg 1$ и $R_1^2 \ll \mu R^2$ (это последнее условие не выполнялось в опытах, описанных в [1]), то

$$\Phi = 2\pi m e^{-z/D},$$

где

$$D = R \sqrt{\frac{\mu}{2} \ln \frac{4z}{\pi R}}.$$

Поскольку $f(a, z) = \Phi / m$ не зависит от a , формула (2) дает

$$\Phi_{\text{дип}} = \frac{2\pi p_z}{D} e^{-z/D}.$$

Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
28 декабря 1953 г.

Литература

[1] А. А. Грачев, К. А. Горонина, Н. Н. Колачевский и И. А. Андронova. ЖЭТФ, этот выпуск, стр. 313.—[2] Г. Н. Ватсон. Теория бесселевых функций, ч. I, ИИЛ, М., 1949.—[3] И. М. Рыжик и И. С. Градштейн. Таблицы интегралов, сумм и т. д., изд. 3-е, М., 1951.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ МАГНИТНОГО ПОТОКА В ПРОВОЛОКЕ ПРИ ПЕРЕМАГНИЧИВАНИИ ОДНОГО ДОМЕНА

А. А. Грачев, К. А. Горонина, Н. Н. Колачевский и И. А. Андрианова

Изложены результаты экспериментального исследования магнитного потока, созданного отдельным доменом в ферромагнитной проволоке.

При перемагничивании ферромагнитного образца периодическим полем в индикаторной катушке, навитой на этот образец, возникает э.д.с., имеющая дискретно-сплошной спектр [1]. Из-за неповторяемости процесса перемагничивания э.д.с. содержит кроме дискретных частот, кратных частоте перемагничивания, сплошной спектр. Ту часть э.д.с. которая имеет сплошной спектр, будем называть шумом. Оказалось, что шумы циклического перемагничивания в двух участках ферромагнитной проволоки частично коррелированы [2].

Можно указать две возможные причины корреляции.

1) При перемагничивании одного домена изменяется поток индукции вокруг этого домена. Если две индикаторные катушки расположены достаточно близко друг к другу, то в проволоке будут домены, каждый из которых наводит э. д. с. в обеих катушках. Это, очевидно, приведет к корреляции шумов. Корреляцию такого рода мы будем называть корреляцией потоком.

2) Вообще говоря, перемагничивание одного из доменов влияет на момент наступления перемагничивания других доменов и на ход процесса перемагничивания. Взаимодействие доменов приводит к корреляции флуктуаций перемагничивания взаимодействующих доменов. Следовательно, шумы в двух катушках будут коррелированы, если домены, наводящие э. д. с. в одной катушке, взаимодействуют с доменами, наводящими э. д. с. в другой катушке. Таковую корреляцию мы будем называть доменной.

Для того чтобы выяснить, насколько существенна первая причина корреляции, необходимо знать, как изменяется поток, созданный отдельным доменом, при удалении от домена. Изучение распределения потока домена представляет интерес также для магнитной звукозаписи. Звуковой сигнал записывают на специальную пленку или ферромагнитную проволоку. Число сигналов, записываемых на единицу длины пленки, не может быть сколь угодно большим. В конечном счете оно определяется расстоянием, на которое простирается поток индукции от намагниченного сигналом участка пленки. При большем числе сигналов на единицу длины пленки отдельный сигнал становится неразличимым. Это ограничивает наивысшую частоту, которую можно записать на пленку при данной скорости движения пленки.

Домен можно рассматривать как магнитный диполь, если нужно узнать поле домена на расстояниях, много больших его размеров. Рытовым [3] была решена задача о спадании потока индукции от магнитного диполя, находящегося в длинной проволоке с магнитной проницаемостью $\mu = B/H$, одинаковой для всех точек проволоки и не зависящей от величины H . Реальная ферромагнитная проволока состоит из областей, намагниченных до насыщения (доменов); связь между индукцией B и по-

лем H в проволоке определяется петлей гистерезиса. Эти особенности ферромагнетика делают невозможным строгий расчет поля диполя в реальной ферромагнитной проволоке. Поэтому важно выяснить, каково поле домена в реальной ферромагнитной проволоке и в какой мере оно отличается от поля, рассчитанного Рытовым. Если в ферромагнитной проволоке перемагничивается домен при некотором однородном внешнем поле H , то можно ожидать, что поток от домена в ферромагнитной проволоке будет мало отличаться от потока диполя в однородной проволоке с проницаемостью μ , равной обратимой проницаемости ферромагнетика при поле H .

Нами проведено экспериментальное исследование изменения магнитного потока при перемагничивании отдельного домена и сравнение полученных данных с теоретической формулой для поля диполя в однородной проволоке с проницаемостью μ , равной обратимой проницаемости. При измерении изменения потока домена мы исходили из следующего. Пусть в ферромагнитной проволоке находится домен. При изменении намагниченности этого домена изменится поток индукции Φ через сечение, перпендикулярное оси проволоки. Если в одном из сечений поместить индикаторную катушку, то в катушке возникает импульс э. д. с. $E(t)$, равный

$$E(t) = 10^{-8} n d\Phi / dt,$$

где n — число витков катушки.

Отсюда находим полное изменение магнитного потока при перемагничивании домена

$$\Phi = \frac{10^8}{n} \int_0^{\infty} E(t) dt.$$

Таким образом для определения Φ нужно измерить $\int_0^{\infty} E(t) dt$ при перемагничивании одного домена.

Для определения $\int_0^{\infty} E(t) dt$ мы снимали напряжение с индикаторной катушки, усиливали его и подавали на электронный осциллограф типа ЭО-4. Длительность импульса, вызванного перемагничиванием одного домена в нашем материале, была порядка 10^{-4} сек. Для неискаженного усиления был использован усилитель с полосой от 50 до $2 \cdot 10^5$ гц. Осциллограммы э. д. с., получавшиеся на экране осциллографа, фотографировались. По осциллограммам отдельных импульсов определялась площадь, ограниченная линией развертки и осциллограммой импульса э. д. с. Эта площадь пропорциональна величине интеграла $\int_0^{\infty} E(t) dt$. По известному сигналу от генератора определялась чувствительность установки и скорость развертки. После этого находилась величина $\int_0^{\infty} E(t) dt$.

В ферромагнитной проволоке много доменов, поэтому для наблюдения за импульсом э. д. с., созданным одним доменом, необходимо, чтобы перемагничивающее поле нарастало достаточно медленно. Скорость нарастания должна быть настолько малой, чтобы импульсы э. д. с. от разных доменов были разделены во времени. Проволока, с которой проводился эксперимент, была изготовлена из углеродистой стали и обработана по методу Дехтяря [4]. Опыт показал, что в такой проволоке есть несколько больших доменов (объем порядка 10^{-5} см³) и много маленьких (объем порядка 10^{-9} см³). Оказалось возможным выбрать такой участок проволоки, где кроме маленьких доменов имеется лишь один большой.

Для того чтобы перемагничивался только избранный большой домен, использовалась короткая перемагничивающая катушка (длиной 2 мм), и, кроме того, положение ферромагнитной проволоки в катушке подбиралось так, чтобы большой домен находился под катушкой.

Сравнивая результаты опыта с теоретическими расчетами Рытова, нужно иметь в виду, что расчет проводился для однородной проволоки. Между тем при перемагничивании короткой катушкой внешнее поле вдоль проволоки неоднородно, и обратимая проницаемость меняется от сечения

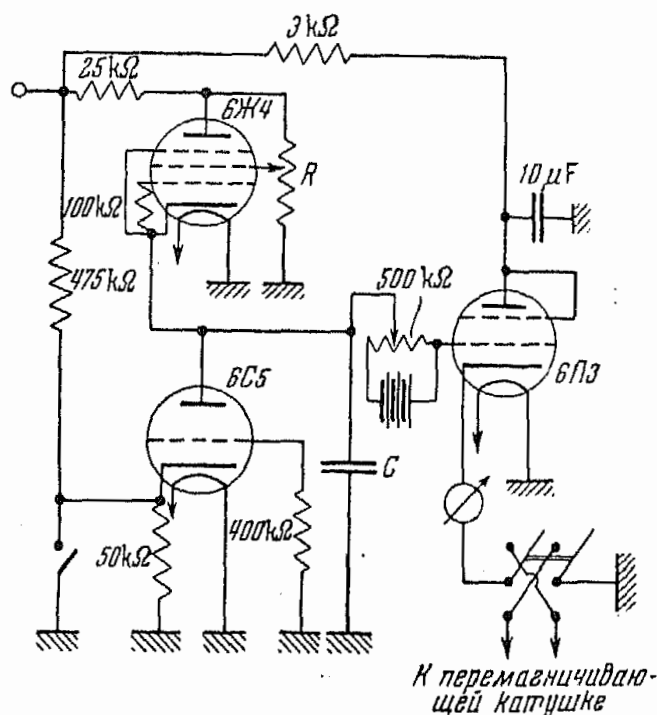


Рис. 1

к сечению, так как она зависит от напряженности поля. Для того чтобы обратимая проницаемость была одинаковой вдоль проволоки, мы создавали длинным соленоидом однородное постоянное поле, по величине очень близкое к тому, при котором наступает перемагничивание исследуемого домена. Короткая перемагничивающая катушка создавала лишь небольшое дополнительное поле, которое вызывало перемагничивание большого домена, но обратимую проницаемость практически не изменяло.

Медленно нарастающий ток, необходимый для получения перемагничивающего поля, получался при помощи установки, схема которой дана на рис. 1. Скорость нарастания поля можно было изменять, меняя сопротивление R , от 10 до 10^{-2} Ое/сек.

Опыты показали, что при многократном повторении процесса перемагничивания домена форма импульса э. д. с. не повторяется полностью, что свидетельствует о неповторимости процесса перемагничивания. При этом происходит изменение как длительности импульса э. д. с., так и интеграла $\int_0^{\infty} E(t) dt$.

На рис. 2 дано несколько фотографий осциллограмм импульса э. д. с. при перемагничивании одного и того же домена. Неповторяемость импульсов может дать значительную ошибку при измерении потока на разных расстояниях от домена. Чтобы избежать таких ошибок, мы одновременно снимали э. д. с. в неподвижной индикаторной катушке, расположенной рядом с перемагничивающей, и в другой такой же катушке, которую можно было перемещать вдоль проволоки; э. д. с. обеих катушек независимо усиливались, и их осциллограммы одновременно фото-

графировались. Отношение э.д.с. в неподвижной и подвижной катушках зависит только от расстояния между ними, неповторяемость процесса перемagnetничивания на отношение не влияет. На рис. 3 изображено взаимное расположение системы катушек.

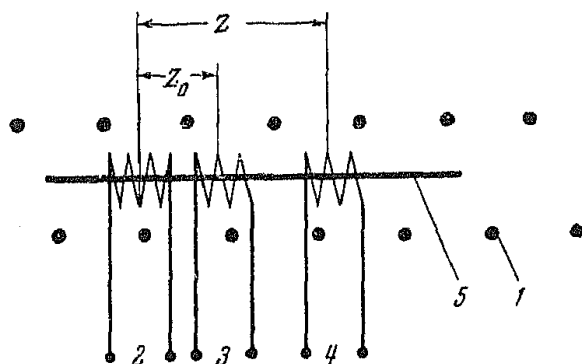


Рис. 3. 1 — соленоид, создающий постоянное поле; 2 — катушка, создающая медленно нарастающее поле; 3 — неподвижная индикаторная катушка; 4 — подвижная индикаторная катушка; 5 — ферромагнитная проволока

Общая блок-схема установки дана на рис. 4. При помощи этой установки снимались фотографии осциллограмм э.д.с. с неподвижной индикаторной катушки $E_0(t)$, расположенной на расстоянии z_0 от перемagnetнивающей, и э.д.с. $E_z(t)$ с подвижной индикаторной катушки при различных расстояниях z между подвижной катушкой и перемagnetнивающей. По осциллограммам определялись потоки $\Phi(z_0)$ и $\Phi(z)$ на основании равенства

$$\Phi(z) = \frac{10^8}{n} \int_0^{\infty} E_z(t) dt.$$

Нам удалось измерить $\Phi(z)$, начиная с $z = z_0 = 5$ мм, до $z = 15$ мм с точностью порядка 10%. По величине потока $\Phi(z)$ можно определить среднюю по сечению проволоки напряженность магнитного поля, созданного доменом. При $z = z_0 = 5$ мм средняя по сечению проволоки напря-

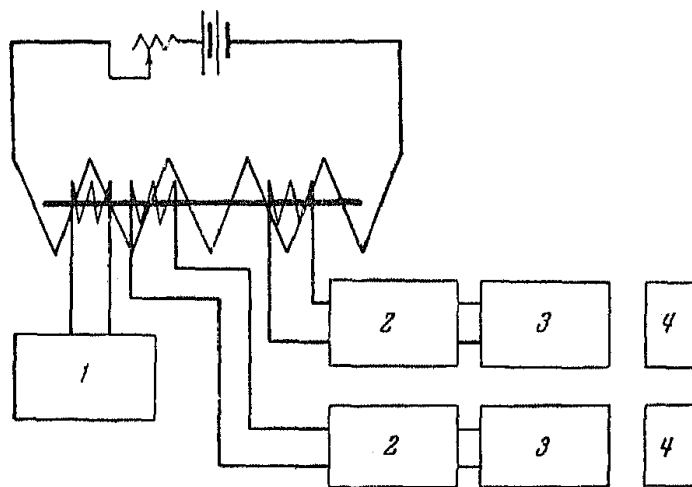
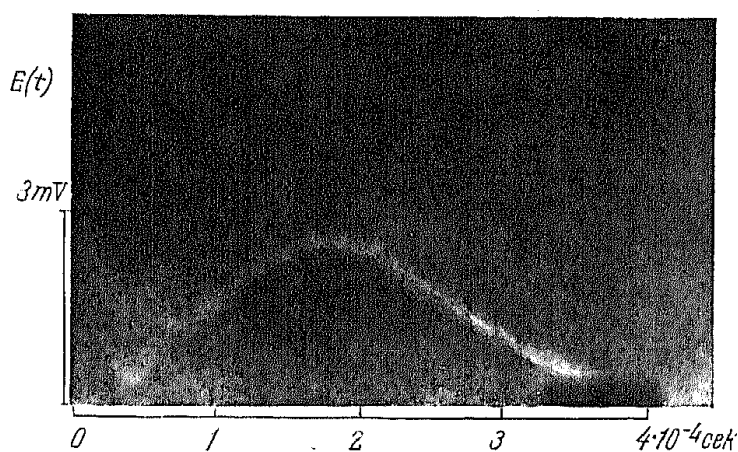


Рис. 4. 1 — установка, создающая медленно нарастающий ток; 2 — усилитель; 3 — осциллограф; 4 — фотоаппарат

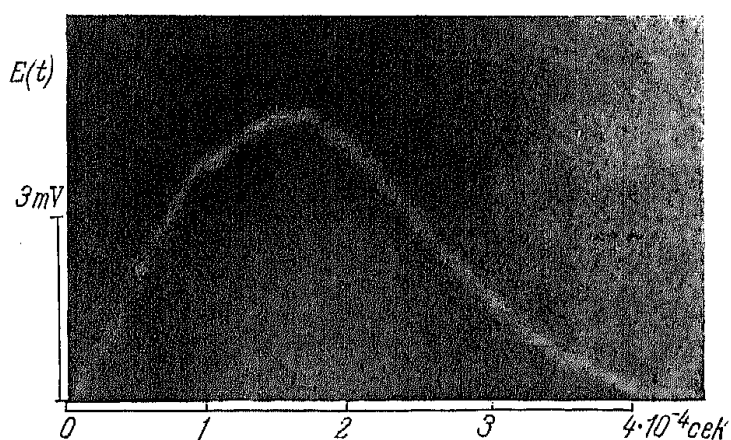
женность магнитного поля домена оказалась порядка 0,5 Ое. Перемagnetничивание домена происходило при поле 12,8 Ое, обратимая проницаемость при этом поле равна 60. Объем исследованного домена менялся в пределах $2,5-4,5 \cdot 10^{-5}$ см³.

На рис. 5 пунктиром показана теоретическая кривая для отношения $\varphi(z) = \Phi(z)/\Phi(z_0)$, построенная по формуле (14) работы Рытова [3], для

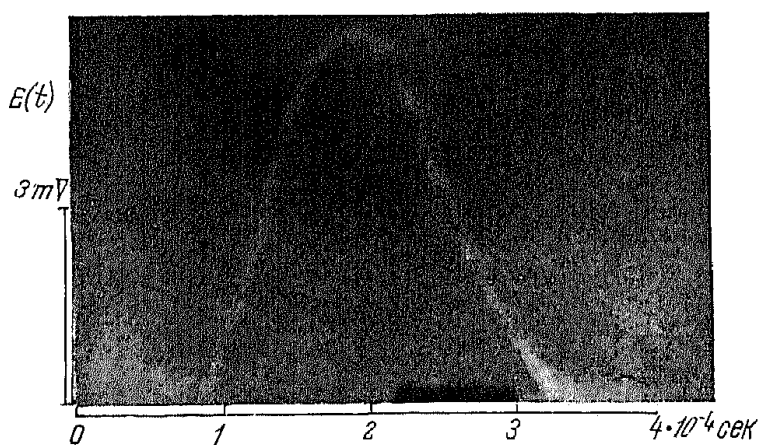
К статье А. А. Грачева, К. А. Горониной и др. «Экспериментальное исследование изменения магнитного потока в проволоке при перемагничивании одного домена»



а



б



в

Рис. 2

следующих значений, входящих в формулу параметров: $\mu = 60$, диаметр проволоки $d = 0,3$ мм, диаметр индикаторной катушки $D = 6$ мм и число витков $n = 600$.

На этом же графике рис. 5 нанесены полученные нами экспериментальные точки. Из рисунка видно, что в исследованном нами интервале

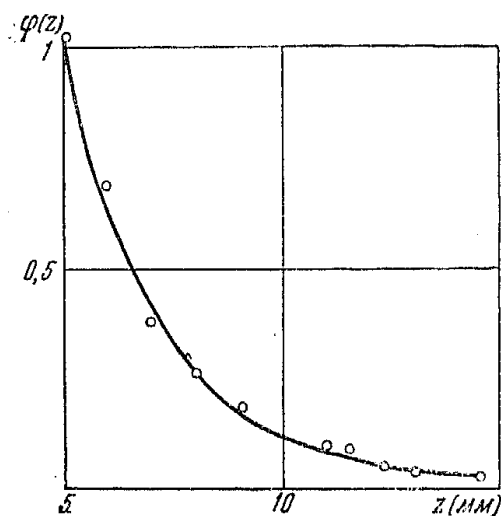


Рис. 5.

значений z с точностью порядка 10% распределение поля домена вдоль проволоки совпадает с полем диполя, рассчитанным Рытовым.

Физико-технический институт
Горьковского государственного университета

Поступила в редакцию
28 декабря 1953 г.

Литература

- [1] А. А. Грачев. ДАН СССР, 71, 269, 1950.—[2] А. А. Грачев. ДАН СССР, 85, 741, 1952.—[3] С. М. Рытов. ЖЭТФ, этот выпуск, стр. 307.—[4] М. В. Дехтяр. ДАН СССР, 69, 527, 1949.

ПРИМЕНЕНИЕ ФОТОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО МЕТОДА РЕГИСТРАЦИИ К МОЛЕКУЛЯРНОМУ АНАЛИЗУ ПО СПЕКТРАМ КОМБИНАЦИОННОГО РАССЕЯНИЯ СВЕТА

Я. С. Бобович и Д. Б. Гуревич

Дано описание светосильной установки для фотоэлектрической регистрации слабых спектров в видимой области. Излагаются результаты всестороннего испытания установки и на ряде примеров иллюстрируется ее применение к анализу смесей углеводов и к количественным измерениям степеней деполяризации линий комбинационного рассеяния.

1. Введение

Известно, что в молекулярном анализе по спектрам комбинационного рассеяния света чрезвычайно большое значение имеет изучение интенсивностей и состояния поляризации линий. Сами по себе интенсивности весьма чувствительны к изменениям, происходящим во внешней электронной оболочке молекулы в процессе взаимодействия света с веществом [1]. О характере этих изменений в отдельных случаях можно судить, изучая совместно степени деполяризации и интенсивности линий в спектре [1, 2]. Точное измерение степеней деполяризации линий имеет существенное значение и при отнесении частот к той или иной форме колебаний [3]. Широкое применение находят спектры комбинационного рассеяния в количественном анализе, например в анализе углеводов и их смесей [4].

С экспериментальной точки зрения, трудность количественных измерений в спектрах комбинационного рассеяния связана со слабостью линий. При этом, если измерение интенсивностей является задачей фотометрирования слабых линий, то определение степеней деполяризации — уже задача фотометрирования крайне слабых линий. Последнее обстоятельство обусловлено специфическими требованиями к апертуре освещения при поляризационных исследованиях. Поэтому решение проблемы измерения степеней деполяризации не исчерпывается разработкой метода измерения интенсивностей. Оно еще предполагает разработку эффективного метода получения самих поляризационных спектров [5-8].

До настоящего времени измерения интенсивностей и степеней деполяризации линий комбинационного рассеяния производятся преимущественно методом фотографической фотометрии. Обычные недостатки этого метода в данном случае усугубляются наличием сплошного фона в спектре и зернистостью структуры высокочувствительных эмульсий. Поэтому чувствительность и точность фотографического молекулярного анализа, как правило, невелики. Данный вопрос детально рассмотрен в работах Сущинского [4].

В последние десять лет начал интенсивно разрабатываться фотоэлектрический метод регистрации слабых спектров [9-15]. Решающее преимущество фотоэлектрического метода перед фотографическим состоит в большей точности измерения интенсивностей и в скорости получения результатов. Тем не менее данный метод еще не получил достаточно широкого распространения в спектроскопии комбинационного рассеяния света, так как по пороговой чувствительности и разрешающей способности

он еще уступает фотографическому методу. Разрешающая способность фотоэлектрической установки, вообще говоря, зависит от постоянной времени τ усилительного и регистрирующего устройства, от ширины входной и выходной щелей и от скорости перемещения спектра относительно неподвижной выходной щели (или щели относительно спектра). При исследовании интенсивных линий, выбрав подходящую величину постоянной времени τ и скорости перемещения спектра, всегда можно довести до требуемого предела ширину входной и выходной щелей. Таким образом в этом частном случае достижимое разрешение целиком определяется качеством оптики монохроматора. Иначе обстоит дело при фотометрировании весьма слабых спектров. Слишком медленное перемещение спектра иногда недопустимо из чисто практических соображений. Чрезмерному уменьшению постоянной времени ставит предел малая величина измеряемого светового потока. По этой причине обычно работают с весьма широкими щелями, значительно превосходящими нормальные.

Таким образом при регистрации спектров комбинационного рассеяния света достижимое разрешение, в конечном итоге, определяется чувствительностью установки. Поэтому вопросы о разрешающей способности и о пороговой чувствительности установки нельзя рассматривать раздельно.

Среди различных источников электрических помех, от которых зависит пороговая чувствительность фотоэлектрической установки, большое значение имеют флуктуации темнового тока фотоумножителя [9]. Однако при исследовании комбинационного рассеяния пороговая чувствительность главным образом определяется флуктуациями фототока, вызванного сплошным световым фоном спектра. Очень существенное обстоятельство, на которое обратил внимание Сущинский [10], заключается в том, что относительная величина этих флуктуаций убывает при увеличении светового потока, падающего на фотокатод фотоумножителя. Следовательно, при данных параметрах приемника пороговую чувствительность фотоэлектрической установки для регистрации спектров комбинационного рассеяния можно увеличить, в частности, за счет увеличения светосилы по потоку спектрального прибора, работающего в установке.

Существенной особенностью нашей установки является применение весьма светосильного по потоку монохроматора.

2. Описание фотоэлектрической установки

Собранная нами установка состоит из светосильного по потоку монохроматора с записывающим устройством, приемной части, в которую входит фотоумножитель с усилителем постоянного тока, блоков питания и осветителя для возбуждения спектров комбинационного рассеяния. Монохроматор построен по принципу автоколлимационного хода лучей. Его значительная светосила по потоку обеспечена большим действующим отверстием и большой высотой щелей при сравнительно умеренном фокусном расстоянии объектива.

Выбор схемы был обусловлен соображениями удобства конструкции и экономии дефицитного материала, требуемого для изготовления объектива.

Схема монохроматора показана на рис. 1. Объектив монохроматора двухкомпонентный, стеклянный, склеенный; его диаметр 180 мм, фокусное расстояние 1200 мм. Для уменьшения паразитного рассеяния, которым обычно отличаются приборы автоколлимационного типа, обе поверхности объектива просветлены. Применено двуслойное физическое просветление. Спектральный рабочий диапазон объектива $\lambda = 4000 \div 6500$ Å. Диаметр кружка рассеяния не превышает 0,04 мм; в области, где

лежит большинство линий комбинационного рассеяния, возбужденных линией 4358 Å, он равен 0,01—0,02 мм.

В качестве диспергирующей системы применена большая плоская дифракционная решетка отечественного изготовления с заштрихованной площадью 150×145 мм², имеющая 600 штрихов на 1 мм и посылающая в один из вторых порядков спектра свыше 50% энергии (при $\lambda = 4358$ Å)¹.

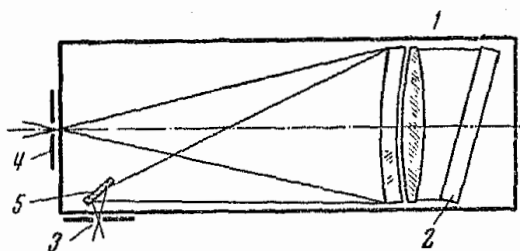


Рис. 1. Оптическая схема монохроматора. 1 — объектив; 2 — дифракционная решетка; 3 — входная щель; 4 — выходная щель; 5 — коллимационное зеркало

Дисперсия прибора во втором порядке спектра составляет около 6,5 Å/мм

Для получения воспроизводимых по интенсивности записей спектра к равномерности вращения решетки (или системы призм) предъявляются большие требования, особенно при значительной дисперсии прибора. Поэтому редуктор должен быть хорошего качества, связь же его с диспергирующей системой — гибкой и без люфтов. В данном монохроматоре во избежание люфтов в последней

паре редуктор помещен внутри прибора, связь же его с решеткой осуществлена посредством двух шкивов с большим передаточным числом и стальной лентой, прикрепленной к большему из них винтами. Плавность вращения оправы с решеткой и отсутствие существенных люфтов обеспечивается применением двух больших шариковых подшипников.

Входная и выходная щели прибора имеют высоту 50 мм. Входная щель раздвижная, несимметричная; ее рабочая ширина менялась в пределах 0,07—0,2 мм. Выходная щель имеет постоянную ширину 0,2 мм и выполнена в виде прозрачного штриха на алюминированной вогнутой поверхности вогнуто-выпуклой линзы. Центр кривизны вогнутой поверхности лежит внутри прибора. Кривая в сагиттальном направлении выходная щель компенсирует соответствующую кривизну изображения спектральной линии. Фокусное расстояние вогнуто-выпуклой линзы подобрано так, чтобы с надлежащим уменьшением отображать выходной зрачок прибора на фотокатод приемника. Фокальная кривизна линии, связанная с условиями образования дифракционных максимумов, не компенсируется. Это значительно снижает разрешающую способность нашего монохроматора при работе с высокими щелями.

Благодаря применению простой автоколлимационной схемы в конструктивном отношении монохроматор очень прост: все его узлы собраны на большом швеллере шириной 300 мм и длиной около 2 м, к которому крепится толстый сварной металлический каркас, обшитый листовым железом. На каркасе установлены входная и выходная щели.

При осуществлении данного макета прибора мы не ставили перед собой задачу получения записей, годных для точного измерения частот в спектре неизвестного вещества. Поэтому, для простоты, барабан с фотобумагой, на которой производится запись, вращается от отдельного редуктора. Для этой цели собран простой редуктор с одной червячной парой и моторчиком Уоррена, дающим 2 об/мин.

Запись производилась при помощи специально собранного мультифлекс-гальванометра чувствительностью $2 \cdot 10^{-8}$ А·м/мм. В качестве приемника применен фотоумножитель ФЭУ-17. Чувствительность нашего экземпляра фотоумножителя при напряжении питания 1000 В составляла 15 А/лм, темновой ток — $2-3 \cdot 10^{-9}$ А. Большинство спектров записано при напряжении питания, равном 800 В. Регистрация поляризационных спектров слабо рассеивающих веществ, например предельных углеводо-

¹ Авторы пользуются случаем выразить благодарность Ф. М. Герасимову, предоставившему решетку.

родов, производилась вблизи оптимального напряжения, составляющего 910 V.

Для усиления фототоков мы применили усилитель постоянного тока, построенный по мостовой схеме на лампе 6Ж1Ж в электрометрическом режиме. Схема усилителя и его параметры показаны на рис. 2.

Выбор того или иного способа усиления (по постоянному или переменному току) является в значительной степени произвольным и не связан с какими-либо решающими достоинствами которого-нибудь из них. Мы, однако, предпочли усилитель постоянного тока. Усилитель постоянного тока чрезвычайно прост и доступен неспециализированной лаборатории. Он позволяет регистрировать спектр, возбужденный любым

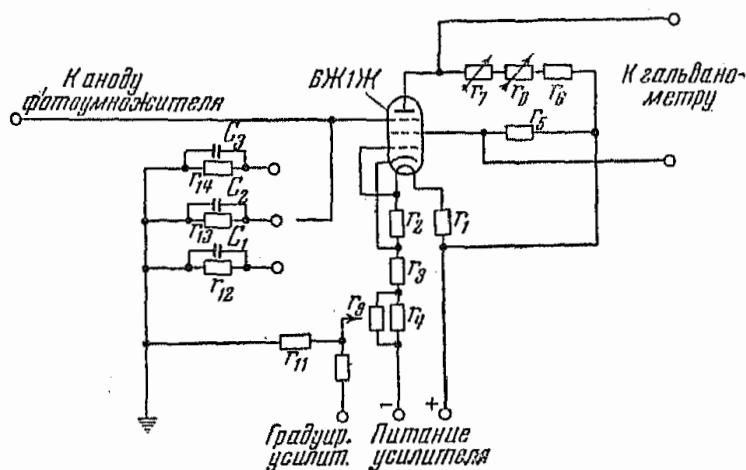


Рис. 2. Схема усилителя и его параметры. $r_1=45 \Omega$, $r_2=10 \Omega$, $r_3=30 \Omega$, $r_4=10 \Omega$; $r_5=800 \Omega$, $r_6=3-5 \text{ k}\Omega$, $r_7=2 \text{ k}\Omega$, $r_8=100 \Omega$, $r_9=700 \Omega$, $r_{10}=2 \text{ k}\Omega$, $r_{11}=20 \Omega$, $r_{12}=1 \text{ M}\Omega$, $r_{13}=10 \text{ M}\Omega$, $r_{14}=100 \text{ M}\Omega$, $C_1=1 \mu\text{F}$; $C_2=0,3 \mu\text{F}$, $C_3=0,03 \mu\text{F}$

источником как постоянного, так и переменного тока, имеющим любую частоту. В то же время селективный усилитель переменного тока, вроде описанного Сушинским [10], настроенный на некоторую частоту, позволяет регистрировать лишь спектр от источника определенной частоты. Можно применять модулирование света, однако это неизбежно влечет за собой потери, не желательные при регистрации малых световых потоков. При исследовании спектров комбинационного рассеяния света универсальность усилителя постоянного тока особенно существенна, так как в последнее время имеется тенденция применять для возбуждения спектра лампы низкого давления, питаемые постоянным током.

Питание усилителя и фотоумножителя производилось от соответствующих выпрямителей со стабилизаторами. Спектры возбуждались четырьмя ртутными лампами типа ПРК-4. Внутренняя полость осветителя для увеличения светоотдачи покрывалась окисью магния [16, 17]. Применялись рабочие кюветы объемом в 11 и 2 см³. Коллиматор заполнялся светом при помощи двухлинзовой системы [18]. Освещение всей щели по высоте достигалось за счет света, отраженного при выходе из кюветы на границе «стекло — воздух» [18].

Чтобы установить, насколько эффективен такой способ освещения высокой щели, нами были поставлены специальные опыты: очень узкая входная щель, наполовину закрытая по краям диафрагмой, освещалась светом, рассеянным от кюветы с четыреххлористым углеродом. Производилась запись линий 760—790 см⁻¹ комбинационного рассеяния этого вещества. Далее, эти же линии записывались в отсутствие диафрагмы. Очевидно, сравнивая интенсивность линий в каждой записи, можно судить об эффективности использования щели. Из результатов записи

следовало, что интенсивность линий в отсутствие диафрагмы возрастает почти вдвое. Некоторое отступление от пропорциональности, повидимому, связано с небольшим виньетированием концов слегка искривленной линии прямой выходной щелью. Таким образом можно считать, что при таком способе освещения вся щель используется достаточно эффективно.

Приведем в виде таблицы сравнительные данные, характеризующие светосилу по потоку нашего монохроматора и некоторых из аналогичных приборов, описанных в литературе. Из данных табл. 1 видно, что «геометрическая» (без учета коэффициента пропускания) светосила по потоку нашего монохроматора более чем на порядок превосходит светосилу наилучших монохроматоров, описанных в литературе. Что касается результатов сравнения с призмёнными приборами, особенно с автоколлимационным прибором «Хильгер Е-612», то при учете коэффициента пропускания они должны быть еще значительно более выгодными.

Таблица 1

Сравнительные данные о светосиле по потоку некоторых монохроматоров, примененных для исследования спектров комбинационного рассеяния света

Краткая характеристика монохроматора	Кем описан (лит. ссылка)	Светосила по потоку* (в произвольных единицах)
1. Прибор автоколлимационного типа с плоской дифракционной решеткой, имеющей нарезанную площадь 22 000 мм ² и концентрацию энергии во втором порядке спектра 60%. Угловая дисперсия $d\varphi/d\lambda = 1,3 \cdot 10^{-4}$ рад/Å. Фокусное расстояние объектива $F = 1200$ мм, диаметр $D = 180$ мм. Высота щели $h = 50$ мм	Авторами настоящей работы	1750
2. Трехпризмённый прибор с простым ходом лучей. Угловая дисперсия $d\varphi/d\lambda = 1,85 \cdot 10^{-4}$ рад/Å. Фокусное расстояние объектива входного коллиматора $F = 120$ мм, его диаметр $D = 50$ мм. Высота входной щели $h = 3$ мм	Сущинским [10]	103
3. Прибор автоколлимационного типа «Хильгер Е-612». Две призмы. Фокусное расстояние объектива $F = 584$ мм, его диаметр $D = 86$ мм. Угловая дисперсия $d\varphi/d\lambda = 2,4 \cdot 10^{-4}$ рад/Å. Высота щели $h = 6$ мм	[10]	183
4. Вогнутая решетка в установке Вудворта. Площадь решетки 14 000 мм ² . Параболическое коллимационное зеркало, имеющее фокусное расстояние $F = 2500$ мм и диаметр $D = 254$ мм. Концентрация энергии во втором порядке спектра около 40%. Угловая дисперсия $d\varphi/d\lambda = 1,3 \cdot 10^{-4}$ рад/Å. Высота щели $h = 10$ мм	[13]	100

* Светосила по потоку оценивалась по формуле $\Phi \sim D^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} \frac{h}{F}$. Коэффициент пропускания прибора не учитывался.

3. Воспроизводимость интенсивностей, разрешающая способность и пороговая чувствительность установки

Для испытания установки в отношении разрешающей способности и воспроизводимости интенсивностей оказалось целесообразным выбрать спектр комбинационного рассеяния толуола. В спектре этого вещества имеется группа узких, тесно расположенных линий (линии с частотами 1030, 1004, 993 см⁻¹), которые удобны для определения разрешающей способности. Наличие наряду с очень яркими линиями крайне слабых, вроде линии с частотой 843 см⁻¹, благоприятствует испытанию установки на воспроизводимость интенсивностей.

На рис. 3 показана запись спектра толуола, иллюстрирующая полученное разрешение. Мы видим, что линии 1004 и 1030 см⁻¹ разрешаются

достаточно хорошо. Отчетливо обнаруживается очень слабая линия 993 см^{-1} , отстоящая на 11 см^{-1} от весьма яркой линии 1004 см^{-1} . Разрешается диффузный дублет $1604\text{—}1585\text{ см}^{-1}$.

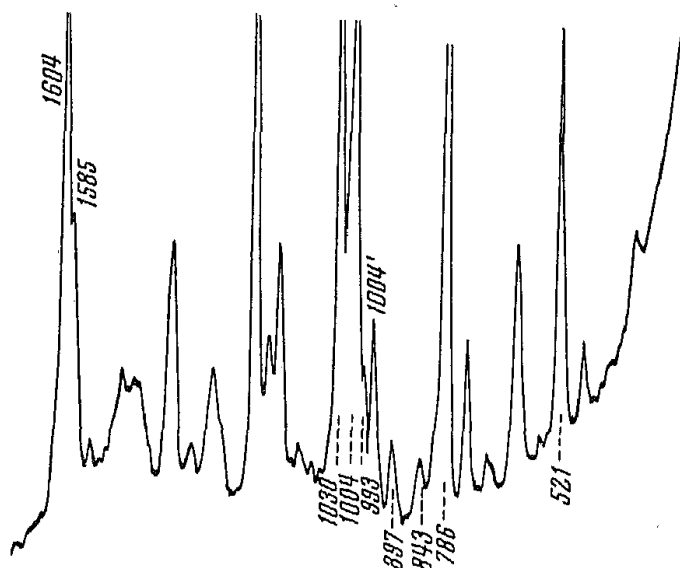


Рис. 3. Запись спектра толуола, иллюстрирующая достигаемое разрешение. Объем кюветы 11 см^3 . Напряжение питания фотоумножителя 800 V . Частоты некоторых линий (в см^{-1}) указаны на спектре

Эти данные, однако, не характеризуют в полной мере разрешающую способность записей. Исследование нашего монохроматора в отношении разрешающей способности было затруднено вследствие фиксированной, сравнительно большой ширины выходной щели. С другой стороны, в этом приборе, как указывалось ранее, не скомпенсирована фокальная кривизна спектральной линии, существенная при высоких щелях. Так как «стрелка прогиба» линии составляет примерно $0,15\text{ мм}$ — величину, соизмеримую с шириной выходной щели, то это неизбежно, в свою очередь, искажало достижимое разрешение в спектре. Тем не менее полученного разрешения уже достаточно для решения большинства аналитических задач. Дальнейшего увеличения разрешающей способности при фото-

Таблица 2

Воспроизводимость относительных интенсивностей некоторых линий спектра толуола

Частота (см^{-1})	Число измерений	Отдельные измерения интенсивностей I (в произв. шкале)	$I_{\text{ср.}}$	$\Delta I_{\text{ср.}}$ (%)	$\Delta I_{\text{макс}}$ (%)
521	8	2800, 2860, 2815, 2880, 2900, 2840, 2820, 2860	2847	~ 1	2
623	6	1485, 1450, 1500, 1420, 1415, 1430	1450	2	3,5
843	8	314, 327, 360, 370, 380, 350, 330, 357	348	4,6	10
897	12	482, 500, 500, 468, 453, 540, 500, 510, 538, 500, 500, 510	500	3,2	8

Примечание. Интенсивность берется по отношению к линии 1004 см^{-1} , возбужденной ртутной линией $\lambda = 4348\text{ Å}$

электрических записях при наличии кривой щели можно будет достичь за счет большой резервной чувствительности установки.

Данные, касающиеся воспроизводимости интенсивностей некоторых линий комбинационного рассеяния толуола, приведены в табл. 2. На

рис. 4 показаны записи спектра предельного углеводорода — 3-метилпентана, произведенные последовательно во времени, в свою очередь, иллюстрирующие воспроизводимость интенсивностей линий.

Из данных табл. 2 видно, что средняя точность измерения интенсивностей ярких линий, вроде линии 521 см^{-1} , составляет приблизительно 1%. Точность регистрации крайне слабой линии с частотой 843 см^{-1} равна 4,6%. Результаты могут быть еще улучшены применением стабилизированного питания ртутных ламп. Однако уже достигнутая точность значительно превосходит возможности метода фотографической фотометрии, применение которого в спектроскопии комбинационного рассеяния, как известно, даже в самых благоприятных случаях сопряжено с ошибками в 10—20%.

С целью установить, какие факторы ограничивают точность измерений, мы произвели следующий опыт: на одной и той же фотобумаге последовательно были записаны флуктуации темнового тока фотоумножителя (при

Рис. 4. Записи спектра 3-метилпентана, произведенные последовательно во времени. Объем кюветы 11 см^3 . Напряжение питания фотоумножителя 700 В . Частоты некоторых линий (в см^{-1}) указаны на спектре

включенном усилителе), флуктуации фототока, вызванного некоторым участком сплошного фона ртутной лампы в спектре, рассеянном исследуемой жидкостью (при стабилизированном и нестабилизированном напряжении питания лампы), и, наконец, флуктуации фототока от некоторого участка сплошного спектра лампочки накаливания, питаемой батареей аккумуляторов. Случайно оказалось, что этот участок сплошного спектра вызывал фототок, приблизительно в два раза больший, чем участок рассеянного спектра. Полученные записи, наряду с записью нуля усилителя, показаны на рис. 5.

Мы видим, что в светосильной по потоку установке флуктуации темнового тока, составляющие в нашем случае величину порядка $\pm 1,5\text{ мм}$ (кривая б), не ограничивают точность воспроизведения интенсивностей. Закономерное возрастание флуктуаций при возрастании фототока, пропорциональное квадратному корню из его величины, также сравнительно невелико (кривая в). Точность измерений на данной установке определяется главным образом процессами, происходящими в

ртутной лампе высокого давления, служащей для возбуждения спектра. Даже при стабилизации напряжения питания такой лампы, вследствие нестабильности ее горения, возникают довольно большие колебания интенсивностей, значительно превосходящие флуктуации темнового тока. Поэтому весьма актуальной задачей является применение в качестве источника возбуждения спектра более совершенных ламп. В последнее время [20-23] описаны ртутные лампы низкого давления с охлаждаемыми водой жидкими электродами. По данным авторов этих работ такие лампы низкого давления, будучи практически совершенно свободными от сплошного фона в спектре, горят более стабильно, чем лампы высокого давления. Большим их достоинством является также зюсть

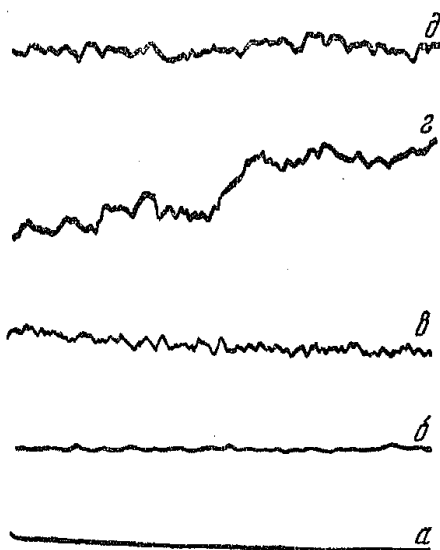


Рис. 5

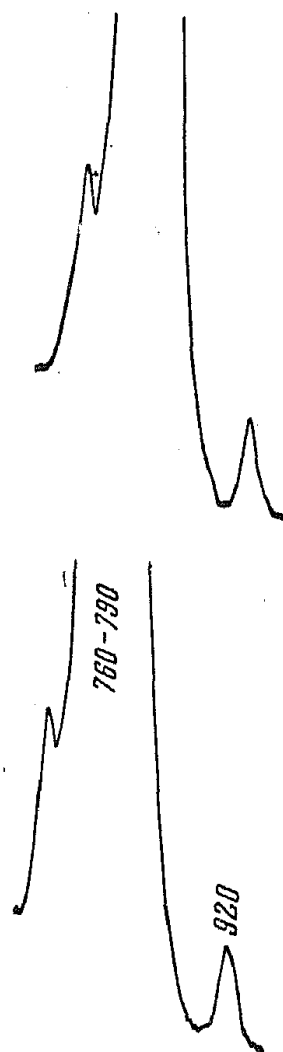


Рис. 6

Рис. 5. Записи, иллюстрирующие стабильность работы фотоэлектрической установки. а — сигнал усилителя при выключенном фотоумножителе; б — сигнал усилителя при включенном фотоумножителе; в — сигнал от стабильного светового потока (лампочка накаливания, питаемая от батареи аккумуляторов); г — сигнал от некоторого участка сплошного фона ртутной лампы при рассеянии света жидкостью; питание ртутных ламп нестабилизированное; д — то же, питание ртутных ламп стабилизированное. Сигнал в в два раза больше сигналов г и д. Напряжение питания фотоумножителя 910 V

Рис. 6. Записи участка спектра смеси четыреххлористого углерода и 2,2,3-триметилбутана, произведенные последовательно во времени. Объем кюветы 11 см³. Напряжение питания фотоумножителя 910 V

ртутных линий, позволяющая вести исследование контура линий комбинационного рассеяния.

Из рис. 5 можно видеть, что сползание нуля, которое обычно считается главным недостатком усилителей постоянного тока, при усилении сравнительно больших фототоков, как в нашем случае, при надлежащих мерах предосторожности сводится к пренебрежимо малой величине.

Оценка пороговой чувствительности установки при записи спектров комбинационного рассеяния производилась на искусственной смеси, составленной из 95% четыреххлористого углерода и 5% 2,2,3-триметилбутана. Критерием служила линия 920 см⁻¹, принадлежащая 2,2,3-три-

метилбутану, интенсивность которой по шкале, принятой в работах Бажулина и соавторов, равна 35. Выбор объекта позволяет непосредственно вести сравнение с результатами, которые ранее получил Сушинский [4] при фотографировании спектра сходной смеси. Сопоставление соответствующих данных приведено в табл. 3. На рис. 6 показаны записи участка спектра смеси.

Таблица 3.

Сопоставление пороговой чувствительности светосильной фотоэлектрической установки и фотографической установки для регистрации спектров комбинационного рассеяния света

Фотоэлектрическая установка						Фотографическая установка (данные Сушинского [4])				
Смесь	Линия (см^{-1})	Интенсивность* I	$\Delta I_{\text{ср}}$ (%) при содержании			Смесь	Линия (см^{-1})	Интенсивность* I	Характеристика аналитической линии при разл. содержаниях вещества	
			1%	2,5%	5%				2,5%	5%
Четыреххлористый углерод и 2, 2, 3-триметилбутан. Ведется анализ 2, 2, 3-триметилбутана	920	35	15	6	3	Циклогексан и 2, 2, 4-триметилпентан. Ведется анализ 2, 2, 4-триметилпентана	746	80	—	Линия ясно видна. Возможна количественная оценка

* Интенсивность дана по шкале, применяемой в работах Бажулина и соавторов.

Из данных табл. 3 видно, что при фотографировании спектра комбинационная линия 746 см^{-1} , принадлежащая 2, 2, 4-триметилпентану, при концентрации вещества в 5% еще имеет заметную интенсивность, допускающую количественную оценку. Уже при концентрации этого вещества 2,5% линия теряется на сплошном фоне. Иная картина получается при фотоэлектрической записи: средняя точность нескольких измерений интенсивности линии 920 см^{-1} 2, 2, 3-триметилбутана, содержащегося в смеси в количестве 5%, составляет 3%. При этом нужно иметь в виду, что интенсивность этой линии примерно в два раза меньше интенсивности аналитической линии 2, 2, 4-триметилпентана. Нетрудно экстраполировать полученные нами результаты на меньшие концентрации. Очевидно, при содержании 2, 2, 3-триметилбутана в смеси в количестве 1% линия будет еще хорошо обнаружима и относительная точность определения составит в среднем 15% — величину, приемлемую во многих практических случаях.

Таким образом результаты непосредственных измерений показывают, что пороговая чувствительность светосильной фотоэлектрической установки при исследовании комбинационных спектров превосходит пороговую чувствительность при фотографировании, даже если привести эти данные к примерно одинаковой разрешающей способности обеих установок.

Благодаря большой пороговой чувствительности данная фотоэлектрическая установка с успехом была применена к анализу смесей углеводородов. Приведем два примера, заимствованные из работы, выполненной авторами совместно со Шмуляковским.

1. Измерениями интенсивностей линий спектра комбинационного рассеяния синтетической смеси, произведенными по методу фотографической;

фотометрии, было установлено, что образец содержит 73% 2-метилпентана. Остальные компоненты фотографически обнаружить не удалось. На спектрограмме, записанной фотоэлектрическим методом, отчетливо виден небольшой пик, который можно идентифицировать с линией 760 см^{-1} 2,3-диметилбутана. Достоверность идентификации дополнитель-

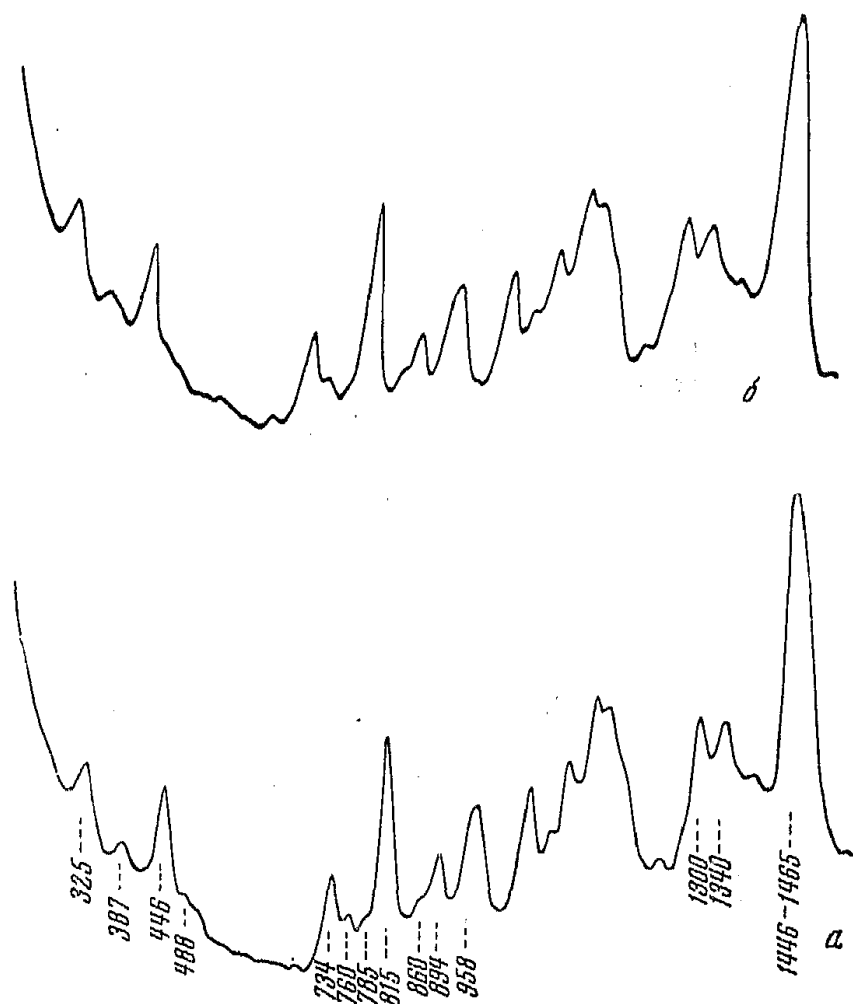


Рис. 7. Записи спектров синтетической смеси углеводородов, произведенные последовательно во времени. Объем кюветы 11 см^3 . Напряжение питания фотоумножителя 800 V . Слабая линия 760 см^{-1} принадлежит 2,3-диметилбутану

но подтверждается тем, что оба углеводорода имеют близкие температуры кипения. Запись спектра исследованной смеси показана на рис. 7.

2. Был зарегистрирован спектр синтетического продукта, предоставленного в количестве 2 см^3 , предположительно состоящего из смеси углеводородов типа алкенов. Записанная спектрограмма показана на рис. 8. По наличию линий 694 и 661 см^{-1} и 1658 и 1648 см^{-1} удалось установить, что компонентами смеси были 3,3,4-триметилпентен-2 и 2,3,3-триметилпентен-1. Обращает на себя внимание достаточно хорошее разрешение близких линий 1658 и 1648 см^{-1} .

Приведем также записи спектров комбинационного рассеяния некоторых образцов силикатных стекол. Хорошо известны трудности, с которыми связано получение доброкачественных спектров от подобных объектов. Трудности обусловлены главным образом дефектами, вроде пузырьков, свилей и пр., всегда имеющимися в образцах, вследствие чего появляется сплошной фон, вуалирующий комбинационное рассеяние. Дело осложняется еще чрезвычайно низкой интенсивностью и диффузным характером комбинационных полос. По этой причине для фотографирования спектра стекла обычно требуются большие выдержки, дохо-

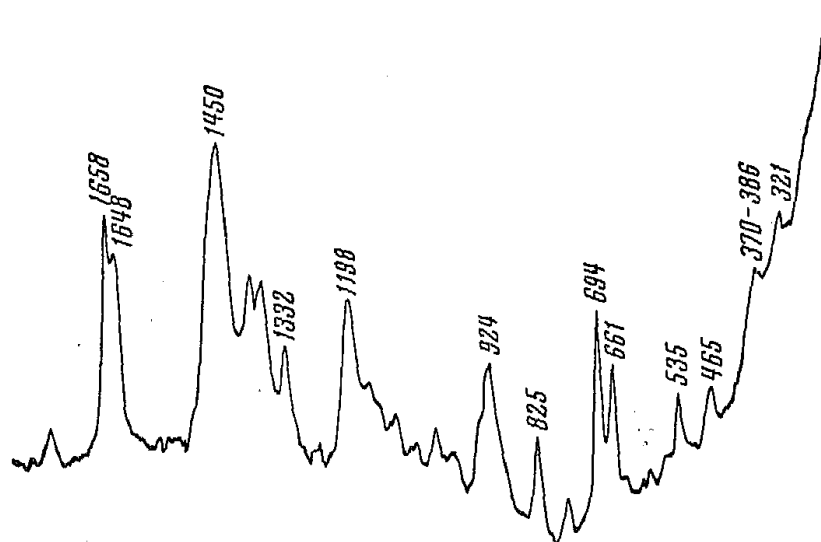


Рис. 8. Запись спектра смеси, состоящей из 3,3,4-триметилпентана-2 и 2,3,3-триметилпентана-1. Объем кюветы 2 см³. Напряжение питания фотоумножителя 910 V

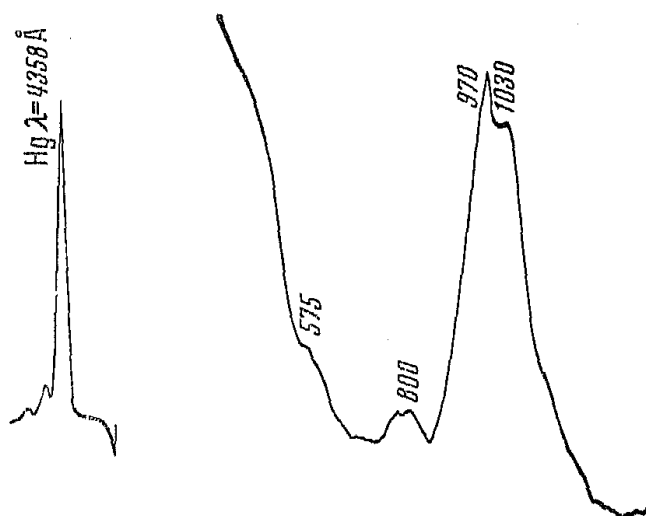


Рис. 9. Спектр флинта. Образец в виде цилиндра диаметром 12 и длиной 60 мм. Напряжение питания фотоумножителя 800 V

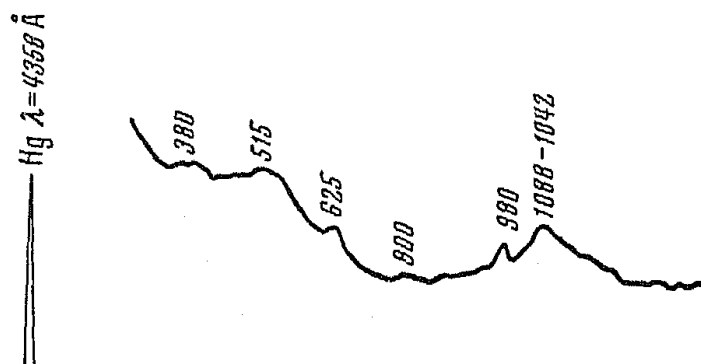


Рис. 10. Спектр кроны. Образец в виде цилиндра диаметром 12 и длиной 60 мм. Напряжение питания фотоумножителя 800 V

дящие до десятков часов [24], при варке же самого стекла нужно принимать специальные меры предосторожности.

Нами были взяты два образца флинта и кроны, выполненные в виде цилиндров диаметром 12 и длиной 60 мм. Оба образца содержали боль-

шое количество пузырей. Записи спектров показаны на рис. 9 и 10. В каждом спектре, наряду с другими полосами, видна характерная полоса, непосредственно примыкающая к возбуждающей линии, имеющая структуру. Интенсивность полос крона, в соответствии с литературными данными, много меньше интенсивности полос флинта.

4. Поляризационные измерения

Обычная методика получения поляризационных спектров, как известно, требует применения ограниченной апертуры освещения исследуемого образца. Вследствие этого резко (в 30—40 раз) уменьшается светосила установки и становятся недоступными изучению слабые линии спектра.

Мы применили методику получения поляризационных спектров, описанную ранее, допускающую освещение объекта широкими пучками [8]. Отвлекаясь от подробностей, отметим лишь, что определение степени деполяризации линии по данной методике производится при помощи градуировочного графика. Для построения графика, представляющего собой прямую линию, достаточно знать правильные значения степеней деполяризации каких-либо деполяризованной и сильно поляризованной линий. Очень удобным для этой цели объектом является спектр четыреххлористого углерода.

Будучи весьма эффективной, примененная методика получения поляризационных спектров тем не менее сопряжена с уменьшением светового потока, по крайней мере, в 4—5 раз, поэтому возможность ее применения к исследованию слабых спектров определяется пороговой чувствительностью фотоэлектрической установки.

Нами зарегистрированы поляризационные спектры толуола и некоторых предельных углеводородов. На примере хорошо изученного спектра толуола удалось показать соответствие измеренных величин (степеней деполяризации) с литературными данными. Очень слабые спектры предельных углеводородов являются хорошей иллюстрацией большой пороговой чувствительности установки. Поляризационные спектры толуола и

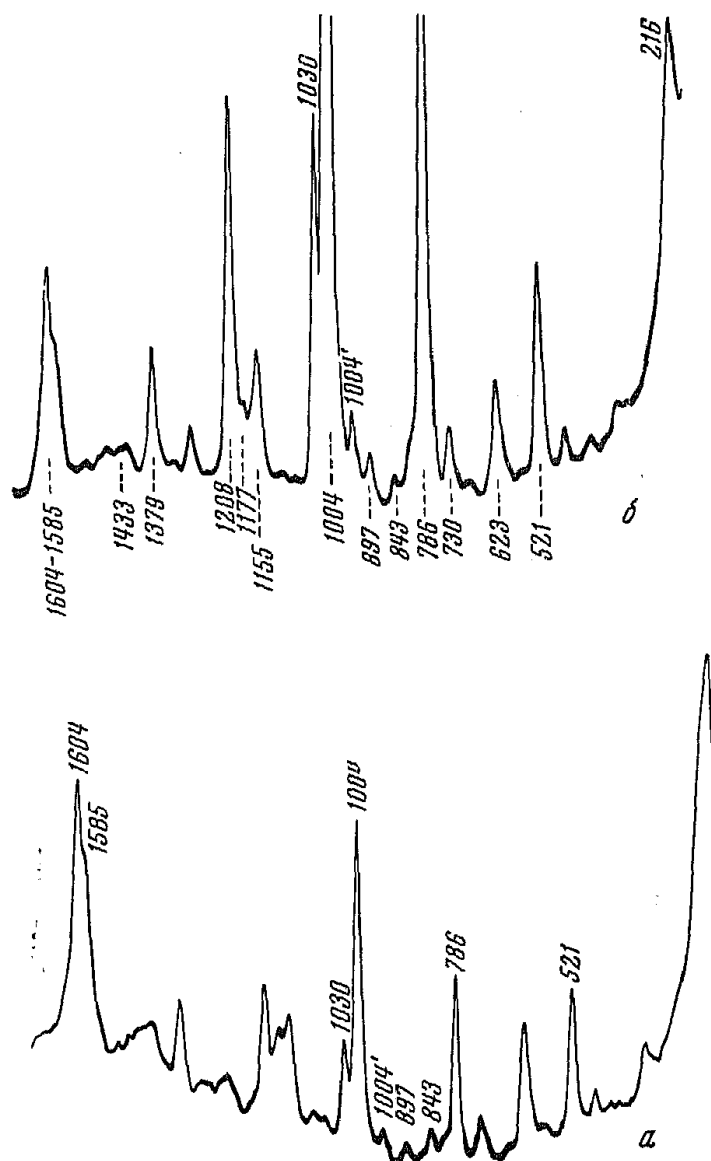


Рис. 11. Поляризационный спектр толуола. *a* — слабая, *б* — интенсивная компоненты. Объем кюветы 11 см³. Напряжение питания фотоумножителя 800 В

Таблица 4

Значения степеней деполаризации ρ некоторых линий в спектре
толуола

Частота (см^{-1})	Наши данные для ρ			Интенсивность линий *. Их характеристика	Литературные данные для ρ	
	Число записей	$\rho_{\text{ср}}$	$\Delta\rho_{\text{ср}}$ (%)		[²⁶]	[²⁵]
521	3	0,53	4,2	2 Изолированная	0,60	0,61
623	3	0,97	4,8	1,5 Изолированная	Депол.	0,73
730	3	0,41	6	0,6 Изолированная	—	0,3
843	3	Депол.	—	Весьма слабая	—	0,9
814	3	0,46	7	» »	—	—
1030	3	0,07	4	2,7 Неизолированная	0,08	0,1
1156	3	0,64	4	1,1 Неизолированная	0,64	0,54
1177	3	0,77	5	0,9 Неизолированная		
1208	3	0,08	3,8	2,7 Неизолированная	Поляр.	0,13
1379	3	0,46	4	1 Изолированная	0,55	0,42
1433	3	0,78	8	0,3 Диффузная	—	0,6
1585—1604	3	0,84	3	2,3 Изолированная	0,81	0,73

* Интенсивности даны в произвольной шкале.

Таблица 5

Значения степеней деполаризации ρ некоторых линий в спектре
2, 2, 4-триметилпентана

Частота (см^{-1})	Наши данные для ρ			Интенсивность линий *. Их характеристика	Данные [²⁵] для ρ
	Число записей	$\rho_{\text{ср}}$	$\Delta\rho_{\text{ср}}$ (%)		
301	6	Депол.	—	0,5 Изолированная	—
512	6	Поляр. Менее	—	0,5 Изолированная	—
749	6	0,02—0,03	5	1,7 Изолированная	0,06
829	6	0,26	8	0,3 Изолированная	—
901	6	0,28	7	0,6 Неизолированная	0,66
930	6	0,70	5	0,8 Неизолированная	0,82
1106	6	0,39	7	0,3 Неизолированная	0,6
1212	6	0,93	6	0,6 Неизолированная	0,76
1473—1460	6	0,77	6	1,6 Изолированная	0,79

* Интенсивности даны в такой же шкале, как и для толуола.

одного из исследованных углеводородов (2,2,4-триметилпентана) показаны на рис. 11 и 12.

Для построения градуировочного графика, допускающего, как уже указывалось, переход от измеренных к истинным значениям степеней деполаризации, были использованы значения степеней деполаризации линий $\nu = 313 \text{ см}^{-1}$ и $\nu = 459 \text{ см}^{-1}$ CCl_4 . Данные о точности измерений в поляризационных спектрах толуола и 2,2,4-триметилпентана приведены в табл. 4 и 5.

Из анализа данных, содержащихся в таблицах, видно, что точность измерений составляет 5—8%. Совпадение найденных нами значений для степеней деполаризации линий толуола с лучшими данными, имеющимися в литературе, полученными фотографическим методом, вполне удовлетворительное. Хорошее совпадение для интенсивных и изолированных линий в спектрах всех исследованных веществ имеется и с данными, полученными фотоэлектрическим методом в работе [25]. Вместе с тем, в ряде случаев, особенно в спектре 2,2,4-триметилпентана, обнаруживаются значительные отступления от данных [25]. Так, например, сравнительно слабая неизолированная линия 901 см^{-1} спектра этого вещества по нашим данным имеет степень деполаризации $\rho = 0,28$, по данным цитированной работы $\rho = 0,66$. В данном случае имеет место расхождение в результатах измерений даже в качественной оценке состояния поляризации.

Детальное сопоставление измеренных нами степеней деполаризации с данными [25] показывает, что расхождение результатов, наблюдаемое в отдельных случаях, повидимому, обусловлено недостаточной пороговой чувствительностью фотоэлектрической установки авторов упомянутой работы. Этот вывод подтверждается тем, что отступления, как правило, велики для слабых неизолированных линий. В спектре толуола, имеющем интенсивные линии, совпадение результатов в целом гораздо лучшее.

Таким образом на некоторых примерах нами показаны возможности фотоэлектрического метода регистрации, реализованного в виде светосильной по световому потоку установки, при измерении интенсивностей линий. Однако решение ряда задач, связанных с точным измерением частот линий спектра, повидимому, более доступно фотографическому методу. Этот вопрос требует специального изучения.

Авторы с глубокой благодарностью отмечают неизменный интерес к данной работе со стороны проф. В. К. Прокофьева.

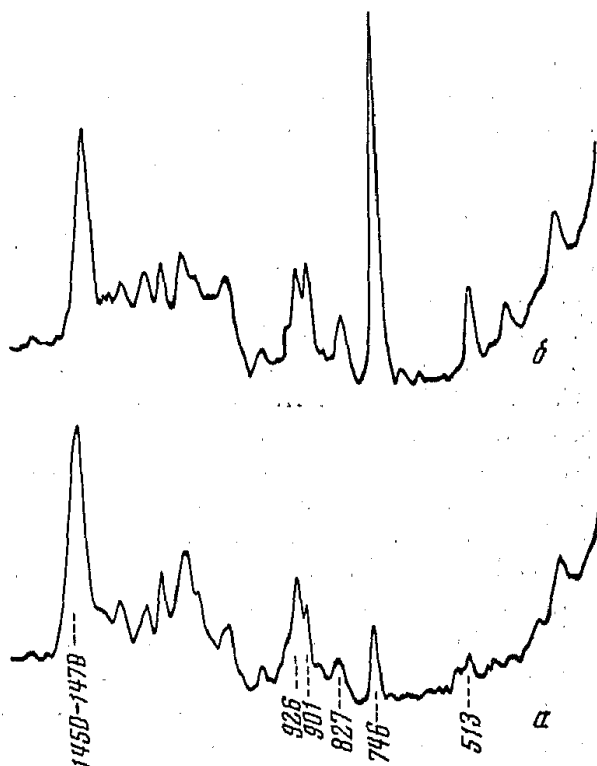


Рис. 12. Поляризационный спектр 2,2,4-триметилпентана. а — слабая, б — интенсивная компоненты. Объем кюветы 11 см^3 . Напряжение питания фотоумножителя 910 V .

Литература

- [1] П. П. Шорыгин. Докторская диссертация, Физико-химический институт им. Л. Я. Карпова, Москва, 1949. — [2] Я. С. Бобович и М. В. Волькенштейн. ДАН СССР, 71, 1045, 1950. — [3] М. В. Волькенштейн, М. А. Ельяшевич и Б. И. Степанов. Колебания молекул, т. 2, ОНТИ, 1949. — [4] М. М. Сущинский. Диссертация, Тр. ФИАН, 5, 185, 1950. — [5] F. F. Cleveland and M. J. Murry. Journ. Chem. Phys., 7, 396, 1939. — [6] Я. С. Бобович и В. А. Александров. Зав. лаб., 16, 37, 1950. — [7] D. H. Rank and R. E. Kagari, JOSA, 40, 89, 1950. — [8] Я. С. Бобович и Д. Б. Гуревич. ДАН СССР, 85, 521, 1952. — [9] Н. О. Чечик. Усп. физ. наук, 37, 74, 1949. — [10] М. М. Сущинский. ЖЭТФ, 20, 304, 1950. — [11] М. М. Сущинский. Изв. АН, сер. физ., 14, 387, 1950. — [12] М. М. Сущинский. ЖЭТФ, 22, 755, 1952. — [13] R. J. Pfister and D. H. Rank. JOSA, 32, 390, 1942; D. H. Rank, R. J. Pfister and A. A. Grimm. JOSA, 31, 31, 1943; D. H. Rank and R. V. Wiegand, JOSA, 36, 325, 1946. — [14] Jen-Van-Chien and P. Bender. Journ. Chem. Phys., 15, 376, 1947. — [15] C. H. Miller, D. A. Long, L. A. Woodward and H. W. Thomson. Proc. Phys. Soc., A62, 401, 1949. — [16] A. C. Menzies and J. Skinner. Journ. Sci. Instr., 26, 299, 1949. — [17] Я. С. Бобович. Зав. лаб., 16, 885, 1950. — [18] G. Hansen. Optik, 6, 337, 1950. — [19] R. F. Stamm and C. F. Salzman. JOSA, 43, 126, 1953. — [20] D. H. Rank and J. S. McGartney. JOSA, 38, 279, 1948. — [21] J. J. Heigl, B. F. Dudenbostel, H. F. Black and J. A. Wilson. Anal. Chem., 22, 154, 1950. — [22] H. L. Welsh, M. F. Crawford, T. R. Thomas and G. R. Love. Canad. Journ. Phys., 30, 577, 1952. — [23] М. Л. Сосинский. Изв. АН СССР, сер. физ., 17, 621, 1953. — [24] Е. Ф. Гросс и В. А. Колесова. Статьи в сборнике, посвященном памяти С. И. Вавилова, Изд-во АН СССР, М., 1952. — [25] M. R. Fenske, W. G. Braun, R. V. Wiegand, D. Quiggle, R. H. McCormick, D. H. Rank. Anal. Chem., 19, 700, 1947. — [26] К. В. Кольрауш. Спектры комбинационного рассеяния, ИИЛ, М., 1952.

К ТЕОРИИ ПРИКОНТАКТНЫХ ЯВЛЕНИЙ

Г. М. Авакьянц

Рассмотрена проблема учета разогревания электронов (изменения их средней кинетической энергии) в электрическом поле при расчетах приконтактных явлений. Указана одна возможность эффективного решения задачи. Исходя из такой возможности, путем расчета сопротивления контакта металл — полупроводник (при постоянном токе) для случаев сильного и слабого истощения примесных уровней в приконтактном слое показана необходимость учета разогревания и в том случае, когда оно слабо.

1. Введение и критические замечания

Как известно, за последние годы особенно расширились теоретические и экспериментальные исследования в области изучения полупроводников и их контакта между собой и металлом. Следует, однако, указать, что никто, тем не менее, не обращал внимания на важность учета разогревания электронов (изменения их средней кинетической энергии) в сильных электрических полях в полупроводнике при изучении свойств последнего¹. Необходимость же учета разогревания связана с тем обстоятельством, что работа твердых выпрямителей происходит, как показывают оценки, в условиях сильного разогрева электронов внутри слоя полупроводника. Это относится как к пропускному направлению тока, когда разогревание происходит несомненно по всей толще полупроводника, так и к запиорному направлению тока, когда имеется значительное разогревание внутри запиорного слоя. Следствием такого разогревания должен явиться целый ряд явлений, существенных, в частности, для униполярной проводимости контакта двух полупроводников или контакта металл — полупроводник.

Как уже упоминалось, в литературе отсутствуют какие-либо теоретические исследования в направлении учета разогрева электронов при расчете униполярной проводимости или других приконтактных явлений. Более того, до настоящего времени эта проблема никем даже не ставилась. Следует, впрочем, указать, что некоторые авторы [1,2], изучавшие приконтактные явления, пытались учесть эффекты, связанные с сильными электрическими полями в слое полупроводника. Однако они при этом упускали из вида явление разогревания, которое либо является причиной тех явлений, которые они пытались учесть, как, например, в [1], либо предшествует им, как, например, в [2].

В самом деле, в работе [1] известное диффузионное уравнение

$$i = euNE - DdN/dz \quad (1)$$

¹ Как мы увидим ниже, в электрическом поле средняя энергия электронов может не только увеличиваться, но и уменьшаться, т. е. может иметь место не только «разогревание», но и «охлаждение». Однако, для краткости, мы будем «разогреванием» называть изменение кинетической энергии электрона вообще. Впрочем, в первом и втором разделах статьи под «разогреванием» подразумевается главным образом увеличение средней энергии электронов.

обобщается на случай зависимости подвижности u от напряженности электрического поля. Автор такое обобщение проводит, принимая обычное соотношение между подвижностью и коэффициентом диффузии

$$D = (kT/e) u \quad (2)$$

и переписывая уравнения (1) в форме, удобной (впрочем, не всегда) в случае u , зависящей от E , а именно:

$$i = eNv + kTv dN/d\varphi, \quad (3)$$

где

$$v = uE = -u d\varphi/dz. \quad (4)$$

Такое обобщение является ошибочным по двум причинам.

Во-первых, нельзя сохранять соотношение (2), считая в то же время подвижность зависящей от поля. Действительно, согласно определению подвижность и коэффициент диффузии выражаются следующими интегралами:

$$u = -\frac{4\pi}{N} \int_0^\infty \frac{l(v)}{3} \frac{v}{\partial(m'v^2/2e)} \frac{\partial f_0}{\partial v} v^2 dv, \quad (5)$$

$$D = \frac{4\pi}{N} \int_0^\infty \frac{l(v)}{3} v f_0 v^2 dv. \quad (6)$$

Здесь f_0 — сферически симметричная часть функции распределения для электронов, v и m' — соответственно скорость и эффективная масса электрона, l — длина свободного пробега, — в общем случае, функция скорости. Из (5) видно, что подвижность только в том случае может существенно зависеть от поля E , когда f_0 сильно зависит от E , а это будет иметь место только в случае, когда происходит значительное разогревание электронов в поле. Вместо (2) тогда по порядку величины будем иметь

$$D/u \sim \overline{\mathcal{E}}(E)/e, \quad (7)$$

где $\overline{\mathcal{E}}(E)$ — средняя энергия электронов при сильном разогреве, значительно превышающая kT .

Во-вторых, уравнение (4) является неверным в случае зависимости подвижности от поля еще и потому, что в этом случае эффективная температура электронного газа (численно равная средней энергии электронов, деленной на k) не только значительно превышает температуру решетки T , но и является функцией координат из-за неоднородности электрического поля в приконтактной области. Вследствие этого в контактной области появятся дополнительные потоки электронов, которые следует интерпретировать как термотоки. Таких термотоков уравнение (3) не учитывает.

Работа [2] посвящена теоретическому исследованию некоторых явлений в германиевых выпрямителях и триодах. Автор проводит свои расчеты и для сильных полей. При этом он сохраняет диффузионное уравнение в виде (1), а также принимает соотношение (2). По мнению автора [2], сильное поле проявляется лишь в том, что наклон энергетических зон в кристалле в сильном поле может достигнуть такой степени, когда, например, дырки в заполненной зоне за время столкновений успевают переместиться много раз от одного до другого края зоны. Последний эффект, по оценке, приведенной в [2], будет особенно заметным лишь при полях, больших 10^5 В/см, если длина свободного пробега $l \sim 10^{-5}$ см и ширина зоны ~ 1 эВ.

Однако уже при значительно меньших значениях напряженности поля ($\sim 10^2$ В/см) при том же пробеге дырки заведомо будут сильно разогреты, ибо выполняется необходимое неравенство [3]:

$$\frac{m'}{M} \frac{(eEl)^2}{(kT)^2} \gg 1, \quad (8)$$

где M — масса атомов, на которых происходит рассеяние дырок (см. [3]). По этой причине формула (21) работы [2], пригодная, по мнению ее автора, для полей, меньших 10^6 В/см, не состоятельна.

В работе [2] имеется ряд других неточностей, которых мы из-за недостатка места здесь касаться не будем.

2. Постановка задачи. Основные уравнения

Целью настоящей работы являются прежде всего правильная постановка проблемы влияния сильного электрического поля на приконтактные явления в полупроводниках и указание одной возможности для ее эффективного решения. Как было сказано выше, сильное электрическое поле проявляет себя прежде всего в разогревании электронов. Следует отметить, что разогревание не может иметь места в случае равновесия, т. е., в частности, при отсутствии прохождения тока через полупроводник, несмотря на то, что при равновесии могут иметь место в приконтактной области значительные электрические поля. Однако, например, туннельный эффект на контакте может иметь место и при равновесии; в этом смысле он может предшествовать разогреванию электронов, хотя он особенно велик также только в сильных полях. Напротив, ударная ионизация, зависимость подвижности и коэффициента диффузии от поля, приконтактные термотоки и осцилляции электронов в зоне являются следствием разогревания электронов и имеют место обычно уже при сильном разогреве. Так, например, осцилляция электронов между краями зон не может иметь места при слабом разогревании, так как при заметной осцилляции все электроны должны обладать средней кинетической энергией, значительно большей kT .

Если отвлечься от эффектов, связанных с конечной шириной зоны, то решение задачи о влиянии разогревания электронов в приконтактной области на явления, в ней протекающие, сводится к решению следующей системы уравнений (для стационарного случая):

$$\frac{v}{3} \operatorname{div} \mathbf{f}_1 + \frac{e^2}{3p^3} \frac{\partial}{\partial p} (p^2 E \mathbf{f}_1) - \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{m' p^3 kT}{M l(p)} \frac{\partial f_0}{\partial p} + \frac{p^4}{M l(p)} f_0 \right] + W(f_0) = 0,$$

$$v \nabla f_0 + e E \frac{\partial f_0}{\partial p} + \frac{v}{l(p)} \mathbf{f}_1 = 0, \quad (9)$$

$$\epsilon \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi p \left(4\pi \int_0^\infty f_0 p^2 dp \right).$$

Первые два уравнения в (9) были получены Давыдовым [3], который вывел их, используя то простое положение, что при соударениях электронов с тяжелыми частицами (атомами или ионами газа или твердого вещества) их энергия меняется, в отличие от направления движения, весьма незначительно. Функция распределения Давыдовым была представлена в виде

$$f(\mathbf{p}) = f_0(p) + \left(\frac{\mathbf{p}}{p} \mathbf{f}_1 \right) + \mu(p) \quad (10)$$

и было показано, что $\mu(p) \ll f_0$ и f_1 , а также $f_1 \ll f_0$ (p — импульс электрона). В (9) $W(f_0)$ — некоторая функция от сферически симметричной части функции распределения, появляющаяся в связи с процессами порождения или рекомбинации электронов в данном элементе объема. ρ — плотность заряда в данной точке; она является функцией интеграла от f_0 , указанного в круглых скобках.

Отыскивается такое решение системы уравнений (9), которое переходило бы в глубине полупроводника в решение для однородного электрического поля и при котором f_0 и f_1 не являлись бы более функциями координат.

К сожалению, решение указанной системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных пока практически невозможно. Встает вопрос об упрощении системы (9) или об установлении системы уравнений для некоторых других функций, но описывающих то же состояние, хотя бы и несколько менее точно.

В самом деле, представим f_0 в следующем виде (ограничиваясь одномерным случаем):

$$f_0 = N(z)F(p, z), \quad (11)$$

так что (при условии $f_0 \gg f_1$)

$$4\pi \int_0^\infty F(p, z) p^2 dp = 1. \quad (12)$$

Умножим второе уравнение (9) на $(4\pi/3)l(p)p^2 dp$ и проинтегрируем по p от нуля до бесконечности. Если, кроме того, принять, что

$$l(p) = l_n p^n, \quad (13)$$

то получим

$$i = -\frac{e l_n N}{3m'} \left\{ -em' (n+2) \chi^{n-1} E + \chi^{n+1} \frac{\partial \ln N}{\partial z} + \frac{\partial \chi^{n+1}}{\partial z} \right\}, \quad (14)$$

где

$$\chi^n = 4\pi \int_0^\infty p^n F(p, z) p^2 dp. \quad (15)$$

Подставим теперь в первое из уравнений (9) вместо f_1 ее значение из второго уравнения, умножим первое уравнение на $(p^2/2m') 4\pi p^2 dp$ и проинтегрируем его по p от нуля до бесконечности. Учитывая (13), найдем

$$-iE + \frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{NkT}{Ml_n} \left[\frac{\chi^{-n+3}}{m'kT} + (n-4) \chi^{-n+1} \right] + S(N, \chi^n) = 0, \quad (16)$$

где

$$S(N, \chi^n) = 4\pi \int_0^\infty \frac{p^2}{2m'} W(f_0) p^2 dp, \quad (17)$$

$$Q = -\frac{Nl_n}{6(m')^2} \left\{ -em' (n+4) \chi^{n+1} E + \chi^{n+3} \frac{\partial \ln N}{\partial z} + \frac{\partial \chi^{n+3}}{\partial z} \right\}. \quad (18)$$

Третье уравнение (9) можно переписать в виде

$$\epsilon dE/dz = 4\pi \rho(N). \quad (19)$$

Итак, вместо системы (9) мы получили новую, более простую систему нелинейных дифференциальных уравнений (14), (16) и (19)

для неизвестных функций N, E, χ^ν . Однако число неизвестных функций превышает здесь число уравнений и однозначное решение получить невозможно. Чтобы найти неизвестные N, E и χ^ν , нужно увеличить число уравнений. Это можно сделать, обратившись к табл. 1.

В этой таблице приведены отношения $\chi^\nu/[\chi^2]^{1/2}$ для различных ν и n , вычисленные при помощи функции распределения для сильно разогретого в однородном электрическом поле электронного газа (процессами рекомбинации и порождения электронов, а также ударной ионизацией мы, для простоты, пренебрегли)

$$f_0(p) = \frac{2(2-n)N}{4\pi\Gamma(3/2(2-n))} (A_n)^{1/2(2-n)} \exp[-A_n p^{2(2-n)}], \quad (20)$$

где

$$A_n = \frac{3(m')^{-(n-1)}}{2(2-n)(eEl_n)^2 M}. \quad (21)$$

Выражение (20) справедливо для $n \leq 2$. В отсутствие разогревания отношения $\chi^\nu/[\chi^2]^{1/2}$ при всех n равны отношениям, приведенным в таблице для $n=1$. Из таблицы видно, что при сильном разогревании отношения $\chi^\nu/[\chi^2]^{1/2}$ являются отвлеченными числами и во всех случаях не намного отличаются от тех же отношений в отсутствие разогревания. Для $n=1$ эти отношения в двух предельных случаях точно совпадают. Это обстоятельство позволяет получить приближенное решение нашей задачи, добавив к системе (14), (16) и (19) столько уравнений, сколько нужно для определения всех неизвестных функций N, E и χ^ν , путем использования при помощи табл. 1 соотношений

Таблица 1

Значения $\chi^\nu/[\chi^2]^{1/2}$ для сильно разогретого в однородном электрическом поле электронного газа

$\nu \backslash n$	$-1/2$	0	$1/2$	1	$3/2$
$-3/2$	1,49	1,54	1,64	1,87	2,85
-1	1,22	1,24	1,28	1,38	1,73
$-1/2$	1,07	1,08	1,09	1,13	1,23
0	1	1	1	1	1
$1/2$	0,962	0,959	0,950	0,937	0,892
1	0,953	0,948	0,941	0,921	0,866
$3/2$	0,967	0,962	0,956	0,943	0,901
2	1	1	1	1	1
$5/2$	1,05	1,06	1,07	1,10	1,17
3	1,12	1,13	1,16	1,22	1,44
$7/2$	1,21	1,24	1,29	1,40	1,87
4	1,32	1,37	1,45	1,65	2,50
$9/2$	1,45	1,53	1,67	2,00	3,49

между моментами χ^ν , с одной стороны, и, например, моментом χ^2 , — с другой. В самом деле, в приконтактной области функция распределения из-за неоднородности электрического поля сильно меняется с координатой z . Это, в свою очередь, приводит к изменению с z моментов χ^ν и, в частности, момента χ^2 , определяющего среднюю кинетическую энергию электрона. Однако отношение моментов $\chi^\nu/[\chi^2]^{1/2}$ должно при этом меняться с z слабо, так как и сильному, и слабому разогреванию, как видно из таблицы, соответствуют почти одни и те же отношения. Удобно выразить χ^ν через χ^2 , используя соотношения

между ними в отсутствие разогрева. Это позволит в предельном случае слабых полей получить точные решения.

Система уравнений (14), (16) и (19) получена в предположении квадратичной зависимости кинетической энергии электрона от его импульса. Это для зонного электрона не всегда может иметь место. В случае наличия в полупроводнике носителей заряда обоих знаков следует составить систему уравнений, аналогичную приведенной выше, для носителей заряда другого знака. Особо следует рассмотреть вопрос о системе уравнений для N , E и χ^v в случае наличия ударной ионизации, а также в случае заметного вырождения электронного газа.

3. Линеаризация уравнений. Вывод формулы для контактного сопротивления. Граничные условия

В предыдущих разделах мы сформулировали задачу и указали на систему уравнений, которая является значительно более простой, чем точная система, но в то же время является несколько менее точной.

Выпишем уравнения (14) и (16), используя соотношения между моментами χ^v для $n=1$ и вводя вместо момента χ^2 функцию Θ , связанную с χ^2 соотношением:

$$\chi^2/2m' = \frac{3}{2} k\Theta, \quad (22)$$

получим (в § 3 $e < 0$)

$$i = -eNl_1 \left\{ -eE + k\Theta \frac{\partial \ln N}{\partial z} + k \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right\}, \quad (23)$$

$$\frac{3kN}{Ml_1} (\Theta - T) - iE + \frac{5}{2} \frac{k}{e} i \frac{\partial \Theta}{\partial z} - \frac{5}{2} l_1 k^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(N\Theta \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right) + S(N, \Theta) = 0. \quad (24)$$

Функция Θ может быть интерпретирована, таким образом, как эффективная температура.

Из изложенного ранее могло показаться, что разогревание электронов существенно лишь, когда оно сильное, т. е. если

$$\Theta \gg T, \quad (25)$$

и что если неравенство (25) не выполнено, то мы получим результаты теорий, не учитывающих разогрева. Ближайшее рассмотрение показывает, что это не так. Разогревание может быть существенно и тогда, когда оно слабое. Чтобы убедиться в сказанном, вычислим контактное сопротивление полупроводника при протекании через контакт металл—полупроводник слабого тока. В этом случае можно линеаризовать уравнения (23) и (24) и получить систему уравнений, решение которой в некоторых случаях становится несложным.

Итак, подставим в (23) и (24) вместо N , E , Θ соответственно $\tilde{N} + v$, $\tilde{E} + \epsilon$ и $T + \vartheta$, причем вторые члены в приведенных выражениях будем считать значительно меньше первых. Отбрасывая после указанной подстановки в уравнениях (23) и (24) члены второго порядка малости, получим следующую систему линеаризованных уравнений:

$$\frac{i}{e^2 l_1 \tilde{N}} = \epsilon - \frac{kT}{e} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{\tilde{N}} \right) - \frac{k\vartheta}{e} \frac{\partial \ln \tilde{N}}{\partial z} - \frac{k}{e} \frac{\partial \vartheta}{\partial z}, \quad (26)$$

$$\frac{3k\tilde{N}}{Ml_1} \vartheta - iE - \frac{5}{2} l_1 k^2 T \frac{\partial \tilde{N}}{\partial z} \frac{\partial \vartheta}{\partial z} - \frac{5}{2} l_1 k^2 T \tilde{N} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} + S(v, \vartheta) = 0. \quad (27)$$

Как мы видим, в линейном приближении член, описывающий тепло Томсона, $\left(\frac{5}{2} \frac{k}{e} i \frac{\partial \Theta}{\partial z}\right)$ выпадает из уравнений. Используя линеаризованные уравнения, получим теперь формулу для контактного сопротивления. С этой целью определим полное падение потенциала на контакте металл — полупроводник. Это падение потенциала будет складываться из двух частей. Во-первых, из падения потенциала V_i внутри слоя полупроводника и, во-вторых, из скачка потенциала V_h на границе между металлом и полупроводником. Из (26) для V_i находим следующее выражение:

$$V_i = \int_0^L \epsilon dz = \frac{1}{e^2 l_1} \int_0^L \frac{i}{\tilde{N}} dz + \frac{1}{T} \int_0^L \tilde{E} \vartheta dz - \frac{kT}{e} \frac{v(0)}{\tilde{N}(0)} + \frac{k}{e} (\vartheta(\infty) - \vartheta(0)), \quad (28)$$

где L — линейные размеры полупроводника, $\tilde{E} < 0$. При запорном направлении тока (электроны идут из металла в полупроводник) $i < 0$.

Чтобы вычислить V_h , следует использовать условие равенства потоков электронов из полупроводника в металл и из металла в полупроводник. Это условие в нашем случае запишется следующим образом:

$$\frac{i}{2e} + cN(0) = c\tilde{N}(0) \exp \left\{ \frac{eV_h}{kT} - \frac{v}{T} \frac{eV_h^0}{kT} \right\}. \quad (29)$$

Здесь c — средняя скорость электронов, с какой они переходят на границе металл — полупроводник из полупроводника в металл; $c = \bar{D} \sqrt{k\Theta/2\pi m'}$, где $\bar{D}$ — усредненный коэффициент проницаемости барьера на границе металл — полупроводник, V_h^0 — контактная разность потенциалов, $V_h^0 < 0$. Линеаризируя условие (29), находим из него V_h

$$V_h = \frac{kT}{e} \frac{v(0)}{\tilde{N}(0)} - \frac{k\vartheta(0)}{e} \frac{eV_h^0}{kT} + \frac{kT}{2e} \frac{i}{ec\tilde{N}(0)}. \quad (29')$$

Таким образом полное падение потенциала V равно

$$V = V_i + V_h = \frac{1}{e^2 l_1} \int_0^L \frac{i}{\tilde{N}} dz + \frac{1}{T} \int_0^L \tilde{E} \vartheta dz - \frac{\vartheta(0)}{T} V_h^0 + \frac{k}{e} (\vartheta(\infty) - \vartheta(0)) + \frac{kT}{2e} \frac{i}{ec\tilde{N}(0)}. \quad (30)$$

Полное падение потенциала можно записать в виде $V = iR$, где R — сопротивление системы металл — полупроводник. Если мы интересуемся лишь контактным сопротивлением этой системы, то из R следует вычесть омическое сопротивление полупроводника, равное

$$\int_0^L \frac{dz}{e^2 l_1 N_\infty}.$$

Следовательно, интересующее нас контактное сопротивление полупроводника R_h равно

$$R_h = -\frac{1}{e^2 l_1 N_\infty} \int_0^\infty \left(1 - \frac{N_\infty}{\tilde{N}}\right) dz + \frac{1}{iT} \int_0^\infty \tilde{E} \vartheta dz - \frac{\vartheta(0)}{iT} V_h^0 + \frac{k}{ie} (\vartheta(\infty) - \vartheta(0)) + \frac{kT}{2e} \frac{1}{ec\tilde{N}(0)}. \quad (31)$$

В (31) мы верхний предел распространили до бесконечности, предполагая, что размеры полупроводника значительно больше, чем размеры области, в которой разыгрываются приконтактные явления. Выпишем граничные условия для функции $\vartheta(z)$. На границе металл—полупроводник при прохождении тока будет иметь место явление Пельтье [6]. Количество тепла, выделяемого или поглощаемого в единицу времени на единицу поверхности на контакте, будет равно в нашем случае

$$i(\varphi + \frac{5}{2}(kT/e)), \quad (32)$$

где φ — энергетическое расстояние от уровня Ферми в металле до нижнего края зоны проводимости в полупроводнике на границе металл — полупроводник.

Первое граничное условие следует из условия, что помимо джоулева тепла в приконтактной области на единицу поверхности контакта в единицу времени будет выделено или поглощено тепло Пельтье (32). Это дает

$$Q_m(\infty) - Q_m(0) = Q_n(\infty) - Q_n(0) + i(\varphi + \frac{5}{2}(kT/e)). \quad (33)$$

Здесь $Q_m(z)$ — величина потока тепла в металле, $Q_n(z)$ — то же самое в полупроводнике. (33) можно переписать так:

$$\kappa_m(\partial\vartheta_m/\partial z)_0 - \kappa_n(0)(\partial\vartheta_n/\partial z)_0 = i(\varphi - \frac{5}{2}(kT/e)), \quad (34)$$

где κ_m — электронная составляющая коэффициента теплопроводности металла, $\kappa_n(z)$ — то же для полупроводника; ϑ_m и ϑ_n — соответственно функция $\vartheta(z)$ для металла и полупроводника.

Второе граничное условие состоит в равенстве функций ϑ_m и ϑ на границе металл — полупроводник:

$$\vartheta_m(0) = \vartheta_n(0). \quad (35)$$

Как показывает анализ, в силу значительной величины электронной составляющей коэффициента теплопроводности для металла граничное условие (34) можно записать в виде

$$(\partial\vartheta_m/\partial z)_0 = 0. \quad (36)$$

Таким образом в случае контакта металл — полупроводник явление Пельтье практически не сказывается на величине функции $\vartheta(z)$. Это, очевидно, будет не так в случае контакта двух полупроводников. Как показывает анализ, функция $\vartheta_m(z)$, если пренебречь проникновением электрического поля в металл и джоулевым теплом ($\sim t^2$), имеет вид $\vartheta_m = Ae^{\mu z}$, где $\mu = \text{const} < 0$, $z < 0$. Это обстоятельство позволяет на основании (35) переписать (36) в виде

$$\vartheta_n(0) = 0. \quad (37)$$

Граничное условие (37) и используется нами ниже.

4. Контактное сопротивление в случае сильного истощения уровней примеси («слой Шоттки»)

В случае сильного истощения примесей сравнительно просто можно провести расчет лишь при большом времени жизни электрона в зоне проводимости, когда обменом энергии между решеткой и электронами, обусловленным рекомбинацией последних, можно пренебречь. Именно

такому расчету и посвящен этот раздел. В силу принятого условия функцией $S(\nu, \vartheta)$ в уравнении (27) можно пренебречь.

Прежде всего заметим, что $\vartheta(\infty)$ достаточно мало ($\sim i^2$) и им можно пренебречь. Будем считать малым в (31), кроме члена $\vartheta(0)$, также и член с $\tilde{N}(0)$, что имеет место при хорошей (близкой к единице) прозрачности барьера на границе металл — полупроводник. Следовательно,

$$R_k = -\frac{1}{e^2 l_1 N_\infty} \int_0^\infty \left(1 - \frac{N_\infty}{\tilde{N}}\right) dz + \frac{1}{iT} \int_0^\infty \tilde{E} \vartheta dz. \quad (38)$$

В рассматриваемом случае («слой Шоттки») напряженность электрического поля в приконтактной области изменяется весьма слабо и приближенно может считаться постоянной. Тогда (в §§ 4 и 5 $e > 0$)

$$\tilde{N} = N_\infty \exp \{e \tilde{E} (z_a - z) / kT\}; \quad (39)$$

здесь z_a — величина, определяющая размеры области, в которой электрическое поле $\tilde{E}$ отлично от нуля. Расчет показывает [4], что

$$z_a = \sqrt{\epsilon' |V_k^0| / 2\pi e N_\infty},$$

где V_k^0 — контактная разность потенциалов, ϵ' — диэлектрическая постоянная полупроводника.

Вычислив, используя (39), первый интеграл в (38), мы найдем сопротивление контакта без учета разогрева R'_k . Имеем

$$R'_k = \frac{1}{e^2 l_1 N_\infty} \left\{ \frac{kT}{e |\tilde{E}|} [\exp(-e V_k^0 / kT) - 1] - z_a \right\}, \quad (40)$$

причем

$$V_k^0 = \tilde{E} z_a.$$

Перейдем теперь к расчету части контактного сопротивления, обусловленного разогревом. Уравнение (27) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} + \frac{e |\tilde{E}|}{kT} \frac{\partial \vartheta}{\partial z} - \frac{6}{5 M l_1^2 kT} \vartheta = -\frac{2i \tilde{E}}{5 l_1 k^2 T \tilde{N}}. \quad (41)$$

Согласно сказанному выше, в области $z < z_a$ электрическое поле можно считать постоянным, а при $z > z_a$ его можно считать равным нулю.

Решение для области $z < z_a$ можно представить в следующем виде:

$$\vartheta = C_1 e^{\mu_1 z} + C_2 e^{\mu_2 z} + \frac{e^{\mu_2 z}}{\mu_2 - \mu_1} \int_0^z g(z) e^{-\mu_2 z} dz - \frac{e^{\mu_1 z}}{\mu_2 - \mu_1} \int_0^z g(z) e^{-\mu_1 z} dz. \quad (42)$$

Здесь $g(z)$ — правая часть уравнения (41). В области $z > z_0$ решение для ϑ имеет вид

$$\vartheta = C'_1 e^{\mu'_1 z}, \quad (43)$$

причем

$$\mu'_1 = -\sqrt{6 / 5 M l_1^2 kT}, \quad (44)$$

в то время как

$$\mu_1 = -\frac{e|\tilde{E}|}{2kT} - \sqrt{\left(\frac{e|\tilde{E}|}{2kT}\right)^2 + \frac{6}{5Ml_1^2 kT}}, \quad (45)$$

$$\mu_2 = -\frac{e|\tilde{E}|}{2kT} + \sqrt{\left(\frac{e|\tilde{E}|}{2kT}\right)^2 + \frac{6}{5Ml_1^2 kT}}. \quad (46)$$

Постоянные C_1 , C_2 и C_1' определяются из граничных условий, одним из которых является соотношение (37), а два других получаются из требования непрерывности температуры и потока тепла в точке z_a .

Произведя соответствующие выкладки, получим следующие выражения для C_1 и C_2 :

$$C_1 = -\frac{y_2'(0)}{y_1'(0)} C_2, \quad (47)$$

где $y_1'(z)$ и $y_2'(z)$ — первые производные двух независимых решений уравнения для $\vartheta(z)$. И далее

$$C_2 = -\frac{\frac{\vartheta_q'(a)}{\vartheta_q(a)} - \frac{u'(a)}{u(a)}}{\frac{y_2'(a)}{y_2(a)} - \frac{u'(a)}{u(a)} - \left(\frac{y_1'(a)}{y_1(a)} - \frac{u'(a)}{u(a)}\right) \frac{y_1(a)}{y_2(a)} \frac{y_2(0)}{y_1(0)}} \frac{\vartheta_q(a)}{y_2(a)}, \quad (48)$$

где ϑ_q — частное решение уравнения (41) для $z < z_a$; оно имеет вид:

$$\vartheta_q = -\frac{2i\tilde{E}}{5l_1 k^2 T \tilde{N}(0)} \left(\frac{e^{-\kappa z}}{(\mu_2 + \kappa)(\mu_1 + \kappa)} + \Re_{2\kappa} e^{\mu_2 z} - \Re_{1\kappa} e^{\mu_1 z} \right), \quad (49)$$

причем

$$\Re_{1\kappa} = \frac{1}{(\mu_2 - \mu_1)(\mu_1 + \kappa)}, \quad \Re_{2\kappa} = \frac{1}{(\mu_2 - \mu_1)(\mu_2 + \kappa)} \quad (50)$$

и далее $\vartheta_q'(a)$ — первая производная от ϑ в точке $z = z_a$ ($z_a \equiv a$), $u(z)$ — решение уравнения (41) для области $z > z_a$,

$$\kappa = e|\tilde{E}|/kT. \quad (51)$$

Так как по условию в области $z > z_a$ электрического поля нет, то

$$R_h'' = \frac{1}{iT} \int_0^{z_a} \tilde{E} \vartheta dz = C_1 \frac{\tilde{E}}{iT} \frac{e^{\mu_1 z_a} - 1}{\mu_1} + C_2 \frac{\tilde{E}}{iT} \frac{e^{\mu_2 z_a} - 1}{\mu_2} - \frac{2\tilde{E}^2}{5l_1 (kT)^2 \tilde{N}(0)} \left(\frac{1 - e^{-\kappa z_a}}{\kappa(\mu_2 + \kappa)(\mu_1 + \kappa)} + \Re_{2\kappa} \frac{e^{\mu_2 z_a} - 1}{\mu_2} - \Re_{1\kappa} \frac{e^{\mu_1 z_a} - 1}{\mu_1} \right). \quad (52)$$

Замечая, что $\kappa z_a = -eV_h^0/kT \gg 1$, находим из (52), что при $\mu_2/\kappa > \exp\{-\kappa z_a\}$

$$R_h'' \approx + \frac{2\tilde{E}}{5el_1} \frac{\exp\{-eV_h^0/kT\}}{kTN_\infty} \frac{1}{\mu_1(\mu_2 + \kappa)}. \quad (53)$$

Сравнивая (53) с (40), мы видим, что при $\mu_2 \ll \kappa$ контактное сопротивление R_h'' , обусловленное разогревом, — одного порядка с R_h' .

5. Контактное сопротивление в случае слабого истощения уровней примеси («слой Давыдова»)

Определим функцию $S(N, \Theta)$ для слоя Давыдова. Если через β обозначить коэффициент рекомбинации, то функция $S(N, \Theta)$ принимает вид

$$S(N, \Theta) = \frac{3}{2} k\beta (\Theta NN' - T\tilde{N}\tilde{N}'). \quad (54)$$

Здесь N' , $\tilde{N}'$ — концентрация свободных донорных уровней в данной точке, соответственно, при прохождении тока через контакт и при его отсутствии. Линеаризуя функцию $S(N, \Theta)$, находим функцию

$$S(v, \vartheta) = \frac{3}{2} k\beta (\tilde{N}\tilde{N}'\vartheta + T(\tilde{N}'v + \tilde{N}v)), \quad (55)$$

где $v' = N' - \tilde{N}'$. Из уравнения непрерывности, используя условие слабости истощения, находим

$$\tilde{N}'v + \tilde{N}v' = 0 \quad (56)$$

и, следовательно,

$$S(v, \vartheta) = \frac{3}{2} k\beta \tilde{N}'\tilde{N}\vartheta = \frac{3}{2} k\beta N_{\infty}^2 \vartheta. \quad (57)$$

Уравнение (27) теперь примет вид

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} - \frac{e\tilde{E}}{kT} \frac{\partial \vartheta}{\partial z} - \left(\frac{6}{5M_1^2 kT} + \frac{3}{5} \frac{\beta N_{\infty}^2}{I_1 kT\tilde{N}} \right) \vartheta = - \frac{2i\tilde{E}}{5I_1 k^2 T\tilde{N}}. \quad (58)$$

Решение этого уравнения в общем виде встречает серьезные трудности. Поэтому сделаем несколько допущений, упрощающих уравнение. Прежде всего разобьем его на два уравнения: одно для области $z < \kappa^{-1}$, а другое для области $z > \kappa^{-1}$, где κ^{-1} — длина дебаевского радиуса экранирования

$$\kappa = \sqrt{8\pi e^2 N_{\infty} / \epsilon' kT}. \quad (59)$$

В первом уравнении (для области $z < \kappa^{-1}$) мы вместо поля подставим его приближенное выражение [5]:

$$\tilde{E} = - \frac{kT}{e} \frac{2}{z + z_0}, \quad (60)$$

правильное, вообще говоря, только при $z \ll \kappa^{-1}$. Здесь z_0 — постоянная, связанная с контактной разностью потенциалов при $\kappa z_0 \ll 1$ соотношением [5]

$$z_0 = \frac{2}{\kappa} \exp \{eV_h^0 / 2kT\}. \quad (61)$$

Во втором уравнении (для области $z > \kappa^{-1}$) мы поле $\tilde{E}$ положим равным нулю. Чтобы выяснить, как будет велика ошибка, связанная с принятыми приближениями, вычислим контактное сопротивление без учета разогрева, но с приближенным выражением для потенциала, соответствующим принятому выражению (61) для поля $\tilde{E}$:

$$V = 2 \frac{kT}{e} \ln \left(\frac{\kappa(z + z_0)}{2} \right). \quad (62)$$

Замечая, что $\tilde{N} = N_{\infty} \exp\{eV/kT\}$, имеем для R'_k :

$$R'_k = -\frac{1}{e^2 l_1 N_{\infty}} \int_0^{x-1} \left(1 - \frac{N_{\infty}}{\tilde{N}}\right) dz = \frac{2}{e^2 l_1 N_{\infty} x} \left(\exp\{-eV_k^0/2kT\} - \frac{1}{2}\right), \quad (63)$$

в то время как точное значение для R'_k равно [5]

$$R'_k = \frac{2}{e^2 l_1 N_{\infty} x} (\exp\{-eV_k^0/2kT\} - 1). \quad (64)$$

Таким образом, как и следовало ожидать, при большой контактной разности потенциалов ($e|V_k^0|/2kT \gg 1$) совершаемая ошибка будет мала.

Итак, вместо (58) мы имеем два уравнения:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} + \frac{6}{5} \left(\frac{\bar{p}^2}{MkTl^2} + \frac{2\bar{p}\bar{v}}{kTl_l x^2 \xi^2} \right) \vartheta = -\frac{16i}{5el_1 N_{\infty} kx^2 \xi^2} \quad (65)$$

для $z < x^{-1}$ и

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} - \frac{6}{5} \left(\frac{\bar{p}^2}{MkTl^2} + \frac{2\bar{p}\bar{v}}{kTl_l x^2 \xi^2} \right) \vartheta = 0 \quad (66)$$

для $z > x^{-1}$.

Здесь мы ввели вместо z новую переменную $\xi = z + z_0$. Далее $\bar{p}$ — средний импульс, а $\bar{v}$ — средняя скорость электрона; $l_g = \bar{v}/\beta N_{\infty}$ — средняя длина свободного пробега по отношению к рекомбинации.

Уравнения (65) и (66) решим для двух предельных случаев.

а) Пусть $\bar{p}^2/MkTl^2 \gg 2\bar{p}\bar{v}/kTl_l x^2 \xi^2$, тогда уравнения (65) и (66) переписутся так:

$$\xi \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} - \frac{6}{5} \frac{\bar{p}^2}{MkTl^2} \xi \vartheta = \frac{16i}{5el_1 N_{\infty} kx^2 \xi^2}, \quad (67)$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \xi^2} - \frac{6}{5} \frac{\bar{p}^2}{MkTl^2} \vartheta = 0. \quad (68)$$

Уравнение (67) решается при помощи подстановки $u = \xi \vartheta$, после которой оно принимает вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{6\bar{p}^2}{5MkTl^2} u = \frac{16i}{5el_1 N_{\infty} kx^2 \xi^2}. \quad (69)$$

Решая (69) и используя соотношение между u и ϑ , найдем для ϑ

$$\begin{aligned} \vartheta = & C_1 \frac{e^{\mu_1 \xi}}{\xi} + C_2 \frac{e^{\mu_2 \xi}}{\xi} + \frac{16i}{5el_1 N_{\infty} kx^2 (\mu_2 - \mu_1)} \left[\frac{e^{\mu_2 (\xi - \xi_i)}}{\xi \xi_i} + \right. \\ & \left. + \frac{\mu_2 e^{\mu_2 \xi}}{\xi} (\text{Ei}(-\mu_2 \xi_i) - \text{Ei}(-\mu_2 \xi)) - \frac{e^{\mu_1 (\xi - \xi_i)}}{\xi \xi_i} + \frac{\mu_1 e^{\mu_1 \xi}}{\xi} (\text{Ei}(-\mu_1 \xi) - \text{Ei}(-\mu_1 \xi_i)) \right], \end{aligned} \quad (70)$$

где

$$\mu_1 = -\sqrt{6\bar{p}^2/5MkTl^2}, \quad \mu_2 = -\mu_1, \quad \xi_i = z_0, \quad (71)$$

и далее

$$\text{Ei}(-x) = -\int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt; \quad \text{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt. \quad (72)$$

Для $z > \kappa^{-1}$ имеем из (69)

$$\vartheta = C_1' e^{\mu_1 \xi}. \quad (73)$$

Используя граничные условия, указанные в предыдущем разделе, можно найти постоянные C_1, C_2 . При помощи полученного выражения для ϑ находим часть контактного сопротивления, связанную с разогревом:

$$\begin{aligned} R_h'' \approx \frac{1}{iT} \int_{\xi_i}^{\xi_a} \tilde{E} \vartheta d\xi = & \left(2 \frac{\hbar}{e} \frac{C_1}{i} + \frac{32}{5e^2 l_1 N_\infty \kappa^2 (\mu_2 - \mu_1)} \times \right. \\ & \times \left(\frac{\exp \{-\mu_1 \xi_i\}}{\xi_i} + \mu_1 \operatorname{li}(-\mu_1 \xi_i) \right) \times \\ & \times \left(\frac{\exp \{\mu_1 \xi_i\}}{\xi_i} - \frac{\exp \{\mu_1 \xi_a\}}{\xi_a} + \mu_1 (\operatorname{Ei}(\mu_1 \xi_a) - \operatorname{Ei}(\mu_1 \xi_i)) \right) + \\ & + \left(2 \frac{\hbar}{e} \frac{C_2}{i} - \frac{32}{5e^2 l_1 N_\infty \kappa^2 (\mu_2 - \mu_1)} \times \right. \\ & \times \left(\frac{\exp \{-\mu_2 \xi_i\}}{\xi_i} + \mu_2 \operatorname{Ei}(-\mu_2 \xi_i) \right) \left(\frac{\exp \{\mu_2 \xi_i\}}{\xi_i} - \frac{\exp \{\mu_2 \xi_a\}}{\xi_a} + \right. \\ & + \mu_2 (\operatorname{li}(\mu_2 \xi_a) - \operatorname{li}(\mu_2 \xi_i)) \left. \right) - \frac{32\mu_1}{5e^2 l_1 N_\infty \kappa^2 (\mu_2 - \mu_1)} \left(\frac{\exp \{\mu_1 \xi_i\}}{\xi_i} \operatorname{li}(-\mu_1 \xi_i) - \right. \\ & - \frac{\exp \{\mu_1 \xi_a\}}{\xi_a} \operatorname{li}(-\mu_1 \xi_a) + \frac{1}{\xi_i} - \frac{1}{\xi_a} + \mu_1 \int_{\xi_i}^{\xi_a} \frac{\exp \{\mu_1 \xi\}}{\xi} \operatorname{li}(-\mu_1 \xi) d\xi \left. \right) + \\ & + \frac{32\mu_2}{5e^2 l_1 N_\infty \kappa^2 (\mu_2 - \mu_1)} \left(\frac{\exp \{\mu_2 \xi_i\}}{\xi_i} \operatorname{Ei}(-\mu_2 \xi_i) - \frac{\exp \{\mu_2 \xi_a\}}{\xi_a} \operatorname{Ei}(-\mu_2 \xi_a) + \right. \\ & + \frac{1}{\xi_i} - \frac{1}{\xi_a} + \mu_2 \int_{\xi_i}^{\xi_a} \frac{\exp \{\mu_2 \xi\}}{\xi} \operatorname{Ei}(-\mu_2 \xi) d\xi \left. \right), \quad (74) \end{aligned}$$

где $\xi_a = \chi^{-1} + z_0 \approx \chi^{-1}$.

б) Пусть теперь $\bar{p}^2 / M k T l^2 < 2 \bar{p} \bar{v} / k T l \kappa$. Уравнения (65) и (66) можно тогда переписать так:

$$\eta^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \eta^2} + 2\eta \frac{\partial \vartheta}{\partial \eta} - \frac{12 \bar{p} \bar{v}}{5 l \kappa^2 k T} + \frac{16i}{5 e l_1 N_\infty \kappa \eta}, \quad z < \kappa^{-1}; \quad (75)$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \eta^2} - \frac{12 \bar{p} \bar{v}}{5 l \kappa^2 k T} \vartheta = 0, \quad z > \kappa^{-1}, \quad (76)$$

где $\eta = \kappa \xi$. Первое из этих уравнений есть уравнение Эйлера с правой частью. Его решение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \vartheta = & C_1 \eta^{b_1} + C_2 \eta^{b_2} + \\ & + \frac{16i}{5 e l_1 N_\infty \kappa} \left(\frac{\eta^{-1}}{(b_1 + 1)(b_2 + 1)} - \frac{\eta^{b_1} \eta_i^{-b_1-1}}{(b_2 - b_1)(b_1 + 1)} + \frac{\eta^{b_2} \eta_i^{-b_2-1}}{(b_2 - b_1)(b_2 + 1)} \right); \quad (77) \end{aligned}$$

здесь $\eta_i = \kappa \xi_i = \kappa z_0$, и далее,

$$\begin{aligned} b_1 = & -1/2 - \sqrt{1/4 + 12 \bar{p} \bar{v} / 5 l \kappa^2 k T}, \\ b_2 = & -1/2 + \sqrt{1/4 + 12 \bar{p} \bar{v} / 5 l \kappa^2 k T}. \quad (78) \end{aligned}$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются описанным выше способом.

Окончательно для R_h^* получаем следующее выражение:

$$R_h^* \approx \frac{1}{iT_\infty} \int_{\eta_i}^{\eta_a} \tilde{E} d\eta = 2 \frac{k}{ei} \left(C_1 \frac{\eta_a^{b_1} - \eta_i^{b_1}}{b_1} + C_2 \frac{\eta_a^{b_2} - \eta_i^{b_2}}{b_2} \right) -$$

$$- \frac{32}{5e^2 L_1 N_{\infty} \kappa} \left(\frac{\eta_a - \eta_i}{\eta_a \eta_i (b_2 + 1) (b_1 + 1)} + \frac{\eta_i^{-b_2-1} \eta_a^{b_2} - \eta_i^{b_2}}{b_2 + 1} \frac{\eta_a^{b_2} - \eta_i^{b_2}}{b_2 (b_2 - b_1)} - \frac{\eta_i^{-b_1-1} \eta_a^{b_1} - \eta_i^{b_1}}{b_1 + 1} \frac{\eta_a^{b_1} - \eta_i^{b_1}}{b_1 (b_2 - b_1)} \right), \quad (79)$$

причем $\eta_a = \kappa \xi_a \approx 1$.

По порядку величины для контактного сопротивления, обусловленного разогревом, в случае слоя Давыдова будем иметь

$$R_h^* \approx 64 \xi_i^{-1} / 5e^2 L_1 N_{\infty} \kappa^2, \quad (80)$$

если $m' / Ml > 1 / L_g \kappa^2 \xi_i^2$ и $\mu_2 \xi_i \ll 1$, $\mu_2 \xi_a \gg 1$, а также

$$R_h^* \approx \frac{16 \eta_i^{-1}}{5e^2 L_1 N_{\infty} \kappa (b_2 - b_1) (b_2 + 1)} \left(4 - \frac{1}{|b_1|} \right), \quad (81)$$

если $m' / Ml < 1 / L_g$ и $b_2 / \eta_i > |\ln \eta_i|$. Сравнивая (80) и (81) с (64), мы видим, что контактное сопротивление, обусловленное разогревом, в случае слоя Давыдова может в несколько раз превышать R_h^* .

Сделаем некоторые замечания о функции $\mathfrak{F}(z)$. Эта функция в нашем случае очень мала на границе металл — полупроводник. По мере удаления от границы $\mathfrak{F}(z)$ возрастает, достигает внутри заборного слоя по абсолютной величине максимума и затем вновь стремится к нулю по мере удаления вглубь полупроводника. При заборном направлении тока она положительна, при пропускном — отрицательна, т. е. при пропускном направлении (для слабых токов) внутри заборного слоя имеет место не «разогревание», а «охлаждение» электронов.

Заметим, наконец, что функция $\mathfrak{F}(z)$ может быть отлична от нуля и в том случае, когда первичное приконтактное электрическое поле отсутствует. Отличие $\mathfrak{F}(z)$ от нуля связано, вообще говоря, не с наличием приконтактного электрического поля, а с отклонением состояния электронного газа от равновесия. Наличие приконтактного электрического поля лишь усиливает такое отклонение от равновесия, и в том случае, когда оно является достаточно сильным, определяет порядок величины функции $\mathfrak{F}(z)$.

Укажем еще, что явление разогрева, по крайней мере при слабых токах, должно, повидимому, сильнее проявляться при контакте двух полупроводников, нежели при контакте металла с полупроводником: колоссальная теплопроводность металла способствует быстрому притоку тепла к контакту или, наоборот, оттоку тепла от контакта и таким образом приводит к тому, что температура электронов на границе металл — полупроводник, как мы видели, является постоянной и равной T .

Как было сказано, «разогревание» или «охлаждение» электронов может иметь место лишь при нарушении равновесия. Однако нарушение равновесия может иметь место не только при прохождении тока через контакт, а также, например, при освещении контакта.

Физико-технический институт
Академии наук Узбекской ССР

Поступила в редакцию
6 сентября 1953 г.

Литература

- [1] R. Burgess. Proc. Phys. Soc., 66 B, 430, 1953. — [2] H. Krieger. ZS. f. Phys., 134, 435, 1953. — [3] Б. И. Давыдов. ЖЭТФ, 7, 1069, 1937. — [4] Г. Хениш. Полупроводниковые выпрямители, ИИЛ, 1951. — [5] Б. И. Давыдов. ЖЭТФ, 9, 451, 1939. — [6] С. И. Пекар. ЖЭТФ, 11, 282, 1941.

О ПРОЦЕССЕ ОКРАШИВАНИЯ КРИСТАЛЛОВ ЩЕЛОЧНО-ГАЛОИДНЫХ СОЛЕЙ ПУТЕМ РЕНТГЕНИЗАЦИИ

Н. П. Калабухов

Приводятся результаты измерений спектрального распределения коэффициента поглощения рентгенизованных кристаллов KCl и тех же кристаллов, повторно рентгенизованных (т. е. рентгенизованных, обесцвеченных и вновь рентгенизованных). Оказалось, что во втором случае коэффициент поглощения возрастает приблизительно на 60%. Измерения электропроводности этих кристаллов показали, что электропроводность рентгенизованных и обесцвеченных кристаллов больше, чем необработанных. Излагаются основные представления о связи дислокаций в кристаллах с явлениями, сопутствующими рентгенизации кристаллов. Утверждается, что в процессе рентгенизации создаются новые вакантные места как ионов галоида, так и ионов щелочного металла, что легко объясняет приведенные в статье опытные факты.

Явление окрашивания кристаллов щелочно-галоидных солей рентгеновскими лучами известно давно [1], однако сам процесс окрашивания изучен еще недостаточно. Рядом авторов [2-4] высказывались соображения о механизме окрашивания, но экспериментальное подтверждение получает в последнее время только гипотеза о том, что в процессе воздействия рентгеновских лучей на кристаллы щелочно-галоидных солей в них возникают вакантные узлы как ионов галоида, так и ионов щелочного металла. Вакантные места ионов галоида занимают электроны при рентгенизации, и таким образом в кристаллах образуются красящие центры (*F*-центры), т. е. они окрашиваются. В настоящей работе излагаются результаты опытов, подтверждающих эту гипотезу.

Опыты велись с кристаллами KCl. Измерялось спектральное распределение коэффициента поглощения этих кристаллов в следующей последовательности: 1) кристаллы рентгенизовались, и в них измерялось спектральное распределение коэффициента поглощения; 2) кристаллы обесцвечивались; 3) кристаллы вновь рентгенизовались при условиях, точно совпадающих с первым случаем, и вновь в них измерялось спектральное распределение коэффициента поглощения.

Результаты опытов оказались следующие. Коэффициент поглощения повторно окрашенных кристаллов возрос в максимуме почти на 60% по сравнению с однократно рентгенизованными кристаллами (рис. 1). Если же после первой рентгенизации и обесцвечивания кристалл отжечь путем выдерживания его в печи при температуре $\sim 150^\circ\text{C}$ в течение 2 час. и потом вновь подвергнуть рентгенизации в условиях, точно совпадающих с первым процессом рентгенизации, то спектральное распределение коэффициента поглощения дает кривую, почти совпадающую с первой даже в максимуме и с несколько меньшим значением коэффициента поглощения (рис. 2) ¹.

Сопоставление результатов этих опытов говорит о том, что в процессе рентгенизации создаются новые центры захвата электронов (после повторной рентгенизации коэффициент поглощения увеличивается). После же термической обработки добавочные центры захвата исчезают (после отжига и повторной рентгенизации коэффициент поглощения почти не изменился).

¹ В проведении этих опытов принимали участие Я. Цискаришвили и Л. Капанадзе.

Нами проведены также опыты с измерением электропроводности кристаллов KCl. Опыты проводились в следующем порядке.

1) Измерялась электропроводность прозрачных кристаллов KCl при температуре 110°C ; 2) кристаллы рентгенизовались и обесцвечивались; 3) вновь измерялась электропроводность (причем измерения электропроводности производились сейчас же после обесцвечивания, а также после обесцвечивания и отжига).

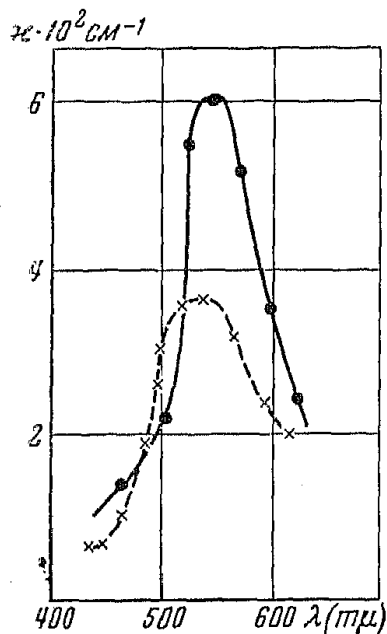


Рис. 1. Кривые спектрального распределения коэффициента поглощения. x — после рентгенизации, ● — после рентгенизации, обесцвечивания и повторной рентгенизации

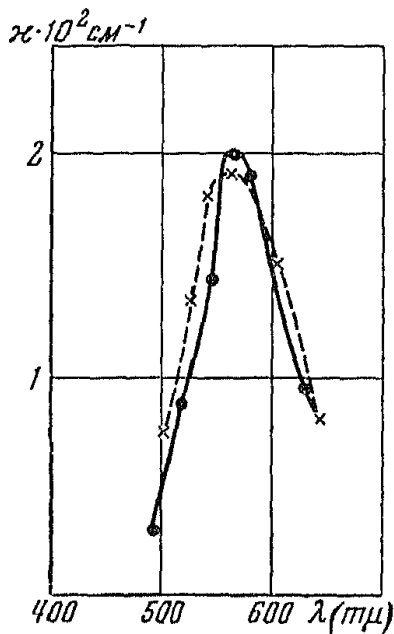


Рис. 2. Кривые спектрального распределения коэффициента поглощения. ● — после рентгенизации, x — после рентгенизации, обесцвечивания, отжига и повторной рентгенизации

На рис. 3 представлены полученные результаты, показывающие спадание тока со временем. Нижняя кривая представляет собой спадание

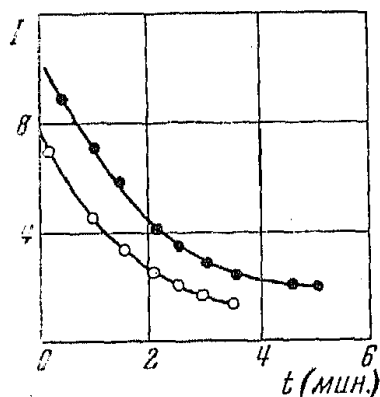


Рис. 3. Спадание тока со временем. ○ — необработанный кристалл, а также рентгенизованный, обесцвеченный и отожженный кристалл (кривые совпадают); ● — рентгенизованный, а затем обесцвеченный кристалл; температура 110°C

тока в прозрачных и отожженных после рентгенизации и обесцвечивания кристаллах. Верхняя кривая дает спадание тока в кристаллах, обесцвеченных после рентгенизации (без отжига). Как видно из рисунка, неотожженные кристаллы после рентгенизации и обесцвечивания дают повышенную электропроводность, а после отжига электропроводность кристаллов совпадает (точность измерений была 5%) с начальной электропроводностью. Эти опыты с большой убедительностью говорят о том, что в процессе рентгенизации возникают новые вакансии.

В ряде работ последних лет [5,6] высказаны интересные соображения об образовании вакантных мест из дислокаций. В этих соображениях су-

щественную роль играет так называемая особенная плоскость, т. е. плоскость, содержащая дополнительные ряды ионов (для ионной кристаллической решетки), вызывающих раздвижение ионов в определенных кристаллографических направлениях [7]. Автор работы [5] предположил, что край особенной плоскости может иметь излом. Представление о таком изломе легко уяснить себе, если рассмотреть рис. 4. На этом рисунке представлены четыре последовательные кристаллические плоскости.

Перпендикулярно к этим плоскостям расположена особенная плоскость, включающая в себя ряды дополнительных ионов. Край этой плоскости может иметь излом (или уступ, неровность), вызванный тем, что крайний ряд ионов особенной плоскости содержит меньше ионов (на рисунке вертикальные ряды), чем все остальные. Край особенной плоскости называется линией дислокации. Направление скольжения, как видно из рисунка, всегда перпендикулярно к этой линии дислокации. В случае наличия у края особенной плоскости (у линии дислокации) излома, в кристаллической решетке образуется потенциальная яма вблизи этого излома (на рис. 4 это место отмечено буквой А), равносильная наличию в этом месте некоторого эффективного заряда. Легко показать, что величина этого эффективного заряда равна $\pm e/2$ [5]. Автор работы [5] рассматривает это место как «зарождающуюся» вакансию.

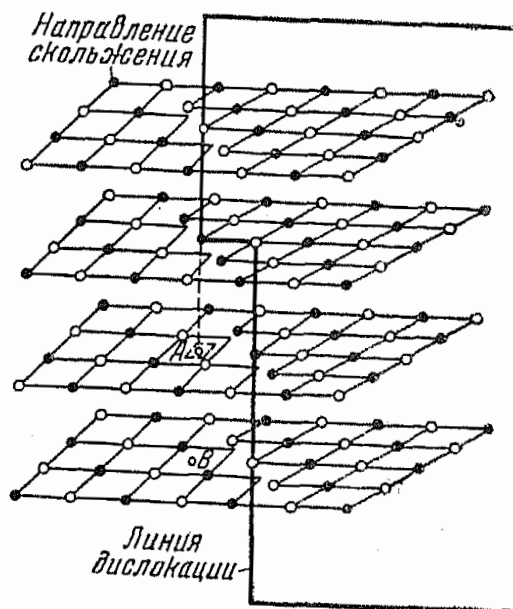


Рис. 4. Особенная плоскость в кристаллической решетке, имеющая уступ, обуславливающий появление «зарождающейся» вакансии (точка А)

Зарождающаяся вакансия является примечательным местом в кристаллической решетке, так как, с одной стороны, излом способствует образованию вакансии путем захвата зарождающейся вакансии ближайшего иона и, следовательно, включения его, в ряд ионов, образующих особенную плоскость. При этом излом перемещается на расстояние, равное постоянной решетки. Образовавшаяся вакансия может продиффундировать внутрь кристалла. С другой стороны, вакантное место может поглотиться дислокационной линией. Произойти это может следующим образом. Вакантное место может подойти к крайнему иону в изломе и захватить его, уменьшив таким образом на один ион крайний ряд ионов особенной плоскости. При этом излом также переместится на расстояние, равное постоянной решетки, но в направлении, противоположном перемещению в первом случае.

Наличие дислокационных линий с изломами способствует образованию красящих центров и лишних вакансий при облучении кристаллов щелочно-галогидных солей рентгеновскими лучами. Процесс этот протекает следующим образом: сорванный рентгеновским квантом электрон с какого-либо иона галоида захватывается ионом щелочного металла и начинает странствовать по кристаллу. При своем движении электрон может подойти к излому дислокационной линии и может захватиться «зарождающейся» вакансией отрицательного иона (эффективный заряд ее равен $+e/2$) и вследствие этого образовать некоторый центр, будем называть его *j*-центром [6]. К *j*-центру может подойти вакантное место отрицательного иона. Тогда электрон из *j*-центра перескочит в это вакантное место и образует с ним *F*-центр, что можно рассматривать как присутствие около излома нейтрального атома щелочного металла. Решетка в этом месте будет нарушена, и будет облегчен перескок ближайшего

иона галоида в «зарождающуюся» вакансию, и при этом будет передвинут излом на расстояние, равное постоянной решетки, т. е. ион галоида перейдет в особую плоскость, и в решетке появится новое вакантное место. Таким образом в результате облучения кристалла рентгеновскими лучами в нем образуется F -центр и лишняя вакансия, т. е. действие рентгеновских лучей на кристалл в случае наличия в нем краевой дислокации с изломом приводит к появлению F -центров и лишних вакантных мест отрицательных ионов. Этот процесс вместе с тем увеличивает число зарождающихся вакансий положительных ионов, так как отрицательные ионы, захватываясь зарождающимися вакансиями, перемещают излом на расстояние, равное постоянной решетки, и меняют знак зарождающейся вакансии. Увеличение же числа зарождающихся вакансий ионов положительного знака влечет за собой увеличение вероятности возникновения в кристалле вакансий положительных ионов. Таким образом рентгенизация кристаллов приводит к увеличению в них числа вакантных мест как отрицательных, так и положительных ионов.

Эти представления хорошо объясняют изложенные нами результаты опытов, проведенных с кристаллами KCl. В самом деле, увеличение числа вакантных мест и ионов галоида приводит к увеличению числа F -центров при повторной рентгенизации. Увеличение же числа вакантных мест ионов щелочного металла приводит к возрастанию ионной проводимости, так как ионная проводимость обуславливается движением вакантных мест ионов щелочного металла. Отжиг кристалла приводит к возрастанию подвижности вакансий, благодаря чему растет число ассоциированных вакансий. Часть вакансий будет поглощаться дислокационными линиями, а это, в свою очередь, приводит к уменьшению коэффициента поглощения в рентгенизованных после отжига кристаллах, а также к уменьшению электропроводности.

Институт физики
Академии наук Грузинской ССР

Поступила в редакцию
9 декабря 1953 г.

Литература

- [1] W. C. Roentgen и A. Joffe. Ann. d. Phys., 64, 1, 1921. — [2] П. С. Тартаковский. Внутренний фотоэффект в диэлектриках, ГИТТЛ, М.—Л., 1940, стр. 101—102. — [3] Г. Ф. Друкарев. ДАН СССР, 52, 215, 1946. — [4] J. Estermann, W. J. Leivo и O. Stern. Phys. Rev., 75, 627, 1949. — [5] F. Seitz. Phys. Rev., 79, 890, 1002, 1950; 80, 239, 1950; Rev. Mod. Phys., 23, 328, 1951. — [6] J. Markham. Phys. Rev., 88, 500, 1952. — [7] J. M. Burgers. Proc. Phys. Soc., 52, 23, 1940.

ИЗМЕРЕНИЕ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА В ГЕЛИИ II В ОКРЕСТНОСТИ 1°K

В. П. Пешков

Проведено измерение термомеханического эффекта до 0,82° K. Величины $Q = ST$, а следовательно, и энтропии гелия II, определенные из термомеханического эффекта и из данных по теплоемкости, полностью совпадают. Значения ρ_n/ρ , определенные по скорости второго звука, теплоемкости и энтропии выше 0,85° K, совпадают со значениями, вычисленными по теории Ландау, в пределах ошибок эксперимента (10%).

Как было показано Капицей [1], при перетекании гелия II через тонкие щели и капилляры течение совершается сверхтекучим образом, т. е. без потерь, и не сопровождается переносом энтропии. Возникающая при этом разность температур ΔT и разность уровней h в первом приближении подчиняются следующему соотношению:

$$A\rho Q \frac{\Delta T}{T} = \rho gh + \frac{\partial p}{\partial T} \Delta T,$$

где A — механический эквивалент теплоты, ρ — плотность гелия, Q — количество тепла, поглощаемое 1 г гелия, вытекающего сверхтекучим образом, g — ускорение силы тяжести. Последний член определяется разностью упругостей паров в сосудах.

Капицей значение Q было промерено от λ -точки до 1,33° K. Целью настоящей работы было определение Q в окрестности 1° K с тем, чтобы в пределах одной лаборатории был комплекс опытных данных, достаточных для проверки теории.

Для получения и поддержания температур вблизи 1° K был использован прибор, описанный ранее [2]. Температуры определялись по термометрам сопротивлений из фосфористой бронзы, проградуированным по упругости паров гелия выше 1° K. Изменение сопротивления бронзы с температурой во всем интервале температур проверялось путем сопоставления с магнитной восприимчивостью железо-аммониевых квасцов. Так как получение низких температур в больших объемах затруднительно, а в малых приборах понижается точность измерений, в экспериментах были использованы два прибора — один для измерений в области 0,9° K и выше, другой — меньшего объема, для температур до 0,82° K.

Схема первого прибора изображена на рис. 1. В дьюар 5 диаметром 2,5 см, окруженный жидким гелием при температуре 1,4—1,7° K, помещался дьюар 4, внутренний диаметр которого равен 1,1 см. Нижняя часть дьюара 4 была шлифованной. К ней при помощи стальной проволоки диаметром 0,3 мм 1 и пружины 9 могла плотно прижиматься или держаться в открытом состоянии стеклянная пробка 8. При помощи платиновых выводов на пробке были укреплены термометр сопротивления 7 и нагреватель 2.

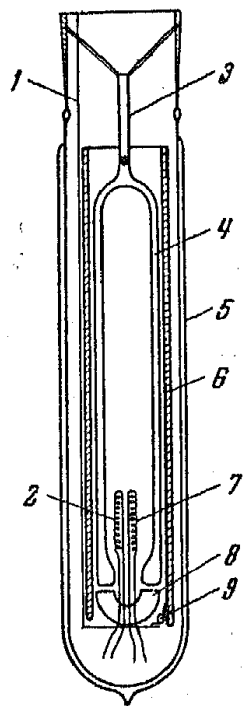


Рис. 1. Прибор для измерений термомеханического эффекта от 0,9° K и выше

К дьюару 4 прикреплялся изоляционной лентой медный экран 6 со щелями для наблюдения шириной 1 мм и центрирующими распорками. Чтобы при закрывании пробки дьюар 4 не поднимался, он сверху прижимался при помощи металлических распорок и стеклянной трубки 3.

Гелий в дьюар 5 наливался из наружного дьюара через трубку и медный вентиль и откачивался диффузионными насосами, как описано в предыдущей работе [2].

Прибор, с которым работали при наиболее низких температурах, изображен на рис. 2. Он отличался от предыдущего тем, что гелий наливался не в дьюар 4, как показано на рис. 2, а в меньший дьюар 5 диаметром 1,2 см. Внутри дьюара 5 при помощи изоляционной ленты и стеклянной трубки 1 укреплялся медный экран 3. Внизу помещалась плоская стеклянная пробка 10, укрепленная в одной точке на шарнире. Внутри экрана свободно ходил и пружиной 8 прижимался к пробке дьюар 6 внутренним диаметром 2,2 мм. Дьюар 6 стальной проволокой 2 диаметром 0,2 мм мог подниматься кверху, при этом он отходил от пробки 10 и сообщался с дьюаром 5. Внутри дьюара 6, как и в приборе рис. 1, помещались нагреватель 9 и термометр 7. Как в первом, так и во втором приборе кроме термометра во внутреннем дьюаре был термометр снаружи. Оба термометра были примерно одинаковыми, имели общую точку и включались параллельно. Последовательно с термометрами включались большие сопротивления. Через внутренний термометр устанавливался ток 0,5 мА, а через наружный — такой, чтобы падение напряжений на термометрах при одной и той же температуре было одинаковым. Температура и раз-

Рис. 2. Прибор для температур до $0,8^\circ \text{K}$

ность температур между термометрами измерялись потенциометром; единица последней декады потенциометра соответствовала $3 \cdot 10^{-5}$ градуса. Уровень гелия во внутреннем дьюаре и снаружи его измерялся катетометром с точностью до 0,1 мм. Прибор освещался люминесцентной лампой, что обеспечивало хорошую видимость и малый подвод тепла излучением.

Эксперимент проводился следующим образом. После достижения необходимой температуры закрывалась пробка, включался нагреватель и подбором мощности скорость поднятия уровня устанавливалась около 5—10 мм в минуту (мощность около $5 \cdot 10^{-5}$ W). Затем пробка открывалась, и при включенном нагревателе регулировкой кранов на приборе и диффузионном насосе добивались постоянства температуры. После этого пробка закрывалась, и производились одновременные замеры разностей температур и уровней. С повышением уровня скорость натекания падала, и иногда приходилось ток нагревателя увеличивать. По достижении разности уровней 5—8 см нагреватель выключался, и снималась кри-

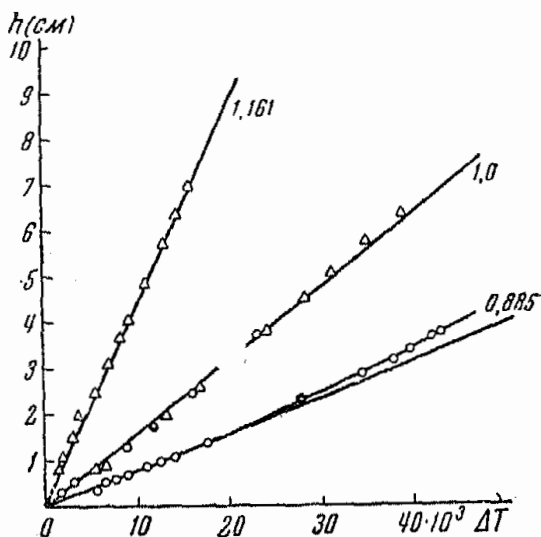
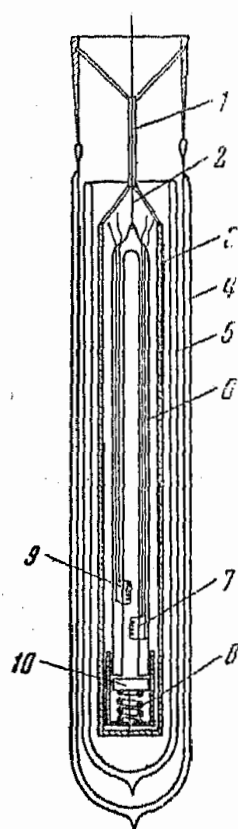
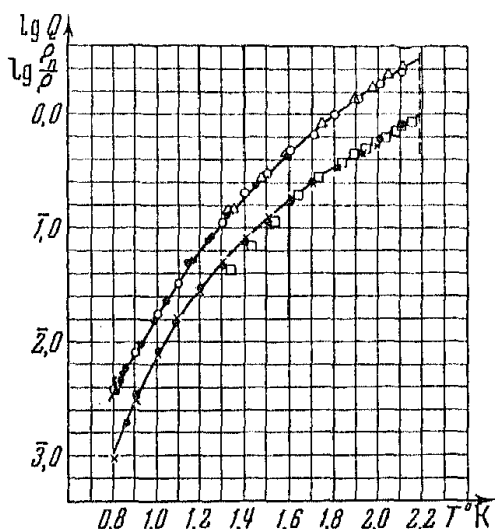


Рис. 3. Зависимость разности уровней h от разности температур ΔT ; о — натекание, Δ — вытекание

вая вытекания. Скорость вытекания при низких температурах больше, чем при высоких.

На графике рис. 3 приведены данные для зависимости разности уровней от разности температур: при натекании — кружки и вытекании — треугольники. Как видно, зависимость близка к линейной, однако при низких температурах и больших разностях температур наблюдается заметное отклонение. Объясняется это тем, что при больших разностях тем-

Рис. 4. Зависимость логарифма Q , измеряемого в джоулях на грамм (верхняя кривая), и логарифма отношения ρ_n/ρ (нижняя кривая) от температуры. • — рассчитано по формуле $\rho_n/\rho = [1 + (u^2 CT / Q^2)]^{-1}$, Δ — данные Капицы, $\circ$ — данные Крамерса, $\square$ — данные Андроникашвили, $\times$ — данные Халатникова



ператур уже нельзя брать первое приближение, а надо пользоваться более полной формулой, данной Ландау [3], и заменить $Q \frac{\Delta T}{T} = S \Delta T$ на $\int_{T_1}^{T_2} S dT$, где S — энтропия гелия. С точностью до ошибок эксперимента результаты совпадают с данными, получающимися по этой формуле. В таблице (см. стр. 354) приведены значения Q , получающиеся из измерений термомеханического эффекта.

На рис. 4 (верхняя кривая) в полулогарифмическом масштабе нанесены черными точками данные настоящих экспериментов, треугольниками — данные Капицы [1] и кружками — данные, полученные интегрированием кривой теплоемкости, приведенные в работе Крамерса и др. [4]. Q измеряется в джоулях на грамм. Как видно из рис. 4, все данные очень хорошо согласуются между собой.

Зная Q из термомеханического эффекта и хорошо согласующиеся с Q данные по теплоемкости C , а также значения скорости второго звука u по данным работы автора [2], можно вычислить значения ρ_n/ρ (доли гелия II, связанного тепловым движением) по формуле

$$\rho_n/\rho = \left(1 + \frac{u^2 CT}{Q^2}\right)^{-1}.$$

Значения ρ_n/ρ приведены в таблице и нанесены на рис. 4 точками (нижняя кривая). Для сравнения на графике рис. 4 нанесены квадратиками значения ρ_n/ρ , полученные Андроникашвили [5] из экспериментов по увлечению гелия II стопкой колеблющихся дисков. Значения ρ_n/ρ , вычисленные теоретически Халатниковым [6], нанесены крестиками на график и приведены в таблице. При вычислении Халатниковым принималось, что квантовый спектр гелия II имеет вид $\epsilon = \Delta + \frac{(p - p_0)^2}{2\mu}$, где $\Delta = k \cdot 8,9^\circ$, $p_0 = 2,1 \cdot 10^{-19}$ г·см/сек и $\mu = 1,72 \cdot 10^{-24}$ г. Константы были определены, исходя из экспериментальных данных по теплоемкости и скорости второго звука.

$T^{\circ} K$	$Q \frac{\text{дж}}{\text{г}} \cdot 10^3$	Дата	$T^{\circ} K$	$\rho_n/\rho \cdot 10^3$	$\rho_n/\rho \cdot 10^3$ по Халатникову
1,59	423	13/V —1953	2,1	750	—
1,45	243	4/XI —1953	2,0	560	550
1,328	142	1/VIII—1953	1,9	430	432
1,324	134	1/VIII—1953	1,8	320	335
1,252	85	27/V —1953	1,7	240	244
1,243	79	27/V —1953	1,6	166	176
1,16	51,5	15/V —1953	1,5	113	124
1,145	50	15/V —1953	1,4	74	83
1,045	22	22/V —1953	1,3	47,6	51
1,00	17,6	1/VII—1953	1,2	29	30
1,00	16,8	15/V —1953	1,1	15,6	15,9
0,982	14,7	22/V —1953	1,0	7,6	7,6
0,92	9,2	20/V —1953	0,9	3,3	3,0
0,90	8,1	21/IX —1953	0,85	1,84	1,67
0,85	5,4	16/IX —1953	—	—	—
0,836	5,05	28/IX —1953	—	—	—
0,832	4,45	7/X —1953	—	—	—
0,825	4,4	25/IX —1953	—	—	—
0,82	4,3	5/X —1953	—	—	—
0,817	3,9	30/IX —1953	—	—	—

Сопоставляя результаты экспериментов по измерению теплоемкости, скорости второго звука и термомеханического эффекта, можно сделать следующие выводы:

1. При температурах $0,8^{\circ} K$ и выше имеет место прекрасное совпадение между значениями энтропии, определенной из теплоемкости и из термомеханического эффекта, что указывает на обратимость термомеханического эффекта в исследованной области небольших разностей температур (до $0,05^{\circ}$).

2. Значения ρ_n/ρ , определенные из скорости второго звука, теплоемкости и энтропии, совпадают в пределах точности эксперимента (10%) со значениями, вычисленными на основании теории Ландау при $\Delta = k \cdot 8,9^{\circ}$, $p_0 = 2,1 \cdot 10^{-10}$ г·см/сек и $\mu = 1,72 \cdot 10^{-24}$ г.

В заключение приношу благодарность Н. И. Кондратьеву, собиравшему аппаратуру и проводившему значительную часть измерений.

Институт физических проблем
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
27 января 1954 г.

Литература

- [1] П. Л. Капица. ЖЭТФ, 11, 581, 1941.—[2] В. П. Пешков. ЖЭТФ, 23, 686, 1952; ЖЭТФ, 16, 1000, 1946.—[3] Л. Д. Ландау. ЖЭТФ, 11, 592, 1941.—[4] Н. С. Kramers, J. D. Wasscher a. C. J. Gorter. Physica, 18, 329, 1952.—[5] Э. Л. Андроникашвили. ЖЭТФ, 18, 424, 1948.—[6] И. М. Халатников. ЖЭТФ, 23, 21, 1952.

ЭФФЕКТ ХОЛЛА И ИЗМЕНЕНИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ СВИНЦА, МЕДИ И МАГНИЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Е. С. Боровик

Проведено совместное исследование эффекта Холла и изменения сопротивления в магнитном поле на чистых поликристаллических образцах свинца, магния и меди в области температур от 2 до 300° К. Из сравнения экспериментальных данных с данными расчета на основе изотропной модели металла с перекрывающимися энергетическими зонами получены значения подвижностей и концентраций подвижных зарядов исследованных металлов. Проведено сравнение данных для длины свободного пробега, полученных различными методами, с результатами, полученными из исследования гальваномагнитных явлений.

Введение

В предыдущих работах [1, 2] было показано, что совместное исследование эффекта Холла и изменения сопротивления в магнитном поле при низких температурах могут дать ценные сведения о свойствах подвижных зарядов в металлах. Измерения следует вести при низких температурах и на достаточно чистых металлах, так как лишь при этих условиях практически достижима область больших полей, при которых длина свободного пробега электронов больше радиуса кривизны их траектории в магнитном поле.

Современная теория, за исключением первых работ Блохинцева и Нордгейма [3] и Конторовой и Френкеля [4], развита для изотропной модели [5-7], поэтому наиболее целесообразно выяснить пределы применимости этой теории на результатах исследования свойств поликристаллов.

В настоящей работе исследовался эффект Холла и изменение сопротивления в магнитном поле поликристаллических образцов свинца, меди и магния; приводятся также данные для изменения сопротивления в магнитном поле кадмия.

Эффект Холла в свинце исследовался до 2° К [8], в меди до 20° К [9]. Однако исследованные образцы не обладали достаточной чистотой, чтобы в этих условиях могла быть достигнута область больших полей. В магнии эффект Холла исследовался лишь при комнатных температурах, причем данные, полученные разными исследователями, разнятся в 3-4 раза [10]. Изменение сопротивления свинца в магнитном поле исследовалось до 4° К в работе [11], наиболее чистые образцы меди исследованы до 20° К [12], магний исследовался лишь до 78° К в работе Капицы [13], кадмий — в работах [14-16]. Следует заметить, что кривые для поликристаллов кадмия, полученные в [14, 15] в области гелиевых температур, не согласуются между собой. Совместных исследований эффекта Холла и изменения сопротивления на одном образце для этих металлов не производилось.

1. Объекты исследования

Образцы Pb, Mg, Cd и Cu-10 изготовлены из лучших химически чистых металлов; Cu-3 и Cu-14 — отобранные лучшие образцы обычной медной проволоки диаметром 0,1-0,2 мм. Образец свинца после

придания ему соответствующей формы переплавлялся. Прочие образцы отжигались при температуре 400°C , кадмий — при 300°C , в течение 5—10 час. Образцы имели форму пластинок длиной ~ 15 мм, шириной 1—3 мм. Толщина пластинок 0,6 мм для Pb-1, 0,5 мм для Cd-2, 0,1 мм для Mg-6, $\sim 0,02$ мм для Cu-10 и Cu-14; образец Cu-3 был взят в виде проволоки диаметром 0,1 мм.

Образцы помещались между полюсами магнита так, что плоскость пластинки была перпендикулярна магнитному полю. Для измерения холловской разности потенциалов и сопротивления образцов к пластинкам приваривались две пары потенциальных проводов. Разности потенциалов измерялись малоомным потенциометром с ценой деления 10^{-8} В. Побочные эффекты исключались переключением направления тока в образце и магнитного поля.

Поликристалличность образцов и отсутствие заметной текстуры проверялись снятием диаграмм вращения для сопротивления в магнитном поле и эффекта Холла при температуре 4°K . Анизотропия этих свойств образцов не превышала 5%.

Зависимость сопротивления образцов без магнитного поля от температуры в виде отношения сопротивления образца при температуре опыта r_{0T} к его сопротивлению при 0°C r_{00} приведена в табл. 1.

Таблица 1

$T^{\circ}\text{K}$	r_{0T}/r_{00}					
	Pb-1	Mg-6	Cu-3	Cu-10	Cu-14	Cd-2
78	—	0,141	—	—	—	0,228
20,33	$2,93 \cdot 10^{-2}$	$3,97 \cdot 10^{-3}$	$3,23 \cdot 10^{-3}$	$8,08 \cdot 10^{-3}$	—	$1,99 \cdot 10^{-2}$
14,5	$1,19 \cdot 10^{-2}$	—	—	—	—	—
4,22	$5,44 \cdot 10^{-5}$	$2,24 \cdot 10^{-3}$	$2,42 \cdot 10^{-3}$	$7,30 \cdot 10^{-3}$	$6,4 \cdot 10^{-3}$	$2,90 \cdot 10^{-4}$
2,00	$1,95 \cdot 10^{-5}$	$2,22 \cdot 10^{-3}$	—	—	—	$2,76 \cdot 10^{-4}$

Сопротивление образцов Pb-1, Cd-2 и Mg-6 при гелиевых температурах оказалось меньше, чем у наилучших известных в литературе поликристаллических образцов [10, 15, 17]. Образцы меди не являются наилучшими, но все же их сопротивление достаточно низко, чтобы можно было достигнуть области больших магнитных полей, при которых длина свободного пробега больше радиуса кривизны траектории электрона.

Следует сказать несколько слов о сопротивлении свинца. Как известно, свинец в области гелиевых температур находится в сверхпроводящем состоянии. Вследствие большой чистоты наших образцов сопротивление при переводе свинца в нормальное состояние магнитным полем будет существенно увеличено влиянием магнитного поля. Значение r_{0T} в нормальном состоянии получается экстраполяцией значений, полученных в магнитных полях, больших критического, к нулевому полю. Для экстраполяции был применен следующий прием. Как известно, относительное увеличение сопротивления в магнитном поле $\Delta r/r_{0T}$, измеренное при разных температурах, может быть представлено как единая функция величины $H(r_{00}/r_{0T})$ [18]. Обычно кривые $\Delta r/r_{0T} = f[H(r_{00}/r_{0T})]$ для разных температур и образцов совпадают лишь приблизительно [2], но для свинца наши измерения при температурах 14—20°K и измерения [11] хорошо совпадают и были использованы для экстраполяции наших данных к $H = 0$ при $T \ll 4,2^{\circ}\text{K}$.

На рис. 1 показана зависимость сопротивления Pb-1 от температуры в отсутствие магнитного поля. Значения при $T = 4,22^\circ\text{K}$ и $T = 1,86^\circ\text{K}$ получены экстраполяцией, как описано выше. Промежуточные значения получены из измерения зависимости от температуры величины сопротивления в постоянном магнитном поле $H = 22\,850\text{ Ое}$. По значениям r_H при промежуточных температурах и кривым зависимости сопротивления в магнитном поле — r_H от величины H (r_{00}/r_{0T}), полученным для двух температур $T = 4,22^\circ\text{K}$ и $T = 1,85^\circ\text{K}$, определялись величины r_{0T}/r_{00} при промежуточных температурах.

Такой способ определения зависимости r_{0T}/r_{00} от температуры особенно удобен для металлов, переходящих в сверхпроводящее состояние, но может быть рекомендован и для не сверхпроводящих металлов области большого увеличения сопротивления

в магнитном поле. Если $\Delta r/r_{0T} \gg 1$, то измерения в магнитном поле вследствие значительной величины сопротивления существенно проще и точнее, чем измерения сопротивления в отсутствие магнитного поля. Особенно просто получается результат, когда $\Delta r/r_{0T}$ пропорционально H^2 . В этом случае при условии $\Delta r/r_{0T} \gg 1$, $r_H \sim 1/r_{0T}$.

Кривая А на рис. 1 хорошо описывается формулой

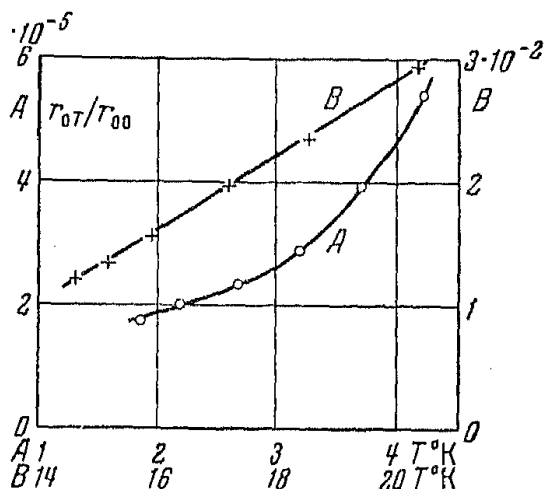


Рис. 1. Зависимость сопротивления Pb-1 от температуры. Кривая А — $T = 2-4^\circ\text{K}$, кривая В — $T = 14-20^\circ\text{K}$

$$r_{0T}/r_{00} = 1,66 \cdot 10^{-5} + 1,07 \cdot 10^{-7} T^{1,08}. \quad (1)$$

Таким образом для свинца, как и для ряда других металлов, получается, что идеальное сопротивление металла при низких температурах приблизительно пропорционально T^1 , а не T^5 , как это получается по расчетам на основе зонной теории.

Следует отметить малую величину остаточного сопротивления образца Pb-1, на порядок меньшую, чем у лучших образцов, описанных в литературе. Видимо, это следует приписать не только большой чистоте исходного материала, но и предосторожностям, принятым для исключения деформаций, особенно легко возникающих в свинце. При застывании из расплава образец свободно лежал на подложке из стекла. Предварительно созданная пленка окисла предохраняла от прилипания к стеклу.

2. Результаты измерений

Результаты измерений постоянной Холла R Pb-1, Cu-10 и Mg-6 приведены на рис. 2, 3, 4. Постоянная Холла всех трех металлов зависит как от температуры, так и от величины магнитного поля. Зависимость величины R от магнитного поля уменьшается по мере повышения температуры и при комнатной температуре (для свинца, видимо, раньше) R практически не зависит от поля. Результаты, полученные для свинца и меди, хорошо согласуются с литературными данными [8, 9] при высоких температурах. Согласие данных ухудшается при низких температурах. Видимо, последнее

следует приписать влиянию загрязнений образцов [8, 9], сказывающемуся особенно резко при низких температурах.

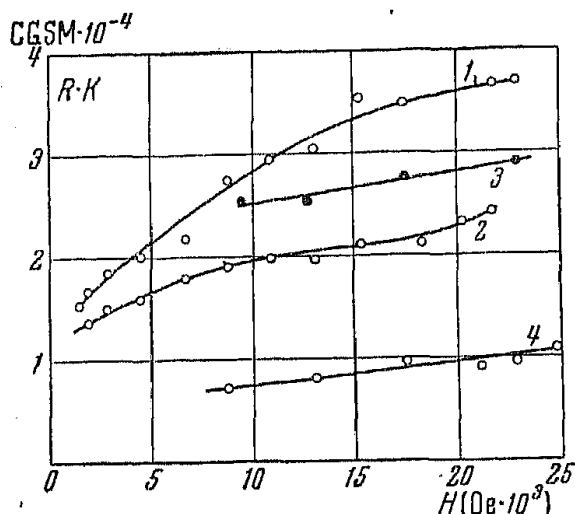


Рис. 2. Постоянная Холла R для Pb-4. 1 — $T = 1,86$; 2 — $T = 4,22$; 3 — $T = 14,2$; 4 — $T = 20,35$ °K. Для кривых 1, 2 — $K = 0,1$; для кривых 3, 4 — $K = 1$

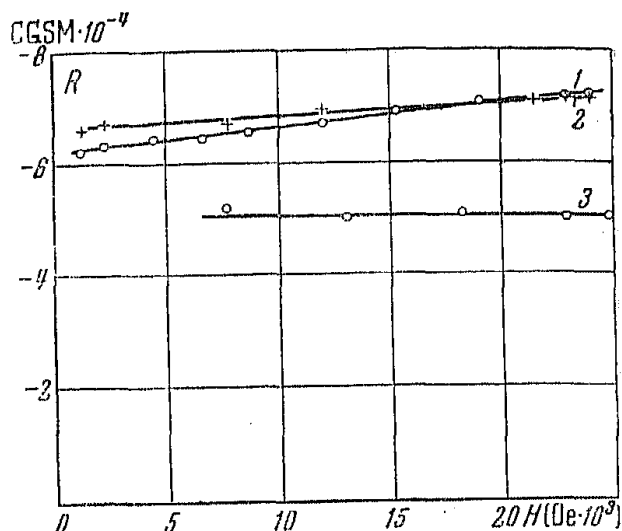


Рис. 3. Постоянная Холла R для Si-10. 1 — $T = 4,22$; 2 — $T = 20,35$; 3 — $T = 300$ °K

Сравнение рис. 2, 3, 4 с рис. 5, 6, 7, на которых приведены данные об увеличении сопротивления в магнитном поле, показывает, что зависимость R от магнитного поля наблюдается в той области температуры и полей,

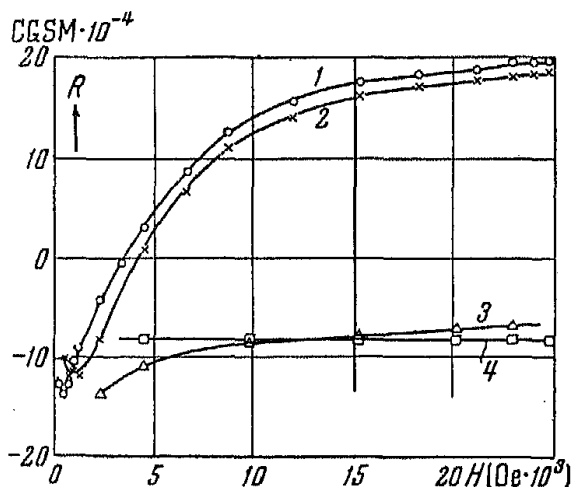


Рис. 4. Постоянная Холла R для Mg-6. 1 — $T = 4,22$; 2 — $T = 20,35$; 3 — $T = 78$; 4 — $T = 300$ °K

где имеется существенное увеличение сопротивления в магнитном поле. Полученные здесь результаты, как и результаты предыдущих исследований эффекта Холла цинка [19], индия [20], бериллия и алюминия [1], подтверждают сделанный ранее вывод [19], что величина «постоянной Холла» R не зависит от поля только в области, где

$$\Delta r / r_{0T} \ll 1. \quad (2)$$

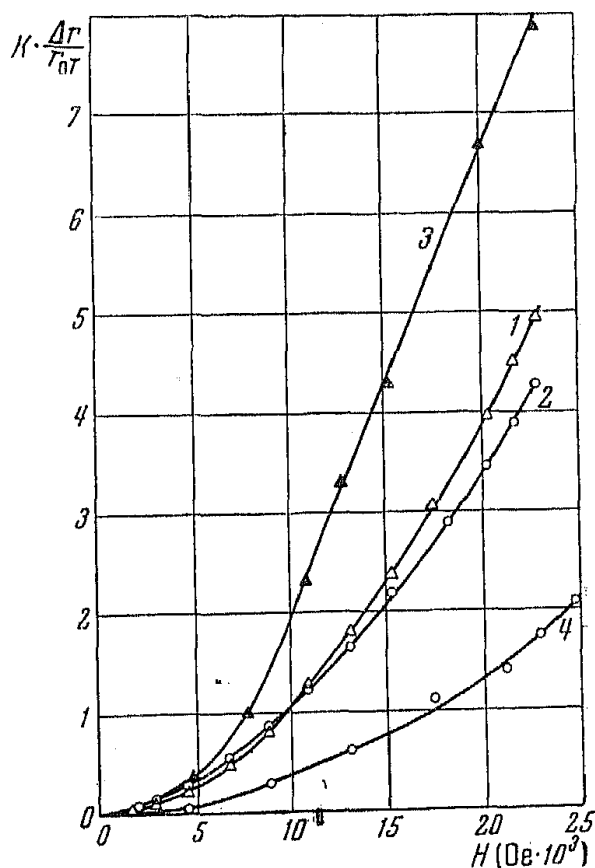
В отношении кривых изменения сопротивления в магнитном поле следует отметить большое увеличение сопротивления свинца. В поле $H = 22\,500$ Oe при $T = 4,22$ °K $\Delta r / r_{0T} = 417$, а при $T = 1,86$ °K $\Delta r / r_{0T} = 4810$.

При этом чисто квадратичная зависимость от поля наблюдается только при самых малых увеличениях сопротивления $\Delta r / r_{0T} < 10^2$ и больших $\Delta r / r_{0T} > 10^3$. Для промежуточных значений поля сопротивление возрастает с увеличением поля медленнее. Следует указать, что у монокристаллов свинца наблюдается большая анизотропия сопротивления в магнитном поле. По предварительным данным сопротивление при вращении монокристалла в поперечном магнитном поле меняется в несколько раз.

Для меди после начальной квадратичной зависимости наблюдается линейное возрастание сопротивления с полем, продолжающееся и при $\Delta r / r_{0T} > 2$ (кривая В рис. 6). Это согласуется с литературными данными [12].

Особенно далеко простирается линейный участок на кривой для магния, где лишь при $\Delta r/r_{0T} > 20$ намечается отклонение от линейной зависимости и переход к более быстрому росту сопротивления с увеличением магнитного поля.

Рис. 5. Увеличение сопротивления Pb-1 в магнитном поле. 1— $T=1,86$; 2— $T=4,22$; 3— $T=14,2$; 4— $T=20,35$ °K. Для кривых 3, 4— $K=10^2$; для 2— $K=10^{-2}$; для 1— $K=10^{-3}$



Результаты, полученные для кадмия, согласуются с результатами [15], но вследствие меньшего остаточного сопротивления представляют

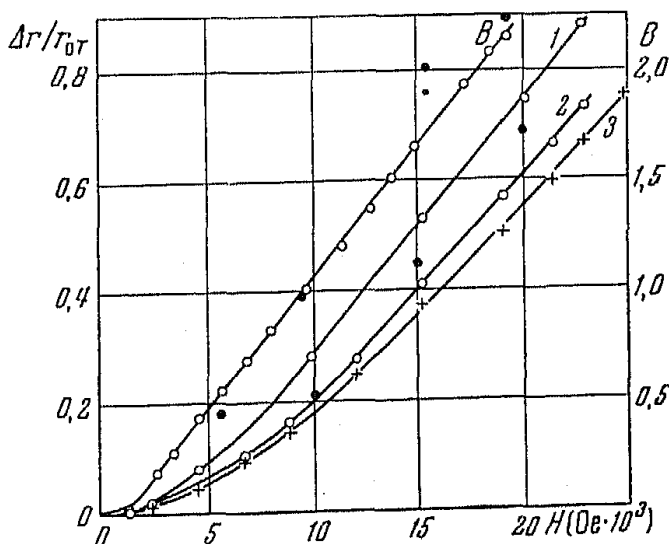


Рис. 6. Увеличение сопротивления меди в магнитном поле. 1—Cu-14, $T=4,22$ °K; 2—Cu-10, $T=4,22$ °K; 3—Cu-10, $T=20,35$ °K; B—Cu-3, $T=4,22$ °K. ● — вычисленные значения для кривых 1 и B

продолжение их в сторону больших полей. Что касается результатов, полученных в [14] при гелиевых температурах, то они согласуются с остальными работами, если относить наблюдаемое увеличение сопротивления к сопротивлению при 0° С, но расходятся, если брать отношение увеличения сопротивления к сопротивлению при 4° К. Видимо, в [14] была допущена ошибка в измерении сопротивления без магнитного поля при $T \leq 4,2$ °К.

Полученные для Pb, Cu, Mg и Cd данные по изменению сопротивления в магнитном поле объединены на рис. 8 в виде зависимости от величины эффективного поля $H(r_{00}/r_{0T})$ (диаграмма Колера [18]).

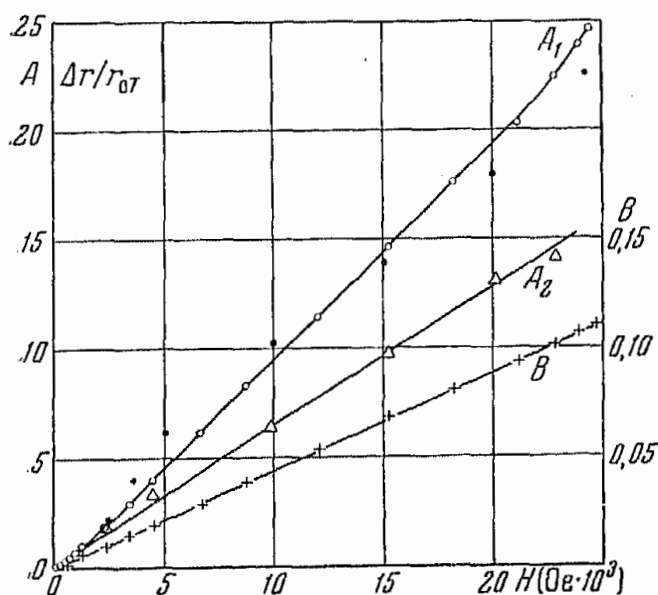


Рис. 7. Увеличение сопротивления Mg-6 в магнитном поле. A_1 — $T = 4,22^\circ\text{K}$; A_2 — $T = 20,35^\circ\text{K}$; B — $T = 78^\circ\text{K}$. ● — вычисленные значения для кривой A_1

Здесь отчетливо виден общий характер кривых зависимости сопротивления от поля. После квадратичной зависимости сопротивления от поля, наблюдающейся в малых полях, наблюдается участок

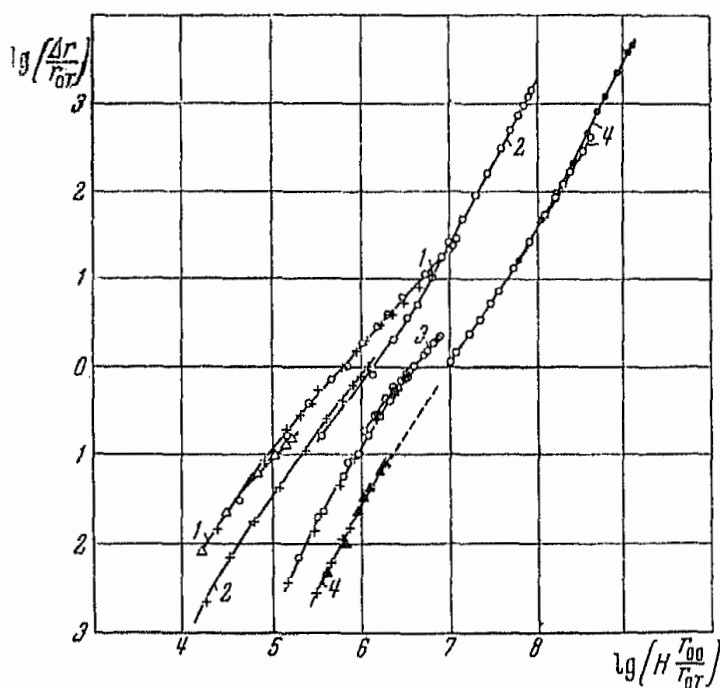


Рис. 8. Зависимость увеличения сопротивления в магнитном поле от эффективной величины магнитного поля $H(r_{00}/r_{0T})$. 1 — Mg; 2 — Cd; 3 — Cu; 4 — Pb; ● — $T = 2$; ○ — $T = 4,22$; □ — $T = 14$; × — $T = 20,35$; Δ — $T = 78^\circ\text{K}$

с замедленным ростом сопротивления, приближающийся для магния и кадмия, как и для большинства других металлов, к линейному. Этот линейный участок кривой был впервые наблюден Капицей [13]. После этого в больших полях у свинца и кадмия и, повидимому, у магния закон возрастания сопротивления в поле снова стремится к квадратичному. Коэффициент при этой второй квадратичной зависимости меньше, чем в слабых полях. Как указывалось, подобные кривые с двумя квадратичными участками наблюдаются для всех ме-

таллов с неограниченным возрастанием сопротивления в магнитном поле [2].

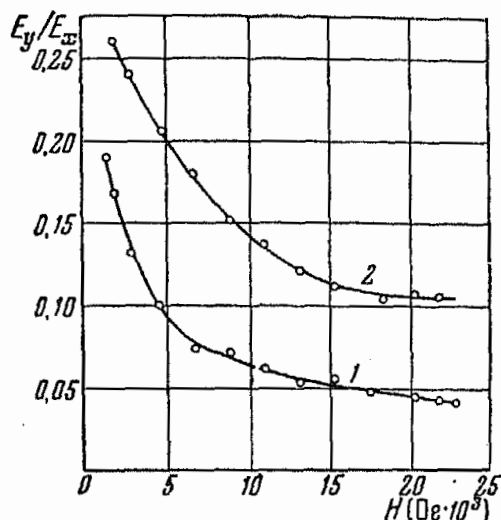


Рис. 9. Зависимость E_y/E_x от величины магнитного поля для Pb-1; 1 — $T = 1,86$; 2 — $T = 4,22$ °K

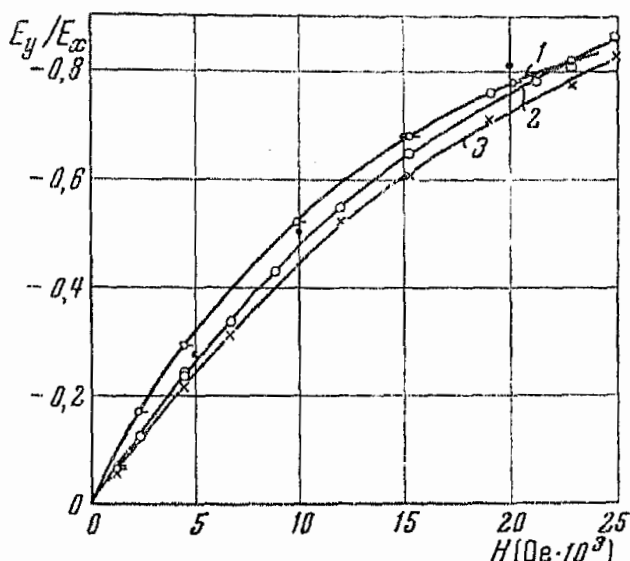


Рис. 10. Зависимость E_y/E_x от величины магнитного поля у меди. 1 — Cu-14, $T = 4,22$ °K; 2 — Cu-10, $T = 4,22$; 3 — Cu-10, $T = 20,35$ °K; ● — вычисленные значения для кривой 1

Характер изменения сопротивления в магнитном поле зависит от величины эффекта Холла [1, 2]. Однако в больших полях эффект Холла следует характеризовать не величиной R , являющейся в этих условиях функцией одновременно двух явлений — эффекта Холла и изменения сопротивления в магнитном поле [19], а величиной отношения поля Холла E_y к величине электрического поля в направлении тока E_x [1, 19].

Величины E_y/E_x для исследуемых металлов приведены на рис. 9, 10, 11. Для свинца (рис. 9) в больших магнитных полях E_y/E_x падает с увеличением поля, и, следовательно, свинец относится к группе металлов, для которых E_y/E_x переходит через максимум, а сопротивление в магнитном поле неограниченно возрастает [1]. Восходящая часть кривой в малых полях не была наблюдаема из-за трудностей измерения. Для меди (рис. 10) абсолютное значение E_y/E_x в максимальных полях превышает 0,8 и продолжает возрастать. Такие величины E_y/E_x до сих пор были наблюдаемы только для алюминия и индия — металлов с неограниченным ростом поля Холла и сопротивлением в магнитном поле, стремящимся к насыщению в больших полях.

У магния (рис. 11) при температурах 4 и 20° K наблюдается перемена знака эффекта Холла в полях 3500—4500 Ое. В полях около

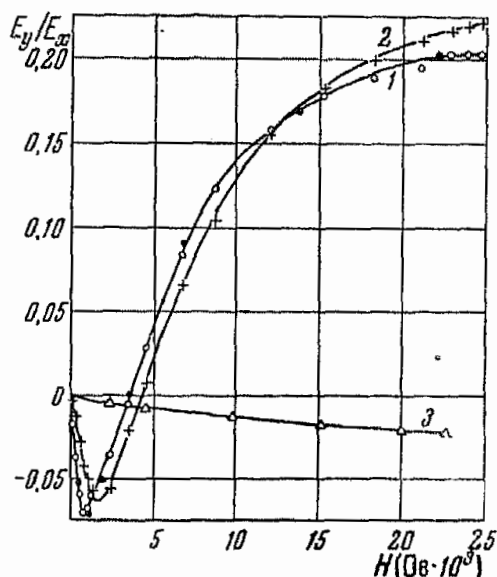


Рис. 11. Зависимость E_y/E_x от величины магнитного поля для Mg-6; 1 — $T = 4,22$; 2 — $T = 20,35$; 3 — $T = 78$ °K. ● — вычисленные значения для кривой 1

$2 \cdot 10^4$ Ое E_y/E_x достигает значения 0,2, повидимому, близкого к максимальному, если судить по виду кривой 1 рис 11.

Исследования на магнии и свинце были сделаны с использованием нескольких образцов из материала одного происхождения. Результаты исследования на других образцах отличались небольшим отклонением численных значений в соответствии с изменениями остаточного сопротивления и поэтому здесь не приводятся.

3. Сравнение с теорией

Сравним результаты эксперимента с данными расчета на основе изотропной модели металла, в которой электроны проводимости распределены между двумя зонами Бриллюэна так, что в нижней (почти заполненной) зоне имеется n_1 свободных мест (дырок) с эффективной массой m_1 , а в верхней зоне имеется n_2 электронов с эффективной массой m_2 . Если обозначить через τ_1 и τ_2 соответственно среднее время между столкновениями дырок и электронов с решеткой, e — абсолютную величину заряда электрона и c — скорость света, то можно составить две безразмерные величины $\varphi_1 = eH\tau_1/m_1c$ и $\varphi_2 = eH\tau_2/m_2c$, через которые просто выражаются результаты теории [5-7]. Электропроводность в отсутствие магнитного поля при температуре опыта T

$$\sigma_{0T} = \frac{n_1 e^2 \tau_1}{m_1} + \frac{n_2 e^2 \tau_2}{m_2} = \sigma_{01} + \sigma_{02}. \quad (3)$$

Отношение электропроводности в магнитном поле к электропроводности без поля равно

$$\frac{\sigma_H}{\sigma_{0T}} = \frac{1}{\sigma_{01} + \sigma_{02}} \left[\frac{\sigma_{01}}{1 + \varphi_1^2} + \frac{\sigma_{02}}{1 + \varphi_2^2} \right] \left[1 + \left(\frac{E_y}{E_x} \right)^2 \right] \quad (4)$$

и эффект Холла

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{\left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right) \varphi_1^2 \varphi_2^2 + \left(\frac{n_1}{n_2} \varphi_1^2 - \varphi_2^2 \right)}{\left(\frac{n_1}{n_2} \varphi_1 + \varphi_2 \right) + \left(\frac{n_1}{n_2} \varphi_2 + \varphi_1 \right) \varphi_1 \varphi_2}. \quad (5)$$

Если число дырок равно числу электронов $n_1 = n_2 = n/2$, то формулы (4), (5) переходят в

$$\frac{\Delta r}{r_{0T}} = \frac{\sigma_{0T}}{\sigma_H} - 1 = \varphi_1 \varphi_2, \quad (6)$$

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{1 + \varphi_1 \varphi_2}. \quad (7)$$

В малых полях $\varphi_1, \varphi_2 \ll 1$ поведение металлов с $n_1 = n_2$ и $n_1 \neq n_2$ не отличается существенно. В обоих случаях получается линейное возрастание поля Холла и квадратичное увеличение сопротивления с увеличением магнитного поля.

В больших полях $\varphi_1, \varphi_2 \gg 1$ у металлов с $n_1 = n_2$, $E_y/E_x \sim 1/H$, а $\Delta r/r_{0T} \sim H^2$. У металлов с $n_1 \neq n_2$ в больших полях $E_y/E_x \sim H$ и вследствие линейного возрастания поля Холла σ_H/σ_{0T} не убывает безгранично, как в первом случае, а стремится к пределу

$$\left(\frac{\sigma_H}{\sigma_{0T}} \right)_{\varphi \gg 1} \approx \frac{(n_1 - n_2)^2}{n_1^2 + n_2^2 + 2n_1 n_2 \left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2} + \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \right)}. \quad (8)$$

Сравнение полученных результатов с формулами (4) — (8) показывает, что свинец следует отнести к группе металлов с равным числом дырок и электронов $n_1 = n_2 = n/2$. Используя экспериментальные данные об увеличении сопротивления в магнитном поле и эффекте Холла, можно по формулам (6), (7) определить подвижность электронов и дырок, а затем по формуле (3) и экспериментальному значению электропроводности концентрацию подвижных зарядов n . Результаты вычислений приведены в табл. 2.

Таблица 2

Образец Pb-1

$T, ^\circ\text{K}$	$r_{\circ}T/r_{\circ\circ}$	$H(\text{Oe})$	$\frac{\Delta r}{r_{\circ}T}$	E_y/E_x	φ_1	φ_2	τ_1/m_1	τ_2/m_2	n/n_A
4,22	$5,44 \cdot 10^{-5}$	22 500	417	+0,105	52	8,0	$1,44 \cdot 10^{17}$	$2,22 \cdot 10^{16}$	1,3
1,86	$1,72 \cdot 10^{-5}$	22 500	4810	+0,0418	223	21,7	$6,18 \cdot 10^{17}$	$6,78 \cdot 10^{16}$	0,99

При количественном сравнении с теорией следует иметь в виду, что формулы (6), (7) не отражают экспериментального факта замедленного возрастания сопротивления в средних полях. Теория лучше отражает экспериментальные данные в больших полях. Поэтому результаты, приведенные в нижней строке табл. 1, предпочтительнее. Привлекает внимание большая разница в подвижности дырок и электронов.

Большая величина эффекта Холла для меди и замедленное возрастание сопротивления заставляют предполагать, что медь относится к металлам, у которых $n_1 \neq n_2$. Это отвечает и положению меди в периодической системе элементов. Кривая $E_y/E_x = f(H)$ у меди для Cu-14 (кривая 1 рис. 10) может быть с большой точностью описана, если положить $n_1/n_2 = 0,55$ и что при $T = 4,22^\circ\text{K}$ в магнитном поле $H = 10^4 \text{ Oe}$, $\varphi_1 = 0,52$, $\varphi_2 = 1,01$. При этом данные, рассчитанные по формуле (5), отличаются от экспериментальных не более чем на 2—3%. Согласовать с экспериментом одновременно вычисленные значения для E_y/E_x и $\Delta r/r_{\circ}T$ (рис. 6 и рис. 10, кривые 1) значительно труднее. Наилучшие результаты для обеих кривых получаются при $n_1/n_2 = 0,4$, $\varphi_1 = 0,4$, $\varphi_2 = 0,75$ ($H = 10^4 \text{ Oe}$, $T = 4,22^\circ\text{K}$). Эти параметры с учетом изменения остаточного сопротивления описывают также и свойства образцов Cu-10 и Cu-2. Вычисленные значения E_y/E_x и $\Delta r/r_{\circ}T$ показаны на рис. 6 10 черными точками. Значения подвижности и концентрации подвижных зарядов, вычисленные по этим параметрам, приведены в табл. 3.

Таблица 3

Металл	$T, ^\circ\text{K}$	$r_{\circ}T/r_{\circ\circ}$	τ_1/m_1	τ_2/m_2	n_2/n_1	n_1	n_1/n_A	n_2/n_A
Cu	4,22	$6,41 \cdot 10^{-3}$	$2,5 \cdot 10^{15}$	$4,7 \cdot 10^{15}$	2,5	$2,8 \cdot 10^{22}$	0,33	0,81
In	4,22	$1,71 \cdot 10^{-3}$	$9,4 \cdot 10^{15}$	$4,4 \cdot 10^{15}$	4,5	$9,3 \cdot 10^{21}$	0,25	1,1
Al	4,22	$1,60 \cdot 10^{-3}$	$1,1 \cdot 10^{16}$	$2,1 \cdot 10^{16}$	0,23	$6,8 \cdot 10^{22}$	1,1	0,28

Так как при вычислении подвижностей для индия и алюминия в предыдущей статье [2] была допущена ошибка, то мы приводим здесь также исправленные данные для этих металлов.

Таким образом при исследовании свойств меди в больших полях следует ожидать, как и у индия и алюминия, безграничного увеличения поля Холла и приближения к насыщению для сопротивления. Предельное значение увеличения сопротивления меди в магнитном поле по нашим данным получается $(\Delta r/r_{0T})H \rightarrow \infty \approx 6 \div 13$.

Вид кривых E_y/E_x и $\Delta r/r_{0T}$ для магния в наибольших исследованных полях (рис. 7, 11) показывает, что магний относится к металлам с равным числом дырок и электронов. Это соответствует и положению магния в периодической системе элементов. Однако характер кривых в средних полях не отвечает свойствам описанной выше простой модели с двумя группами подвижных зарядов. Действительно, как следует из формулы (7), при данной температуре E_y/E_x не может изменять знак при увеличении поля. У магния знак E_y/E_x изменяется. У магния особенно ярко, по сравнению с другими металлами, проявляется наличие участка с замедленным возрастанием сопротивления. Линейный участок на кривой $\Delta r/r_{0T} = f(H)$ доходит до $\Delta r/r_{0T} = 20$ (рис. 7). Как указывалось, эта особенность кривой изменения сопротивления не описывается в рамках данной модели, предусматривающей квадратичный рост сопротивления во всех полях [см. формулу (6)].

Выход из этого затруднения может быть найден при некотором усложнении модели. Положим, что в изотропном металле существуют две группы «дырок», концентрации которых n_1 и n_3 , эффективные массы m_1 и m_3 , среднее время между столкновениями с решеткой τ_1 и τ_3 , и две группы электронов с концентрациями n_2 , n_4 и прочими параметрами m_2 , m_4 , τ_2 , τ_4 соответственно. Положим $n_1 = n_2$, $n_3 = n_4$, т. е. мы имеем металл с двумя группами дырок и электронов, в каждой из которых концентрация дырок равна концентрации электронов. Для такой модели

$$\sigma_{0T} = \frac{n_1 e^2 \tau_1}{m_1} + \frac{n_1 e^2 \tau_2}{m_2} + \frac{n_3 e^2 \tau_3}{m_3} + \frac{n_3 e^2 \tau_4}{m_4} = \sigma_{01} + \sigma_{02} + \sigma_{03} + \sigma_{04}, \quad (8)$$

$$\sigma_H = \left(\frac{\sigma_{01}}{1 + \varphi_1^2} + \frac{\sigma_{02}}{1 + \varphi_2^2} + \frac{\sigma_{03}}{1 + \varphi_3^2} + \frac{\sigma_{04}}{1 + \varphi_4^2} \right) \left[1 + \left(\frac{E_y}{E_x} \right)^2 \right], \quad (9)$$

$$\frac{E_y}{E_x} = \frac{\frac{n_1}{n_3} (\varphi_1^2 - \varphi_2^2) (1 + \varphi_3^2) (1 + \varphi_4^2) + (\varphi_3^2 - \varphi_4^2) (1 + \varphi_1^2) (1 + \varphi_2^2)}{\frac{n_1}{n_3} (\varphi_1 + \varphi_2) (1 + \varphi_1 \varphi_2) (1 + \varphi_3^2) (1 + \varphi_4^2) + (\varphi_3 + \varphi_4) (1 + \varphi_3 \varphi_4) (1 + \varphi_1^2) (1 + \varphi_2^2)}, \quad (10)$$

где

$$\varphi_1 = \frac{eH\tau_1}{m_1 c}; \quad \varphi_2 = \frac{eH\tau_2}{m_2 c}; \quad \varphi_3 = \frac{eH\tau_3}{m_3 c}; \quad \varphi_4 = \frac{eH\tau_4}{m_4 c}.$$

Из сопоставления формул (8), (9), (10) с данными для образца Mg-6 при $T = 4,22^\circ\text{K}$ получаются значения подвижностей и концентраций подвижных зарядов, приведенные в табл. 4.

Вычисленные по этим параметрам значения E_y/E_x и $\Delta r/r_{0T}$ показаны на рис. 7 11 черными точками.

Таким образом для магния получаются две группы дырок и электронов — 1,2 и 3,4, резко отличающиеся по подвижности, но с почти одинаковой подвижностью дырок и электронов внутри каждой группы. Так как в первой группе (1,2) подвижность электронов больше подвижности дырок, то на кривой $E_y/E_x = f(H)$ (кривая 1 рис. 11) получается первый отрицательный горб при $H \approx 1200$ Ое. При $H > 2 \cdot 10^4$ Ое получается второй, уже положительный, максимум, связанный с влиянием второй группы подвижных зарядов, в которой подвижность дырок больше подвижности электронов.

Таблица 4

Mg-6 при $T = 4,22^\circ \text{K}$, $r_{0T}/r_{00} = 2,24 \cdot 10^{-3}$

№ групп зарядов	φ при $H = 10^4 \text{Oe}$	τ/m	n	n/n_A
1	7,1	$4,4 \cdot 10^{16}$	$4 \cdot 10^{21}$	0,09
2	8,4	$5,2 \cdot 10^{16}$	$4 \cdot 10^{21}$	0,09
3	0,56	$3,5 \cdot 10^{15}$	$6,5 \cdot 10^{21}$	0,15
4	0,37	$2,3 \cdot 10^{15}$	$6,5 \cdot 10^{21}$	0,15

Совокупность свойств таких групп зарядов достаточно хорошо отражает и кривую изменения сопротивления. В малых полях получается квадратичная зависимость от поля с коэффициентом, определяющимся главным образом наибольшей подвижностью. В больших полях также получается квадратичная зависимость от поля, однако коэффициент определяется функцией, состоящей из комбинации произведений подвижностей, при наличии двух групп частиц—геометрическим средним из подвижностей обеих групп.

Предположение о существовании двух групп электронов и дырок с существенно различными подвижностями не противоречит представлениям о структуре энергетических зон металлов с гексагональной симметрией. Подвижности электронов во второй зоне вблизи оснований и боковых сторон многогранника первой зоны, так же как и дырок вблизи ребер основания и боковых ребер многогранника первой зоны, могут существенно отличаться.

Полученный для магния результат имеет, повидимому, общее значение. Две группы электронов и дырок, с меньшей чем у магния разницей в подвижностях, существуют, видимо, и у цинка, и у кадмия, и этим объясняется наличие у них резко выраженного линейного участка на кривой зависимости сопротивления от поля. Более того, даже у кубических кристаллов, где все шесть групп электронов во второй зоне обладают одинаковыми свойствами, мы получим разную подвижность их, если учтем анизотропию эффективных масс и разницу в ориентации тензора эффективных масс по отношению к полю для групп электронов вблизи разных плоскостей на границе с первой зоной. Это также и в случае кубической симметрии приведет для металлов с равным числом дырок и электронов к появлению замедленного (иногда линейного) возрастания сопротивления с полем в средних полях и к квадратичному возрастанию сопротивления в слабых и сильных полях. При этом коэффициент при квадратичной зависимости в слабых полях должен быть больше, чем в сильных. Ранее [2] указывалось, что именно такова форма экспериментальной кривой для металлов с неограниченным возрастанием сопротивления в магнитном поле.

4. Сравнение результатов определения длины свободного пробега различными методами

В настоящее время длина свободного пробега определяется тремя методами. Раньше всех был применен метод, основанный на определении влияния размеров образцов на их электропроводность [21], получивший дальнейшее развитие в работах [22, 23]. Затем был развит метод аномального скин-эффекта [24—27] и, наконец, метод, основанный

на влиянии формы и размеров образцов на их сопротивление в магнитном поле [28-31].

Из результатов исследований гальваномагнитных явлений можно получить величины подвижности τ/m и концентрации подвижных зарядов n . Длина свободного пробега λ связана с ними формулой

$$\lambda = \frac{h}{2} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/2} \frac{\tau}{m} n^{1/2} = 3,215 \cdot 10^{-27} \frac{\tau}{m} n^{1/2}. \quad (11)$$

Как указывалось [2], если нам известно лишь увеличение сопротивления в магнитном поле, то для металлов с безграничным ростом сопротивления в магнитном поле можно получить некоторое среднее значение подвижностей и концентрации электронов и, следовательно, вычислить $\bar{\lambda}$.

При совместном исследовании эффекта Холла и изменения сопротивления мы получаем сведения о концентрации и подвижности каждой группы подвижных зарядов и, следовательно, о длине свободного пробега для каждой из них. Между тем из описанных выше методов определения длины свободного пробега мы можем получить лишь сведения о некоторой средней длине пробега для всех подвижных зарядов. Поэтому для сравнения величин следует данные, полученные из гальваномагнитных явлений, усреднить по формуле

$$\bar{\lambda} = 3,215 \cdot 10^{-27} \left(\sum n_i \frac{\tau_i}{m_i} n_i^{1/2} / \sum n_i \right). \quad (12)$$

Следует оговорить, что эта величина $\bar{\lambda}$ не может применяться для вычисления электропроводности, так как при наличии нескольких групп подвижных зарядов электропроводность определяется по формуле (13)

$$\sigma_{0T} = \frac{2e^2}{h} \left(\frac{\pi}{3} \right)^{1/2} \sum_i n_i^{1/2} \lambda_i, \quad (13)$$

а не по формуле (14)

$$\sigma_{0T} = \frac{ne^2 \bar{\lambda}}{mv_0} = \frac{2e^2}{h} \left(\frac{\pi}{3} \right)^{1/2} n^{1/2} \bar{\lambda}, \quad (14)$$

где $n = \sum_i n_i$.

В табл. 5 в пяти столбцах приведены значения длины свободного пробега при 0°C, полученные из влияния размеров на величину электропроводности образца (столбец 1 [21-23]), аномального скин-эффекта (столбец 2 [24-27]), влияния формы и размеров образца на их сопротивление в магнитном поле (столбец 3 [28-31]), вычисленные из изменения сопротивления в магнитном поле по величинам подвижности, приведенным в [2] (столбец 4), и из совместных исследований эффекта Холла и изменения сопротивления в магнитном поле по формуле (12) (столбец 5). В последних столбцах таблицы приведены значения длины свободного пробега при 0°C для отдельных групп подвижных зарядов и отношения числа дырок к числу электронов. Сравнение чисел, приведенных в табл. 5, показывает удовлетворительное согласие результатов, полученных разными методами.

Преимуществом результатов, полученных из гальваномагнитных явлений, является то, что они относятся к свойствам массивного металла. В других методах изучаются или свойства очень тонких образцов или свойства тонкого поверхностного слоя металла. Кроме того, здесь можно пользоваться более точной двухзонной моделью и, соответственно, получать более подробные сведения о свойствах как дырок,

так и электронов. Из численных результатов, приведенных в таблице, обращает на себя внимание большая разница в длинах свободного пробега различных групп подвижных зарядов у меди, бериллия, магния и свинца.

Таблица 5

Металл	$\lambda_0 \cdot 10^8$					$\lambda_{01} \cdot 10^8$	$\lambda_{02} \cdot 10^8$	n_1/n_2
	1	2	3	4	5			
Na	—	—	2,6	—	—	—	—	—
Cu	—	4,2	—	—	3,3	1,55	4,0	0,4
Ag	5,75	7,9	—	—	—	—	—	—
Au	—	5,8	—	—	—	—	—	—
Be	—	—	—	9—11	7,6	10,7	4,6	1
Mg	—	—	—	2,5	2,7	5,5*	0,39*	0,85*
Zn	—	—	—	2,5	2,1	2,2	2,0	1
Cd	2,9	2,25	—	2,4	—	—	—	1
Ba	—	—	—	2,7	—	—	—	1
Al	—	1,95	—	—	2,4	2,29	2,78	3
Ga	—	—	—	1,5	—	—	—	1
In	—	—	—	—	0,9	1,1	0,85	0,22
Sn	1,55	0,82	—	1,2	—	—	—	1
Pb	—	0,55	—	0,43	0,48	0,88	0,08	1
Bi	700	300—700	300—1000	100	—	—	—	1
Mo	—	—	—	2,7	—	—	—	1
W	—	—	—	3	—	—	—	1

* Для магния приведены средние значения длины свободного пробега для первой и второй групп дырок и электронов, а вместо n_1/n_2 дано n_1/n_3 (см. раздел 3).

Выводы

Совместные исследования эффекта Холла и изменения сопротивления в магнитном поле дают подробные сведения о концентрации, подвижности и длине свободного пробега подвижных зарядов в металле.

Для объяснения характера изменения свойств металлов во всем диапазоне изменения магнитных полей необходимо дальнейшее уточнение двухзонной модели, учет того, что при перекрытии зон могут образоваться несколько групп электронов и дырок с различными свойствами, и учет анизотропии металла.

В заключение автор выражает благодарность проф. Б. Г. Лазареву за интерес к работе и В. И. Шаронову за помощь в измерениях.

Физико-технический институт
Академии наук Украинской ССР

Поступила в редакцию
16 ноября 1953 г.

Литература

- [1] Е. С. Боровик. ЖЭТФ, 23, 83, 1952. — [2] Е. С. Боровик. ЖЭТФ, 23, 91, 1952. — [3] Д. Блохинцев и Л. Нордгейм. Z S. f. Phys., 84, 168, 1933. — [4] Т. А. Конторова и Я. И. Френкель. ЖЭТФ, 5, 405, 1935. — [5] E. H. Sondheimer a. A. H. Wilson. Proc. Roy. Soc., A, 190, 435, 1947. — [6] E. H. Sondheimer. Proc. Roy. Soc., A, 193, 484, 1948. — [7] M. Kohler. Ann. d. Phys., 6, 186, 1949. — [8] H. Kamerlingh Onnes u. K. Hof. Leid. Comm., No 142 b, 1914. — [9] H. Kamerlingh Onnes a. B. Весман. Leid. Comm., No 129a, 1912. — [10] Сборник физических констант, ОНТИ, 1937. — [11] E. Justi. Phys.

- ZS., 41, 486, 1940.—[12] E. Grüneisen u. H. Adenstadt. Ann. d. Phys., 31, 714, 1938.—[13] П. Л. Капица. Proc. Roy. Soc., A, 123, 292, 1929.—[14] Б. Г. Лазарев, Н. М. Нахимович и Е. А. Парфенова. ЖЭТФ, 9, 1169, 1939.—[15] C. Milner. Proc. Roy. Soc., A, 160, 207, 1937.—[16] E. Justi, J. Крамер и R. Schulze. Phys. ZS., 41, 308, 1940.—[17] Л. С. Кан и Б. Г. Лазарев. ДАН СССР, 81, 1027, 1951.—[18] M. Kohler. Ann. d. Phys., 32, 211, 1938.—[19] Е. С. Боровик. ДАН СССР, 70, 601, 1950.—[20] Е. С. Боровик. ДАН СССР, 75, 639, 1950.—[21] A. Eucken u. F. Forster. Nachr. Ges. d. Wiss. Göttingen, 1, 43, 1934.—[22] L. Riedel. Ann. d. Phys., 28, 603, 1937.—[23] E. R. Andrew. Proc. Phys. Soc., A, 62, 77, 1949.—[24] A. B. Pipard. Proc. Roy. Soc., A, 191, 385, 1947.—[25] G. E. H. Reuter a. E. H. Sondheimer. Proc. Roy. Soc., A, 195, 336, 1948.—[26] R. G. Chambers. Proc. Roy. Soc., A, 215, 481, 1952.—[27] A. B. Pipard a. R. G. Chambers. Proc. Phys. Soc., A, 65, 955, 1952.—[28] Е. С. Боровик и Б. Г. Лазарев. ДАН СССР, 62, 611, 1948.—[29] D. K. C. Mac Donald. Nature, 163, 637, 1949.—[30] R. G. Chambers. Proc. Roy. Soc., A, 202, 378, 1950.—[31] Е. С. Боровик и Б. Г. Лазарев ЖЭТФ, 21, 857, 1951.
-

ФОТОЭФФЕКТ С ПОВЕРХНОСТНЫХ УРОВНЕЙ

Г. Е. Пикус

Рассматривается внешний фотоэффект, вызванный вырыванием электронов из поверхностной зоны полупроводника или диэлектрика. Показано, что в случае целиком или наполовину заполненной поверхностной зоны подобный фототок составляет существенную долю общего фототока с полупроводника.

1. Основное уравнение

Состояние электрона в полубесконечной кристаллической решетке, ограниченной плоскостью $x=0$, описывается известным уравнением:

$$\hat{H}_0 \Psi_0 = i\hbar \frac{\partial \Psi_0}{\partial t}, \quad (1)$$

где

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x, y, z),$$

причем

$$V(x, y, z) = \begin{cases} U(x, y, z) & \text{при } x \gg 0, \\ 0 & \text{при } x \ll 0, \end{cases}$$

$U(x, y, z)$ — периодическая функция, с периодами, равными периодам решетки a_x, a_y, a_z .

Как было показано впервые Таммом [1], в такой ограниченной решетке наряду с обычными «объемными» состояниями электронов появляются поверхностные состояния, образующие поверхностную зону. Эти состояния описываются волновой функцией Ψ_0 , затухающей в обе стороны от границы:

при $x \gg 0$

$$\Psi_0 = U_q(x, y, z) \exp \left\{ -qx + ik_y y + ik_z z + \frac{iE_0}{\hbar} t \right\}, \quad (2)$$

при $x \ll 0$

$$\Psi_0 = N_q \exp \left\{ px + ik_y y + ik_z z + \frac{iE_0}{\hbar} t \right\}.$$

Здесь k_y и k_z — волновые числа, изменяющиеся соответственно от $-\pi/a_y$ до $+\pi/a_y$ и от $-\pi/a_z$ до $+\pi/a_z$, U_q — периодическая функция с теми же периодами a_x, a_y, a_z , N_q — постоянный множитель, $E_0 = f(q, k_y, k_z)$ — энергия электрона. Значения p и q определяются из решения (1).

Мы в дальнейшем не будем учитывать периодичность поля по y и z , т. е. положим $V = V(x)$; тогда $U = U(x)$, $U_q = U_q(x)$, а

$$E_0 = E_{0x}(q) + \frac{\hbar^2}{2m}(k_y^2 + k_z^2), \quad p = \frac{1}{\hbar} \sqrt{-2mE_{0x}}, \quad (3)$$

где m — масса электрона.

Вид функции $E_{0x}(q)$ определяется полем $V(x)$. В этом случае волновую функцию Ψ_0 можно записать в виде

$$\Psi_0 = \varphi(x) \exp \left\{ ik_y y + ik_z z + \frac{iL_0}{\hbar} t \right\}, \quad (4)$$

где $\varphi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + [V(x) - E_{0x}] = 0,$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} U_q(x) e^{-qx} & \text{при } x \gg 0, \\ N_q e^{px} & \text{при } x \ll 0. \end{cases}$$

Рассчитаем вероятность вырывания электрона поверхностной зоны под действием падающего света. Пусть на поверхность падает монохроматическая волна с частотой ω , вектор распространения которой лежит в плоскости xu и образует с нормалью к поверхности угол θ (рис. 1). Вектор-потенциал этой волны A равен

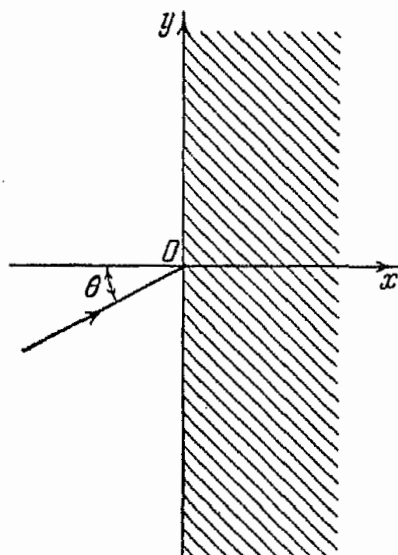


Рис. 1

$$A = a \exp \left\{ i\omega \left(t + \frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{c} \right) \right\} + a^* \exp \left\{ -i\omega \left(t + \frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{c} \right) \right\}, \quad (5)$$

где a — постоянный вектор.

Мы не будем учитывать отражения света и затухания световых волн. Для расчета вероятности вырывания электрона надо решить уравнение (см. [2]):

$$\hat{H}\Psi = i\hbar \partial \Psi / \partial t, \quad (6)$$

где

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \frac{i\hbar e}{mc} A \nabla.$$

При этом мы опустили в выражении для возмущения слагаемые более высокого порядка. Считая возмущение малым, положим $\Psi = \Psi_0 + \psi$. Подставляя в (6) выражения для Ψ_0 и A и пренебрегая членами высшего порядка, получим уравнение для ψ :

$$\begin{aligned} \hat{H}_0 \psi - i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = & -\frac{i\hbar e}{mc} a \exp \left\{ i \left(\frac{E_0}{\hbar} + \omega \right) \right\} \times \\ & \times \nabla \left(\varphi \exp \left\{ ik_y y + ik_z z + \frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{\lambda} \right\} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

При этом мы, как обычно, опускаем второе слагаемое в выражении для A . В (7) можно пренебречь членом с $1/\lambda$ по сравнению с k_y и k_z ,

так как $1/\lambda \ll 10^4 \text{ см}^{-1}$, а $1/k_y \approx 1/k_z \approx 10^7 \text{ см}^{-1}$. Тогда решение этого уравнения можно представить в виде

$$v = \zeta(x) \exp \left\{ i \left(\frac{E_0}{\hbar} + \omega \right) t + ik_y y + ik_z z \right\}. \quad (8)$$

Функция $\zeta(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \zeta}{dx^2} + [V(x) - E_x] \zeta = -\frac{i\hbar e}{2m} \left[a_x \frac{d\varphi}{dx} + i\varphi (a_y k_y + a_z k_z) \right], \quad (9)$$

где

$$E_x = E_{0x} + \hbar\omega,$$

т. е. вырываемый светом электрон имеет энергию $E = E_0 + \hbar\omega$. Этой энергии соответствует решение невозмущенного уравнения (1)

$$\Psi_1 = \chi(x) \exp \{ ik_y y + ik_z z + i \frac{E}{\hbar} t \}, \quad (10)$$

где $\chi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \chi}{dx^2} + \chi [V(x) - E_x] = 0. \quad (10a)$$

Решения невозмущенных уравнений $\varphi(x)$ и $\chi(x)$ мы считаем известными. Как следует из (4) и (10), они ортогональны, т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi(x) \varphi(x) dx = 0. \quad (11)$$

Выразим решение уравнения (9) через эти известные функции. Для этого перепишем уравнения (9) и (10a) в виде

$$\zeta'' + f(x)\zeta = \kappa(x); \quad (9a)$$

$$\chi'' + f(x)\chi = 0, \quad (10b)$$

где

$$f(x) = -\frac{2m}{\hbar^2} [V(x) - E];$$

$$\kappa(x) = -\frac{2ie}{\hbar c} \left[a_x \frac{d\varphi}{dx} + i\varphi (a_y k_y + a_z k_z) \right].$$

Общее решение уравнения (10b) может быть записано в виде

$$\chi = C_1 \chi_1 + C_2 \chi_2, \quad (12)$$

где χ_1 и χ_2 — два линейно независимых решения этого уравнения. Из (10b) следует (см. [2], § 29)

$$\chi_1' \chi_2 - \chi_2' \chi_1 = \text{const} = 1/D. \quad (13)$$

Решение уравнения (9a) будем искать методом вариации постоянных ([3], § 25). Положим

$$\zeta = C_1(x) \chi_1(x) + C_2(x) \chi_2(x). \quad (14)$$

Учитывая (13), найдем

$$C_1 = D \int_{-\infty}^x \kappa \chi_2 dx + B_1, \quad C_2 = -D \int_{-\infty}^x \kappa \chi_1 dx + B_2, \quad (15)$$

где постоянная D определяется уравнением (13), а B_1 и B_2 определяются из условия на бесконечности. Сходимость интеграла $\int_{x_1}^{x_2} \kappa \chi dx$ при $x_1 \rightarrow -\infty$ обеспечивается тем, что при этом $\kappa(x)$ стремится к нулю, как $e^{-\alpha|x|}$. В случае, если невозмущенное состояние поверхностное, этот интеграл сходится при $x_2 \rightarrow +\infty$, так как $\kappa|_{x=+\infty} \rightarrow 0$. Если же невозмущенное состояние объемное, то, как обычно, надо ввести множитель, обеспечивающий сходимость интеграла, положив $a = a_0 e^{-\epsilon^2 x}$ (при $x > 0$), где $\epsilon^2 \rightarrow 0$, но $x\epsilon^2|_{x \rightarrow \infty} \rightarrow \infty$. Фактически этим мы в какой-то мере учитываем затухание световой волны.

При $x \ll 0$

$$\zeta = B_1 \chi_1 + B_2 \chi_2; \quad (16a)$$

при $x \gg 0$

$$\zeta = \left(B_1 + D \int_{-\infty}^{+\infty} \kappa \chi_2 dx \right) \chi_1 + \left(B_2 - D \int_{-\infty}^{+\infty} \kappa \chi_1 dx \right) \chi_2. \quad (16b)$$

Из (10a) следует, что при $x \ll 0$, когда $V(x) = 0$ при $E_x > 0$,

$$\chi = M e^{irx} + N e^{-irx}, \quad (17)$$

где $r^2 = (2m/\hbar^2) E_x$.

Выберем χ_1 и χ_2 так, чтобы при $x < 0$ χ_1 соответствовало волне, бегущей от границы налево, а χ_2 при $x > 0$ — волне, бегущей от границы направо. Тогда при $x > 0$ χ_1 и при $x < 0$ χ_2 соответствуют две волны — падающая и отраженная.

При $x \ll 0$

$$\begin{aligned} \chi_1 &= F e^{irx}, \\ \chi_2 &= G e^{irx} + H e^{-irx}, \end{aligned} \quad (18)$$

причем коэффициент отражения границы R равен $R = |G/H|^2$, так как χ_2 соответствует при $x > 0$ волне, бегущей от границы.

Из (18) и (13) следует, что

$$1/D = 2irFH. \quad (19)$$

Так как свет вырывает электроны только вблизи границы, то наше решение ζ при $x \gg 0$ и при $x \ll 0$ должно соответствовать волнам, бегущим от границы, т. е. согласно нашему выбору χ_1 и χ_2 при $x \ll 0$, $\zeta = C \chi_1$; при $x \gg 0$ $\zeta = C \chi_2$. Сравнивая эти выражения с (16a)

и (16b), найдем $B_2 = 0$, $B_1 = -D \int_{-\infty}^{+\infty} \kappa \chi_2 dx$, откуда, учитывая (19), получим при $x \ll 0$

$$\zeta = B_1 \chi_1 = \left\{ -\frac{1}{2irH} \int_{-\infty}^{+\infty} \kappa \chi_2 dx \right\} e^{irx}. \quad (20)$$

Поток фотоэлектронов в направлении, нормальном к поверхности j_x , равен

$$j_x = \frac{i\hbar}{2m} \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \right) = -\frac{\hbar}{4mr|H|^2} |I|^2, \quad (21)$$

где $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \kappa \chi_2 dx$.

Подставляя в I выражение для χ из (9a) и учитывая (11), найдем

$$I = \frac{2ie}{\hbar c} a_x \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_2 \varphi' dx,$$

откуда

$$j_x = \frac{e^2 |a_x|^2}{\hbar c^2 m r |H|^2} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_2 \varphi' dx \right|^2. \quad (21a)$$

Таким образом в принятом нами приближении вероятность вырывания электронов не зависит от волновых чисел k_y и k_z , т. е. суммарный фототок из всей поверхностной зоны с 1 см^2 поверхности равен

$$J_x = j_x n_{\text{пов}}, \quad (22)$$

где $n_{\text{пов}}$ — число электронов в поверхностной зоне на 1 см^2 поверхности. При этом, конечно, функция $\varphi(x)$ должна быть нормирована на единицу. Ясно, что при $E_x = E_{0x} + \hbar\omega < 0$, когда $\chi = Me^{rx}$ ($x \ll 0$), где $r^2 = -(2m/\hbar^2) E_x$, $j_x = 0$.

Остановимся на вопросе о пределах применимости формулы (21a). Как известно, фотоэффект на свободных электронах невозможен, так как при полном поглощении свободным электроном энергии кванта не могут одновременно удовлетворяться законы сохранения энергии и импульса. Для электронов в поле решетки фотоэффект становится возможным вследствие того, что здесь избыточный импульс поглощается решеткой. Как показал Тамм [4], следует различать два типа фотоэффекта: один, обязанный периодическому полю решетки, так называемый внутренний¹, второй, обязанный потенциальному барьеру у границы, так называемый поверхностный фотоэффект. Так как при выводе (21a) мы не накладывали никаких ограничений на потенциал $V(x)$ ², то (21a) учитывает оба эти эффекта, конечно, в принятом нами приближении, т. е. фактически для одномерной модели. Поэтому, хотя это уравнение и пригодно при расчете фотоэффекта и для металла и для диэлектрика, но для расчета объемного фотоэффекта оно недостаточно, так как не учитывает периодичности поля по y и z . Кроме того, при расчете объемного фотоэффекта следует учитывать рассеяние электронных волн на тепловых колебаниях решетки и примесях и затухание световой волны в веществе. Поэтому этим уравнением нельзя пользоваться для сколько-нибудь точного расчета фотоэффекта для диэлектрика, где объемный эффект может играть существенную роль. В то же время при расчете фотоэффекта с поверхностных уровней, а также поверхностного фотоэффекта оно является более точным, так как оба эти явления обязаны своим существованием потенциальному барьеру у границы, который сам является одномерным.

2. Распределение фотоэлектронов по энергиям

В рассмотренном нами приближении, не учитывающем периодичности поля по y и z , пороговая частота ω_0 определяется уравнением $\hbar\omega_0 = -E_{0x}$ ($E_{0x} < 0$). При освещении образца излучением с частотой выше пороговой, сразу возбуждаются электроны всей поверхностной зоны,

¹ Не следует путать с обычным внутренним фотоэффектом — увеличением проводимости в кристалле при освещении.

² Для частного случая при пренебрежении периодическим изменением потенциала $V(x)$ при $x > 0$ уравнение, подобное (21a), было выведено иным способом в работе [5], посвященной изучению поверхностного фотоэффекта с металлов.

т. е., в отличие от фотоэффекта в объемной зоне, распределение вылетевших электронов по энергиям не зависит от частоты падающего света и, так как вероятность возбуждения не зависит от волновых чисел k_y и k_z , т. е. от энергии электрона в поверхностной зоне, это распределение однозначно определяется распределением электронов по энергиям в этой зоне.

Число вылетевших электронов с энергией от E до $E + dE$ пропорционально числу электронов в зоне, имевших энергию от E_0 до $E_0 + dE$. Так как вероятность возбуждения каждого электрона в одну секунду равна j_x , то число возбужденных электронов, имеющих после вылета энергию от E до $E + dE$, равно

$$dj(E) = jdn(E) = jdn(E_0) = jn(E_0)dE,$$

где $n(E_0) = n_0(E_0)f(E_0)$; $dn = n_0(E_0)dE$ — число состояний в поверхностной зоне с энергией от E_0 до $E_0 + dE$, а $f(E_0)$ — функция распределения Ферми $f(E_0) = \left[\exp \left\{ \frac{E_0 - \mu}{kT} \right\} + 1 \right]^{-1}$, где μ — уровень химического потенциала.

В принятом нами приближении $E_0 = E_{0x} + \frac{\hbar^2}{2m}(k_y^2 + k_z^2)$ и

$$dn = \frac{2k_y k_z}{(2\pi)^2} = \frac{m}{\pi \hbar^2} dE, \quad (23)$$

т. е. $n(E_0) = m/\pi \hbar^2$ и не зависит от E_0 , конечно, пока энергия E_0 лежит в пределах поверхностной зоны, т. е. при $E_{0x} \leq E_0 \leq E_m$, где E_m — верхняя граница поверхностной зоны, и

$$dj(E) = j \frac{m}{\pi \hbar^2} \left[\exp \left\{ \frac{E - \hbar\omega - \mu}{kT} \right\} + 1 \right]^{-1} dE. \quad (24)$$

Обычно распределение фотоэлектронов по энергиям измеряют в сферическом задерживающем поле. При этом коллектора достигают все электроны, имеющие после вылета энергию, большую, чем $eV + (\varphi_2 - \varphi_1)$, где V — задерживающее поле, φ_2 — работа выхода коллектора, φ_1 — работа выхода эмиттера.

Наименьшая энергия, с которой может вылететь электрон при возбуждении светом с частотой ω , равна $E_x = E_{0x} + \hbar\omega$ (при этом $k_y = k_z = 0$). Если $E_x > eV + (\varphi_2 - \varphi_1)$, т. е. $eV < eV_s = E_x - (\varphi_2 - \varphi_1)$, то коллектора достигнут все вылетевшие с эмиттера электроны; при $V > V_s$ коллектора достигнут лишь электроны с энергией $E > E_x + e(V - V_s)$. Число таких электронов, согласно (23), равно

$$J(V) = j(\omega) \int_{E_0}^{E_m} f(E_0) n_0(E_0) dE, \quad (25)$$

где $E_0 = E_x + e(V - V_s)$.

Если уровень химического потенциала проходит ниже верхней границы поверхностной зоны E_m , то $f(E_m) \approx 0$, и мы можем заменить верхний предел интеграла (25) на ∞ ; используя (24), найдем

при $V > V_s$

$$J(V) = j(\omega) \frac{mkT}{\pi \hbar^2} \ln \left(1 + \exp \left\{ - \frac{E_{0x} - \mu + e(V - V_s)}{kT} \right\} \right); \quad (25a)$$

при $V < V_s$

$$J(V) = J_0 = jn_{\text{пов}} = j(\omega) \frac{mkT}{\pi \hbar^2} \ln \left(1 + \exp \left\{ - \frac{E_{0x} - \mu}{kT} \right\} \right). \quad (25b)$$

В случае наполовину или целиком заполненной поверхностной зоны уровень химического потенциала проходит значительно выше границы зоны и $J_0 = j \frac{m}{\pi \hbar^2} (\mu - E_{0x})$. Из (25) видно, что при $T=0$ $J(V)=0$, если $e(V - V_s) > \mu - E_{0x}$, или, если $eV > eV_0$, где $eV_0 = eV_s + \mu - E_{0x} = \mu + \hbar\omega - (\varphi_2 - \varphi_1)$. Отсюда видно, что $\mu - E_{0x} = e(V_0 - V_s)$ и, следовательно,

$$\frac{J}{J_0} = \frac{\ln[1 + \exp\{e(V_0 - V)/kT\}]}{e(V_0 - V_s)/kT} \quad (\text{при } V > V_s). \quad (26)$$

При $T=0$

$$J/J_0 = 1 \quad \text{при } V < V_s;$$

$$\frac{J}{J_0} = -\frac{V_0 - V}{V_0 - V_s} \quad \text{при } V_0 > V > V_s;$$

$$J/J_0 = 0 \quad \text{при } V > V_0.$$

На рис. 2 приведена кривая $J(V)/J_0 = f(V)$ для температуры 300°K (сплошная кривая). Там же схематически показаны кривые при фотоэффекте с металла (кривая 1) и диэлектрика (кривая 2). Различие форм кривых в основном вызвано следующим. Для металла число состояний в интервале dE равно $dn_0 \sim E^{1/2} dE$, где E — энергия электрона, отсчитываемая от дна зоны проводимости, т. е. число электронов растет с ростом их энергии. Для заполненной зоны диэлектрика $dn_0 \sim (-E)^{1/2} dE$, где E — энергия электрона, отсчитываемая от верхней границы заполненной зоны, т. е. число электронов растет с уменьшением их энергии. В поверхностной зоне $dn_0 \sim dE$, т. е. число электронов не меняется с изменением их энергии, поэтому кривая $J(V)/J_0$ идет в интервале $V_s < V < V_0$ практически прямолинейно. Конечно, если учесть периодичность поля по y и z , то зависимость $n(E)$ уже не будет выражаться уравнением (23). Поэтому в реальных кристаллах даже при $T=0$ кривая $J(V)/J_0$ не будет прямолинейной. В основном ее форма будет определяться распределением уровней в поверхностной зоне. Кроме того, вероятность вылета фотоэлектронов в этом случае, вообще говоря, будет зависеть от волновых чисел k_y и k_z , т. е. от энергии электрона.

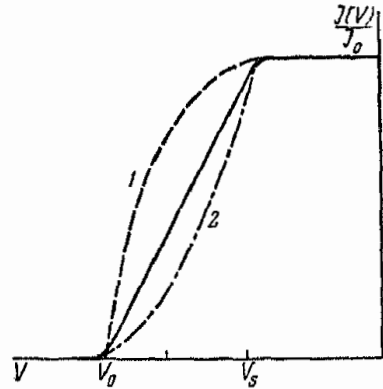


Рис. 2

3. Квантовый выход. Зависимость от частоты

Если на поверхность падает световая волна, вектор-потенциал которой, согласно (5), равен $A = 2a \cos \omega(t + r/c)$, то число падающих квантов на 1 см^2 за одну секунду равно

$$N = \frac{|a_x|^2 \omega \cos \theta}{2\pi \hbar c \sin^2 \theta}. \quad (27)$$

Из (21a), (22), (27) найдем квантовый выход

$$Y = \frac{J_0}{N} = \frac{2\pi e^2 \sin^2 \theta n_{\text{пов}}}{mc \omega \cos \theta r |H|^2} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_2 \varphi' dx \right|^2. \quad (28)$$

Для расчета квантового выхода требуется точное знание волновых функций φ и χ , т. е. необходимо задать потенциал $V(x)$. Рассмотрим простейший случай—прямоугольный потенциальный барьер на границе. Далее допустим, что для возбужденных состояний, энергия которых велика, можно пренебречь периодическим изменением потенциала³ (рис. 3). Тогда волновую функцию χ_2 можно записать в виде

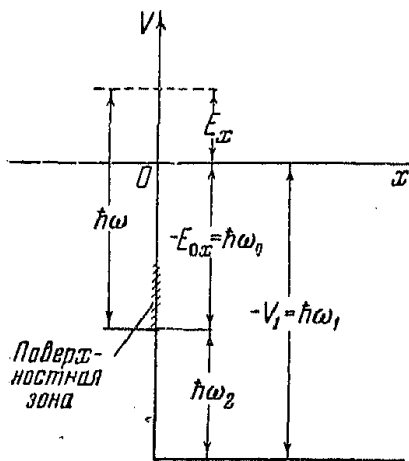


Рис. 3

$$\begin{aligned} x < 0, V = 0, \quad \chi_2 &= Ge^{irx} + He^{-irx}; \\ x > 0, V = -V_1, \quad \chi_2 &= e^{ikx}, \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{2m}{\hbar^2} E_x, \quad k^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (V_1 + E_x), \\ E_x &= E_{0x} + \hbar\omega > 0 \quad (E_{0x} < 0). \end{aligned} \quad (29a)$$

Из условия непрерывности функции и ее первой производной в точке $x=0$ следует

$$G = \frac{r-k}{2r}, \quad H = \frac{r+k}{2r}. \quad (30)$$

Коэффициент прозрачности барьера $D = 4kr/(k+r)^2$, откуда

$$r|H|^2 = k/D. \quad (30a)$$

Для определения квантового выхода надо вычислить интеграл $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_2 \varphi' dx$. Применяя интегрирование по частям и учитывая, что при $x \rightarrow \pm \infty$ $\varphi \rightarrow 0$, найдем

$$I = - \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_2' \varphi dx = \int_{-\infty}^0 ir(Ge^{irx} - He^{-irx}) \varphi dx - \int_0^{\infty} ike^{-ikx} \varphi dx. \quad (31)$$

Но в силу условия ортогональности (11)

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_2 \varphi dx = \int_{-\infty}^0 (Ge^{irx} + He^{-irx}) \varphi dx + \int_0^{\infty} e^{ikx} \varphi dx. \quad (32)$$

Умножая уравнение (32) на ik и складывая с (31), найдем, учитывая (30),

$$I = \frac{i}{2r} (k^2 - r^2) \int_{-\infty}^0 (e^{+irx} - e^{-irx}) \varphi dx. \quad (33)$$

Таким образом для вычисления I нам надо знать ход $\varphi(x)$ только в области $x < 0$, т. е. вне решетки. Для принятого нами прямоуголь-

³ Для невозбужденных поверхностных состояний пренебрегать периодическим изменением потенциала нельзя, так как при отсутствии этого периодического изменения вообще не может быть поверхностных уровней.

ного барьера в этой области $\varphi = Ne^{px}$, где $p^2 = -\frac{2m}{\hbar^2} E_{0x}$. Подставляя это выражение для φ в (33) и интегрируя, найдем

$$I = N \frac{k^2 - r^2}{p^2 + r^2}.$$

Введем $\hbar\omega_1 = -eV_1$; тогда, учитывая (29a), окончательно получим

$$I = N \frac{\omega_1}{\omega}. \quad (34)$$

Из (34) и (30a) следует, что квантовый выход равен

$$Y = \frac{2\pi e^2 \sin^2 \theta n_{\text{пов}} N^2}{mc \cos \theta} \frac{D}{k} \frac{\omega_1^2}{\omega^3}. \quad (35)$$

Заметим, что объемная плотность поверхностных электронов у поверхности (при $x=0$) равна $\rho_{\text{пов}}(0) = n_{\text{пов}} |\psi(0)|^2 = N^2 n_{\text{пов}}$. Поэтому выражение для Y можно переписать в виде

$$Y = \frac{2\pi e^2 \sin^2 \theta}{mc \cos \theta} \frac{D}{k} \frac{\omega_1^2}{\omega^3} \rho_{\text{пов}}(0). \quad (35a)$$

Оценим Y численно. При $\theta = 45^\circ$, $V_1 = -6 \text{ eV}$, $\omega = 6 \cdot 10^{15} \text{ сек}^{-1}$ и $E_x = 1 \text{ eV}$, $Y = 3 \cdot 10^{-26} \rho_{\text{пов}}(0)$. Если плотность поверхностных электронов у границы порядка $\frac{1}{3}$ электрона на одну ячейку, т. е. $\rho_{\text{пов}}(0) \approx 0,3 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$, то $Y \approx 10^{-4}$ электрона на квант. Зависимость квантового выхода Y от частоты падающего света согласно (35a) описывается уравнением $Y = C' \frac{D(k)}{k\omega^3}$, где в C' входят все величины, не зависящие от ω . Подставляя значения D , k и r из (29a) и (30a), найдем

$$Y(\omega) = C'' \frac{(\omega - \omega_0)^{1/2}}{[(\omega - \omega_0)^{1/2} + (\omega + \omega_2)^{1/2}]^2} \frac{1}{\omega^3}, \quad (36)$$

где $\hbar\omega_1 = -V_1$, $\hbar\omega_0 = -E_{0x}$, $\omega_2 = \omega_1 - \omega_0$ ($\omega_2 > 0$) (рис. 3).

Уравнение (36) можно переписать в виде

$$Y(x) = C'' \frac{(x-1)^{1/2}}{[(x-1)^{1/2} + (x+a)^{1/2}]^2} \frac{1}{x^3}, \quad (36a)$$

где $x = \omega/\omega_0$ и $a = \omega_2/\omega_0$.

Функция $Y(x)$ построена на рис. 4 для значений $a=1$ (кривая 1) и $a=2$ (кривая 2). При частоте, близкой к пороговой, т. е. при x , близких к единице, ход $Y(x)$ определяется зависимостью прозрачности барьера от x . При этих частотах $Y(x) \sim D(x) \sim (x-1)^{1/2}$. Здесь следует иметь в виду, что при расчете мы считали граничный барьер прямоугольным. Как известно, коэффициент прозрачности барьера при таком резком изменении потенциала у границы меньше, чем при более пологом ходе. Например, для барьера, созданного силами изображения, согласно расчета [6] уже при $\omega/\omega_0 = 1,025$ $D = 0,967$, в то время как для прямоугольного барьера той же высоты при том же значении ω/ω_0 $D = 0,467$. Поэтому для реального барьера при частотах, близких к пороговой, рост квантового выхода с ростом частоты должен быть более резким, чем следует из уравнения (36).

Интересно сравнить квантовый выход для фотоэффекта с поверхностной зоны $Y_{\text{пов}}$ с квантовым выходом фотоэффекта из объемной зоны $Y_{\text{об}}$. Как было указано выше, формула (21a) позволяет рассчи-

тать поверхностный фотоэффект для металла, а также оценить, хотя и очень приближенно, фотоэффект для диэлектрика. При выводе (34) мы описывали возбужденное состояние плоскими волнами, а барьер у границы считали прямоугольным. На вид функции $\varphi(x)$, описывающей начальное состояние электрона, мы никаких других ограничений, кроме прямоугольности барьера, не накладывали. Поэтому это уравнение

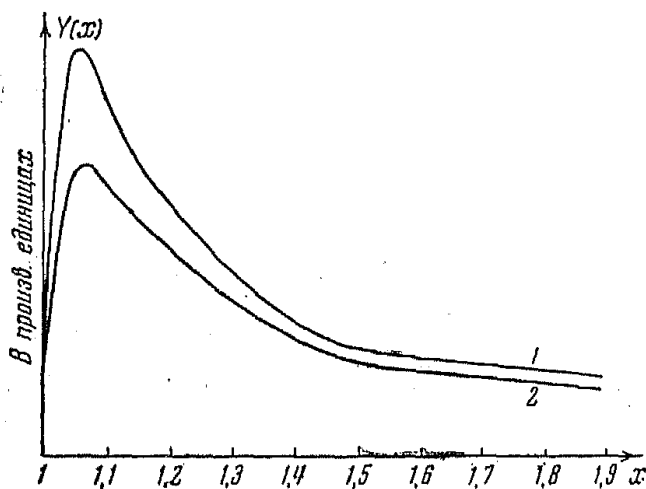


Рис. 4

сохраняет силу и для фотоэффекта с объемных зон, а характер волновой функции $\varphi(x)$ скажется лишь на величине N . Это связано с тем, что в окончательный результат у нас входит лишь интеграл по области $x < 0$, где во всех случаях $\varphi(x) = N_p e^{-px}$. При этом мы фактически учитываем только поверхностный фотоэффект, так как для возбужденных состояний пренебрегаем периодическим изменением потенциала.

В поверхностной зоне состояние электрона определяется только двумя волновыми числами k_y и k_z . Поэтому все вылетевшие фотоэлектроны имеют после вылета одно и то же волновое число $k'_x = k = \frac{2m}{\hbar^2} (E_{0x} + \hbar\omega)$, т. е. одну и ту же нормальную составляющую скорости v_x и одну и ту же пороговую частоту возбуждения⁴ $\omega_0 = -E_{0x}/\hbar$. В объемной зоне состояние электрона определяется тремя волновыми числами k_x, k_y, k_z и, если не учитывать периодичности поля по y и z , пороговая частота возбуждения электрона и его волновое число $k'_x = k$ после вылета определяются волновым числом k_x невозбужденного состояния. Согласно (21а), (30а) и (34) фототок, обязанный возбуждению электрона, находящегося в состоянии (k_x, k_y, k_z) , равен

$$j = \frac{e^2 |a_x|^2 D(k)}{\hbar m c^2 k} \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)^2 N, \quad (37)$$

где D — коэффициент прозрачности барьера, определяемый согласно (30а) волновым числом k . Для получения полного фототока надо проинтегрировать уравнение (37) по всем состояниям электронов, для которых $E_{0x} + \hbar\omega \geq 0$. Если энергия кванта падающего света достаточна для возбуждения всех электронов зоны, то надо интегрировать по всем состояниям зоны, т. е. по всем значениям волновых чисел (k_x, k_y, k_z) .

Для расчета интеграла $\int \frac{D(k)}{k} N^2 dk_x dk_y dk_z$ надо знать зависимость $N(k_x, k_y, k_z)$, для чего надо задать функцию $\varphi(x)$, т. е. ход потенциала $V(x)$. Для простейшего случая — прямоугольной потен-

⁴ Заметим, что этот результат получен в приближении, не учитывающем периодичность поля по y и z . В реальных кристаллах вследствие этой периодичности поля пороговая частота возбуждения и нормальная к поверхности составляющая скорости после вылета не будут совершенно одинаковыми для всех электронов поверхностной зоны.

циальной ямы ($V = 0$ при $x < 0$; $V = -V_1$ при $x > 0$), т. е. без учета периодического изменения потенциала для невозбужденных состояний. Этот интеграл вычислен графически в работе [7].

Если учесть, что $N^2 = |\Psi(0)|^2$, т. е. $\int N^2 dk_x dk_y dk_z = \rho_{05}(0)$, где $\rho_{05}(0)$ — плотность электронов у границы (при $x = 0$), то полный фототок можно записать в виде

$$J = \frac{e^2 |a_x|^2}{\hbar mc^2} \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)^2 \rho_{05}(0) \overline{\left(\frac{D}{k} \right)},$$

откуда квантовый выход равен

$$Y_{05} = \frac{2\pi e^2 \sin^2 \theta \omega_1^2}{mc \cos \theta \omega^3} \overline{\left(\frac{D}{k} \right)} \rho_{05}(0). \quad (38)$$

Для оценки Y_{05} будем считать плотность электронов у границы равной средней плотности в объеме, т. е. порядка 10^{22} см^{-3} . Значение $\overline{(D/k)}$ оценим из (29а) и (30а), приняв $\bar{E}_x = 1 \text{ eV}$. Тогда при $\theta = 45^\circ$, $V_1 = -6 \text{ eV}$ и $\omega = 6 \cdot 10^{15} \text{ сек}^{-1}$, $Y_{05} = 3 \cdot 10^{-4}$ электрона на квант, что соответствует, по порядку величины, наблюдаемым на опыте значениям Y для металлов и полупроводников.

Сравнивая (35а) и (38), найдем

$$\frac{Y_{\text{пов}}}{Y_{05}} = \frac{(D/k)_{\text{пов}}}{(D/k)_{05}} \frac{\rho_{\text{пов}}(0)}{\rho_{05}(0)}, \quad (39)$$

т. е. при $(D/k)_{\text{пов}} \approx (D/k)_{05}$ отношение квантовых выходов при одинаковых условиях освещения определяется плотностью электронов у поверхности. Электроны поверхностной зоны локализованы вблизи поверхности в слое толщиной в несколько межатомных расстояний. В случае целиком или наполовину заполненной поверхностной зоны⁵ число этих электронов по порядку величины равно числу поверхностных атомов. Поэтому их объемная плотность вблизи поверхности лишь в несколько раз меньше, чем плотность электронов объемной зоны, равная по порядку величины нескольким электронам на атом. Поэтому квантовый выход фотозффекта для целиком или наполовину заполненной поверхностной зоны не должен сильно отличаться от квантового выхода при фотозффекте для металла или полупроводника. Следовательно, в полупроводнике с целиком или наполовину заполненной поверхностной зоной фототок из этой зоны должен играть существенную роль в общем фототоке. От фототока из объемной зоны он будет отличаться тем, что для него ниже пороговая частота, форма кривой $J(V) = f(V)$ в задерживающем поле более близка к прямой и, повидимому, несколько меньше квантовый выход. Кроме того, следует иметь в виду, что если для фотозффекта с поверхностной зоны зависимость $Y(\omega)$ при ω , близких к ω_0 , определяется только зависимостью прозрачности барьера $D(\omega)$, то для фотозффекта из объемной зоны при росте ω растет не только $D(\omega)$, но и число электро-

⁵ Поверхностная зона при незаряженном состоянии поверхности может быть полностью заполненной, пустой или заполненной наполовину в зависимости от того, образована ли она соответственно за счет уровней заполненной зоны, зоны проводимости или за счет уровней обеих зон полупроводника. Обычно в полупроводнике с поверхностными уровнями на поверхности всегда появляется заряд того или иного знака, но при этом степень заполнения поверхностной зоны почти не меняется (см. [8]). Поэтому мы везде характеризуем поверхностную зону как целиком заполненную, пустую или наполовину заполненную, в зависимости от того, за счет уровней какой из объемных зон она образована.

нов, которые могут преодолеть граничный барьер, поглотив квант $h\omega$. Поэтому рост $Y(\omega)$ с ростом ω при фотоэффекте из объемной зоны будет более резким, чем при фотоэффекте с поверхностной.

В случае пустой поверхностной зоны плотность электронов в ней согласно формуле (16), [8], не превышает $10^{12} - 10^{13} \text{ см}^{-2}$, т. е. квантовый выход будет, по крайней мере, на 2—3 порядка меньше, чем при целиком или наполовину заполненной поверхностной зоне.

Как известно, в полупроводнике без поверхностных уровней работа выхода, определенная методом контактной разности потенциалов $\varphi_{\text{к.р.п.}}$, отличается от работы выхода $\varphi_{\text{ф}}$, определенной по пороговой частоте фотоэффекта. Первая определяется положением уровня химического потенциала и зависит от температуры, вторая — положением верхней границы заполненной зоны и практически не зависит от температуры. Следовательно, эти работы выхода отличаются на величину δ , равную расстоянию от вершины заполненной зоны до уровня химического потенциала (рис. 5).

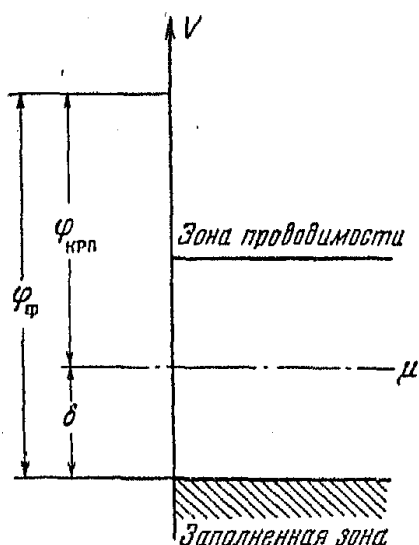


Рис. 5

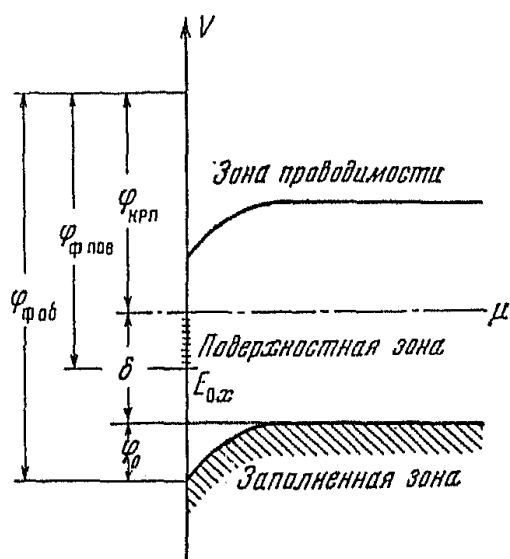


Рис. 6

Влияние поверхностной зоны скажется двояким образом.

Во-первых, при этом обычно образуется поверхностный заряд, который приводит к искривлению зон у границы (рис. 6). При фотоэффекте в основном вырываются электроны лишь из узкого приграничного слоя, ширина которого порядка длины волны электрона и, во всяком случае, не больше длины его свободного пробега, т. е. ширина этого слоя много меньше, чем ширина области, где зона искривлена. Поэтому фотоэлектрическая работа выхода, найденная по пороговой частоте фотоэффекта с заполненной зоны $\varphi_{\text{ф об}}$, будет определяться положением вершины заполненной зоны у границы, т. е. будет такой же, как и при отсутствии поверхностного заряда. В то же время работа выхода, определенная методом контактной разности потенциалов, уменьшится на величину φ_0 , равную искривлению зоны у границы. Таким образом разность этих двух работ выхода будет равна $\varphi_{\text{ф об}} - \varphi_{\text{к.р.п.}} = \delta + \varphi_0$. Заметим, что в случае пустой поверхностной зоны всегда $\varphi_0 < 0$ (зоны искривляются вверх), в случае целиком заполненной $\varphi_0 > 0$ и в случае наполовину заполненной φ_0 может иметь любой знак в зависимости от того, проходит ли уровень химического потенциала при отсутствии поверхностного заряда выше или ниже середины зоны.

Во-вторых, фототок из поверхностной зоны начинается при частотах падающего света более низких, чем из объемной зоны. Поэтому гра-

ница фотоэффекта с объемной зоны не будет резкой. Вследствие искривления зон граница заполнения наполовину заполненной поверхностной зоны всегда совпадает с уровнем химического потенциала. Если верхняя граница целиком заполненной поверхностной зоны при отсутствии поверхностного заряда проходит выше уровня химического потенциала, то при изгибе зон она сместится и также практически будет совпадать с уровнем химического потенциала, т. е. в этих случаях могут вырываться фотоэлектроны, имеющие энергию, равную μ . Такое же положение имеет место в металле. Но, в отличие от металла, где работы выхода $\varphi_{\text{ф}}$ и $\varphi_{\text{к.р.п.}}$ совпадают, работа выхода, определенная по пороговой частоте фотоэффекта с поверхностной зоны $\varphi_{\text{ф пов}}$, не будет совпадать с работой выхода, определенной по контактной разности потенциалов $\varphi_{\text{к.р.п.}}$. Например, в рассмотренном нами приближении $\varphi_{\text{ф пов}} = \hbar\omega_0 = -E_{0x}$, а $\varphi_{\text{к.р.п.}} = -\mu$ (см. рис. 4), откуда $\varphi_{\text{ф пов}} - \varphi_{\text{к.р.п.}} = -(E_{0x} - \mu)$, т. е. в этом приближении разность этих двух работ выхода равна ширине заполненной части поверхностной зоны.

Таким образом изучение фотоэлектрических свойств полупроводников с поверхностной зоной, возможно, позволит установить как степень заполнения поверхностной зоны, так и ее положение в энергетическом спектре кристалла.

В заключение приношу глубокую благодарность проф. А. И. Ансельму за предложенную тему и обсуждение результатов.

Поступила в редакцию
29 апреля 1953 г.

Литература

- [1] И. Е. Тамм. *Sov. Phys.*, 1, 733, 1932.— [2] Д. И. Блохинцев. *Основы квантовой механики*, ГТТИ, 1949, стр. 114.— [3] В. И. Смирнов. *Курс высшей математики*, т. II, ГТТИ, 1948, стр. 88.— [4] И. Е. Тамм. *ZS. f. Phys.*, 68, 97, 1931.— [5] R. Makinson. *Phys. Rev.*, 75, 1908, 1949.— [6] A. Hill. *Phys. Rev.*, 53, 184, 1938.— [7] K. Mitchell. *Proc. Roy. Soc.*, 146, 442, 1934.— [8] Г. Е. Пикус. *ЖЭТФ*, 21, 1227, 1951.

ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПРОТОНОВ С H^3 И ВОЗБУЖДЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ α -ЧАСТИЦЫ

А. И. Базь и Я. А. Смородинский

1. Вопрос о существовании возбужденных уровней у α -частицы давно обсуждался в литературе. Однако до сих пор не было ни убедительного доказательства существования таких уровней, ни убедительного доказательства их отсутствия. Естественно, что в связи с этим очень интересно провести анализ различных реакций, в которых может участвовать возбужденное состояние α -частицы.

В настоящее время наиболее полно изучена реакция $\text{H}^3(p, n)\text{He}^3$. В начале 1953 г. Н. А. Власовым и Л. Н. Самойловым было впервые показано, что сечение этой реакции имеет в районе $E_p \sim 3 \text{ MeV}$ широкий максимум, который было естественно анализировать, исходя из возможных уровней α -частицы. Позднее появилась работа Вилларда и др. [1], в которой было проведено измерение сечения этой реакции. В частности, величина сечения в максимуме была определена в $0,5 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$. Фазовый анализ экспериментальных кривых не может быть произведен из-за возникающей неоднозначности, а потому для анализа приходится использовать качественные особенности угловых распределений в сочетании с результатами исследований других реакций.

Как оказывается, такой анализ позволяет построить хорошо согласующуюся картину, основанную на предположении о существовании возбужденного уровня α -частицы с $J=2^-$ и $T=0$, примерно при $22,0 \text{ MeV}$ и лежащего несколько выше уровня с $J=1^-$ и $T=0$.

Эта схема находится в согласии с представлениями теории оболочек.

2. Реакция $\text{H}^3(p, n)\text{He}^3$ имеет следующие характерные особенности:

1) сечение имеет максимум $0,5 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$, при $E_p = 3 \text{ MeV}$; ширина этого максимума велика, что не исключает возможности существования двух уровней с расстоянием $1-2 \text{ MeV}$;

2) угловое распределение в интервале $2-5 \text{ MeV}$ резко асимметрично. В системе центра инерции сечение $\sigma(0)$ в $3-4$ раза меньше $\sigma(\pi)$; это отношение слабо меняется с энергией. Отношение сечений $\sigma(0)/\sigma(\pi/2)$, напротив, резко растет с энергией.

Если предположить, что в реакции не участвуют большие моменты налетающих частиц, и ограничиться значениями $l=0, 1, 2$, то перечисленные особенности позволяют указать квантовые числа состояний, являющихся в реакции основными.

Прежде всего заметим, что асимметрия относительно плоскости $90-270^\circ$ связана с интерференцией волн разной четности, так как квадраты четной и нечетной амплитуд в отдельности, очевидно, не меняются при замене $\theta \rightarrow \pi - \theta$.

Чтобы исключить такие интерференционные члены, составим усредненное сечение $\sigma'(\theta) = \frac{1}{2} [\sigma(\theta) + \sigma(\pi - \theta)]$.

Значение этой величины приведено в табл. 1.

Вычисляя угловые распределения для всех состояний системы $\text{He}^3 + n$, возможных при $l=0, 1, 2$, легко убедиться, что большое отношение $\sigma(0)/\sigma(\pi/2)$ может быть объяснено только присутствием большой доли состояния 1^- .

Такое заключение находит свое подтверждение и в том, что в разложении сечения по степеням $\cos \theta$ в исследованной области только коэффициент при $\cos^2 \theta$ сильно меняется с энергией; это означает, что в этой области сильно меняются фазы, отвечающие $l=1$.

Обратимся теперь к величине сечения.

Как известно из теории рассеяния, максимально возможное значение сечения реакции в резонансе определяется формулой:

$$\sigma_{\text{макс}} = \pi \lambda^2 \frac{2J+1}{4}.$$

Таблица 1

$\sigma(0)10^{-27} \text{ см}^2 / \text{стерад}$							
0	(E, MeV)	1,69	2,06	2,85	3,70	4,61	5,09
0°		0,037	0,050	0,077	0,080	0,069	0,064
30°		0,032	0,043	0,064	0,060	0,051	0,047
60°		0,022	0,031	0,035	0,031	0,025	0,023
90°		0,020	0,023	0,019	0,016	0,013	0,011
$\sigma(0)/\sigma(\pi/2)$		1,8	2,2	4,1	5,0	5,3	5,8

При энергии $E_p = 3 \text{ MeV}$ (в лабораторной системе координат) это дает

$$\sigma_{\text{макс}}(3 \text{ MeV}) = 0,36 \frac{2J+1}{4} 10^{-24} \text{ см}^2.$$

Сравнивая с экспериментальной величиной $0,5 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$, мы видим, что только наличие состояния с $J=2$, приводящего к $\sigma_{\text{макс}} = 0,45 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$, может дать такую величину сечения. Естественно, что наличие примеси состояния 1^- должно несколько увеличить эту величину и привести ее в согласие с опытом¹.

Таким образом мы видим, что наблюдаемая картина требует участия двух состояний, а именно состояний 2^- и 1^- .

Ввиду того, что отношение $\sigma(0)/\sigma(\pi/2)$ продолжает расти и при энергиях $E_p > 3 \text{ MeV}$, можно утверждать, что состояние 1^- лежит выше состояния 2^- , а это последнее лежит примерно при 22 MeV .

Последнее значение складывается из разности масс $\text{H}^3 + p$ и α -частицы, равной $19,8$ и переведенной в систему центра инерции энергии максимума $3 \cdot 3/4 = 2,2 \text{ MeV}$ ².

Заметим в заключение, что асимметрия $\sigma(0)/\sigma(\pi)$ обязана интерференции рассмотренных состояний с волнами положительной четности (например, 0^+), не проявляющимися резонансного характера.

3. Идентификация состояний, к которой мы пришли выше, хорошо согласуется со схемой уровней, определяемой моделью оболочек.

Действительно, рассеяние нейтронов и протонов на гелии указывает, что следующими состояниями за оболочкой $s_{1/2}$, заполненной в α -частице, идут состояния $p_{1/2}$ и $p_{3/2}$ (первое раньше). Поэтому в системе $\text{H}^3 + p$ следует ожидать, что первое возбуждаемое состояние окажется также состоянием $p_{1/2}$. При этом из-за спина трития это состояние протона приводит к двум возможным состояниям системы, именно к состояниям 2^- и 1^- , которые и были обнаружены выше³. Поэтому наш результат позволяет сделать некоторые заключения о схеме сложения спинов, а именно, оказывается, что состояние с максимальным спином лежит ниже.

Остается еще открытым вопрос об изотопическом спине рассмотренных состояний. Для ответа на него надо обратиться к другим реакциям (см. п. 6).

4. Реакции $\text{D} + \text{D}$. Прежде всего бросается в глаза отсутствие реакции радиационного захвата с образованием α -частицы. Это можно объяснить, если считать, что все уровни α -частицы, лежащие ниже $23,8 \text{ MeV}$ (см. схему), имеют изотопический спин $T=0$. Тогда, так как изотопический спин дейтрона также равен нулю, эти дипольные переходы ($T=0 \rightarrow T=0$) запрещены, поскольку $T_z=0$.

5. Реакция $\text{H}^3(p\gamma)\text{He}^4$. Исходя из предложенной схемы, следует ожидать, что радиационный захват протона тритием не будет носить резонансного характера, так как с уровней с изотопическим спином, равным нулю, не может происходить дипольных переходов на основное состояние. Опыты подтверждают этот вывод.

6. Реакции $\text{H}^3(nn)\text{H}^3$ и $\text{He}^3(pp)\text{He}^3$. К сожалению, эти реакции не обследовались. Их исследование позволило бы проверить изотопический спин рассмотренных выше уровней. Действительно, соответствующие уровни должны быть обнаружены

¹ Заметим, что реализация максимальной величины сечения свидетельствует о примерном равенстве вероятностей вылета нейтрона и протона, что также представляется естественным.

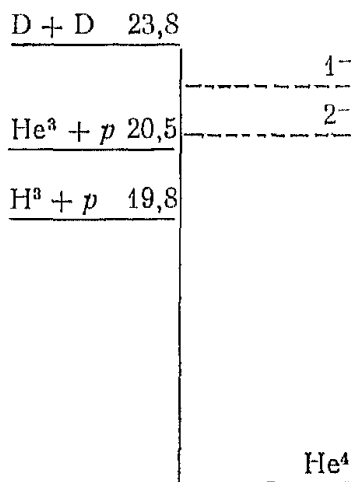
² Так как максимум обусловлен по меньшей мере двумя состояниями, то величина 22 MeV определена с ошибкой, не меньшей 1 MeV .

³ То, что у α -частицы нет никаких других возбужденных состояний при меньших энергиях, подтверждается результатами исследования реакций $\text{He}^4(pp')\text{He}^4$, $\text{D} + \text{D}$, $\text{He}^3(np)\text{H}^3$.

у систем $\text{H}^3 + n$ и $\text{He}^3 + p$ только в том случае, если их изотопический спин равен единице, если же он равен нулю, то такие уровни будут только у α -частицы.

7. Таким образом вся совокупность рассмотренных данных хорошо укладывается в схему, в которой предположено существование у системы $\text{H}^3 + p$ двух широких уровней: один (2^-) при энергии примерно 22,0 MeV, а другой (1^-) на 1—2 MeV выше.

Ниже мы приводим энергетическую схему рассмотренных состояний.



В заключение заметим, что приведенная схема дает отрицательный ответ на вопрос о существовании стабильного H^4 . Действительно, его состояние должно иметь аналогом одно из возбужденных состояний α -частицы, имеющих изотопический спин $T=1$. Предыдущий анализ показывает, что таких состояний, стабильных относительно распада на $\text{H}^3 + p$, у α -частицы нет.

Поступило в редакцию
27 апреля 1954 г.

Литература

- [1] H. B. Willard, J. K. Bair a, J. D. Kingston. Phys. Rev., 90, 865, 1953.

РАСЧЕТ ПОЛЯРИЗУЕМОСТИ НЕКОТОРЫХ АТОМОВ И ИОНОВ

А. В. Бравин

В работе [1] нами были выведены общие формулы (без учета обмена) для поляризуемости α атомов и ионов с замкнутыми оболочками, и было высказано предположение, что они должны давать значения α , более близкие к экспериментальным, по сравнению со значениями, рассчитанными по формулам работ [2] и [3]. Это заключение было подтверждено вычислением поляризуемости положительного иона натрия.

В настоящей работе производятся аналогичные расчеты α отрицательных ионов фтора и хлора, положительных — натрия и калия и благородных газов неона и аргона (табл. 1).

При определении α по формулам работы [1] необходимо найти интегралы $R_{q_1 q_2}^h(nl, n'l')$. Расчет этих интегралов с использованием табулированных функций Хартри или Фока требует затраты значительного труда. Однако, в силу того, что $R_{q_1 q_2}^h$, а следовательно, и α , как это было указано ранее в [1], являются мало чувствительными к виду одноэлектронных волновых функций, такие расчеты могут быть произведены с использованием аналитических волновых функций, найденных при помощи вариационного принципа. Как показали Гомбаш и Гаспар [4], параметры,

входящие в функции Слейтера $\psi = r^{n^*} \exp \left\{ \frac{z - \sigma}{n^*} r \right\}$, вычисленные по способу Слейтера и

из вариационного принципа, близко совпадают друг с другом. Это обстоятельство позволяет пользоваться функциями Слейтера при расчете вышеуказанных интегралов. Вычисление α по формуле (26) [1] при $q=1$ и $\phi_1 = z$ для Na^+ с использованием табулированных функций Фока [5] для коэффициентов b_i , аналитических функций Фока [6] и

функций Слейтера для интегралов R_{11}^h , с точностью до 3-го знака, дали одно и то же значение поляризуемости. Такие же расчеты α для Ne с использованием функций Хартри [6] для коэффициентов b_i , а для R_{11}^h функций Слейтера и функций типа Слейтера, но с параметром $(z - \sigma) / n^*$, выбранным так, чтобы матричные элементы $(r^2)_{2s}^{2s} = (r^2)_{2p}^{2p}$ изменились на 100%, приводят к изменению α всего на 12%; α для первых функций равно $0,496 \text{ \AA}^3$, а для вторых — $0,435 \text{ \AA}^3$. Так как изменение суммы $\sum_{nl} (2l+1) (r^2)_{nl}^{nl}$ при переходе от функций Слейтера к функциям Хартри составляет 30—80%, а к функциям Фока 8—25%, то ошибки для α будут составлять приблизительно 4—10% в первом и 1—3% во втором случаях. Таким образом, действительно, поляризуемость оказывается мало чувствительной к виду функций, при помощи которых вычисляются интегралы R_{11}^h . Везде поэтому последние рассчитываются с использованием функций Слейтера.

Необходимо отметить, что члены, которыми нужно пренебречь, чтобы из формулы (26) [1] получить формулу (20) работы [2], оказываются не только не малыми, но по порядку величины такими же, как и «основные». Так, например, для Cl^- «основной» член равен 9,000, а пренебрегаемый — 9,143. Сравнение данных табл. 1 работы [1] с табл. 1 (столбец а) настоящей работы показывает сильное уменьшение поляризуемости и значительное улучшение соответствия с экспериментом в нашем случае. Однако, как видно из этой же таблицы (столбец б), увеличение числа параметров указанным способом (переход от формулы (26) [1] к формуле (37) [1]) не улучшает, а, наоборот, ухудшает результаты, приводя к значениям α снова на много выше экспериментальных. Это связано, как будет показано в дальнейшем, с пренебрежением обменом, т. е. с представлением общей волновой функции Ψ в виде простого произведения одноэлектронных волновых функций.

Таблица 1

Поляризуемость* α в $\text{ \AA}^3$

Атом	а		б		Опыт [7]
	1	2	1	2	
F ⁻	1,308	—	2,105	—	1,049
Ne	0,496	—	0,736	—	0,394
Na ⁺	—	0,171	—	0,244	0,181
Cl ⁻	4,954	2,687	—	6,755	3,517
A	1,862	1,298	—	2,909	1,650
K ⁺	0,976	0,756	—	1,643	0,888

* а — формула (26), б — формула (37) работы [1] при $q = 1$ и $\varphi_1 = z$; 1 — функции Хартри [8,6], 2 — функции Фока [8,5].

Укажем, что коэффициенты a_{ij} и a_{ij}^{hl} [1], необходимые для нахождения α , мало меняются при переходе от одного иона к другому внутри данной конфигурации. Это обстоятельство позволяет вычислять последние для любых ионов при помощи экстраполирования или интерполирования по уже известным значениям. Заметим, что применение вариационного принципа для вычисления поляризуемости ни в коем случае не приводит к соотношению $\alpha_{\text{теор}} \leq \alpha_{\text{ист}}$, которое, как известно, имеет место для абсолютных значений полных энергий. Таким образом вычисленные значения поляризуемости $\alpha_{\text{теор}}$ могут быть, вообще говоря, как меньше, так и больше истинных $\alpha_{\text{ист}}$.

Саратовский государственный
университет

Поступило в редакцию
21 декабря 1953 г.

Литература

- [1] А. В. Бравин. ЖЭТФ, 25, 147, 1953. — [2] J. C. Kirkwood. Phys. ZS., 33, 57, 1932. — [3] Г. Гельман. Acta phys.-chim. URSS, 2, 273, 1935. — [4] P. Gombas и R. Gaspar. Acta Phys. Hung., 1, 318, 1952. — [5] В. А. Фока и М. И. Петрашень. ЖЭТФ, 4, 295, 1934. — [6] F. W. Brown. Phys. Rev., 44, 214, 1933. — [7] L. Pauling. Proc. Roy. Soc., A, 114, 181, 1927. — [8] D. R. Hartree и W. Hartree. Proc. Roy. Soc., A, 156, 45, 1936; 166, 450, 1938.

О МАГНИТНЫХ МОМЕНТАХ ДВАЖДЫ-НЕЧЕТНЫХ ЯДЕР

И. А. Вайсман

Моменты дважды-нечетных ядер представляют большой интерес для теории формирования ядерного спина и магнитного момента и, в частности, для освещения вопроса о том, принимают ли непосредственное участие в формировании спина и магнитного момента ядер с нечетным A только одноименные нуклоны (содержащиеся в ядре в нечетном числе).

Имеется значительное число экспериментальных данных, подтверждающих, что такое допущение соответствует действительности¹. Например, в первой половине периодической системы, где признаки заполнения оболочек вообще проявляются гораздо более отчетливо, чем во второй, полужеркальные ядра (т. е. пары ядер, из которых в одном содержится такое же нечетное число протонов, как в другом — нейтронов) обладают обычно одинаковыми спинами, и значения их магнитных моментов в приблизительно равной мере отклоняются от граничных значений [3]. Это означает, что у таких ядер на отклонения оказывают непосредственное влияние только нуклоны, содержащиеся в ядре в нечетном числе.

Однако известны и попытки построения теории магнитного момента ядра, базирующиеся на предположении, что в его формировании непосредственно участвуют и протоны, и нейтроны. Так, в [4] был произведен расчет величины магнитных моментов на основе допущения, что орбитальный момент присущ всему ядерному веществу как целому. Как известно, результаты этого расчета не соответствуют современным экспериментальным данным о магнитных моментах ядер. Другая попытка сделана недавно на основе допущения связи $j-j$ между протонами и нейтронами [5, 6]. Мы показали [7], что в отношении ядер с нечетным A правильность допущения о связи $j-j$ между моментами протонов и нейтронов нельзя считать доказанной. Рассмотрим теперь этот вопрос в отношении дважды-нечетных ядер.

Есть основание думать, что в дважды-нечетных ядрах между моментами протонов и нейтронов действительно устанавливается связь, но не между моментами отдельных протонов и нейтронов, «избыточных» по сравнению с замкнутыми оболочками, как полагают авторы работ [5, 6], а между моментами протонной системы как целого, с одной стороны, и нейтронной системы — с другой. Принято считать, что магнитные моменты не являются аддитивными, однако, в действительности они обладают по крайней мере приблизительно аддитивностью. Исходя из представления о приблизительном сумми-

Таблица 1

Символ	Спин ядра	Предполагаемые значения «групповых» спинов		Магнитные моменты дважды-нечетных ядер по теоретич. расчету в работе [4]	Фактические значения			Фактические магнитные моменты дважды-нечетных ядер
		Z	N		магнитн. моментов ядер с соответствующим Z	магнитн. моментов ядер с соответствующим N	суммы «групповых» моментов	
H^2 . .	1	$1/2$	$1/2$	0,88	2,79	-1,91	0,88	0,86
Li^6 . .	1	$1/2$	$1/2$	0,63	2,79	-1,91	0,88	0,82
B^{10} . .	3	$3/2$	$3/2$	1,88	2,69	-1,18	1,51	1,80
N^{14} . .	1	$1/2$	$1/2$	0,37	-0,28	0,70	0,42	0,40
Na^{22} . .	3	$3/2$	$3/2$	1,73	2,22	(-0,6)*	(1,62)	1,74
K^{40} . .	4	$3/2$	$5/2$	-1,70	—	—	—	-1,29

* Так как, согласно указанному выше эмпирическому правилу, магнитные моменты полужеркальных ядер приблизительно одинаково отклоняются от граничных значений, то для системы из 11 нейтронов величина магнитного момента принята нами на основании той степени отклонения от граничного значения, какая наблюдается у ядра Na^{23} .

¹ Нужно подчеркнуть, что это допущение не означает признания «теории одиночного (непарного) нуклона» (в применении к орбитальной составляющей ядерного спина и магнитного момента). В то же время такое допущение полностью согласуется с признанием границ Шмидта [1], так как для их признания необходимо лишь принять, что в образовании орбитального момента ядер с нечетным A непосредственно участвуют только либо протоны, либо нейтроны [2].

ровании результирующих магнитных моментов протонной и нейтронной систем, примем в качестве этих результирующих моментов моменты ядер с таким нечетным Z или N и с такими спинами, какие имеются у протонной и нейтронной систем тех дважды-нечетных ядер, для которых сделаны расчеты в работе [6]. Тогда получим значения, приведенные в табл. 1 (в ядерных магнетонах).

Как ни просты наши расчеты, их результаты в общем все же, как видим, не хуже и не лучше, чем результаты расчетов, произведенных в работе [6], со всей их остроумной и сложной методикой. Поэтому и в данном случае нельзя считать результаты рассматриваемых работ [5, 6] доказательными в смысле правильности применяемого в них метода.

Наряду с этим то обстоятельство, что в ряде случаев оказывается возможным рассматривать фактические магнитные моменты дважды-нечетных ядер как близкие к сумме моментов протонной и нейтронной систем, может служить одним из существенных доводов в пользу того, 1) что ядерным магнитным моментам свойственна по крайней мере приближительная аддитивность, 2) что «групповой» результирующий магнитный момент, как и «групповой» спин, формируется отдельно в протонной и нейтронной системах, а момент ядра в целом образуется путем связи результирующих моментов протонной и нейтронной систем.

Поступило в редакцию
4 ноября 1953 г.

Литература

- [1] Th. Schmidt. ZS. f. Phys., 106, 358, 1937. — [2] A. Bohra. V. Weisskopf. Phys. Rev., 77, 94, 1950. — [3] A. Schawlow a. C. Townes. Phys. Rev., 82, 268, 1951. — [4] H. Margenau a. E. Wigner. Phys. Rev., 58, 103, 1940. — [5] M. Mizushima a. M. Umezawa. Phys. Rev., 83, 463, 1951; 85, 37, 1952; 86, 1055, 1952. — [6] M. Umezawa. Progr. Theor. Phys., 8, 509, 1952. — [7] И. А. Вайсман. ЖЭТФ, 26, 754, 1954.

γ-ЛУЧИ Tc^{95}

В. С. Шпинель

Осуществляя нашу программу исследований, относящихся к возбужденным состояниям изобарных ядер, мы считали важным проверить литературные данные [1] о γ-излучении, возбуждаемом при K -захвате $Tc^{95,m}$ и Tc^{95} . Согласно этим данным с 20-часовым периодом Tc^{95} связано γ-излучение с энергией 762, 932 и 1071 keV, а к 60-дневному периоду $Tc^{95,m}$ относятся γ-лучи с энергией 201, 570, 810 и 1017 keV.

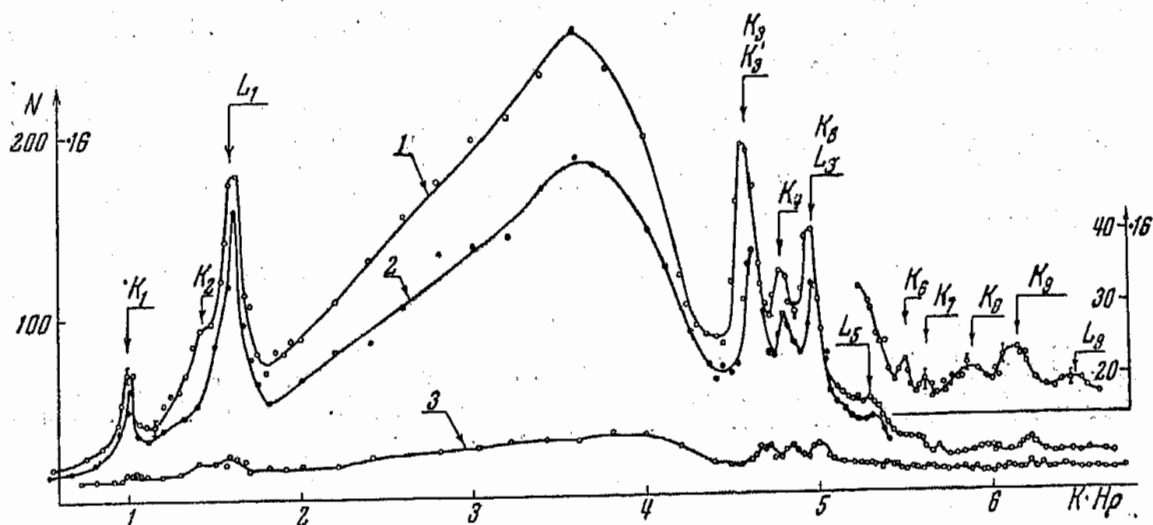


Рис. 1. Фотоэлектронные спектры: 1 — 42 часа после облучения, 2 — 64 часа после облучения, 3 — 330 час. после облучения

Технеций был получен нами при облучении металлической пластинки из молибдена дейтронами. Фотоэлектронный спектр, снятый на нашем линзовом спектрометре [2], приведен на рисунке. В этих измерениях активированная пластинка из молибдена была

зажата между двумя латунными дисками толщиной 0,5 мм. К переднему диску была приклеена мишень из свинцовой фольги толщиной 10 мг/см² с диаметром 10 мм. На спектре проявилось 12 фотоэлектронных линий. Весь спектр снимался несколько раз, через разные промежутки времени, в течение двух недель, что позволило установить периоды распада, с которыми связаны отдельные линии. Приведенные на рисунке спектры 1, 2, 3 сняты через 42, 64 и 330 час. после облучения, соответственно. Изменение интенсивности фотоэлектронной линии $K_3 + K_3'$ характеризуется двумя периодами: 20 и 107 час. На спектре, снятом после того, как излучение с 20-часовым периодом почти полностью исчезло, видно также, что положение максимума этой линии сдвинуто немного в сторону бо́льших энергий по отношению к первоначальному положению. Эти данные позволяют заключить, что здесь мы имеем наложение γ -лучей с энергией 762 и 771 keV.

Наши значения энергий γ -лучей и соответствующие периоды даны в табл. 1, где для сравнения приведены данные, взятые из работ других авторов. Весь спектр градуировался по линии K_3 , обусловленной γ -лучами с энергией 762 keV. Это значение энергии, для удобства сравнения, взято из работы [1]; оно мало отличается от нашего значения 767 ± 4 keV, полученного из спектра Nb⁹⁵, отделенного от Zr⁹⁵ химическим путем.

Таблица 1

Линия	Энергия E_e , keV	Энергия E_γ , keV	Периоды T , часы	По данным других авторов			
				E_γ , keV	T , часы	Изотоп	Литература
$\{ K_1 \dots$	52,7	140,7	70	141	67	Mo ⁹⁹	[3]
$L_1 \dots$	126	140	70	—	—	—	—
$K_2 \dots$	94	182	—	182	67	Mo ⁹⁹	[3]
$K_3 \dots$	674	762	20	762	20	Tc ⁹⁵	[1]
$K_3' \dots$	682	770	107	771	104	Tc ⁹⁶	[1]
$K_4 \dots$	720	808	107	806	104	Tc ⁹⁶	[1]
$\{ K_5 \dots$	752	840	107	842	104	Tc ⁹⁶	[1]
$L_5 \dots$	826	842	107	—	—	—	—
$K_6 \dots$	870	958	20	932	20	Tc ⁹⁵	[1]
$K_7 \dots$	912	1000	70	—	—	—	—
$K_8 \dots$	978	1066	20	1071	20	Tc ⁹⁵	[1]
$\{ K_9 \dots$	1028	1116	—	1119	104	Tc ⁹⁶	[1]
$L_9 \dots$	1088	1104	—	—	—	—	—

Как видно из приведенной таблицы, наши данные в основном хорошо согласуются с данными других авторов, за исключением следующих: для линии K_6 —958 keV мы получили заметно большее значение энергии. Возможно, эта линия соответствует предполагаемой в работе [1] линии 948 keV. Линия K_7 —1000 keV с периодом 70 час. в работе [1] не была обнаружена.

Через 60 дней после облучения снова был снят фотоэлектронный спектр. На этом спектре проявились три фотоэлектронные линии, обусловленные γ -лучами с энергией 213, 575 и 802 keV. Соответствующие γ -лучи с энергией 201, 570 и 810 keV наблюдались в работе [1] для 60-дневного Tc⁹⁵, распадающегося путем K -захвата.

В заключение выражаю благодарность Г. А. Кузнецовой за помощь в работе.

Московский государственный университет

Поступило в редакцию
22 мая 1954 г.

Литература

[1] H. Medicus, P. Preiswerk u. P. Scherrer. *Helv. Phys. Acta*, 23, 299, 1950. — [2] В. С. Шпинель. *ЖЭТФ*, 22, 255, 1952. — [3] H. Medicus, D. Maeder u. H. Schneider. *Helv. Phys. Acta*, 24, 72, 1951.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ВРЕМЕНИ РЕГРЕССИИ И КОЭФФИЦИЕНТА УСАДКИ ТОЛСТОСЛОЙНЫХ ФОТОЭМУЛЬСИЙ

И. М. Граменицкий и М. И. Подгорецкий

1. При обработке толстослойных фотоэмульсий их толщина сильно изменяется, что искажает длину и пространственное расположение следов заряженных частиц. Если проекция следа на плоскость эмульсии равна u , а наблюдаемая вертикальная проекция следа v , то истинная длина следа (до усадки) l выражается, как

$$l^2 = u^2 + k^2 v^2 \neq u^2 + v^2 \quad (1)$$

(k — коэффициент усадки).

Пусть в эмульсии имеются следы, обладающие до усадки изотропным угловым распределением. Тогда легко показать, что после усадки удовлетворяются соотношения:

$$\bar{u}^2 / \bar{v}^2 = 2k^2 \text{ и } \bar{u} / \bar{v} = \pi k / 2, \quad (2)$$

из которых можно определить k .

Мы измерили указанным способом коэффициент усадки для 30 следов α -частиц из радиоактивных звезд и получили $k = 2,7 \pm 0,3$. Если после этого определить истинную длину следа каждой α -частицы, то оказывается, что почти все длины распределяются между несколькими (двумя-тремя) довольно четко разделенными группами. В пределах каждой из этих групп можно затем найти более точное значение величины k методом, изложенным в [1] и [2]. Заметим, что в [1] и [2] для получения следов определенной длины предлагается пропитывать эмульсию каким-либо α -радиоактивным веществом. Это операция — не очень простая и не всегда выполнимая без ущерба для целей основной работы. Из изложенного видно, что по существу она и не является необходимой.

Исходя из тех же 30 следов, мы получили $k = 2,55 \pm 0,10$, что соответствует точности 4%.

2. Радиоактивные звезды в фотопластинках образуются ядрами уранового и ториевого семейств. Из рассмотрения соответствующих периодов полураспада следует, что в фотоэмульсии могут образоваться звезды с числом лучей не более четырех от уранового и не более пяти от ториевого ряда.

Рассмотрим для определенности ториевый ряд. Пятилучевые звезды могут образоваться при распаде ядра RaTh с последующим распадом ThX до момента проявления, так как дальнейшие распады происходят очень быстро. Тогда число пятилучевых звезд будет равно

$$n_5 = \int_0^{T'} n \{1 - e^{-\lambda(T'-t)}\} dt = nT' - \frac{n}{\lambda} (1 - e^{-\lambda T'}),$$

где n — число распадов в единицу времени ядер RaTh в эмульсии, T' — время, прошедшее с момента полива эмульсии а $\lambda = 1/5,28$ (суток)⁻¹. Число четырехлучевых звезд равно числу распадов ядер ThX, находившихся в эмульсии к моменту полива. В случае радиоактивного равновесия концентрация ядер ThX будет равна n/λ , а число четырехлучевых звезд

$$n_4 = \frac{n}{\lambda} (1 - e^{-\lambda T'}),$$

откуда

$$n_5 / n_4 = [\lambda T' / (1 - e^{-\lambda T'})] - 1, \quad (3)$$

что позволяет определить T' . Если время регрессии $T \ll T'$, то соотношение (3) относится, очевидно, не к T' , а к T .

Будем различать два времени регрессии α -частиц: а) время начала регрессии T_n , т. е. момент, начиная с которого появляется заметный разрыв между центром звезды и одним из следов (этот случай надо отличать от диффузии, что не представляет труда); б) время полного исчезновения следа α -частицы T_n .

Для определения T_n нужно отобрать четырех- и пятилучевые звезды, принадлежащие ториевому семейству. Для этого можно воспользоваться тем, что ThC' распадается в 65% случаев с вылетом самой энергичной α -частицы (пробег в эмульсии $l = 48 \mu$ [3]), и брать четырех- и пятилучевые звезды, содержащие один длинный след с $l \gg 43 \mu$, считая, что существует 10%-ный разброс пробегов α -частиц. В этом случае пятилучевые звезды, имеющие разрыв из-за регрессии, считаются четырехлучевыми, а последние с таким разрывом — трехлучевыми, т. е. выпадают из рассмотрения. Звезды с диффузией ядра ThX, т. е. с отходом одного луча, не учиты-

ваются, так как ничего нельзя сказать о начале регрессии отошедшего следа. Звезды с диффузией ядра T_n , т. е. близко расположенные трех- и двухлучевые звезды, могут быть рассмотрены, так как начало регрессии любого из следов в этом случае хорошо заметно. Подставляя в (3) полученные таким образом числа n_4 и n_5 , можно определить время T_n .

Чтобы получить T_n , нужно взять число пяти- и четырехлучевых звезд, содержащих один след с $l \geq 43 \mu$, независимо от наличия или отсутствия разрывов из-за регрессии или диффузии, и подставить полученные значения в (3). В этом случае T_n представляет время исчезновения следа первой появившейся α -частицы (распад $RaTh$).

Так как по условиям идентификации радиоактивных звезд все лучи должны оканчиваться в эмульсии, необходимо ввести геометрические поправки на выход α -частиц из эмульсии.

Таким образом было получено $T_n = 16 \pm 8$ дней и $T_n = 37 \pm 15$ дней.

В случаях, когда заведомо известно, что $T' < T_n$, можно предложить еще один способ определения времени начала регрессии T_n , основанный на том, что звезды с числом лучей три и более возникают в эмульсии равномерно по времени (это относится к обоим семействам). Поэтому, если из полного числа N таких звезд n не имеют разрывов из-за регрессии, то

$$T_n = (n / N) T'. \quad (4)$$

Заметим, что аналогичным образом можно было бы определить и время регрессии β -электронов, так как из схем распада видно, что все звезды, содержащие три и более лучей, содержат и следы β -электронов. При этом необходимо учесть, что β -электроны, выходящие под большим углом к плоскости эмульсии, могут быть пропущены, так как следы их значительно реже следов α -частиц.

Точность описанных методов очень мала при большой трудоемкости, но в отличие от других методов, они применимы для данной конкретной уже экспонированной и обработанной пластинки без какого-либо предварительного облучения.

В заключение авторы выражают благодарность М. Ф. Соловьевой и Р. М. Грызуновой, проводившим измерения.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
18 февраля 1954 г.

Литература

[1] L. Vigneron, Journ. de phys. et le rad., 10, 305, 1949; также сб. «Фотографический метод в ядерной физике», ИИЛ, 1952, статья 31.— [2] J. Rotblat, C. Tai. Photogr. sensitive, Lond., 1951; также сб. «Фотографическая регистрация ионизирующих излучений», ИИЛ, 1953, статья 20.— [3] G. Mignone. Nuovo Cimento, 8, 896, 1951; также сб. «Фотографическая регистрация ионизирующих излучений», ИИЛ, 1953, статья 22.

НОВЫЙ МЕТОД ФОТОМЕТРИРОВАНИЯ СЛЕДА ЧАСТИЦ В ФОТОЭМУЛЬСИИ

Ю. П. Мироненко и Ж. С. Такибаев

Как известно, в большинстве методов определения масс частиц, регистрируемых в специальных ядерных фотопластинках, необходимо производить измерения плотности зерен, т. е. числа зерен на единицу пути. Плотность зерен (и ее изменения вдоль следа частиц), таким образом, является одной из основных характеристик, позволяющих оценить массу неизвестных частиц. Обычно подсчет зерен на следе производится визуально, что является чрезвычайно трудоемкой работой. В связи с этим в последние годы был сделан ряд попыток [1] применения фотоэлектронных умножителей для фотометрирования всего следа частицы с целью быстрой оценки плотности зерен.

Опыт нашей работы показал, что непосредственный подсчет числа зерен при помощи высокочувствительных фотоумножителей в принципе возможен: полученные данные в общем подтверждают возможность фотометрирования следов различных частиц. Однако при этом не всегда и не все частицы хорошо разделяются по массам, что является следствием трубности и неудобства самой методики. Кроме того, как при непосредственном подсчете зерен, так и при фотометрировании следует учитывать флуктуации фототока, в особенности теплового, и зависимость его от внешних условий.

Перечисленные недостатки, а также ряд других, здесь не указанных, привели нас к выводу, что от фотометрирования при помощи одного фотоумножителя и непосредствен-

ного подсчета зерен следует отказаться. Поэтому было решено искать другие возможности, имеющие существенные преимущества перед упомянутыми способами. Ниже мы опишем сущность метода, предложенного одним из нас [2], и приведем результаты применения этой новой методики для определения природы частиц, регистрируемых в толстослойных эмульсиях.

Предположим, что в поле зрения микроскопа имеется почти прямолинейный след частицы. При просмотре через бинокулярную насадку мы имеем два изображения одного и того же объекта, т. е. некоторого участка фотоэмульсии с упомянутым следом какой-то частицы. В качестве окуляров использовались окуляр-микрометры АМ-9, причем в одном из них помещались узкая неподвижная щель шириною в 1 мм и натянутая на подвижную рамочку тонкая нить диаметром в 20–50 μ . В другом окуляр-микрометре на подвижную рамочку помещалась щель, тождественная с первой, таким образом, чтобы по усмотрению наблюдателя можно было иметь поле зрения или открытое на $3/4$, или же закрытое щелью. Такое приспособление удобно для просмотра объекта до ввода щели в поле зрения при помощи микровинта. Световые лучи из бинокулярной насадки попадают на стеклянные пластинки, покрытые тонким слоем серебра, и разделяются на два луча, один из которых направляется на фотокатод умножителя, а другой (отраженный) через дополнительный окуляр — непосредственно в глаз наблюдателя. Для того чтобы осуществить это, на каждом окуляре бинокулярной насадки укреплялись при помощи переходной втулки фотонасадки КФ-1, в которых вместо отражающей призмы помещалась упомянутая выше стеклянная пластинка. Фотокатоды умножителей располагались в той плоскости, в которой находились кассеты фотонасадок. Такое размещение удобно тем, что относительное расположение фотокатода и проектирующегося на него изображения объекта контролируется последовательным фотографированием при помощи этих же фотонасадок, причем отдельные изображения объекта наблюдаются через их окуляры.

Описанная схема установки изображена на рис. 1. Для работы из партии фотоумножителей подбирались два фотоумножителя с одинаковыми световыми характеристиками. Суть нового метода фотометрирования следов частиц в фотоэмульсии сводится к следующему. Предположим, что в поле зрения микроскопа, как уже говорилось выше, имеется прямолинейный след какой-то частицы; ставится задача об измерении плотности зерен или просветов между зернами вдоль этого следа. Для этой цели вышеупомянутые щели в окулярах бинокулярной насадки располагаем параллельно следу частицы и при помощи координатного столика вводим след в щель. Тогда через окуляры бинокулярной насадки при помощи щелей пропускается лишь очень узкая часть изображения просматриваемой области фотоэмульсии, содержащей след частицы. Далее, при наличии щелей в обоих окулярах бинокулярной насадки и четком изображении в них следа частицы (увеличение 1500–2000) производится компенсация фототоков от обоих умножителей.

После того как фототоки скомпенсированы, след частицы в одном из окуляров накрывается нитью, в результате чего компенсация нарушается. На рис. 2 приведена схема, посредством которой производились компенсация фототоков, их последующее усиление и регистрация тока при нарушении компенсации, являющегося характери-

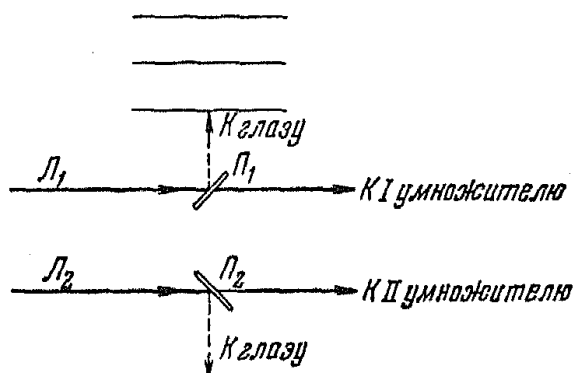


Рис. 1. L_1 , L_2 — лучи от окуляров бинокулярной насадки, P_1 , P_2 — слегка посеребренные пластинки

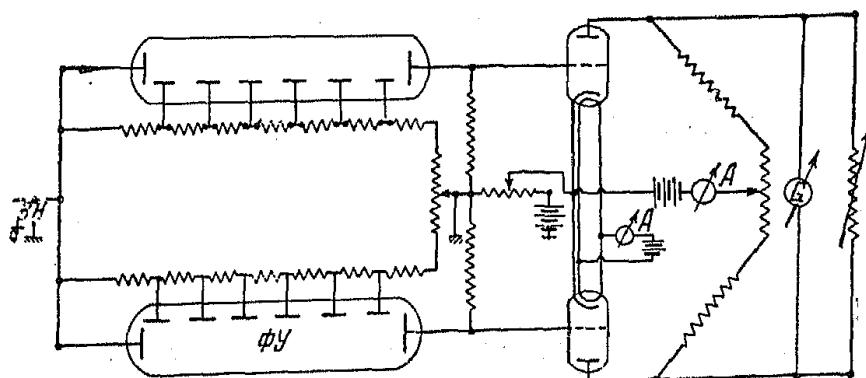


Рис. 2

стистики. После того как фототоки скомпенсированы, след частицы в одном из окуляров накрывается нитью, в результате чего компенсация нарушается. На рис. 2 приведена схема, посредством которой производились компенсация фототоков, их последующее усиление и регистрация тока при нарушении компенсации, являющегося характери-

кой числа просветов или зерен на определенном участке следа частицы. Далее, при помощи микровинта нить возвращается в первоначальное положение, след частицы передвигается на определенный отрезок, и все операции повторяются в прежнем порядке для последующих отрезков следа.

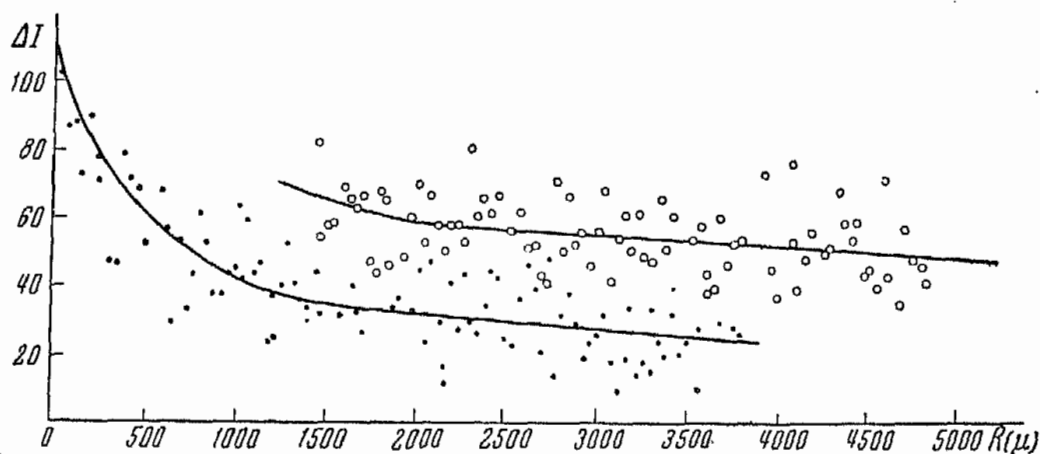


Рис. 3. ● — мезон, ○ — протон

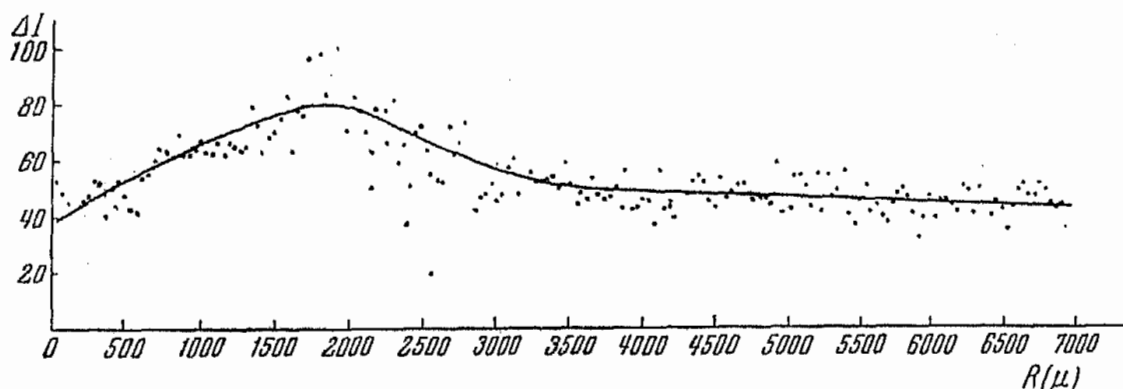


Рис. 4

На рис. 3 приведены результаты применения описанного метода для следов двух частиц: протона и мезона. Из рисунка видно, что кривые изменения тока нарушения компенсации в зависимости от пробега $\Delta I(R)$ для указанных частиц хорошо разделяются. При этом следует отметить, что на точность измерений влияет длина щели. Если след частицы имеет сравнительно большой наклон к плоскости поверхности эмульсии, то он не может быть сфокусирован полностью по всей длине щели, что может привести к грубым ошибкам. На рис. 4 в качестве примера приведены результаты измерения тока нарушения компенсации в зависимости от пробега для протона, след которого имеет большой наклон перед остановкой (начиная с 1200 μ до остановки). Такие ошибки, которые возникают обычно при фотометрировании следа вблизи остановки, легко устранить, уменьшив длину щелей.

Изменение тока на соседних участках следа вполне ощутимо, и поэтому операцию визуального подсчета зерен можно заменить измерением тока нарушения компенсации.

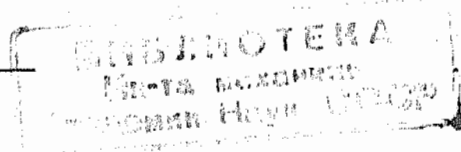
Более подробные результаты применения предлагаемой методики будут изложены отдельно.

Физико-технический институт
Академии наук Казахской ССР

Поступило в редакцию
29 апреля 1954 г.

Литература

- [1] M. Bla u. Rev. Sci. Instr., 21, 978, 1950. C. F. Powell. Nature, 166, 686, 1950. P. Demers. Phys. Rev., 76, 163, 1949. M. Ceccarelli. Nature, 167, 541, 1951; 166, 686, 1950. S. Freisen a. K. Kristianson. Nature, 168, 377, 1951.—
- [2] Ж. С. Такибаев. Вестн. АН Каз. ССР, март, 84, 1954.



К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция ЖЭИФ просит авторов при направлении статей в печать руководствоваться изложенными ниже правилами. СТАТЬИ, ПРИСЛАННЫЕ БЕЗ СОБЛЮДЕНИЯ ПЕРЕЧИСЛЕННЫХ ПРАВИЛ, К РАССМОТРЕНИЮ РЕДАКЦИЕЙ ПРИНИМАТЬСЯ НЕ БУДУТ.

1. Статьи, являющиеся результатами работ, проведенных в институтах, должны обязательно иметь направление от соответствующего института.

2. Редакция в особенности обращает внимание авторов на то, что статьи должны быть изложены с предельной краткостью, совместимой с ясностью изложения, и окончательно обработаны. Следует избегать повторения данных таблиц или графиков в тексте статьи, а также представления численных результатов в виде таблиц и графиков одновременно.

Статьи объемом свыше 1 печ. листа (т. е. 21—22 стр. текста на пишущей машинке) вообще не допускаются. Как текст, так и графический материал должны представляться обязательно в двух экземплярах.

3. Статья должна иметь краткую аннотацию, указывающую цель и результаты работы. Аннотация и раздел «Выводы» (если таковой имеется в статье) не должны, однако, дублировать друг друга.

4. Статьи должны быть напечатаны на пишущей машинке с одной стороны листа; рукописные вставки не допускаются. Формулы должны быть вписаны четко чернилами. Все страницы рукописи должны быть пронумерованы. Таблицы должны быть напечатаны на отдельных от текста страницах.

СТАТЬИ ДОЛЖНЫ БЫТЬ ОБЯЗАТЕЛЬНО ПОДПИСАНЫ АВТОРОМ, А ПРИ НАЛИЧИИ НЕСКОЛЬКИХ АВТОРОВ ВСЕМИ СОАВТОРАМИ.

5. Во избежание недоразумений и ошибок следует делать ясное различие между заглавными и строчными буквами в формулах. В тех случаях, когда заглавные и строчные буквы одинаковы по начертанию и отличаются только своим размером (*V* и *v*, *U* и *u*, *W* и *w*, *O* и *o*, *K* и *k*, *S* и *s*, *I* и *i*, *C* и *c*, *P* и *p*), — необходимо заглавные буквы подчеркивать снизу двумя черточками (например, S), а строчные пометать двумя черточками сверху (например, s). Необходимо делать различие между буквой *O* (большой), *o* (малой) и *0* (нулем), для чего буквы *O* и *o* подчеркивать двумя черточками: O и o, а нуль оставлять без подчеркивания. Необходимо также различать буквы *I* и *J*, для чего в рукописи букву *I* писать как римскую единицу с точкой вверху. Греческие буквы должны подчеркиваться красным карандашом. Векторы подчеркивать синим или черным карандашом.

6. Подстрочные примечания должны иметь сплошную нумерацию по всей статье. Цитируемая литература должна даваться не в виде подстрочных примечаний, а общим списком в конце статьи, с указанием в тексте статьи ссылки порядковой цифрой над строкой, в прямых скобках (например, [1]). Цитируемая литература должна быть оформлена в следующем порядке: а) для журнальных статей указываются инициалы и фамилия авторов, название журнала, номер тома (подчеркнуть снизу), страница и год; б) для книг надо указывать инициалы и фамилии авторов, полное название книги, год и место издания (для книг иностранного происхождения — указывать данные русского перевода, если таковой имеется).

7. Все рисунки и чертежи должны быть представлены отдельно от рукописи и ни в коем случае не должны приклеиваться к оригиналу. Рисунки желательно снабжать разъясняющими подписями, которые должны быть собраны на отдельном листе. На обороте рисунков должна быть указана фамилия автора, название статьи и номер рисунка. Надписи на рисунках следует по возможности заменять цифрами или буквенными обозначениями в подписи к рисунку или в тексте.

Редакция просит авторов ограничиваться минимальным числом рисунков к статьям.

8. Редакция просит авторов отмечать на полях рукописи места, которые могут быть набраны петитом.

9. Редакция посылает автору одну корректуру. Изменения и дополнения в текст не допускаются. Корректура с подписью автора должна быть выслана обратно в редакцию в течение суток с момента ее получения.

10. К рукописи должен быть приложен точный адрес, фамилия, имя и отчество автора, а также номер телефона, служебного или домашнего (для авторов, проживающих в Москве).

11. РУКОПИСИ, НЕ ПРИНЯТЫЕ РЕДАКЦИЕЙ, АВТОРУ НЕ ВОЗВРАЩАЮТСЯ.

Адрес редакции, Москва, Подсосенский пер., д. 21, Изд-во АН СССР.

Цена 12 руб.

ЛЕНИНГРАДСКОЕ ВОССТ. 9
ИНСТ. Т. МЕХАНИКИ
АН СССР
4 2 12 ш 3т117

ОТКРЫТА ПОДПИСКА
НА ЖУРНАЛЫ АКАДЕМИИ НАУК СССР
на 1955 год

Название журналов	Количество номеров в год	Годовая подписная цена в руб.	Название журналов	Количество номеров в год	Годовая подписная цена в руб.
Автоматика и телемеханика	6	54	Серия физическая	6	72
Акустический журнал	4	36	Известия Всесоюзного географического общества	6	54
Астрономический журнал	6	54	Исторический архив	6	90
Биохимия	6	72	Коллоидный журнал	6	45
Ботанический журнал	6	90	Математический сборник	6	108
Вестник Академии наук СССР	12	96	Микробиология	6	72
Вестник древней истории	4	96	Почвоведение	12	108
Вопросы языкознания	6	72	Прикладная математика и механика	6	72
Доклады Академии наук СССР (без переплета)	36	360	Природа	12	84
Доклады Академии наук СССР (о 6 папках, колленкоры-ми с тиснением)	36	384	Советское государство и право	8	120
Журнал аналитической химии	6	36	Советская этнография	4	72
Журнал высшей нервной деятельности имени И. П. Павлова	6	90	Успехи современной биологии	6	48
Журнал общей биологии	6	45	Успехи химии	8	64
Журнал общей химии	12	180	Физиологический журнал СССР имени И. М. Сеченова	6	72
Журнал прикладной химии	12	126	Физиология растений	6	54
Журнал технической физики	12	180	Реферативный журнал:		
Журнал физической химии	12	216	Астрономия и геодезия	12	91.20
Журнал экспериментальной и теоретической физики	12	144	» Указатель за 1953—1954 г.	1	32
Записки Всесоюзного минералогического общества	4	48	Биология	24	380
Зоологический журнал	6	135	Геология и география	12	240
Известия Академии наук СССР:			Математика	12	91.20
Отделение литературы и языка	6	54	» Указатель за 1953—1954 гг.	1	32
Отделение технических наук	12	180	Механика	12	91.20
Отделение химических наук	6	96	» Указатель за 1953—1954 гг.	1	32
Серия биологическая	6	72	Физика	12	240
Серия географическая	6	54	» Указатель за 1954 г.	1	78
Серия геологическая	6	90	Химия	24	432
Серия геофизическая	6	54	» Указатель за 1953—1954 гг.	2	100
Серия математическая	6	54			

ПОДПИСКА ПРИНИМАЕТСЯ

городскими и районными отделами «Союзпечати»,
отделениями и агентствами связи, магазинами «Академкнига»,
а также конторой «Академкнига» по адресу:
Москва, Пушкинская ул., д. 23.