

735

ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 27

Вып. 1 (7)

БИБЛИОТЕКА
Ин-та механики
Академии наук СССР

ИЮЛЬ 1954 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Академик Абрам Исаакович Алиханов (К пятидесятилетню со дня рождения)	3
Д. А. Киржниц. К вопросу о мезон-нуклонных взаимодействиях	6
Г. В. Гордеев. Низкочастотные колебания плазмы	19
Г. В. Гордеев. Возбуждение колебаний плазмы	24
М. А. Левитская. Уровни нуклонов на основе экспериментальных признаков	29
Г. П. Майтак. Некоторые закономерности и вычисление масс атомов	39
Б. К. Вайнштейн. Количественные соотношения в рядах Фурье электронной плотности кристаллов	44
В. Л. Шмарц. О тепловом расширении кристаллов	62
Б. М. Козырев и А. И. Ривкинд. Протонный резонанс в растворах парамагнитных солей	69
К. Б. Власов и Б. Х. Ишмухаметов. Ферромагнетизм веществ типа ферритов и антиферромагнетизм	75
У. А. Арифов и А. Х. Аюханов. Угловое распределение вторичных ионов при бомбардировке ионами щелочных металлов танталовой мишени	87
Н. С. Новосильцев и А. Л. Ходаков. Диэлектрический гистерезис в монокристаллах BaTiO_3	94
Н. А. Капцов и Н. А. Попов. Зажигание электрического разряда в газах на переменном токе звуковой частоты в трубках с внешними и внутренними электродами	97
В. К. Ляпидевский и Ю. А. Щербаков. Исследование работы диффузионно-конденсационной камеры	103

Письма в редакцию

Г. Е. Чиковани. Статистический метод определения масс нестабильных нейтральных частиц и их продуктов распада	110
А. Д. Галанин и В. Г. Соловьев. Радиационная поправка к времени жизни π^0 -мезона	112
Б. Д. Осипов. Дисперсия микроволн в аммиаке при давлении 10^{-2} мм рт. ст.	115
В. Л. Гинзбург и В. П. Силин. Несколько замечаний о релятивистских волновых уравнениях со спектром масс	116
Б. Т. Гейликман. О конденсации идеального бозе-газа в поле тяжести	118
С. И. Сыроватский. Неустойчивость тангенциальных разрывов в сжимаемой среде	121
Я. А. Смородинский. Поляризация при рассеянии протонов протонами	123
Н. Е. Алексеевский, Н. Н. Журавлев и И. И. Лифанов. К вопросу о сверхпроводимости Bi_2Pd	125
Р. А. Ченцов. Теплопроводность фосфористой бронзы при гелиевых температурах	126

Главный редактор *Н. Н. АНДРЕЕВ*

Зам. главного редактора *М. М. СУЩИНСКИЙ*

Редколлегия

Н. А. КАПЦОВ, В. П. ПЕШКОВ, Д. В. СКОБЕЛЫДИН,
Н. Н. СОБОЛЕВ, М. М. СУЩИНСКИЙ, И. Е. ТАММ,
Я. П. ТЕРЛЕЦКИЙ, Е. Л. ФЕЙНБЕРГ

735

БИБЛИОТЕКА
Ин-та механики
Академии Наук СССР

ЖУРНАЛ

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

*Продолжение физической части
Журнала Русского физико-химического общества,
издававшегося с 1873 по 1930 г.*

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР Н. Н. АНДРЕЕВ,
ЗАМ. ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА М. М. СУЩИНСКИЙ

Редколлегия: акад. Н. Н. АНДРЕЕВ, д-р физ.-мат. наук
Н. А. КАПЦОВ, д-р физ.-мат. наук В. П. ПЕШКОВ,
акад. Д. В. СКОБЕЛЬЦЫН, канд. физ.-мат. наук
Н. Н. СОБОЛЕВ, канд. физ.-мат. наук М. М. СУЩИНСКИЙ,
акад. И. Е. ТАММ, д-р физ.-мат. наук Я. П. ТЕРЛЕЦКИЙ,
д-р физ.-мат. наук Е. Л. ФЕЙНБЕРГ

Том 27

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

МОСКВА

1954



*АКАДЕМИК
АБРАМ ИСААКОВИЧ АЛИХАНОВ*

АКАДЕМИК АБРАМ ИСААКОВИЧ АЛИХАНОВ

(К пятидесятилетию со дня рождения)

В марте текущего года исполнилось 50 лет со дня рождения одного из крупнейших советских физиков-экспериментаторов — академика Абрама Исааковича Алиханова. Исследования А. И. Алиханова, посвященные оптике рентгеновых лучей, законам взаимодействия жестких γ -лучей с веществом, законам β -распада и проблемам, связанным с выяснением природы космического излучения, обогатили новыми идеями и новыми результатами большого научного значения ряд важнейших областей современной атомной и ядерной физики.

А. И. Алиханов начал свою научную деятельность в 1927 г. в Ленинградском физико-техническом институте. Его первые работы, выполненные в рентгеновской лаборатории ЛФТИ, были посвящены применению рентгеновского анализа к исследованию различных кристаллических структур. С 1930 до 1933 г. А. И. Алиханов занимался экспериментальным изучением основных вопросов оптики рентгеновых лучей. Среди работ, выполненных им в этот период, значительный интерес представляет исследование законов полного внутреннего отражения рентгеновых лучей от тонких слоев различных веществ. В этом тонком и трудном исследовании, которое могло быть осуществлено только при высоком уровне экспериментального мастерства, А. И. Алихановым впервые была прямыми опытами доказана полная применимость классической оптики Френеля и Максвелла к явлениям отражения жестких рентгеновых лучей от прозрачных и поглощающих сред.

В 1933 г., после открытия нейтрона и позитрона, центральной проблемой физики становится изучение атомного ядра и свойств быстрых частиц. С этого времени в нашей стране началось широкое развитие исследований по ядерной физике, в котором наиболее активное участие приняло молодое поколение советских физиков. Среди советских физиков, переключившихся на новую проблематику, А. И. Алиханов одним из первых сумел выбрать в сложном комплексе задач, связанных с изучением атомного ядра, самостоятельное направление исследований, полноценное по своему физическому содержанию. Это направление заключалось в изучении процессов образования позитронов γ -лучами. Свои исследования в этой области А. И. Алиханов начал с разработки методов измерения энергетических спектров позитронов. Созданная им новая экспериментальная методика, основанная на использовании магнитного спектрографа, соединенного со счетчиками, работающими на совпадениях, позволила наблюдать возникновение позитронов и измерять их энергетический спектр при малой интенсивности потока этих частиц на фоне сильного γ -излучения радиоактивных источников. При помощи этого метода А. И. Алиханов в 1934—1937 гг. впервые изучил основные закономерности образования позитронов γ -лучами (распределение энергии в спектре, зависимость выхода позитронов от энергии γ -лучей и порядкового номера элемента). Эти исследования А. И. Алиханова полностью сохранили свое значение и в настоящее время, так как они содержат

основной экспериментальный материал по образованию позитронно-электронных пар γ -лучами, на котором базируется современная теория этого процесса. Исследуя процессы возникновения позитронов, А. И. Алиханов в 1934 г. открыл новое явление — испускание позитронов тяжелыми радиоактивными ядрами, происходящее в результате внутренней конверсии энергии возбужденного ядра. Это явление представляет своеобразный аналог обычного процесса конверсии γ -лучей на электронах атомной оболочки. Открытие позитронной конверсии явилось одним из важных подтверждений релятивистской квантовой механики. Кроме того, исследование этого явления показало, что на его основе может быть разработан новый метод спектроскопии γ -лучей. Дальнейшее тщательное изучение основных закономерностей позитронной конверсии было предметом ряда экспериментальных работ, выполненных в лаборатории А. И. Алиханова в ЛФТИ в 1934—1938 гг.

Научные интересы А. И. Алиханова в этот период его работы были в основном связаны с проблемами, которые возникли в результате появления релятивистской квантовой механики. Исследование образования пар являлось только одной из этих проблем. Другой проблемой, которая в предвоенные годы была предметом горячих споров между экспериментаторами, было изучение рассеяния и торможения быстрых электронов. В этой области, благодаря наличию противоречивых экспериментальных данных, создавалась весьма запутанная ситуация, заставлявшая ряд ведущих ученых сомневаться в справедливости самих основ релятивистской квантовой механики. Значительную роль в разъяснении вопроса о законах взаимодействия быстрых электронов с веществом сыграли работы А. И. Алиханова. В 1937 г. он произвел весьма тщательное исследование рассеяния быстрых электронов легкими и тяжелыми ядрами и с большой убедительностью подтвердил основные выводы теории для этого процесса.

Среди работ лаборатории А. И. Алиханова по изучению элементарных процессов взаимодействия быстрых частиц необходимо отметить также экспериментальную проверку справедливости закона сохранения энергии и импульса в процессе аннигиляции позитронов. Эта работа, поставленная в 1936 г. в связи с дискуссией о применимости законов сохранения к элементарным актам, явилась первым ответом экспериментаторов на неверную работу Шэнкланда, в которой законы сохранения якобы были опровергнуты. С 1935 г. важную роль в тематике исследований А. И. Алиханова и его сотрудников получила проблема β -распада. В лаборатории А. И. Алиханова впервые были начаты систематические исследования формы β -спектров искусственных радиоактивных элементов. Эти исследования, выполненные А. И. Алихановым совместно с А. И. Алиханьяном, позволили установить основные закономерности в изменении формы энергетических спектров позитронов и электронов, испускаемых радиоактивными ядрами, при изменении порядкового номера элемента. В процессе этой работы было также выяснено, что данные о форме β -спектров естественных радиоактивных источников, которые казались не подлежащими сомнению после тщательных измерений, выполненных сотрудниками Резерфорда, нуждаются в пересмотре.

Тщательные измерения формы β -спектров, начатые в лаборатории А. И. Алиханова, способствовали значительному дальнейшему прогрессу в изучении проблемы β -распада, так как они впервые сделали возможным сравнение различных вариантов теории β -распада с экспериментом. Перед самой войной в лаборатории А. И. Алиханова в ЛФТИ были начаты опыты по обнаружению атомов отдачи при K -захвате в Be^7 . Целью этих опытов являлось экспериментальное доказательство существования нейтрино. Опыты были прерваны с началом Отечественной войны, но остроумная идея, лежавшая в их основе, через несколько лет принесла свои плоды. В 1942 г. при помощи точно такого же метода Аллен обна-

ружил отдачу атомов при вылете нейтрино в процессе захвата орбитального электрона ядром Be^7 .

Новый период научной деятельности А. И. Алиханова, начавшийся в 1942 г., связан с изучением природы космического излучения. А. И. Алиханов и А. И. Алиханян в военные и послевоенные годы организуют и проводят ряд последовательных экспедиций по изучению космических лучей. В результате их энергичной деятельности на горе Алагёз в Советской Армении на высоте 3200 м создается первоклассная лаборатория с уникальным оборудованием для исследования состава и свойств космического излучения. Важнейшим результатом деятельности этой лаборатории является разработка нового метода изучения состава и энергетического спектра космических лучей. Этот метод, предложенный А. И. Алихановым, основан на одновременном определении радиуса кривизны траектории космической частицы в магнитном поле и ее пробега в веществе. Экспериментальная установка, построенная на этом принципе, представляет собою своеобразный масспектрометр для частиц космического излучения. При помощи такого масспектрометра А. И. Алихановым и А. И. Алиханяном было доказано наличие в составе космического излучения интенсивной группы протонов с энергией порядка 10^8 eV и было получено указание на существование частиц с массами, промежуточными между массой μ -мезона и протона. В настоящее время эта экспериментальная методика доведена до высокой степени совершенства и позволяет с большой точностью производить измерения масс тяжелых мезонов и исследовать их свойства. Важнейшим результатом исследований, выполненных за последние годы при помощи магнитного масспектрометра, является обнаружение существования заряженных тяжелых мезонов.

А. И. Алиханов является ученым с ярко выраженными индивидуальными чертами творчества. Он обладает тем неоценимым свойством истинного ученого, которое иногда называется интуицией, а по существу есть дар научного предвидения. В своих работах он никогда не идет по проторенной дорожке, а всегда выбирает самостоятельный путь, ведущий к решению таких физических проблем, контуры которых еще только намечаются. Оригинальность в постановке научных проблем у А. И. Алиханова неразрывно связана с созданием новых экспериментальных методов, в основе которых всегда лежит глубокая и ясная физическая идея. Благодаря этому А. И. Алиханову удается вести разведку и разработку таких физических явлений, которые по глубине содержания оказываются недоступными для тех, кто пользуется стандартными средствами экспериментального исследования.

Заслуги А. И. Алиханова перед советской наукой не исчерпываются результатами его собственных выдающихся исследований. Мы знаем А. И. Алиханова также как руководителя большой школы советских физиков. Многие из сотрудников и учеников А. И. Алиханова, которым он помогал на первом этапе научного роста своими советами и своим личным примером в дружеской совместной работе, стали в настоящее время физиками высокой научной квалификации и ведут самостоятельную исследовательскую работу в различных областях физики атомного ядра и космических лучей.

Советское правительство высоко оценило научную деятельность А. И. Алиханова. Ему дважды была присуждена Сталинская премия и он награжден двумя орденами Ленина.

К ВОПРОСУ О МЕЗОН-НУКЛОННЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ

Д. А. Кирясниц

Рассмотрен вопрос о взаимодействии нуклона с мезонным полем в общем виде, и показано, что наряду с обычно рассматриваемым существует взаимодействие, связанное с импульсом нуклона. Показано, что последнее равноценно наличию у нуклона зависящей от поля массы, что приводит к появлению барьера, дающего отталкивание даже в сильном поле притяжения. Отмечено также появление нелинейностей в гамильтониане.

1. Введение

Эксперименты последних лет, направленные на изучение свойств мезонов и, в частности, на исследование характера их взаимодействия с ядрами, подтверждают, повидимому, основную идею, лежащую в основе мезонной теории ядерных сил [1]. Однако проведение в жизнь программы этой теории наталкивается на серьезные препятствия, к числу которых относится так называемая «дипольная трудность», сводящаяся к слишком сильному притяжению нуклонов на малых расстояниях [2]. К указанной трудности приводит, как классическое, так и квантовое релятивистское рассмотрение [3].

Если исходить из того, что, по крайней мере, на больших расстояниях от нуклона мезонная теория отвечает действительности, то из общих соображений необходимо допустить, что на малых расстояниях должны появиться дополнительные силы отталкивания. В этой связи следует упомянуть результаты работы [4], автор которой на основании анализа экспериментальных данных пришел к выводу о наличии барьера, приводящего к отталкиванию на расстоянии $\sim 0,5 \cdot 10^{-13}$ см от нуклона.

В настоящей работе сделана попытка получить указанные силы отталкивания, исходя из мезонной теории.

Ниже формулируются основные требования, предъявляемые к взаимодействию, и показывается, что существует дополнительное взаимодействие (именуемое ниже импульсным), которое удовлетворяет этим требованиям, но обычно не рассматривается. Устанавливается, что это взаимодействие физически эквивалентно наличию у частицы эффективной массы, растущей вместе с полем. Благодаря этому по мере приближения частицы к центру притяжения появляются дополнительные силы отталкивания (инерционного типа), связанные с увеличением массы частицы. Кроме того, гамильтониан частицы обладает существенной нелинейностью по полю, что, возможно, связано с множественными мезонными процессами.

В работе рассмотрено в качестве примера движение частицы во внешнем поле притяжения.

2. Элементарное взаимодействие нуклона с мезонным полем

Выбор взаимодействия нуклона¹ с мезонным полем производим путем отыскания наиболее общего выражения, совместимого с рядом изве-

¹ Под нуклоном здесь условно понимается любая частица, обладающая спином $1/2$ и мезонным зарядом.

стных общезначимых требований. К их числу относятся: а) релятивистская ковариантность; б) самосопряженность; в) линейность по мезонному полю; г) билинейность по нуклонному полю; д) отсутствие высших производных; е) отсутствие сверхсветовых движений (в «макроскопических областях»). Необходимость условий а) — г) очевидна; точный смысл д) и е) будет разъяснен ниже.

В данной работе все расчеты проводятся для псевдоскалярного варианта мезодинамики, так как, по видимому, именно он наиболее близко соответствует реальным мезонным взаимодействиям [2,5].

В силу условия г) для величины действия, соответствующего взаимодействию, будем иметь ($\hbar = c = 1$):

$$S_3 = -i \int \psi^+ \Lambda_3 \psi (dx)_4, \quad (2.1)$$

где Λ_3 — оператор плотности лагранжиана взаимодействия, ψ — волновая функция нуклона ($\psi^+ = i\psi^* \gamma_4$), $(dx)_4 = i dx_1 dx_2 dx_3 dt$.

Ввиду требования а) Λ_3 должен быть инвариантной комбинацией своих составляющих; условие в) требует, чтобы Λ_3 линейно включал φ — псевдоскаляр, характеризующий мезонное поле²:

$$\Lambda_3 = L\varphi. \quad (2.2)$$

Здесь L — псевдоскаляр-оператор, зависящий от характеристик нуклона, а также от импульса мезона. Структурными составляющими L являются

$$I, \gamma_i, \gamma_i \gamma_k, \gamma_5 \gamma_i, \gamma_5, p_i, k_i,$$

где γ_i и т. д. — матрицы Дирака, $\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$; p_i и k_i — импульсы соответственно нуклона и мезона.

В настоящей работе не рассматриваются варианты, связанные с введением в уравнения свободного поля высших производных [6] или дополнительных полей [7]. Это позволяет сформулировать условие д) в следующей форме: введение взаимодействия не должно повышать порядок уравнений поля, т. е. класс начальных условий, обеспечивающих решение задачи Коши для свободного поля, не должен расширяться от введения взаимодействия.

Полную функцию действия системы, состоящей из нуклонов и мезонов, берем в виде

$$S = -i \int \left\{ -\frac{1}{2} [(\nabla_i \varphi)^2 + m^2 \varphi^2] + i\psi^+ (\gamma_i \nabla_i + M) \psi + \psi^+ L \varphi \psi \right\} (dx)_4, \quad (2.3)$$

где M и m — массы соответственно нуклона и мезона. Оператор L представим в виде

$$L = (-i)^{n+m} l_{i_1 \dots i_n}^{k_1 \dots k_m} k_{k_1} \dots k_{k_m} p_{i_1} \dots p_{i_n}. \quad (2.4)$$

Применяя к (2.3) вариационный принцип (координаты $q \sim \varphi, \psi, \psi^+$) и используя уравнения экстремалей

$$\sum_n (-1)^n \nabla^n \frac{\partial}{\partial \nabla_q^n} \Lambda = 0 \quad (2.5)$$

[Λ — подинтегральное выражение в (2.3)], получим волновые уравнения

$$(\square - m^2) \varphi + (-1)^n \nabla_{k_1} \dots \nabla_{k_m} [\psi^+ l_{i_1 \dots i_n}^k \nabla_{i_1} \dots \nabla_{i_n} \psi] = 0; \quad (2.6a)$$

$$\{\gamma_i \nabla_i + M - i l_{i_1 \dots i_n}^k \nabla_{k_1} \dots \nabla_{k_m} \varphi \nabla_{i_1} \dots \nabla_{i_n}\} \psi = 0; \quad (2.6б)$$

$$- \nabla_i \psi^+ \gamma_i + \psi^+ M + (-1)^n \nabla_{i_1} \dots \nabla_{i_n} [\psi^+ l_{i_1 \dots i_n}^k \nabla_{k_1} \dots \nabla_{k_m} \varphi] = 0. \quad (2.6в)$$

² Ниже рассматривается только нейтральный вариант теории.

Условие д) требует, чтобы эти уравнения были не выше 1-го порядка по ψ и ψ^+ . Из уравнения (2.6б) и (2.6в) усматриваем, что для этого необходимо $n \leq 1$, а из (2.6а) — что и $m \leq 1$. Наконец, случай $n = m = 1$ может осуществиться, только если l_i^h — антисимметричный тензор [см. (2.6а)].

Таким образом возможны следующие структуры для L :

$$l, l_i p_i, l_i k_i, l_{ik} k_i p_i. \quad (2.7)$$

Для величин l, l_i, l_{ik} нужно выбрать выражения, совместимые с релятивистской ковариантностью и псевдоскалярностью взаимодействия, что дает однозначно

$$l \sim \gamma_5, l_i \sim \gamma_5 \gamma_i, l_{ik} \sim \gamma_5 \gamma_i \gamma_k. \quad (2.8)$$

[$i \neq k$]

Отсюда получаем следующее выражение для действия

$$S_3 = -i \int \psi^+ \{ a_1 \gamma_5 \varphi + a_2 \gamma_5 \gamma_i \nabla_i \varphi + a_3 \varphi \gamma_i \nabla_i + a_4 \gamma_5 \gamma_i \gamma_k \nabla_i \varphi \nabla_k \} \psi (dx)_4. \quad (2.9)$$

[$i \neq k$]

Первый член соответствует обычной псевдоскалярной связи, второй — обычной псевдовекторной. Остальные два члена отвечают вводимому в работе импульсному взаимодействию.

Коэффициенты $a_1 - a_4$ выбираем в соответствии с требованием б), т. е. из условия вещественности действия. Обозначая

$$S_3 = -i \int \psi^+ (A + B_i \nabla_i) \psi (dx)_4, \quad (2.10)$$

получим

$$S_3^* = i \int \psi^+ \gamma_4 [A^+ - (B_i \nabla_i)^+ - (\nabla_i B_i)^+] \gamma_4 \psi (dx)_4,$$

что дает условия самосопряженности

$$A + \gamma_4 A^+ \gamma_4 = \nabla_i B_i,$$

$$B_\alpha = \gamma_4 B_\alpha^+ \gamma_4, \quad (2.11)$$

$$B_4 = -\gamma_4 B_4^+ \gamma_4;$$

здесь A^+ и т. д. означает эрмитовски-сопряженную к A величину, индексы $\alpha = 1, 2, 3$.

Применяя (2.11) к (2.9), получим (f, g, k и l — действительные постоянные)

$$a_1 = f, a_2 = g + ik/2, a_3 = ik, a_4 = l. \quad (2.12)$$

Таким образом приходим к следующему выражению для действия:

$$S_3 = -i \int \psi^+ \left\{ f \gamma_5 \varphi + \left(g + \frac{ik}{2} \right) \gamma_5 \gamma_i \nabla_i \varphi + \right. \\ \left. + ik \varphi \gamma_i \nabla_i + l \gamma_5 \gamma_i \gamma_k \nabla_i \varphi \nabla_k \right\} \psi (dx)_4. \quad (2.13)$$

[$i \neq k$]

Остается еще удовлетворить условию е) [8], необходимость которого вызвана тем обстоятельством, что даже формально релятивистски-

инвариантное уравнение движения не всегда обеспечивает скорость частицы, меньшую скорости света. Для выяснения этого обстоятельства, которое не является специфически квантовым, обратимся к классическому релятивистскому рассмотрению.

Как известно [9], при этом выражение для действия имеет вид (M — скаляр массы)

$$S = - \int M ds = - \int \sqrt{V - M^2 \delta_{ih} dx_i dx_h}, \quad (2.14)$$

где δ_{ih} — единичный тензор, ds — интервал.

Это выражение можно простейшим образом обобщить, введя вместо единичного тензора квадрата массы $M^2 \delta_{ih}$ тензор произвольного вида M_{ih}^2

$$S = - \int \sqrt{V - M_{ih}^2 dx_i dx_h}. \quad (2.15)$$

Варьируя это выражение, получим 4-импульс

$$p_i = \partial S / \partial x_i = M_{ih}^2 u_h / \sqrt{V - M_{ih}^2 u_i u_h}, \quad (2.16)$$

где $u_i = dx_i / ds$ — 4-вектор скорости.

Обратно,

$$u_i = M_{ih}^{-2} p_h / \sqrt{V - M_{ih}^{-4} p_i p_h} \quad (2.17)$$

и удовлетворяет тождеству

$$u_i^2 = -1.$$

Из (2.16) можно получить уравнение Гамильтона — Якоби

$$M_{ih}^{-2} p_i p_h = 1, \quad (2.18)$$

обобщающее обычное

$$M^{-2} p_i^2 = -1.$$

Простейшим является случай диагонального M_{ih}

$$M_{ih} = M_{(i)} \delta_{ih} \quad (M_1 = M_2 = M_3 \neq M_4). \quad (2.19)$$

Тогда (2.18) дает

$$\frac{p^2}{M_1^2} - \frac{E^2}{M_4^2} = -1, \quad E = \frac{M_4}{M_1} \sqrt{p^2 + M_1^2}. \quad (2.20)$$

Отсюда для скорости получим

$$v^2 = \left(\frac{\partial E}{\partial p} \right)^2 = - \frac{u_a^2}{u_4^2} = \left(\frac{M_4}{M_1} \right)^2 \frac{p^2}{p^2 + M_1^2}. \quad (2.21)$$

Анализ этого выражения показывает, что существуют два условия возникновения сверхсветовой скорости

$$\frac{M_4}{M_1} > 1, \quad p^2 > \frac{M_1^2}{(M_4/M_1)^2 - 1} \quad (2.22a)$$

$$M_1^2 = M_4^2 < 0. \quad (2.22b)$$

Ниже будет показано, что оба эти условия реализуются в рассматриваемом варианте взаимодействия.

Найдем еще выражения для импульса и энергии через скорость

$$\mathbf{p} = \frac{M_1^2}{M_4} \frac{v}{\sqrt{1 - (M_1 v / M_4)^2}}; \quad E = \frac{M_4}{\sqrt{1 - (M_1 v / M_4)^2}}. \quad (2.23)$$

Отсюда видно, что переход через значение $v = 1$ не связан с какими-либо особенностями у $\mathbf{p}$ и E . Критическая скорость как бы отодвигается ($v_{кр} = M_4 / M_1$).

Покажем теперь, что при наличии импульсного взаимодействия действительно имеют место закономерности, отраженные в формулах (2.14) — (2.23). Рассмотрим некантовые соотношения, вытекающие из (2.13), причем для простоты положим $f = g = 0$. Переходя от уравнения³

$$\{i(\gamma_i \nabla_i + M) + ik\varphi \gamma_5 \gamma_i \nabla_i + l \gamma_5 \gamma_i \gamma_k \nabla_i \varphi \nabla_k\} \psi = 0 \quad (2.24)$$

[i ≠ k]

к уравнению в форме Дирака и делая подстановку

$$\psi = e^{iS}; \quad \nabla S = \mathbf{p}; \quad \vec{\sigma} = -\frac{1}{2} [\vec{\alpha}, \vec{\alpha}]; \quad \gamma = i\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3,$$

получим (поле φ статическое)

$$\vec{\alpha} \mathbf{p} + \beta M - k\varphi \vec{\sigma} \mathbf{p} - k\varphi \gamma E - l\beta \vec{\sigma} \nabla \varphi E + il\beta \vec{\alpha} [\nabla \varphi, \mathbf{p}] - E = 0. \quad (2.25)$$

Переходим теперь к двухрядному представлению:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}; \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}; \quad \sigma = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}; \quad \gamma = -\begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

что дает

$$\begin{pmatrix} M - E - k\varphi \vec{\sigma} \mathbf{p} - lE \vec{\sigma} \nabla \varphi & \vec{\sigma} \mathbf{p} + k\varphi E + il\vec{\sigma} [\nabla \varphi, \mathbf{p}] \\ \vec{\sigma} \mathbf{p} + k\varphi E - il\vec{\sigma} [\nabla \varphi, \mathbf{p}] & -M - E - k\varphi \vec{\sigma} \mathbf{p} + lE \vec{\sigma} \nabla \varphi \end{pmatrix} = 0.$$

Приравнявая нулю этот детерминант и беря для простоты одномерный случай, найдем

$$\begin{aligned} & \left(E + \frac{M l \sigma \nabla \varphi}{1 - k^2 \varphi^2 - l^2 (\nabla \varphi)^2} \right)^2 = \\ & = p^2 \frac{1 - k^2 \varphi^2}{1 - k^2 \varphi^2 - l^2 (\nabla \varphi)^2} + M^2 \frac{1 - k^2 \varphi^2}{[1 - k^2 \varphi^2 - l^2 (\nabla \varphi)^2]^2}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Сравнивая это выражение с (2.20), получим

$$M_4^2 = M^2 \frac{1 - k^2 \varphi^2}{[1 - k^2 \varphi^2 - l^2 (\nabla \varphi)^2]^2}; \quad M_1^2 = M^2 \frac{1}{1 - k^2 \varphi^2 - l^2 (\nabla \varphi)^2}. \quad (2.27)$$

Таким образом, при $l \neq 0$ действительно появляется тензор массы рассмотренного в (2.19) типа, причем $M_4^2 > M_1^2$, что соответствует (2.22а). Кроме того, при $k^2 \varphi^2 > 1$ имеем $M_1^2 < 0$, $M_4^2 < 0$, что также, согласно (2.22б), дает $v^2 > 1^4$.

³ В уравнении (2.24) опущен член $(ik/2) \gamma_5 \gamma_i \nabla_i \varphi$, полученный в результате коммутации импульса с φ и в некантовом приближении исчезающий.

⁴ Из (2.26) видно также, что при $l \neq 0$ уравнение может изменить свой тип: из гиперболического перейти в эллиптическое.

Заметим, что к тем же результатам можно прийти и непосредственно из квантового уравнения. Пусть последнее имеет вид

$$\Gamma_i p_i + B = 0 \quad (\Gamma_4 = i\Gamma_0, \quad p_4 = iE), \quad (2.28)$$

откуда $E = \Gamma_0^{-1} (\vec{\Gamma} \mathbf{p} + B)$ (здесь Γ_i — некоторые матрицы). Величина мгновенной скорости:

$$v_1 = \frac{\partial E}{\partial p_1} = \Gamma_0^{-1} \Gamma_1; \quad v_1^2 = \frac{1}{|\Gamma_0|^2} |\Gamma_1|^2, \quad (2.29)$$

будет больше или меньше единицы в зависимости от того, пространственно- или временноподобен 4-вектор Γ_i .

В обычной теории $\Gamma_1 = \gamma_1$; $\Gamma_0 = -i\gamma_4$, что соответствует мгновенной скорости, равной ± 1 . Однако в рассматриваемом варианте, исходя из уравнения (2.24), получим ($\nabla_2 \varphi = \nabla_3 \varphi = 0$)

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= (1 + k\varphi\gamma_5)\gamma_1; \quad \Gamma_0 = -i(1 + k\varphi\gamma_5 - il\gamma_5\gamma_1\nabla_1\varphi)\gamma_4; \\ v_1^2 &= (1 - k^2\varphi^2) / (1 - k^2\varphi^2 - l^2(\nabla\varphi)^2), \end{aligned} \quad (2.30)$$

что дает $v_1^2 > 1$ при $l \neq 0$.

Обращаем внимание, что определяемая (2.30) скорость является мгновенной и соответствует бесконечному импульсу частицы [10], когда перестает влиять второй фактор (2.22б). Поэтому из (2.30) можно получить только условие (2.22а).

В заключение найдем явное выражение скорости, вытекающее из (2.26):

$$v_1^2 = \left(\frac{\partial E}{\partial p_1} \right)^2 = \frac{p_1^2 (1 - k^2\varphi^2)}{p_1^2 [1 - k^2\varphi^2 - l^2(\nabla\varphi)^2] + M^2}.$$

Условие $v_1^2 < 1$ дает

$$p_1^2 \frac{l^2(\nabla\varphi)^2}{1 - k^2\varphi^2} < \frac{M^2}{1 - k^2\varphi^2}. \quad (2.31)$$

Из анализа последнего уравнения следует:

а) при $l \neq 0$ существует значение импульса, при превышении которого скорость становится больше единицы в любой точке пространства, где $\nabla\varphi \neq 0$. Это противоречит условию е) и заставляет положить $l = 0$.

б) при $l = 0$ и $k \neq 0$ существует область $k^2\varphi^2 > 1$, в которой $v^2 > 1$. Однако эта область при малом k локализована в окрестности источника поля φ и принцип « $v^2 > 1$ лишь в малом» не нарушается.

Окончательно останавливаемся на следующем взаимодействии:

$$S_3 = -i \int \psi^+ \left\{ f\gamma_5\varphi + \left(g + \frac{ik}{2} \right) \gamma_5\gamma_i\nabla_i\varphi + ik\varphi\gamma_5\gamma_i\nabla_i \right\} \psi (dx)_4. \quad (2.32)$$

Резюмируя, можно сделать заключение, что обычно применяемые в мезодинамике взаимодействия не исчерпывают всего класса допустимых. Имеется возможность однозначного обобщения этих взаимодействий, вводящего в теорию новую константу k . Как будет показано ниже, это обобщение не тривиально и приводит к изменению ряда выводов теории.

В заключение кратко остановимся на случае электродинамики. Здесь к требованиям а) — е) прибавляется еще одно: ж) градиентная инвариантность.

ко к полю данного типа, вообще же допустимы произведения полей разных типов):

$$\text{а) } \gamma_i \neq 0; \quad \text{б) } \gamma_i = 0.$$

В варианте а) необходимо, чтобы $\Phi = 1$, γ_i было бы линейно, а F — квадратично по полю. Для электродинамики, где $\gamma_i \sim A_i$, условие $\Phi = 1$ показывает, что импульсные взаимодействия недопустимы (см. ниже). Это дополняет соображения, изложенные в конце раздела 2.

В варианте же б) допустимо, чтобы как F , так и Φ были формами не выше второй степени по полю. В обоих вариантах Φ и F должны стремиться к единице при исчезновении поля. В варианте б) факторизованное уравнение примет следующий вид⁶

$$i(1 + \Gamma_1 \varphi + \Gamma_{2i} \nabla_i \varphi) \gamma_i p_i + M(1 + \Gamma_3 \varphi + \Gamma_{4i} \nabla_i \varphi) = 0, \quad (3.7)$$

где Γ — соответствующим образом подобранные матрицы Дирака.

Таким образом, вновь появляются импульсные взаимодействия, рассмотренные в разделе 2. Поэтому мы приходим к выводу, что эффективная масса с зависящим от поля знаменателем и импульсные взаимодействия взаимно обусловлены.

Рассмотрим некоторые физические следствия. При наличии импульсного взаимодействия, когда $\Phi \neq 1$, возможно такое положение, что Φ обратится в нуль (а соответственно μ — в бесконечность) при некотором конечном значении поля, т. е. на конечном расстоянии от источника его. Это будет соответствовать барьеру для проникновения частицы в сторону больших значений поля. Именно такое положение имеет место в рассмотренном выше варианте, где, как это видно из (2.27),

$$\Phi = 1 - k^2 \varphi^2,$$

так что барьер соответствует $k^2 \varphi^2 = 1$.

Как известно, эмпирические закономерности взаимодействия ядерных частиц привели к выводу, что на расстоянии $\sim 0,5 \cdot 10^{-13}$ см от нуклона начинают действовать силы отталкивания [4]. В той предварительной форме, в какой задача поставлена в данной работе, преждевременно, разумеется, поднимать вопрос о сравнении теории с экспериментом. Тем не менее, качественные выводы этого раздела, а также результаты раздела 4, позволяют сделать заключение о наличии фактора, ослабляющего силы притяжения между нуклонами на близких расстояниях.

Одновременно в силу нелинейности эффективной массы по полю будет нелинеен также и гамильтониан [см. (2.26)]. Это приводит к возможности множественных мезонных процессов (прямых), обнаруженных в последнее время на опыте [11].

4. Движение частицы во внешнем поле

Отмеченные в разделе 3 особенности импульсного взаимодействия наиболее отчетливо проявляются в следующей задаче.

Пусть частица, обладающая зарядом e , врожденным магнитным моментом κ и импульсным зарядом k , находится во внешнем статическом поле, состоящем из электрического поля притяжения, магнитного и мезонного полей. Все поля предполагаются имеющими сильную особенность в начале координат.

⁶ В (3.7) не произведена эрмитизация, что не существенно в данном случае.

Как известно, при $k = 0$ в этой задаче имеет место падение частицы на центр и отсутствие стационарных состояний. Рассмотрим, как меняется положение за счет импульсных взаимодействий, причем задачу рассматриваем как одночастичную (без вакуумных эффектов).

Лагранжиан частицы берем в виде

$$\Lambda = -\psi^* \gamma_4 \left\{ (1 + k\varphi\gamma_5) \gamma_i (\nabla_i - ieA_i) + M + \frac{k}{2} \gamma_5 \gamma_i \nabla_i \varphi - \frac{i\kappa}{2} \gamma_i \gamma_k F_{ik} \right\} \psi, \quad (4.1)$$

здесь A_i и F_{ik} — потенциал и поле (электромагнитные). Наличие комбинации $\nabla - ieA$ продиктовано требованием градиентной инвариантности. По этому поводу подчеркнем, что такая структура не противоречит варианту а) раздела 3, так как там речь шла только о поле одного типа.

Найдем величину канонического импульса, соответствующего координате

$$\Pi = \partial \Lambda / \partial \dot{\psi} = i\psi^* (1 - k\varphi\gamma_5). \quad (4.2)$$

Составляем гамильтониан

$$H = \Pi \dot{\psi} - \Lambda = -i\Pi \left\{ \gamma_4 \vec{\gamma} (\nabla - ie\mathbf{A}) + (1 - k\varphi\gamma_5)^{-1} \gamma_4 \left[M + \frac{k}{2} \gamma_5 \gamma_i \nabla_i \varphi - \frac{i\kappa}{2} \gamma_i \gamma_k F_{ik} \right] + eA_0 \right\} \psi. \quad (4.3)$$

Здесь налицо нелинейность, упомянутая в разделе 3.

Плотность вероятности

$$\rho = -i\Pi\psi = \psi^* (1 - k\varphi\gamma_5) \psi. \quad (4.4)$$

Это выражение существенно отличается от обычного. В частности, условие нормировки определяется интегралом $\int \psi^* (1 - k\varphi\gamma_5) \psi (dx)_3$. Для нахождения уравнения Дирака варьруем (4.1) по ψ^* , что дает

$$\left\{ (1 + k\varphi\gamma_5) \gamma_i (\nabla_i - ieA_i) + M + \frac{k}{2} \gamma_5 \gamma_i \nabla_i \varphi - \frac{i\kappa}{2} \gamma_i \gamma_k F_{ik} \right\} \psi = 0. \quad (4.5)$$

Ниже будут рассмотрены две области: область I соответствует $k^2\varphi^2 < 1$, область II — $k^2\varphi^2 > 1$. Произведем преобразование волновой функции

$$\psi = (V1 - k\varphi\gamma_5)^{-1} \bar{\psi}, \quad (4.6)$$

где $\bar{\psi}$ — новая волновая функция. Найдем закон преобразования сопряженных величин.

В области I имеем просто

$$\psi^* = \bar{\psi}^* (V1 - k\varphi\gamma_5)^{-1}.$$

В области II, используя соотношение

$$f(x) = \frac{1}{2} [f(|x|) + f(-|x|)] + \frac{x}{2|x|} [f(|x|) - f(-|x|)],$$

где $|x| = +\sqrt{x^2}$, получим

$$\begin{aligned} \psi &= \exp \left[-\frac{1}{2} \ln(1 - k\varphi\gamma_5) \right] \bar{\psi} = \\ &= \exp \left[-\frac{1}{4} \ln|1 - k^2\varphi^2| - \frac{\gamma_5}{4} \ln \left| \frac{1 - k\varphi}{1 + k\varphi} \right| - i \frac{\pi}{4} (1 + \gamma_5) \right] \bar{\psi}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что при сопряжении появляется добавочный множитель

$$q = \begin{cases} 1 \\ \exp\left\{i \frac{\pi}{2} (1 + \gamma_5)\right\} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{для области I,} \\ -\gamma_5 & \text{для области II.} \end{cases}$$

Таким образом,

$$\psi^* = \bar{\psi}^* q (V1 - k\varphi\gamma_5)^{-1}. \quad (4.7)$$

Подчеркнем, что преобразование $\psi \rightarrow \bar{\psi}$ не является каноническим, так как связывающий их оператор не унитарный. Поэтому перестроим формализм в терминах $\bar{\psi}$ -функции:

уравнение Дирака (4.5)

$$\left\{ \gamma_i (\nabla_i - ieA_i) + \frac{M - (ix/2) \gamma_i \gamma_k F_{ik}}{V1 - k^2\varphi^2} \right\} \bar{\psi} = 0; \quad (4.8)$$

лагранжиан (4.1)

$$\Lambda = - \bar{\psi}^* q \gamma_4 \left\{ \gamma_i (\nabla_i - ieA_i) + \frac{M - (ix/2) \gamma_i \gamma_k F_{ik}}{V1 - k^2\varphi^2} \right\} \bar{\psi}; \quad (4.9)$$

гамильтониан (4.3)

$$H = \bar{\psi}^* q \left\{ \gamma_4 \vec{\gamma} (\nabla - ie\mathbf{A}) + \frac{M\gamma_4 - (ix/2) \gamma_4 \gamma_i \gamma_k F_{ik}}{V1 - k^2\varphi^2} + eA_0 \right\} \bar{\psi}; \quad (4.10)$$

плотность вероятности (4.4)

$$\rho = \bar{\psi}^* q \bar{\psi}. \quad (4.11)$$

Мы приходим таким образом к важному выводу, что импульсное взаимодействие целиком сводится к появлению характерного знаменателя $(1 - k^2\varphi^2)^{-1/2}$. Этот результат имеет место точно для области $k^2\varphi^2 < 1$ и с точностью до $-\gamma_5$ для области $k^2\varphi^2 > 1$.

В дальнейшем мы ограничимся областью $k^2\varphi^2 < 1$ и опустим черту у $\bar{\psi}$. Уравнение (4.8) перепишем в форме

$$\left\{ -i \vec{\alpha} (\nabla - ie\mathbf{A}) + \frac{\beta M + \kappa \vec{\sigma} \mathbf{H} - ix\beta \vec{\alpha} \mathbf{E}}{V1 - k^2\varphi^2} + eA_0 - E \right\} \psi = 0. \quad (4.12)$$

Рассмотрим два частных случая.

а) Чисто-электрическое взаимодействие: $\kappa = 0$, $\mathbf{A} = 0$

$$\left(-i \vec{\alpha} \nabla + \beta \frac{M}{V1 - k^2\varphi^2} + eA_0 - E \right) \psi = 0. \quad (4.13)$$

Рассматриваем одномерный случай (как самый неблагоприятный с точки зрения падения) и полагаем

$$\frac{M}{V1 - k^2\varphi^2} = \mu(x); \quad eA_0 = U(x) < 0.$$

Предварительно рассмотрим некантовый вариант; из (4.13) получим просто

$$E = \sqrt{p^2 + \mu^2} + U. \quad (4.13')$$

Легко видеть, что имеется точка поворота частицы, соответствующая $p = 0$ и определяемая равенством

$$E = \mu + U \equiv M + U_{\text{эфф}}, \quad (4.14)$$

где эффективная потенциальная энергия

$$U_{\text{эфф}} = U + \mu - M. \quad (4.15)$$

Предполагая, что φ — короткодействующий потенциал (радиуса a_0), а U — функция типа степенной, будем иметь картину, изображенную на рис. 1. Из него видно, что при $E > M$ всегда существует одна точка поворота — частица совершает инфинитное, но не лимитационное движение [12]. В этом случае силовой центр можно уподобить твердой стенке при x_0 с упругой подкладкой от x_0 до a_0 [$k^2 \varphi^2(x_0) = 1$]. Если же $E - M \leq 0$, то существуют две точки поворота, т. е. частица связана в потенциальной яме опять-таки без падения на центр.

Рис. 1

Все эти выводы имеют силу только вследствие $\mu \neq M$, т. е. в конечном счете благодаря $k \neq 0$. В противном случае частица упала бы на центр.

Заметим, что $U_{\text{эфф}}$ имеет полюс в точке x_0 порядка $1/2$:

$$U_{\text{эфф}} \sim 1 / \sqrt{x - x_0}. \quad (4.15')$$

Вернемся к квантовому рассмотрению. Уравнение (4.13) в двухрядной форме имеет вид

$$\begin{aligned} -i\sigma B' + (\mu - E + U) A &= 0, \\ -i\sigma A' - (\mu + E - U) B &= 0, \end{aligned} \quad \psi = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}.$$

Исключая B

$$B = -i\sigma A' / (\mu + E - U),$$

получим

$$A'' - \frac{\mu' - U'}{\mu - U + E} A' + [(E - U)^2 - \mu^2] A = 0. \quad (4.16)$$

Производим замену переменных

$$dx (\mu + E - U) = d\xi \quad (4.17)$$

и находим связь x и ξ :

$$\xi = \int_{x_0}^x (\mu + E - U) dx.$$

При малых $x - x_0$, используя (4.15'), получим

$$\xi \sim \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{x - x_0}} \sim \sqrt{x - x_0}.$$

При больших x найдем $\xi \sim x$. Отсюда видно, что, исключая окрестность точки x_0 , координаты x и ξ качественно соответствуют друг другу.

Подстановка (4.17) в (4.16) дает

$$\frac{d^2 A}{d\xi^2} + \frac{E-U-\mu}{E-U+\mu} A = 0. \quad (4.18)$$

Точка поворота попрежнему определяется соотношением $E-U=\mu$ и обозначена ниже $\xi_{\text{пов}}$. Разложим коэффициент при A в последнем уравнении в ряд около точки $\xi_{\text{пов}}$

$$(d^2 A / d\xi^2) + C^2 (\xi - \xi_{\text{пов}}) A = 0. \quad (4.18')$$

Интегралом уравнения (4.18') является функция Эйри. Как известно [13], она при отрицательных значениях $\xi - \xi_{\text{пов}}$ экспоненциально спадает к нулю. Этот факт и свидетельствует о наличии барьера.

Таким образом, для сильного поля притяжения вывод о неизбежности падения теряет силу при наличии импульсного взаимодействия.

Обратимся к другому частному случаю формул (4.12).

б) Чисто-магнитное взаимодействие: $e = 0$, $E = 0$

$$\left(-i\vec{\alpha}\nabla + \frac{\beta M + \kappa \vec{\sigma} \mathbf{H}}{\sqrt{1 - \kappa^2 \Phi^2}} - E \right) \psi = 0. \quad (4.19)$$

Нетрудно видеть, что при условии

$$\kappa H(x_0) < M \quad (4.20)$$

снаружи от точки разрыва x_0 магнитные силы будут меньше связанных с увеличением массы, что также приведет к наличию барьера.

Для оценки условия (4.20) примем, что магнитное поле создается нуклоном. Тогда $\kappa H(x_0) \sim \kappa^2 / x_0^3 \sim e^2 / M^2 x_0^3$.

Принимая для x_0 порядок $0,5 \cdot 10^{-13} \text{ см} \approx (1 / \sqrt[3]{137}) (e^2 / m_e) (m_e - \text{масса электрона})$, получим

$$M / m_e > 137, \quad (4.21)$$

что безусловно выполняется.

При этом, конечно, на расстояниях, больших радиуса действия ядерных сил, останется чисто-магнитное взаимодействие.

Из рассмотрения формулы (4.19), а в более общем виде из (3.7), видно, что при увеличении поля растет не только эффективная масса, но и сама энергия взаимодействия U , кроме случая чисто-электрического взаимодействия. Тем не менее, как это следует из последнего примера, при выполнении условия $U(x_0) < M$ можно ожидать появления барьера. Помимо этого, введение импульсного взаимодействия может изменить положение в вопросе о спин-орбитальном взаимодействии нуклона [14].

В заключение приношу глубокую благодарность акад. И. Е. Тамму, проф. В. Л. Гинзбургу и В. П. Силину за интерес к работе и ценные замечания.

Поступила в редакцию
15 марта 1954 г.

Литература

- [1] С. Поуэлл. Усп. физ. наук, 45, 1, 15, 1951.—[2] В. Л. Гинзбург. Теория мезона и ядерные силы, Сб. «Мезон» под ред. И. Е. Тамма, ГИТТЛ, 1947.—[3] И. Е. Тамм. Journ. of Phys., 9, 449, 1945; И. Тамм, В. Силин, В. Файнберг. ЖЭТФ, 24, 1, 3, 1953; И. Верле, ЖЭТФ, 25, 1, 19, 1953.—[4] R. Jastrow. Phys. Rev., 81, 165, 636, 1951.—[5] А. Балдин и В. Михайлов. Усп. физ. наук, 44, 200, 1951.—[6] F. Ворр. Ann. d. Phys., 38, 345, 1940. В. Podolsky. Phys. Rev., 62, 68, 1941.—[7] А. Соколов, Вестн. МГУ, 2, 1947; ЖЭТФ, 18, 280, 1948. A. Pais. The development of the theory of the electron, Princ., 1948; S. Sakata a. O. Naga. Progr. Theor. Phys., 2, 30, 1947.—[8] Д. И. Блохинцев. ЖЭТФ, 22, 2, 254, 1952.—[9] Л. Ландау и Е. Лифшиц, Теория поля, ГТТИ, М.—Л., 1948.—[10] П. Дирак. Основы квантовой механики, ГИТТЛ, 1937.—[11] А. Соколов и Д. Иваненко. Квантовая теория поля, ГИТТЛ, 1952.—[12] Л. Ландау и Л. Пятигорский. Механика, ГИТТЛ, 1940.—[13] В. А. Фок. Таблицы функций Эйри, М., 1946.—[14] В. П. Силин. ЖЭТФ, 22, 2, 136, 1952. K. Case a. A. Pais. Phys. Rev., 80, 203, 1940.
-

НИЗКОЧАСТОТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПЛАЗМЫ

Г. В. Гордеев

Рассмотрены низкочастотные колебания плазмы. Дан вывод дисперсионного уравнения колебаний плазмы в постоянном электрическом поле. Показано, что при наличии внешнего постоянного электрического поля возможны устойчивые незатухающие колебания плазмы.

1. Движение ионов не сказывается на колебаниях плазмы, пока фазовая скорость волн в плазме больше тепловой среднеквадратичной скорости электронов. Если же фазовая скорость волн в плазме меньше тепловой скорости электронов, то в колебаниях плазмы существенную роль играют колебания ионов. Частота ионных колебаний много меньше лэнгмюровской частоты $\omega_1 = \sqrt{4\pi n_1 e^2 / m_1}$, где n_1 — концентрация электронов, e , m_1 — их заряд и масса; поэтому мы будем называть колебания плазмы с участием ионов низкочастотными. Власов [1] построил теорию низкочастотных колебаний плазмы, основываясь на гидродинамических уравнениях плазмы. В настоящей статье мы рассматриваем низкочастотные колебания плазмы, пользуясь кинетическими уравнениями, и показываем, что в отсутствие внешних полей колебания плазмы затухают со временем, а при наличии постоянного внешнего электрического поля возможны устойчивые незатухающие колебания плазмы.

2. Рассмотрим однородную плазму, находящуюся в постоянном внешнем электрическом поле. Состояние плазмы определяется функциями распределения электронов F_1 и ионов F_2 , которые удовлетворяют кинетическим уравнениям Больцмана — Власова

$$\frac{\partial F_i}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{r}} + \varepsilon_i \mathbf{E} \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{v}} = \left[\frac{\partial F_i}{\partial t} \right] \quad (i = 1, 2). \quad (1)$$

Здесь $\mathbf{v}$ — скорость заряженных частиц, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, определяющий их положение, ε_i — удельный заряд электронов ($i = 1$) и ионов ($i = 2$), $\mathbf{E}$ — самосогласованное электрическое поле. Правая часть уравнения (1) представляет собой интеграл взаимодействий посредством короткодействующих сил, которые мы будем учитывать приближенно, пользуясь формулой

$$\left[\frac{\partial F_i}{\partial t} \right] = - \frac{F_i' - F_i^0}{\tau_i}, \quad (2)$$

где F_i' и F_i^0 — значения функций распределения электронов и ионов до столкновения и после столкновения, τ_i — время свободного пробега заряженных частиц.

Рассмотрим состояния плазмы, близкие к стационарному состоянию. Обозначим через f_i отклонение функции распределения от стационарной F_{0i} и запишем линеаризованные уравнения для определения f_i

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{r}} + \varepsilon_i \mathbf{E}_1 \frac{\partial F_{0i}}{\partial \mathbf{v}} = - \frac{f_i}{\tau_i}. \quad (3)$$

Самосогласованное электрическое поле E_1 (без внешнего поля) удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\operatorname{div} E_1 = 4\pi e \int (f_2 - f_1) (dv) \quad (dv) = dv_x dv_y dv_z. \quad (4)$$

Мы предполагаем, что в стационарном состоянии заряды электронов и ионов компенсируются. Уравнения (3), (4) представляют собой полную систему уравнений, определяющих малые отклонения от стационарного состояния плазмы.

3. Уравнения (3), (4) допускают решения в виде плоских монохроматических волн $e^{i(pz - \omega t - kr)}$ с вещественным k и комплексным $p = \omega + i\gamma$. Мы покажем, что в отсутствие внешнего поля γ может быть только положительным. Следовательно, возможны только затухающие волны, и стационарное состояние плазмы является устойчивым. При наличии внешнего поля γ может быть и отрицательным. Следовательно, стационарное состояние плазмы является неустойчивым, и переходит в новое устойчивое состояние с незатухающими ($\gamma = 0$) колебаниями плазмы.

Выберем ось x вдоль направления рассматриваемого вектора k . Пользуясь методом Ландау [2], получаем из уравнений (3), (4) дисперсионное уравнение

$$1 + \frac{4\pi e^2}{k^2} \sum_i \frac{1}{m_i} \int_C \frac{\partial f_{0i}}{\partial u} \frac{du}{p - uk - (i/\tau_i)} = 0, \quad (5)$$

где $f_{0i} = \int F_{0i} dv_y dv_z$; $u = v_x$.

Контур интегрирования C идет от $-\infty$ до $+\infty$ и обходит особую точку $u = [p - (i/\tau_i)]/k$ снизу. Исследование дисперсионного уравнения (5) представляет собой нашу основную задачу.

4. Стационарная функция распределения F_{0i} может быть взята в виде

$$F_{0i} = n_i (m_i / 2\pi k T_i)^{3/2} \exp \{ -m_i (\mathbf{v} - \mathbf{w}_i)^2 / 2k T_i \},$$

где $\mathbf{w}_i$ — скорость дрейфа заряженных частиц, T_i — их температура, k — постоянная Больцмана. Подобные функции с постоянной скоростью дрейфа $\mathbf{w}_i$ подробно исследованы Ланжевеном [3], и мы будем называть их ланжевенскими. Как отметил Грановский [4], доказательство существования стационарного решения кинетического уравнения в виде функции Ланжевена для неизотермической плазмы при наличии внешнего поля пока неизвестно, хотя опытные факты говорят в пользу этого решения. Некоторое обоснование такого решения в условиях плазмы можно, однако, получить при помощи следующих рассуждений. Стационарные функции распределения заряженных частиц в однородной плазме удовлетворяют уравнениям

$$\mathbf{w}_{0i} \frac{\partial F_{0i}}{\partial \mathbf{v}} = F_{0i}^0 - F_{0i}', \quad (6)$$

в которых мы ввели скорость направленного движения заряженных частиц

$$\mathbf{w}_{0i} = e E \tau_i / m_i, \quad (7)$$

зависящую от скорости их беспорядочного движения. Воспользовавшись теоремой о среднем [5], мы можем записать (6) в виде

$$W_{0i} \frac{\partial F_{0i}}{\partial \eta} = - \left. \frac{\partial F_{0i}}{\partial W_i} \right|_{W_i=W_l} W_{0i}, \quad (8)$$

где η — проекция $\mathbf{v}$ на направление поля $\mathbf{E}$, w_i — промежуточное значение W_i в промежутке $(0, W_{0i})$. Так как $F_{0i}|_{W_i=0}$ — максвелловская функция, то решением уравнения (8) будет функция типа ланжевеновской с тем отличием, что w_i зависит от скорости беспорядочного движения заряженных частиц. Решение уравнения (8) можно, однако, представить в виде ланжевеновских функций, пользуясь следующими соображениями. Если стационарная функция распределения имеет один максимум, то можно заменить w_i средней скоростью направленного движения частиц $\mathbf{v}_i$, так как вдали от максимума, где w_i становится заметно отличной от v_i , функция распределения близка к нулю. Решение уравнения (8) в этом случае будет представлено одной ланжевеновской функцией. Если же стационарная функция распределения имеет несколько максимумов, то ее можно представить в виде суммы ланжевеновских функций, каждая из которых соответствует определенной группе частиц, движущихся с определенной скоростью дрейфа, различной для различных групп частиц. Вид дисперсионного уравнения (5) при этом сохраняется, только i пробегает значения порядкового номера рассматриваемых групп частиц.

5. Уравнение (5) можно преобразовать к более простому виду. Введем новую переменную $u_i = u - w_{ix}$ и новый параметр $q_i = p_i - w_{ix}k$. Вид уравнения (5) не изменяется, только теперь F_{0i} будет максвелловской функцией распределения. Вводя безразмерные величины

$$\beta_i = (q_i - \tau_i^{-1}) / k s_i; \quad U_i = u_i / s_i,$$

где $s_i = \sqrt{\kappa T_i / m_i}$, и пользуясь преобразованием Фока [6, 7], получаем вместо (5)

$$1 + \sum_i \frac{(1 - A(\beta_i))}{k^2 a_i^2} = 0, \quad (9)$$

где

$$A(\beta_i) = \beta_i \exp \{ -\beta_i^2 / 2 \} \int_{-\infty}^{\beta_i} e^{z^2/2} dz;$$

$$a_i = \sqrt{\kappa T_i / 4\pi n_i e^2}.$$

Уравнение (9) является дисперсионным уравнением, применимым для исследования как высокочастотных, так и низкочастотных колебаний плазмы в электрическом поле, а также для исследования возбуждения колебаний плазмы потоками частиц. В этой статье мы исследуем уравнение (9) применительно к низкочастотным колебаниям плазмы.

6. Исследуем устойчивость равновесного состояния плазмы, состоящей из одной группы электронов и одной группы ионов, распределение которых по скоростям является максвелловским. Такое равновесное состояние плазмы возможно, когда нет никаких добавочных пучков частиц, пронизывающих плазму, и внешнее поле равно нулю. Ландау [2] показал, что высокочастотные колебания плазмы затухают во времени. Покажем, что и низкочастотные колебания плазмы также затухают во времени; таким образом будет решен вопрос об устойчивости равновесного состояния плазмы. Дисперсионное уравнение (9) для двух групп частиц принимает вид:

$$1 + \frac{1}{k^2 a_1^2} (1 - A(\beta_1)) + \frac{1}{k^2 a_2^2} (1 - A(\beta_2)) = 0. \quad (10)$$

Исследование уравнения (10) показывает, что оно не имеет решений, если фазовая скорость волн меньше тепловой скорости ионов. Для волн же, фазовая скорость которых удовлетворяет неравенствам

$$s_1 > \omega/k \gg s_2, \quad (11)$$

при вычислении $A(\beta_2)$ можно воспользоваться асимптотическим представлением интеграла, а при вычислении $A(\beta_1)$ — разложением показательной функции в степенной ряд и почленным интегрированием этого ряда. Пользуясь указанными разложениями и решая уравнение (10) методом последовательных приближений при условии $\omega \gg \gamma$, получаем для частоты колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{\omega_2^2 k^2 a_1^2}{1 + k^2 a_1^2} + 3k^2 a_2^2 \omega_2^2} \quad (12)$$

и для коэффициента затухания

$$\gamma = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{k a_1 \omega_2^2}{(1 + k^2 a_1^2)^{3/2} \omega_1} + \frac{1}{\tau_2}; \quad (13)$$

здесь $\omega_2 = \sqrt{4\pi n_2 e^2 / m_2}$. Формула (12) отличается от формулы Власова [1] (если пренебречь в последней ω_2 по сравнению с ω_1) только множителем 3 во втором члене под знаком квадратного корня. Это различие объясняется тем, что Власов рассматривал процесс колебаний как изотермический процесс, а не как адиабатический. Если же рассматривать процесс колебаний как адиабатический процесс (адиабатическое сжатие ионного газа по одной степени свободы), то множитель 3 появится и при гидродинамическом методе исследования. Из формулы (13) видно, что коэффициент затухания γ больше нуля, следовательно, колебания плазмы затухают во времени. При условии $\gamma \gg \omega$ получаем для частоты и коэффициента затухания формулы, аналогичные формулам Ландау

$$\omega = \pi (k/\xi) \sqrt{\kappa T_2 / m_2}; \quad (14)$$

$$\gamma = \xi k \sqrt{\kappa T_2 / m_2}, \quad (15)$$

где ξ определяется из уравнения

$$\sqrt{2\pi} \xi e^{\xi^2/2} = k^2 a_2^2. \quad (16)$$

Из уравнений (15), (16) видно, что колебания плазмы затухают и при $\gamma \gg \omega$. Следовательно, равновесное состояние плазмы в отсутствие внешних полей и с максвелловским распределением заряженных частиц является устойчивым.

7. Исследуем вопрос об устойчивости плазмы, находящейся во внешнем поле. Пусть она состоит из одной группы электронов и одной группы ионов. Дисперсионное уравнение для колебаний такой плазмы имеет вид (10), только для β_1 мы имеем теперь $\beta_1 = \frac{\omega - w_x k - i(\gamma - 1/\tau_1)}{k s_1}$, где w — скорость дрейфа электронов в системе координат, связанной с дрейфом ионов. В случае, когда $\omega \gg \gamma$, формула (12) для частоты остается без изменения, а для коэффициента затухания получаем

$$\gamma = \frac{(\omega - w_x k) \omega_2}{(1 + k^2 a_1^2)^{3/2} \omega_1} + \frac{1}{\tau_2}. \quad (17)$$

При $\omega_2 < w_x k$ и при условии, когда модуль первого члена в правой части (17) больше $1/\tau_2$, мы получаем не затухание колебаний, а воз-

буждение их. Коэффициент возбуждения $\gamma_1 = -\gamma$ имеет максимум при $k = k_0$, где

$$k_0 = 3\omega_2 / \omega_x. \quad (18)$$

Низкочастотные колебания плазмы возбуждаются за счет энергии, которую теряют на возбуждение электроны плазмы, уменьшая свою скорость дрейфа. Уменьшение скорости дрейфа электронов ведет к увеличению k_0 и к уменьшению коэффициента возбуждения колебаний γ_1 . Пока γ_1 остается больше нуля, уменьшение скорости дрейфа электронов не прекращается. Следовательно, стационарное состояние плазмы, в котором возможно возбуждение колебаний, является неустойчивым, и переходит в другое устойчивое состояние плазмы. Легко убедиться в том, что таким устойчивым состоянием является состояние с незатухающими колебаниями плазмы ($\gamma = 0$). В самом деле, пусть имеется состояние плазмы с незатухающими колебаниями. Предположим, что произошло случайное увеличение скорости дрейфа электронов. Тогда из (17), (18) видно, что k_0 уменьшится и γ_1 увеличится, следовательно возрастет потеря энергии на возбуждение колебаний, и скорость дрейфа электронов уменьшится. Предположим обратное — произошло случайное уменьшение скорости дрейфа электронов: тогда k_0 увеличится и γ_1 уменьшится, т. е. колебания плазмы будут затухать. Энергия колебаний будет расходоваться частично на тепловые потери, частично на увеличение скорости дрейфа электронов. Если бы не было внешнего поля, то состояние плазмы с незатухающими колебаниями никогда бы не восстановилось. Энергия внешнего поля восполняет тепловые потери энергии колебаний и восстанавливает незатухающие колебания плазмы. Таким образом состояние с незатухающими низкочастотными колебаниями плазмы, находящейся в постоянном внешнем электрическом поле, является устойчивым

Ленинградский горный
институт

Поступила в редакцию
19 июня 1953 г.

Литература

- [1] А. А. Власов. Теория многих частиц, ОГИЗ, 1950. — [2] Л. Д. Ландау. ЖЭТФ, 16, 574, 1946. — [3] P. Langevin. Ann. de phys., 5, 245, 1905; 8, 238, 1905. — [4] В. Л. Грановский. Электрический ток в газе, ГТТИ, 1952. — [5] В. И. Смирнов. Курс высшей математики, ГТТИ, 1949. — [6] В. А. Фок. Дифракция радиоволн, Изд-во АН СССР, 1946. — [7] Г. В. Гордеев. ЖЭТФ, 23, 660, 1952; 24, 445, 1953.

ВОЗБУЖДЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ ПЛАЗМЫ

Г. В. Гордеев

Рассмотрен вопрос о возбуждении высокочастотных и низкочастотных колебаний плазмы пучком заряженных частиц с учетом теплового разброса скоростей последних. Показано, что стационарное состояние плазмы и пучка частиц является неустойчивым. В отсутствие внешнего поля пучок рассеивается, и состояние системы переходит в равновесное состояние плазмы. При наличии внешнего постоянного электрического поля возможно устойчивое состояние системы с незатухающими высокочастотными и низкочастотными колебаниями плазмы.

1. Взаимодействие плазмы с немодулированным пучком заряженных частиц, состояние которого характеризуется постоянными и однородными плотностью и скоростью, рассматривалось Ахиезером и Файнбергом [1]. Авторы [1] рассматривали пучок гидродинамически, пренебрегая температурным разбросом скоростей частиц пучка, и изучали возбуждение высокочастотных (электронных) колебаний плазмы. В настоящей статье мы исследуем взаимодействие плазмы с пучком заряженных частиц, возникающим в плазме под действием постоянного внешнего электрического поля, при учете температурного разброса скоростей частиц пучка и покажем, что состояние системы с незатухающими как высокочастотными, так и низкочастотными колебаниями плазмы является устойчивым.

2. Рассмотрим неограниченную однородную плазму, находящуюся в постоянном внешнем электрическом поле. В работе [2] мы вывели дисперсионное уравнение колебаний плазмы во внешнем электрическом поле. В настоящей статье мы исследуем это уравнение, записанное для трех групп частиц: электронов плазмы, ионов плазмы и пучка заряженных частиц. Выберем систему координат, в которой скорость дрейфа ионов равна нулю. Дисперсионное уравнение колебаний плазмы принимает вид

$$1 + \frac{1}{k^2 a_1^2} (1 - A(\beta_1)) + \frac{1}{k^2 a_2^2} (1 - A(\beta_2)) + \frac{1}{k^2 a_3^2} (1 - A(\beta_3)) = 0, \quad (1)$$

где

$$A(\beta_i) = \beta_i \exp\{-\beta_i^2/2\} \int_{-\infty}^{\beta_i} e^{z^2/2} dz$$

— интеграл, исследованный нами в работе [3], а $a_i = \sqrt{\kappa T_i / 4\pi n_i e^2}$, $\beta_i = [\omega - \omega_i k - i(\gamma - 1/\tau_i)] / \kappa s_i$, причем T_i , n_i — температура и концентрация i -й группы заряженных частиц, а ω_i и τ_i — их скорость дрейфа и время свободного пробега; $s_i = \sqrt{\kappa T_i / m_i}$ мы будем называть тепловой скоростью данной группы частиц, масса которых m_i ; e — заряд электрона, κ — постоянная Больцмана. Дисперсионное уравнение (1) определяет зависимость частоты колебаний ω и коэффициента затухания γ от волнового числа k . Мы покажем, что пучок заряженных частиц возбуждает как высокочастотные, так и низкочастотные колебания плазмы. Возбуждение колебаний свидетельствует о неустойчи-

востии стационарного состояния плазмы, которое переходит в другое устойчивое состояние. Мы покажем, что таким состоянием является состояние с незатухающими колебаниями плазмы. Исследование дисперсионного уравнения (1) представляет собой нашу основную задачу.

3. Рассмотрим высокочастотные колебания плазмы. При высокочастотных колебаниях плазмы влиянием движения ионов на колебания плазмы можно пренебречь. Тогда дисперсионное уравнение (1) примет вид

$$1 + \frac{1}{k^2 a_1^2} (1 - A(\beta_1)) + \frac{1}{k^2 a_3^2} (1 - A(\beta_3)) = 0. \quad (2)$$

Установим связь дисперсионного уравнения (2) с уравнением Ахиезера и Файнберга [1].

Для сравнения уравнения (2) с уравнением Ахиезера и Файнберга мы должны положить внешнее поле равным нулю, а скорость пучка постоянной, и совершить предельный переход при $T_3 \rightarrow 0$. Воспользовавшись асимптотическим представлением $A(\beta_3)$ [3] и устремляя $T_3 \rightarrow 0$, получим

$$1 + \frac{1}{k^2 a_1^2} (1 - A(\beta_1)) - \frac{1}{k^2 a_3^2 \beta_3^2} = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) есть не что иное, как уравнение Ахиезера и Файнберга [1], записанное в безразмерных переменных. Таким образом, их уравнение содержится в уравнении (2).

Ахиезер и Файнберг исследовали уравнение (3) в предельных случаях $\omega_3 \gg s_1$ и $\omega_3 \ll s_1$ и показали, что исходное состояние пучка является неустойчивым и что возникающие в плазме и пучке флуктуации поля и плотности зарядов распространяются в виде волн с нарастающей амплитудой. Герценштейн [4] заметил, что результат Ахиезера и Файнберга, касающийся возможности возбуждения колебаний плазмы пучком электронов при $\omega_3 \ll s_1$, не применим к плазме из-за теплового движения ионов. Однако это замечание Герценштейна является ошибочным. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть два предельных случая: $\omega/k \gg s_2$ и $\omega/k \ll s_2$, когда фазовая скорость волн много больше или много меньше тепловой скорости ионов.

В первом случае при вычислении члена $(1/k^2 a_2^2) (1 - A(\beta_2))$, представляющего собой вклад в дисперсионное уравнение (1) от ионов плазмы, можно воспользоваться асимптотическим представлением $A(\beta_2)$. Ограничиваясь первыми двумя членами асимптотического представления $A(\beta_2)$, получаем

$$\frac{1}{k^2 a_2^2} (1 - A(\beta_2)) = \frac{1}{k^2 a_2^2 \beta_2^2}. \quad (4)$$

Сравнивая этот член с последним членом в левой части уравнения (3), мы убеждаемся в том, что движение ионов не оказывает влияния на возбуждаемые пучком электронов колебания плазмы, если фазовая скорость волн удовлетворяет неравенствам

$$\omega_3 > \omega/k \gg \omega_3/[1 + (\omega_3/\omega_2)]. \quad (5)$$

Так как ω_3/ω_2 , равное $\sqrt{n_3 m_2/n_1 m_3}$, при достаточной плотности пучка электронов будет много больше единицы, то неравенство (5) выполнимо. Следовательно, результат Ахиезера и Файнберга справедлив в

предельном случае $s_2 \ll w_3 \ll s_1$. В другом предельном случае, когда $\omega/k \ll s_2$, нельзя пользоваться асимптотическим представлением $A(\beta_2)$, но можно в первом приближении заменить верхний предел интеграла, входящего в $A(\beta_2)$, нулем, так как $|\beta_2|$ близко к нулю. Следовательно,

$$\frac{1}{k^2 a_2^2} (1 - A(\beta_2)) = i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \beta_2 e^{-\beta_2^2/2} + \frac{1}{k^2 a_2^2},$$

и наличие ионов будет только усиливать возбуждаемые пучком электронов колебания плазмы, фазовая скорость которых близка к скорости частиц пучка. Таким образом, замечание Герценштейна о невозможности возбуждения колебаний плазмы пучком электронов при сколь угодно малой скорости электронов пучка является ошибочным.

4. Исследуем уравнение (2) в том случае, когда нельзя пренебрегать температурным разбросом скоростей электронов пучка, а именно когда $s_3 > |w_3 - (\omega/k)|$, т. е. разность между фазовой скоростью волн и скоростью дрейфа электронов пучка меньше тепловой скорости последних. В этом случае при вычислении $A(\beta_3)$ нельзя пользоваться его асимптотическим представлением, но можно разложить показательные функции в степенной ряд и почленно интегрировать этот ряд. При вычислении же $A(\beta_1)$ можно воспользоваться его асимптотическим представлением. Пользуясь указанными разложениями и разрешая уравнение (2) методом последовательных приближений, получаем для частоты колебаний

$$\omega = \sqrt{[\omega_1^2 k^2 a_3^2 / (1 + k^2 a_3^2)] + 3k^2 a_1^2 \omega_1^2} \quad (6)$$

и для коэффициента возбуждения колебаний $\gamma_1 = -\gamma$

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{(w_3 k - \omega) \omega_1}{(1 + k^2 a_3^2)^{3/2} \omega_3} - \frac{1}{\tau_1}; \quad (7)$$

формула (6) имеет смысл при условии $a_3^2 \gg a_1^2$ или $n_3 \ll T_3 n_1 / T_1$. При $k^2 a_3^2 \gg 1$ формула (6) переходит в формулу Власова

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + 3k^2 a_1^2 \omega_1^2}. \quad (8)$$

При $k^2 a_3^2 \ll 1$ формула (6) определяет частоту акустических колебаний

$$\omega = k \sqrt{(n_1/n_3) (\kappa T_3/m_1)}, \quad (9)$$

распространяющихся со скоростью «звука», которая больше тепловой скорости электронов плазмы. Коэффициент возбуждения колебаний имеет максимум при $k = k_0$, где

$$k_0 \approx {}^{3/2} (\omega_1/w_3).$$

Возбуждение колебаний плазмы происходит за счет энергии электронов пучка, которые уменьшают при этом свою скорость дрейфа. Уменьшение скорости дрейфа электронов пучка увеличивает k_0 и уменьшает максимальный коэффициент возбуждения колебаний. Уменьшение максимального коэффициента возбуждения колебаний идет до тех пор, пока он не обратится в нуль. Легко видеть, что состояние

плазмы с незатухающими высокочастотными колебаниями плазмы при наличии внешнего поля является устойчивым. В самом деле, при увеличении скорости дрейфа электронов пучка увеличивается коэффициент возбуждения колебаний, следовательно, увеличивается потеря энергии на возбуждение колебаний, что приводит к обратному уменьшению скорости дрейфа электронов пучка. При уменьшении скорости дрейфа электронов пучка возрастает коэффициент затухания колебаний, что приводит к уменьшению энергии колебаний плазмы вследствие тепловых потерь и вследствие передачи энергии на увеличение скорости дрейфа электронов пучка. Если бы не было внешнего поля, то состояние плазмы с незатухающими колебаниями никогда бы не восстановилось из-за тепловых потерь энергии колебаний. Энергия электрического поля восполняет тепловые потери энергии колебаний и восстанавливает незатухающие колебания плазмы. Таким образом состояние плазмы с незатухающими высокочастотными колебаниями плазмы, находящейся в постоянном электрическом внешнем поле, является устойчивым.

5. Зависимость частоты и длины волны колебаний от давления газа можно определить, рассматривая частный случай, когда $\omega \sim 1/\tau_1$. При этом давление газа будет $p \approx l_0/a_1$ мм рт. ст., где l_0 — длина свободного пробега электронов при $p = 1$ мм рт. ст. Уравнение (2) в этом случае имеет решение, определяющее частоту колебаний

$$\omega = \omega_3 k - \sqrt{\omega_3^2 + 3k^2 a_3^2 \omega_3^2} \quad (10)$$

и коэффициент возбуждения колебаний

$$\gamma_1 = \omega \omega_1^2 \omega_3 / \tau_1 (\omega^2 + \tau_1^{-2})^2. \quad (11)$$

γ_1 имеет максимум при $\omega = 1/\tau_1$ или $k = 1/\tau_1 \omega_3$. При увеличении давления газа длина волны, соответствующая максимуму коэффициента возбуждения колебаний, уменьшается, тогда как соответствующая ей частота колебаний увеличивается.

6. Для низкочастотных колебаний плазмы наличие пучка заряженных частиц вносит добавочное возмущение, которое усиливает возбуждение колебаний, происходящее от дрейфа электронов плазмы во внешнем поле. При этом возбуждаемые волны могут распространяться также и с фазовой скоростью, которая меньше тепловой скорости ионов плазмы. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим низкочастотные колебания плазмы, возбуждаемые пучком ионов, движущимся против скорости дрейфа электронов. Пусть скорость пучка будет меньше тепловой скорости ионов плазмы. Пучок ионов будет возбуждать волны, движущиеся с фазовой скоростью, которая меньше тепловой скорости ионов. Решая уравнение (1) в этом случае методом последовательных приближений, получаем для частоты колебаний

$$\omega = \omega_3 k - \omega_3 k a_2 / \sqrt{1 + k^2 a_2^2} \quad (12)$$

и для коэффициента возбуждения

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{k a_2^3 \omega_3}{(1 + k^2 a_2^2)^{3/2}} \left(\frac{\omega_1}{s_1 a_1^2} + \frac{\omega_3}{s_2 a_2^2} \right) - \frac{1}{\tau_2}. \quad (13)$$

Максимум γ достигается при $k a_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}$.

Возбуждение колебаний плазмы происходит за счет энергии электронов плазмы и ионов пучка, которые уменьшают при этом свою скорость дрейфа. Уменьшение скорости дрейфа электронов плазмы и ионов пучка идет до тех пор, пока $v_{1\text{ макс}}$ не обратится в нуль. Дальнейшее случайное уменьшение скорости дрейфа заряженных частиц увеличивает затухание колебаний и обратную передачу части энергии колебаний пучку заряженных частиц, увеличивая скорость дрейфа последних. Тепловые потери энергии колебаний восполняются энергией поля. Таким образом, незатухающие низкочастотные колебания плазмы, фазовая скорость которых меньше тепловой скорости ионов, также являются устойчивыми.

Ленинградский горный
институт

Поступила в редакцию
19 июня 1953 г.

Литература

- [1] А. И. Ахиезер и Я. Б. Файнберг. ЖЭТФ, 11, 1262, 1951. —
[2] Г. В. Гордеев. ЖЭТФ, этот выпуск, стр. 19. — [3] Г. В. Гордеев. ЖЭТФ,
24, 445, 1953. — [4] М. Е. Герценштейн. ЖЭТФ, 23, 669, 1953.
-

УРОВНИ НУКЛОНОВ НА ОСНОВЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ПРИЗНАКОВ

М. А. Левитская

Показано, что введенное ранее автором понятие «оснований» ядер дает ясное указание на роль чисел $2(l+1)$ в строении ядер. Оделана попытка соединить эти числа, относящиеся к последовательным Z , с распределением ядер одинаковых оснований по уровням протонов. Подтверждением правильности такого распределения служит согласующееся с ним распределение спинов и близость уровней s к особым зонам, т. е. к скачкам в числе нейтронов и к сдвигам значений энергий связи. Предложенная схема уровней объясняет нестабильность ядер с $Z = 43$ и 61 и связывает их с особенными местами графика распространенности ядер во Вселенной.

1. Причины, побуждающие искать новую систему уровней

Предположение о существовании ядерных оболочек было высказано впервые Иваненко и Гапоном еще в 1932 г. [1]. В дальнейшем наметились два направления в развитии системы ядерных оболочек: статистический метод, разрабатываемый у нас Иваненко и его учениками [2], и метод одной частицы в прямоугольной потенциальной яме, представителем которого в настоящее время является Гепперт-Майер. Последняя система приобрела сейчас общее признание во всей иностранной научной литературе [3]. Также и советские ученые в настоящее время, повидимому, почти всецело склонны принимать эту систему за истинную [4]. Между тем система ядерных оболочек Гепперт-Майер не объясняет ряда особенностей системы стабильных ядер и часто не согласуется с ними. Сюда относятся:

1. Ясно выраженное в системе ядер стремление протонов и нейтронов соединяться парами: четный протон всегда следует за нечетным непосредственно, тогда как нечетный следует за четным через четное число нейтронов; нейтроны присоединяются преимущественно парами в тяжелых ядрах; все нечетные ядра существенно отличаются по своим свойствам от четных. Соединение нуклонов в пары ведет к образованию α -частиц, которые могут вылетать из ядра. Опыты с синхротроном [5] показали, что вылет нуклонов происходит преимущественно парами. Все эти факты не совмещаются с распределением нуклонов в ядрах по системе Гепперт-Майер.

2. Существование атомных номеров, не имеющих ни одного стабильного изотопа (43, 61). В системе Гепперт-Майер $Z = 43$ приходится на третье место на уровне $1g_{7/2}$, а $Z = 61$ на третье место на уровне $2d_{5/2}$, и причины нестабильности этих состояний совершенно необъяснимы.

3. Система Гепперт-Майер не объясняет появления двух изотопов нечетных ядер в определенных местах системы ядер и ряда особых физических свойств этих мест, указывающих на их особое значение [6].

4. Опираясь на «магические числа» 2, 8, 20, 50, 82, 126, признаваемые числами, соответствующими наибольшей прочности ядер (как для Z , так и для N), система Гепперт-Майер не может объяснить наибольшей распространенности железа среди элементов с $Z > 20$. Также она не может объяснить несомненно связанную с тем же фактом наибольшую величину энергии связи на один нуклон между $Z = 22$ и 30. Гепперт-Майер делает

попытку объяснить большую распространенность железа [7] тем, что оно как бы заменило Ni, который по ее системе должен был бы быть одним из наиболее распространенных элементов (Fe^{56} произошел из Ni^{56} путем двойного β -распада). Но, почему сугубо прочное ядро (и в отношении Z , и в отношении N) никеля 56 оказалось нестабильным, — необъяснимо.

5. Система Гепперт-Майер и другие системы оболочек протонов и нейтронов как независимых частиц не может объяснить порядка усложнения стабильных ядер, в которых ясно обнаруживаются определенные закономерности [8], в особенности явное стремление к образованию α -групп¹.

Во всей зарубежной литературе поддерживается утверждение, что система оболочек как для протонов, так и для нейтронов одна и та же и что поведение нейтронов в ядрах одинаково с поведением протонов². Однако этому очень трудно поверить, имея налицо следующие факты:

1. Существуют числа нейтронов, не принадлежащие ни одному стабильному ядру, и эти числа иные, чем для нестабильных Z . Эти числа — $N = 19, 35, 39, 45$ и 61 .

2. Число нейтронов в стабильных ядрах выше $Z = 20$ сравнительно редко изменяется на единицу: в тяжелых ядрах в подавляющем числе случаев это число изменяется сразу на два, число же протонов стабильных ядер, за исключением только двух случаев, все время изменяется на единицу.

3. Число нейтронов возрастает несравненно быстрее, чем число протонов.

Различное поведение нейтронов сравнительно с протонами отчетливо обнаруживается на графиках энергии связи в зависимости от Z и от N (рис. 1 и 2). В то время как четные и нечетные Z от 8 до 20 дают точки, лежащие на двух расходящихся прямых, исходящих из O , четные и нечетные N от 6 до 20 дают две сходящиеся прямые с точкой схождения при $Z = 22$. Подобное же различное поведение наблюдается при Z и N между 22 и 29.

График $E_{\text{св}} = f(Z)$ особенно ясно указывает на области «особых зон». Это области, в которых при повышении Z число нейтронов внезапно возрастает и в которых (на протяжении особой зоны) прямые четных Z , старая и новая, идут параллельно, причем за особой зоной остается одна новая прямая, и соответственно вся полоса точек изотопов сдвигается относительно старой влево. Этот сдвиг мы имеем в области $Z = 16-20$ (первая особая зона) и в области $Z = 29-38$ (вторая особая зона). Несомненно то же мы будем иметь и в последующих особых зонах, когда мы будем располагать значениями энергии связи ядер выше $Z = 32$. В литературе уже было высказано предположение [9], что имеется связь между внезапным изменением изотопического номера и ядерными оболочками. Действительно, общий вид рис. 1 и 2, а также графики, приведенные в работе [10], приводят к убеждению, что места «особых зон» представляют ступени в развитии ядер. Эти ступени сопровождаются скачками в энергии связи всего ядра и несомненно ведут к поддержанию его стабильности. Заметим, что «магические числа» лежат в особых зонах, причем для N они совпадают с концом «особых зон».

Не считаться при построении нуклонных оболочек с фактом существования «особых зон» или скачков в величине энергии связи, связанных со скачками в числе нейтронов, нам представляется непозволительным.

Все системы периодизации ядер, предложенные как иностранными, так и советскими авторами [11], не объясняют особенностей эмпирической

¹ Здесь не приходится говорить об α -частицах, так как группы $2n2p$ внутри ядер могут быть отличны и по своей конфигурации, и по своей энергии связи от свободных α -частиц.

² Последнее открыто доказывалось некоторыми авторами; утверждение одинаковости уровней без указания связи их для n и p служит выражением этого мнения.

системы ядер, указанных в этом разделе. Поэтому представляется необходимым сделать попытку построения системы оболочек стабильных ядер, согласующейся с указанными особенностями.

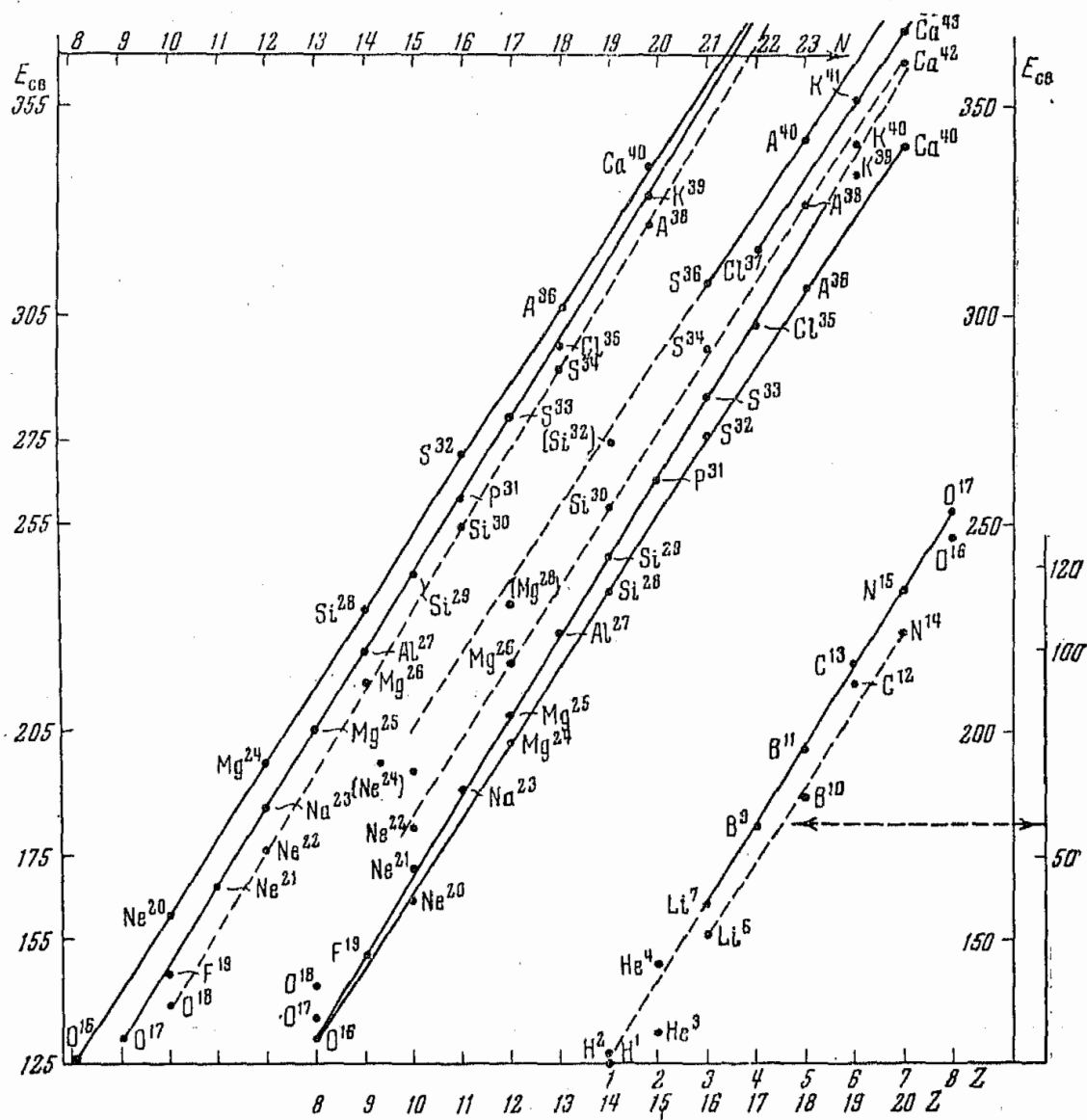


Рис 1. Энергия связи стабильных ядер в зависимости от числа протонов (справа) и числа нейтронов (слева)

2. Распределение ядер по уровням протонов в соответствии с «основаниями»

Система уровней, предлагаемая Гепперт-Майер, а также и все системы, исходящие из основной работы Эльзассера [12], опираются на поведение одного нуклона в поле центральной силы. Таким полем принято считать поле пространственного осциллятора, ограниченное краями потенциальной ямы. Хотя Ферми и указывает основания, допускающие такое предположение [13], однако существование одного общего центра сил для постепенно накапливающихся нуклонов сомнительно из-за специфических особенностей ядерных сил. Спектроскопические обозначения уровней, принятые в современной физике ядра, соответствуют представлению об орбитальном движении нуклонов вокруг одного и того же центра сил. Числа нуклонов на различных уровнях являются числами Паули $2(2l + 1)$, и заполнение оболочек происходит согласно этим числам. Все это связано с некоторым центральным полем для ядерных частиц, и, сомневаясь в существовании такого поля, можно сомневаться и в роли чисел Паули для заполнения уровней. Однако существует одно-

эмпирическое указание на то, что числа Паули действительно играют роль в постепенно усложняющемся составе ядер.

В моих прежних работах [14] было введено понятие об «основаниях» ядер. Рассматривая таблицу ядер, последовательных Z , мы убеждаемся

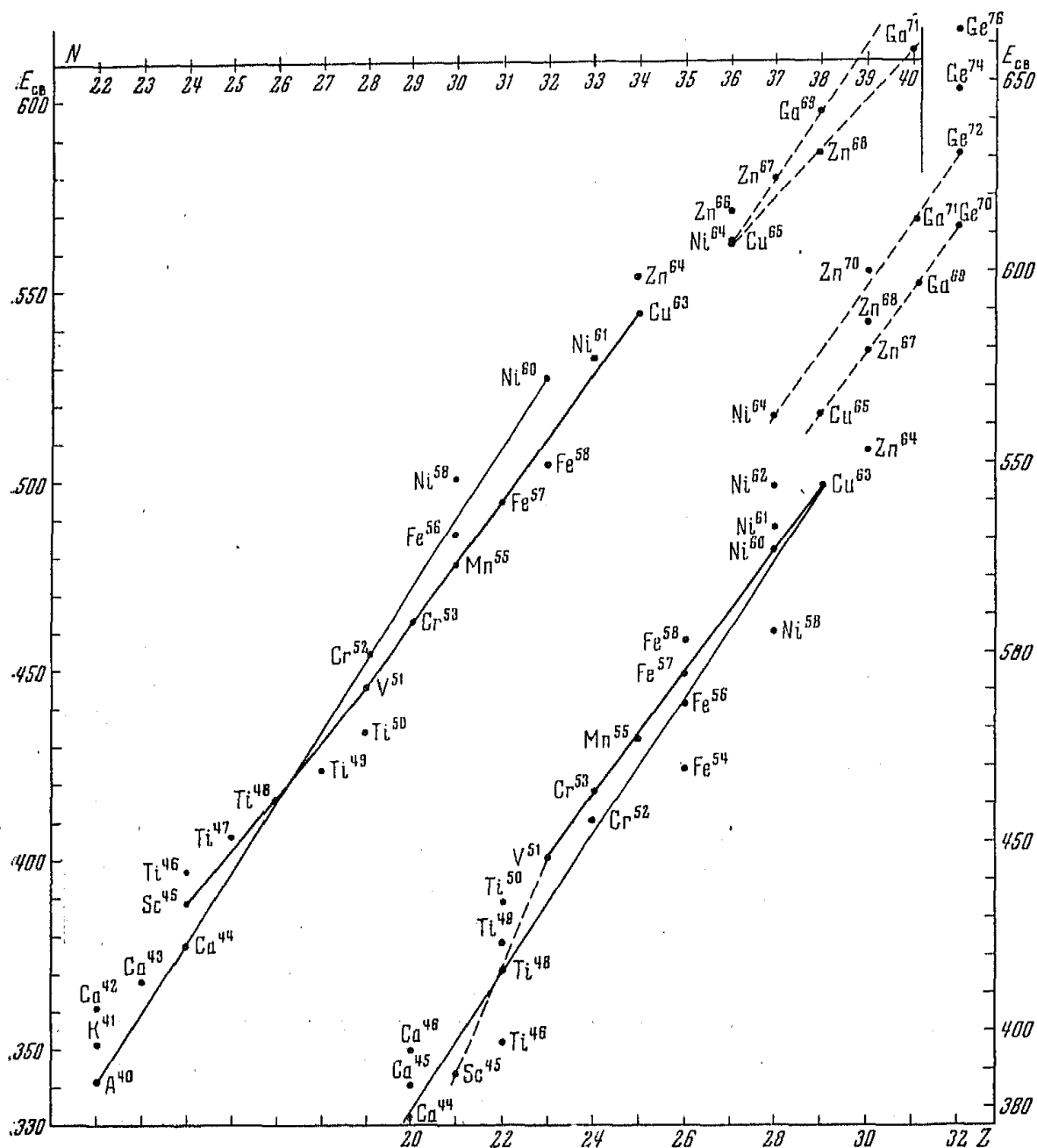


Рис. 2. Энергии связи ядер в зависимости от числа протонов Z и числа нейтронов N выше $Z(N) = 20$

что, начиная с $Z = 8$, каждый нечетный протон присоединяется к ядру после предыдущего четного протона не непосредственно, а непременно после некоторого четного числа новых нейтронов. Наименьшее число их равно двум, так что пара нейтронов представляется необходимой связью нечетного протона с предыдущим ядром. Мною была названа «основанием» группа нуклонов, в которой присоединяется новый нечетный протон посредством двух нейтронов. Оказывается, что эти «основания» на всем протяжении системы ядер имеют форму $m\alpha + qn$, где q — четное число. Четный протон присоединяется непосредственно вслед за нечетным. Вся совокупность ядер, последовательных Z , при Z выше 8 представляет ряд цепей ядер, каждая со своим основанием, характеризуемым числом q . Эти цепи частично налагаются друг на друга. Кроме ядер в цепях,

существуют еще ядра (наиболее тяжелые изотопы) с добавочными парами нейтронов. Ядра до $Z = 8$ представляют особые группы, в которых переход от четного ядра к нечетному иной, чем после $Z = 8$: он состоит в прибавлении к четному ядру $n + p$; параллельно идет ряд от прибавления $2n + p$, как это показано в табл. 4 (см. ниже).

Число m для оснований постепенно нарастает в цепях на единицу, но q на известном протяжении чисел Z остается одним и тем же. Табл. 1 показывает числа N_Z атомных номеров, в которых сохраняется одно и

Таблица 1³

q	N_Z	q	N_{2Z}
0	14	22	5
2	6	24	7
4	10	26	9
6	6	28	6
8	10	30	7
10	10	32	7
12	10	34	5
14	6	36	5
16	4	38	3
18	6	40	5
20	6	42	3

Таблица 2

q	Присоединение кончается при		$m - q$
	m	Z	
2	10	20	8
4	14	28	10
6	16	32	10
8	18	38	10
10	20	40	10
12	22	44	10
14	24	48	10
16	25	50	9
18	28	56	10

то же q . q — число «свободных» (не соединенных в пару с протоном) нейтронов в основании. Таким образом, числа второго столбца — это числа ядер, последовательных Z , имеющих одно и то же число свободных нейтронов. Выделение оснований, конечно, включает в себе идею о соединении нуклонов в α -группы и о роли свободных нейтронов как частиц, связывающих эти группы. Но замечательно то, что числа второго столбца, т. е. числа ядер последовательных Z , имеющих одно и то же число свободных нейтронов, это — числа $2(2l + 1)$. Выше $q = 20$ для сокращения даны числа только четных ядер при одном и том же q . Промежуточные нечетные ядра считаются имеющими то же основание. Поэтому числа ядер выше $q = 20$ должны быть умножены на два, и тогда мы опять имеем числа вида $2(2l + 1)$ ⁴.

Приведу здесь факты, указывающие, что основания несомненно имеют определенное физическое значение. В этом убеждают табл. 2 и 3. В табл. 2 даны к каждому основанию числа m , соответствующие окончанию действия основания, когда m в основании достигает наибольшего значения. Число $m - q$ можно понимать как число α -групп, не нуждающихся в добавочных нейтронах. Повторяющееся число $m - q = 10$ невозможно не связать с наибольшим числом α -групп, взаимно уравнивающих без добавочных нейтронов (Ca_{20}^{40}). Табл. 2 вызывает представление о том, что внутри ядра существует свое ядро, состоящее из α -частиц, максимальное число которых равно 10.

Однако это наблюдается кончая $m = 28$, т. е. барьером. Дальше число $m - q$ все падает и делается равным нулю при $Z = 84$ у первого элемента, не имеющего уже ни одного стабильного изотопа. Таким образом, из табл. 2 и 3 можно вывести следующие два заключения.

³ Число N_Z показывает, в скольких последовательных Z сохраняется одно и то же q . Число N_{2Z} дает число последовательных четных Z с одним и тем же q .

⁴ Таким образом, нечетное ядро имеет $A = (4m + q) + 2 + 1$, четное же — имеет $A = (4m + q) + 2 + 2 = 4(m + 1) + q$.

Таблица 3

q	Основание кончается при		$m - q$	q	Основание кончается при		$m - q$
	m	Z			m	Z	
20	29	58	9	32	38	76	6
22	30	60	8	34	38	76	4
24	32	64	8	36	39	78	3
26	34	68	8	38	40	80	2
28	35	70	7	40	41	82	1
30	36	72	6	42	42	84	0

1. $Z = 56$ представляет какой-то поворотный пункт в строении ядер.

2. Когда число «свободных» нейтронов в основании делается равным числу α -частиц, наступает предел стабильных форм ядра.

Табл. 1 убеждает в том, что числа Паули определенно играют роль в строении ядер. Эта же таблица, как и ряд других несомненных закономерностей в усложнении ядер [8], свидетельствует, что протоны невозможно рассматривать отдельно от нейтронов, что ядра, а не отдельные протоны, надо разделять на группы, характеризующиеся числами Паули в отношении протонов. Весьма вероятно, что существует группировка ядер и по числам нейтронов, но в настоящей работе мы ограничимся только уровнями протонов, в соответствии с которыми ядра объединяются в отдельные группы при последовательном возрастании Z .

Числа Паули относятся к частицам, подчиняющимся статистике Ферми, т. е. к не зависящим друг от друга частицам в одинаковом потенциальном поле. Если такими являются протоны, то, конечно, несовместимым со свойствами частиц Ферми является то, что они одновременно входят в состав α -групп. Но в этом и заключается загадка строения ядер, одинаково неразрешенная и системой Гепперт-Майер. Каковы в действительности законы соединения между собой протонов и нейтронов в ядрах, имеющих большое число нуклонов, до сих пор неизвестно [15]. Здесь я хочу только показать, что уровни протонов, выводимые мною на основании признаков табл. 1 и табл. 2, согласуются с экспериментальными фактами и, в первой своей половине (до $Z = 43$), с другими предложенными системами.

При разделении ядер на группы по протонам я руководствовалась следующими экспериментальными признаками:

1. Выделяемые группы должны следовать числам $2(2l + 1)$ табл. 1, т. е. в группе должно сохраняться одно и то же основание.

2. Закон накопления частиц должен оставаться в одной и той же группе неизменным.

3. Особые законы отмечаются появлением новых параллельных цепей ядер, отчасти накладывающихся на предыдущие.

4. Нестабильные ядра могут появляться как первые члены группы, соответствуя первым, наименее устойчивым членам нового уровня протонов⁵.

Табл. 4 дает распределение ядер по уровням протонов от $Z = 1$ до $Z = 43$. Таблица нуждается в пояснениях, которые приводятся ниже. Группы с одинаковым основанием, имеющие два члена, приняты за s -уровни, с шестью членами — за p -уровни, с десятью — за d -уровни.

⁵ Может показаться, что «закон Паули» обязывает к распределению ядер по уровням α -частиц, но табл. 1 показывает, что числа $2(2l + 1)$ относятся именно к последовательным Z .

Распределение ядер по уровням протонов соответственно основаниям до $Z = 43$

$1s$ I^2/I^2_1		$2s$ I^3/I^3_2	
$2p$		$2p'$	
Li^6_3 $\alpha + n$ $+ p$	Be^8_4 2α $+ n + p$	Li^7_3 α $+ 2n + p$	Be^9_4 2α $+ n$
	B^{10}_5 2α $+ n + p$		B^{11}_5 2α $+ 2n + p$
	C^{12}_6 3α $+ n + p$		C^{13}_6 3α $+ n$
	N^{14}_7 3α $+ n + p$		N^{15}_7 3α $+ 2n + p$
	O^{16}_8 4α		O^{17}_8 4α $+ n$
$3d (m\alpha + 0n)$		$3p' (m\alpha + 2n)$	
Fe^{20}_9 4α $+ 2n + p$	Na^{23}_{11} 5α $+ 2n + p$	Ne^{22}_{10} 5α $+ 2n$	(Na^{23}_{11}) $5\alpha + 2n$ $+ 2n + p$
	Mg^{24}_{12} 6α $+ 2n + p$		Mg^{26}_{12} $6\alpha + 2n$ $+ 2n + p$
	Al^{27}_{13} 6α $+ 2n + p$		(Al^{29}_{13}) $6\alpha + 2n$ $+ 2n + p$
	Si^{28}_{14} 7α $+ 2n + p$		Si^{30}_{14} $7\alpha + 2n$ $+ 2n + p$
	P^{31}_{15} 7α $+ 2n + p$		(P^{33}_{15}) $7\alpha + 2n$ $+ 2n + p$
	S^{32}_{16} 8α $+ 2n + p$		S^{34}_{16} $8\alpha + 2n$ $+ 2n + p$
	Cl^{35}_{17} 8α $+ 2n + p$		Cl^{37}_{17} $8\alpha + 2n$ $+ 2n + p$
	Ar^{36}_{18} 9α		Ar^{38}_{18} $9\alpha + 2n$ $+ 2n + p$
$3s (m\alpha + 0n)$		$3p_{(1)} (m\alpha + 2n)$	
	K^{39}_{19} 9α $+ 2n + p$		K^{41}_{19} $9\alpha + 2n$ $+ 2n + p$
	Ca^{40}_{20} 10α		Ca^{44}_{20} $10\alpha + 2n$ $+ 2n + p$
	Ti^{48}_{22} $11\alpha + 4n$ $+ 2n + p$		Ti^{50}_{22} $11\alpha + 4n$ $+ 2n + p$
	V^{51}_{23} $11\alpha + 4n$ $+ 2n + p$		V^{53}_{23} $11\alpha + 4n$ $+ 2n + p$
	Cr^{52}_{24} $12\alpha + 4n$ $+ 2n + p$		Cr^{56}_{24} $12\alpha + 4n$ $+ 2n + p$
	Mn^{55}_{25} $12\alpha + 4n$ $+ 2n + p$		Mn^{59}_{25} $12\alpha + 4n$ $+ 2n + p$
	Fe^{56}_{26} $13\alpha + 4n$ $+ 2n + p$		Fe^{60}_{26} $13\alpha + 4n$ $+ 2n + p$
	Co^{59}_{27} $13\alpha + 4n$ $+ 2n + p$		Co^{63}_{27} $13\alpha + 4n$ $+ 2n + p$
	Ni^{61}_{28} $14\alpha + 6n$ $+ 2n + p$		Ni^{65}_{28} $14\alpha + 6n$ $+ 2n + p$
	(Co^{61}_{27}) $14\alpha + 6n$ $+ 2n + p$		(Co^{63}_{27}) $14\alpha + 6n$ $+ 2n + p$
	Zn^{64}_{30} $15\alpha + 6n$ $+ 2n + p$		Zn^{68}_{30} $15\alpha + 6n$ $+ 2n + p$
	Ga^{69}_{31} $15\alpha + 6n$ $+ 2n + p$		Ga^{73}_{31} $16\alpha + 6n$ $+ 2n + p$
	Ge^{70}_{32} $16\alpha + 6n$		Ge^{74}_{32} $16\alpha + 6n$
$4p (m\alpha + 6n)$		$4p_{(2)} (m\alpha + 4n)$	
	Se^{78}_{34} 17α $+ 10n$		Se^{82}_{34} $17\alpha + 8n$ $+ 2n + 1$
	Br^{81}_{35} 18α $+ 10n$		Br^{85}_{35} $17\alpha + 8n$ $+ 2n + 1$
	Kr^{84}_{36} 18α $+ 10n$		Kr^{88}_{36} $18\alpha + 8n$ $+ 2n + 1$
	Rb^{87}_{37} $18\alpha + 12\gamma$ $+ 2n + p$		Rb^{91}_{37} 19α $+ 12n$
	Sr^{88}_{38} 19α $+ 12n$		Sr^{92}_{38} 19α $+ 12n$
	Y^{89}_{39} $19\alpha + 10n$ $+ 2n + p$		Y^{93}_{39} $19\alpha + 12n$ $+ 2n + p$
	Zr^{90}_{40} 20α $+ 10n$		Zr^{94}_{40} 20α $+ 12n$
	Nb^{93}_{41} $20\alpha + 10n$ $+ 2n + p$		(Nb^{95}_{41}) $20\alpha + 12n$ $+ 2n + p$
	Mo^{94}_{42} 21α $+ 10n$		Mo^{98}_{42} 21α $+ 12n$

Распределение ядер по уровням протонов выше $Z = 43$

$4d_{(2)} (m\alpha + 12n)$										$5p'_{(1)} (m\alpha + 16n)$									
$5s$										$5p'_{(2)} (m\alpha + 20n)$									
$5s$										$5d'_{(1)} (m\alpha + 24n)$									
$5s$										$5d'_{(2)} (m\alpha + 28n)$									
$6s$										$6p'_{(1)} (m\alpha + 32n)$									
$6s$										$6p'_{(2)} (m\alpha + 36n)$									
$7s$										$7p'_{(1)} (m\alpha + 40n)$									
$7s$										$7p'_{(2)} (m\alpha + 44n)$									
$8s$										$8p'_{(1)} (m\alpha + 48n)$									
$8s$										$8p'_{(2)} (m\alpha + 52n)$									
$9s$										$9p'_{(1)} (m\alpha + 56n)$									
$9s$										$9p'_{(2)} (m\alpha + 60n)$									
$10s$										$10p'_{(1)} (m\alpha + 64n)$									
$10s$										$10p'_{(2)} (m\alpha + 68n)$									
$11s$										$11p'_{(1)} (m\alpha + 72n)$									
$11s$										$11p'_{(2)} (m\alpha + 76n)$									
$12s$										$12p'_{(1)} (m\alpha + 80n)$									
$12s$										$12p'_{(2)} (m\alpha + 84n)$									
$13s$										$13p'_{(1)} (m\alpha + 88n)$									
$13s$										$13p'_{(2)} (m\alpha + 92n)$									
$14s$										$14p'_{(1)} (m\alpha + 96n)$									
$14s$										$14p'_{(2)} (m\alpha + 100n)$									
$15s$										$15p'_{(1)} (m\alpha + 104n)$									
$15s$										$15p'_{(2)} (m\alpha + 108n)$									
$16s$										$16p'_{(1)} (m\alpha + 112n)$									
$16s$										$16p'_{(2)} (m\alpha + 116n)$									
$17s$										$17p'_{(1)} (m\alpha + 120n)$									
$17s$										$17p'_{(2)} (m\alpha + 124n)$									
$18s$										$18p'_{(1)} (m\alpha + 128n)$									
$18s$										$18p'_{(2)} (m\alpha + 132n)$									
$19s$										$19p'_{(1)} (m\alpha + 136n)$									
$19s$										$19p'_{(2)} (m\alpha + 140n)$									
$20s$										$20p'_{(1)} (m\alpha + 144n)$									
$20s$										$20p'_{(2)} (m\alpha + 148n)$									
$21s$										$21p'_{(1)} (m\alpha + 152n)$									
$21s$										$21p'_{(2)} (m\alpha + 156n)$									
$22s$										$22p'_{(1)} (m\alpha + 160n)$									
$22s$										$22p'_{(2)} (m\alpha + 164n)$									
$23s$										$23p'_{(1)} (m\alpha + 168n)$									
$23s$										$23p'_{(2)} (m\alpha + 172n)$									
$24s$										$24p'_{(1)} (m\alpha + 176n)$									
$24s$										$24p'_{(2)} (m\alpha + 180n)$									
$25s$										$25p'_{(1)} (m\alpha + 184n)$									
$25s$										$25p'_{(2)} (m\alpha + 188n)$									
$26s$										$26p'_{(1)} (m\alpha + 192n)$									
$26s$										$26p'_{(2)} (m\alpha + 196n)$									
$27s$										$27p'_{(1)} (m\alpha + 200n)$									
$27s$										$27p'_{(2)} (m\alpha + 204n)$									
$28s$										$28p'_{(1)} (m\alpha + 208n)$									
$28s$										$28p'_{(2)} (m\alpha + 212n)$									
$29s$										$29p'_{(1)} (m\alpha + 216n)$									
$29s$										$29p'_{(2)} (m\alpha + 220n)$									
$30s$										$30p'_{(1)} (m\alpha + 224n)$									
$30s$										$30p'_{(2)} (m\alpha + 228n)$									
$31s$										$31p'_{(1)} (m\alpha + 232n)$									
$31s$										$31p'_{(2)} (m\alpha + 236n)$									
$32s$										$32p'_{(1)} (m\alpha + 240n)$									
$32s$										$32p'_{(2)} (m\alpha + 244n)$									
$33s$										$33p'_{(1)} (m\alpha + 248n)$									
$33s$										$33p'_{(2)} (m\alpha + 252n)$									
$34s$										$34p'_{(1)} (m\alpha + 256n)$									
$34s$										$34p'_{(2)} (m\alpha + 260n)$									
$35s$										$35p'_{(1)} (m\alpha + 264n)$									
$35s$										$35p'_{(2)} (m\alpha + 268n)$									
$36s$										$36p'_{(1)} (m\alpha + 272n)$									
$36s$										$36p'_{(2)} (m\alpha + 276n)$									
$37s$										$37p'_{(1)} (m\alpha + 280n)$									
$37s$										$37p'_{(2)} (m\alpha + 284n)$									
$38s$										$38p'_{(1)} (m\alpha + 288n)$									
$38s$										$38p'_{(2)} (m\alpha + 292n)$									
$39s$										$39p'_{(1)} (m\alpha + 296n)$									
$39s$										$39p'_{(2)} (m\alpha + 300n)$									
$40s$										$40p'_{(1)} (m\alpha + 304n)$									
$40s$										$40p'_{(2)} (m\alpha + 308n)$									
$41s$										$41p'_{(1)} (m\alpha + 312n)$									
$41s$										$41p'_{(2)} (m\alpha + 316n)$									
$42s$										$42p'_{(1)} (m\alpha + 320n)$									
$42s$										$42p'_{(2)} (m\alpha + 324n)$									
$43s$										$43p'_{(1)} (m\alpha + 328n)$									
$43s$										$43p'_{(2)} (m\alpha + 332n)$									
$44s$										$44p'_{(1)} (m\alpha + 336n)$									
$44s$										$44p'_{(2)} (m\alpha + 340n)$									
$45s$										$45p'_{(1)} (m\alpha + 344n)$									
$45s$										$45p'_{(2)} (m\alpha + 348n)$									
$46s$										$46p'_{(1)} (m\alpha + 352n)$									
$46s$										$46p'_{(2)} (m\alpha + 356n)$									
$47s$										$47p'_{(1)} (m\alpha + 360n)$									
$47s$										$47p'_{(2)} (m\alpha + 364n)$									
$48s$										$48p'_{(1)} (m\alpha + 368n)$									
$48s$										$48p'_{(2)} (m\alpha + 372n)$									
$49s$										$49p'_{(1)} (m\alpha + 376n)$									
$49s$										$49p'_{(2)} (m\alpha + 380n)$									
$50s$										$50p'_{(1)} (m\alpha + 384n)$									
$50s$										$50p'_{(2)} (m\alpha + 388n)$									
$51s$										$51p'_{(1)} (m\alpha + 392n)$									
$51s$										$51p'_{(2)} (m\alpha + 396n)$									
$52s$										$52p'_{(1)} (m\alpha + 400n)$									
$52s$										$52p'_{(2)} (m\alpha + 404n)$									
$53s$										$53p'_{(1)} (m\alpha + 408n)$									
$53s$										$53p'_{(2)} (m\alpha + 412n)$									
$54s$										$54p'_{(1)} (m\alpha + 416n)$									
$54s$										$54p'_{(2)} (m\alpha + 420n)$									
$55s$										$55p'_{(1)} (m\alpha + 424n)$									
$55s$										$55p'_{(2)} (m\alpha + 428n)$									
$56s$										$56p'_{(1)} (m\alpha + 432n)$									
$56s$										$56p'_{(2)} (m\alpha + 436n)$									
$57s$										$57p'_{(1)} (m\alpha + 440n)$									
$57s$										$57p'_{(2)} (m\alpha + 444n)$									
$58s$										$58p'_{(1)} (m\alpha + 448n)$									
$58s$										$58p'_{(2)} (m\alpha + 452n)$									
$59s$										$59p'_{(1)} (m\alpha + 456n)$									
$59s$										$59p'_{(2)} (m\alpha + 460n)$									
$60s$										$60p'_{(1)} (m\alpha + 464n)$									
$60s$										$60p'_{(2)} (m\alpha + 468n)$									
$61s$										$61p'_{(1)} (m\alpha + 472n)$									
$61s$										$61p'_{(2)} (m\alpha + 476n)$									
$62s$										$62p'_{(1)} (m\alpha + 480n)$									
$62s$										$62p'_{(2)} (m\alpha + 484n)$									
$63s$										$63p'_{(1)} (m\alpha + 488n)$									
$63s$										$63p'_{(2)} (m\alpha + 492n)$									
$64s$										$64p'_{(1)} (m\alpha + 496n)$									
$64s$										$64p'_{(2)} (m\alpha + 500n)$									
$65s$										$65p'_{(1)} (m\alpha + 504n)$									
$65s$										$65p'_{(2)} (m\alpha + 508n)$									
$66s$										$66p'_{(1)} (m\alpha + 512n)$									
$66s$										$66p'_{(2)} (m\alpha + 516n)$									
$67s$										$67p'_{(1)} (m\alpha + 520n)$									
$67s$										$67p'_{(2)} (m\alpha + 524n)$									
$68s$										$68p'_{(1)} (m\alpha + 528n)$									
$68s$										$68p'_{(2)} (m\alpha + 532n)$									
$69s$										$69p'_{(1)} (m\alpha + 536n)$									
$69s$										$69p'_{(2)} (m\alpha + 540n)$									
$70s$										$70p'_{(1)} (m\alpha + 544n)$									
$70s$										$70p'_{(2)} (m\alpha + 548n)$									
$71s$										$71p'_{(1)} (m\alpha + 552n)$									
$71s$										$71p'_{(2)} (m\alpha + 556n)$									
$72s$										$72p'_{(1)} (m\alpha + 560n)$									
$72s$										$72p'_{(2)} (m\alpha + 564n)$									
$73s$										$73p'_{(1)} (m\alpha + 568n)$									
$73s$										$73p'_{(2)} (m\alpha + 572n)$									
$74s$										$74p'_{(1)} (m\alpha + 576n)$									
$74s$										$74p'_{(2)} (m\alpha + 580n)$									
$75s$										$75p'_{(1)} (m\alpha + 584n)$									
$75s$										$75p'_{(2)} (m\alpha + 588n)$									
$76s$										$76p'_{(1)} (m\alpha + 592n)$									
$76s$										$76p'_{(2)} (m\alpha + 596n)$									
$77s$										$77p'_{(1)} (m\alpha + 600n)$									
$77s$										$77p'_{(2)} (m\alpha + 604n)$									
$78s$										$78p'_{(1)} (m\alpha + 608n)$									
$78s$										$78p'_{(2)} (m\alpha + 612n)$									
$79s$										$79p'_{(1)} (m\alpha + 616n)$									
$79s$										$79p'_{(2)} (m\alpha + 620n)$									
$80s$										$80p'_{(1)} (m\alpha + 624n)$									
$80s$										$80p'_{(2)} (m\alpha + 628n)$									
$81s$										$81p'_{(1)} (m\alpha + 632n)$									
$81s$										$81p'_{(2)} (m\alpha + 636n)$									
$82s$										$82p'_{(1)} (m\alpha + 640n)$									
$82s$										$82p'_{(2)} (m\alpha + 644n)$									
$83s$										$83p'_{(1)} (m\alpha + 648n)$									
$83s$										$83p'_{(2)} (m\alpha + 652n)$									
$84s$										$84p'_{(1)} (m\alpha + 656n)$									
$84s$										$84p'_{(2)} (m\alpha + 660n)$									
$85s$										$85p'_{(1)} (m\alpha + 664n)$									
$85s$										$85p'_{(2)} (m\alpha + 668n)$									
$86s$										$86p'_{(1)} (m\alpha + 672n)$									
$86s$										$86p'_{(2)} (m\alpha + 676n)$									
$87s$										$87p'_{(1)} (m\alpha + 680n)$									
$87s$										$87p'_{(2)} (m\alpha + 684n)$									
$88s$										$88p'_{(1)} (m\alpha + 688n)$									
$88s$										$88p'_{(2)} (m\alpha + 692n)$									
$89s$										$89p'_{(1)} (m\alpha + 696n)$									
$89s$										$89p'_{(2)} (m\alpha + 700n)$									
$90s$										$90p'_{(1)} (m\alpha + 704n)$									
$90s$										$90p'_{(2)} (m\alpha + 708n)$									
$91s$										$91p'_{(1)} (m\alpha + 712n)$									
$91s$										$91p'_{(2)} (m\alpha + 716n)$									
$92s$										$92p'_{(1)} (m\alpha + 720n)$									
$92s$										$92p'_{(2)} (m\alpha + 724n)$									
$93s$										$93p'_{(1)} (m\alpha + 728n)$									
$93s$										$93p'_{(2)} (m\alpha + 732n)$									
$94s$										$94p'_{(1)} (m\alpha + 736n)$									
$94s$										$94p'_{(2)} (m\alpha + 740n)$									
$95s$										$95p'_{(1)} (m\alpha + 744n)$									
$95s$										$95p'_{(2)} (m\alpha + 748n)$									
$96s$										$96p'_{(1)} (m\alpha + 752n)$									
$96s$										$96p'_{(2)} (m\alpha + 756n)$									
$97s$										$97p'_{(1)} (m\alpha + 760n)$									
$97s$										$97p'_{(2)} (m\alpha + 764n)$									
$98s$										$98p'_{(1)} (m\alpha + 768n)$									
$98s$										$98p'_{(2)} (m\alpha + 772n)$									
$99s$										$99p'_{(1)} (m\alpha + 776n)$									
$99s$										$99p'_{(2)} (m\alpha + 780n)$									
$100s$										$100p'_{(1)} (m\alpha + 784n)$									
$100s$										$100p'_{(2)} (m\alpha + 788n)$									
$101s$										$101p'_{(1)} (m\alpha + 792n)$									
$101s$										$101p'_{(2)} (m\alpha + 796n)$									
$102s$										$102p'_{(1)} (m\alpha + 800n)$									
$102s$										$102p'_{(2)} (m\alpha + 804n)$									
$103s$										$103p'_{(1)} (m\alpha + 808n)$									
$103s$										$103p'_{(2)} (m\alpha + 812n)$									
$104s$										$104p'_{(1)} (m\alpha + 816n)$									
$104s$										$104p'_{(2)} (m\alpha + 820n)$									
$105s$										$105p'_{(1)} (m\alpha + 824n)$									
$105s$										$105p'_{(2)} (m\alpha + 828n)$									
$106s$										$106p'_{(1)} (m\alpha + 832n)$									
$106s$										$106p'_{(2)} (m\alpha + 836n)$									
$107s$										$107p'_{(1)} (m\alpha + 840n)$									
$107s$										$107p'_{(2)} (m\alpha + 844n)$									
$108s$										$108p'_{(1)} (m\alpha + 848n)$									
$108s$										$108p'_{(2)} (m\alpha + 852n)$									
$109s$										$109p'_{(1)} (m\alpha + 856n)$									
$109s$										$109p'_{(2)} (m\alpha + 860n)$									
$110s$										$110p'_{(1)} (m\alpha + 864n)$									
$110s$										$110p'_{(2)} (m\alpha + 868n)$									
$111s$										$111p'_{(1)} (m\alpha + 872n)$									
$111s$										$111p'_{(2)} (m\alpha + 876n)$									
$112s$										$112p'_{(1)} (m\alpha + 880n)$									
$112s$										$112p'_{(2)} (m\alpha + 884n)$									
$113s$										$113p'_{(1)} (m\alpha + 888n)$									
$113s$										$113p'_{(2)} (m\alpha + 892n)$									
$114s$										$114p'_{(1)} (m\alpha + 896n)$									
$114s$										$114p'_{(2)} (m\alpha + 900n)$									
$115s$										$115p'_{(1)} (m\alpha + 904n)$									
$115s$										$115p'_{(2)} (m\alpha + 908n)$									
$116s$										$116p'_{(1)} (m\alpha + 912n)$									
$116s$										$116p'_{(2)} (m\alpha + 916n)$									
$117s$										$117p'_{(1)} (m\alpha + 920n)$									
$117s$										$117p'_{(2)} (m\alpha + 924n)$									
$118s$										$118p'_{(1)} (m\alpha + 928n)$									
$118s$										$118p'_{(2)} (m\alpha + 932n)$									
$119s$										$119p'_{(1)} (m\alpha + 936n)$									
$119s$										$119p'_{(2)} (m\alpha + 940n)$									
$120s$										$120p'_{(1)} (m\alpha + 944n)$									
$120s$										$120p'_{(2)} (m\alpha + 948n)$									
$121s$										$121p'_{(1)} (m\alpha + 952n)$									
$121s$										$121p'_{(2)} (m\alpha + 956n)$									
$122s$										$122p'_{(1)} (m\alpha + 960n)$									
$122s$										$122p'_{(2)} (m\alpha + 964n)$									
$123s$										$123p'_{(1)} (m\alpha + 968n)$									
$123s$										$123p'_{(2)} (m\alpha + 972n)$									
$124s$										$124p'_{(1)} (m\alpha + 976n)$									
$124s$										<									

с четырнадцатью — за f -уровни. Рядом с названием уровня дано сохраняющееся в нем основание.

Дейтрон принят за заполненный уровень $1s$ на основании следующего. Если в дейтроне p и n беспрестанно меняются своими положениями, взаимно превращаясь, то это превращение происходит не мгновенно, а за какой-то чрезвычайно малый промежуток времени. Значит, каждая частица изменяет свое состояние в присутствии другой и, следовательно, не может переходить на ее уровень, на ее место, а переходит на другое свободное место. Таким образом, получается, что в дейтроне как протон, так и нейтрон занимают то одно, то другое место на одном и том же уровне, и новая частица из-за этого не может сесть на тот же уровень, где находится протон или нейтрон, и он является как бы заполненным (виртуальное состояние), хотя в действительности спин не равен нулю, и число протонов или нейтронов в каждый момент равно единице. Уровень нуклонов в He_2^4 уже другой, что видно из большой разницы их энергии связи. Дейтрон представляет самостоятельную группу, как бы отдельную частицу в ядре, что хорошо известно из ядерных реакций.

После He_2^4 явным образом идет раздвоение пути развития ядер, что видно и на рис. 1.

В K_{19}^{39} протон присоединяется сразу через $2n$ к предыдущему четному ядру, а не через n и n последовательно. Этому соответствует выпадение точки K^{39} на рис. 1 из прямой нечетных ядер, и мы имеем указание на отделение 19-го протона от предыдущих.

Неон отличается также отклонением от прямой четных и нечетных A ; из-за этого является подозрение о принадлежности его (частично) к особой группе.

Добавочный (отмеченный одним штрихом) путь развития ядер делается непрочным при $3p'$, и поэтому начинается построение нового ряда $3p''$ через прибавление двух новых нейтронов. Возникает новый путь развития ядер, дважды штрихованный, вместо один раз штрихованного (первая особая зона), продолжающийся и далее. Распределение протонов по уровням в обоих путях различно. Таким образом, по нашей схеме, например, Si^{68} и Si^{65} обладают различным внутренним строением.

Предлагаемая схема оправдывает максимум распространенности железа и также прочность германия в известных отношениях [16]. Она не согласуется с максимумом распространенности Zr. Можно было бы ввести после $3s''$ уровень $4d''$, остановив эту группу на Zr, но тогда была бы необъяснима неустойчивость Rb^{87} , нарушилось бы правило постоянства основания в одной и той же группе, и осталась бы необъяснимой группа в два элемента Nb и Mo, предшествующая совершенно нестабильному Tc. Наоборот, введение группы $4p''$ с нестабильными нечетными ядрами (так что здесь уже начинается изменение Z сразу на $2p$) согласуется с особенной нестабильностью Tc.

Некоторые ядра появляются дважды, и в нештрихованных, и в штрихованных группах (Ti^{48} , Co^{59}); таким образом, по предлагаемой схеме выходит, что некоторые чистые изотопы могут иметь различное внутреннее строение. Значки (1) и (2) внизу у уровней без сомнения относятся к различным полным угловым моментам уровней. Но, какой именно полный угловой момент принадлежит группе, определить трудно, так как спины ядер, входящих в группу, не позволяют этого сделать (о спинах стабильных ядер будет сказано ниже).

Выше $Z = 43$ мною также составлено распределение по группам на основе того же признака «оснований». Это распределение здесь не приводится. Оно требует введения многих нестабильных нечетных ядер. Однако в подавляющем числе случаев последние в группах нечетные ядра стабильны. Это кажется нам также подтверждением реального значения «оснований».

Имеющие нестабильные изотопы Tc_{43} , Rm_{61} , Lu_{71} начинают уровни $5s$, $6s$, и $6s''$.

Для подтверждения закономерности деления на группы требовалось бы исследование энергии связи ядер, но, к сожалению, систематических данных в этом отношении выше $Z = 32$ не имеется.

Изотопы, не вошедшие в таблицы, представляют ядра, входящие в группировки по нейтронным уровням. Эти группировки (они предполагаются бинейтронными) еще не вполне выяснены и поэтому здесь не сообщаются.

3. Экспериментальные признаки, подтверждающие справедливость предложенного деления ядер по уровням протонов

Предлагаемая схема уровней протонов согласуется с тем общепризнанным правилом, что максимальные спины должны быть у ядер, представляющих предпоследние члены заполненных уровней или начи-

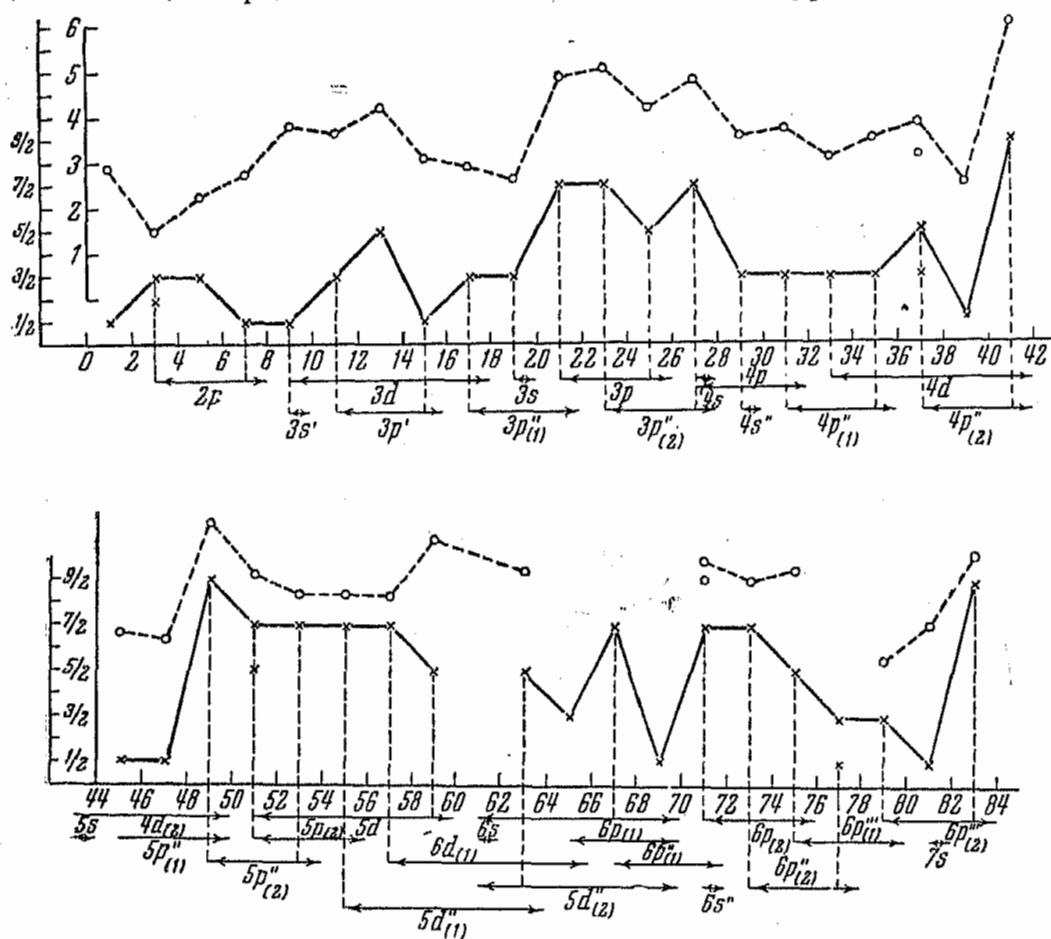


Рис. 3. Спины (нижняя кривая) и магнитные моменты нечетных ядер в связи с предложенной системой уровней Z

нающих новый уровень. Из рис. 3 видно, что после $Z = 16$ вышеуказанное правило выполняется. Нанесены спины ядер, взятые из таблицы работы [17]. В области до $Z = 8$, где еще не действуют «основания», и в области стандартных ядер от 8 до 20 максимальные спины приходятся на середины уровней. Однако окончание уровней при $Z = 8$ и $Z = 20$ настолько общепризнано, что сомневаться в этом почти не приходится. Магнитные моменты почти полностью следуют ходу спинов у нечетных ядер (верхняя кривая).

Рассматривая табл. 4 и 5 и рис. 1 и 2, можно убедиться, что около уровней s ослабевают связи в нечетных ядрах. В этих местах появляются «особые зоны», т. е. новые параллельные ряды ядер с числом нейтронов,

внезапно возрастающим сравнительно с последним s -уровнем; дальнейшие s -уровни также характеризуются понижающейся прочностью ядер, которая восстанавливается присоединением новых нейтронов и особенным скоплением уровней вслед за каждым s -уровнем. Поэтому здесь и появляются «особые зоны». Подробности их образования автор надеется изложить в отдельной статье.

Последовательный ход ядер отмечен следующими особыми местами: 1) прекращением «стандартных» ядер [обрыв расходящихся прямых $E_{св} = f(Z)$ от 8 до 20 на рис. 1 и 2]; появлением совершенно нестабильных ядер с $Z = 43$ и 61; появлением группы ядер весьма малой распространенности после $Z = 56$ и внезапным подъемом распространенности после $Z = 72$.

Эти особенные места отмечаются и разделением ядер по основаниям. Закономерное изменение оснований с возрастанием q требует, чтобы определенное q не повторялось после прекращения действия соответствующего основания. Однако существуют два нарушения этого правила, и эти нарушения происходят именно около $Z = 43$ и $Z = 61$. Перед каждым из этих Z мы встречаем внезапное возвращение к давно прекратившимся основаниям. Так, перед Tc_{43} у молибдена существует изотоп Mo^{92} с основанием, имеющим $q = 8(21\alpha + 8n)$, прекратившимся еще при $Z = 36$. Следующий за Tc рутений также имеет изотоп Ru^{96} формы $22\alpha + 8n$. Около Pm_{61} происходит подобное же явление: Sm_{62} имеет изотоп Sm^{144} ($31\alpha + 20n$) с $q = 20$, исчезнувшим уже при $Z = 58$. Нигде больше на всем протяжении атомных номеров Z такого явления возвращения к уже ранее прекратившимся основаниям не встречается, и это явление нельзя не связать с нестабильностью $Z = 43$ и 61⁶.

Перед этими Z также начинается нестабильность нечетных ядер в предшествующих группах, и в первом случае она начинается с Rb_{37} , а во втором с Ba_{56} (при основании $m\alpha + 26n$). Появляется подозрение, не связаны ли эти факты с другими фактами, известными из графика распространенности ядер: с изломом кривой распространенности при $Z = 37-40$ и с появлением группы наименее распространенных ядер после Ba_{56} [18]. Отдаленность эпохи образования ядер оставила нам так мало следов истории этого образования, что необходимо принимать во внимание всякое нарушение в правильном ходе строения ядер как средство к распознаванию каких-то критических моментов в образовании элементов.

Внезапный подъем распространенности (и, предположительно, прочности) ядер после Hf_{72} обязан вступлению нового ряда ядер после bs , влияние которого, однако, вскоре ослабевает, и стабильность далее уже не может установиться; причину этого согласно табл. 3 формально можно видеть в том, что центральная часть ядер из 10 α -групп начинает пронизываться нейтронами после $Z = 56$ и при $Z = 84$ уже окончательно разрушается, отчего и исчезают центральные силы в ядре. Действие их особенно сильно вслед за непосредственным образованием внутреннего ядра (за $Z = 20$).

Система атомных ядер, в особенности выше $Z = 43$, настолько запутана, что невозможно с уверенностью выделить группы, подчиняющиеся определенному закону. Но все же нам кажется, что вспомогательная идея «оснований» позволяет установить какой-то близкий к истине порядок в этой системе. Предложенная схема не имеет каких-либо теоретических оснований, но представляет попытку соединить замечаемое в системе ядер стремление к образованию α -групп с распределением нуклонов по уровням, также подмечаемым эмпирически.

Воронежский государственный
университет

Поступила в редакцию
15 марта 1953 г.

⁶ Происхождение этих изотопов от распада изотопов Tc и Pm не разрешает вопроса об их стабильности.

Литература

- [1] Д. Д. Иваненко и Гапон. *Naturwissenschaften*, 1932. — [2] Д. Д. Иваненко и В. Родичев. *ДАН СССР*, **70**, 605, 1950. — [3] Э. Ферми. *Ядерная физика*, ИИЛ, 1951, стр. 235. М. Trochenris. *Journ. de phys. et le rad.*, **13**, 299, 1952. L. Rosenfeld. *Physica*, **17**, 461, 1950. E. H. Bellamy a. K. F. Smith. *Phil. Mag.*, **44**, 39, 1950. M. Goldhaber a. R. D. Hill. *Rev. Mod. Phys.*, **24**, 186, 1952. — [4] Л. В. Грошев и И. С. Шапиро. *Спектроскопия атомных ядер*, ГИТТЛ, 1952, стр. 418. В. С. Шпинель. *ЖЭТФ*, **24**, 90, 1953. — [5] H. P. Noyes. *Sciences*, **115**, 666, 1952. — [6] М. А. Левитская. *ДАН СССР*, **55**, 399, 1947; **60**, 45, 1948; **61**, 55, 1948. М. А. Левитская и Л. П. Рапопорт. *ДАН СССР*, **70**, 817, 1950; **79**, 953, 1951. — [7] М. Гоепперт-Майер. *Phys. Rev.*, **75**, 21, 1950. — [8] Л. В. Понизовский. *ДАН СССР*, **40**, 59, 1953; **41**, 1041, 1943; *ЖЭТФ*, **13**, 121, 1945. М. М. Венков. *ЖЭТФ*, **21**, 51, 1951. — [9] Г. А. Бете и Р. Ф. Бечер. *Физика ядра*, ОНТИ, 1938, стр. 161. Bartlett. *Phys. Rev.*, **41**, 370, 1932; **42**, 145, 1932. — [10] W. D. Harkins. *Phys. Rev.*, **76**, 1539, 1949. J. C. Pecker. *Journ. de phys. et le rad.*, **12**, 688, 1951. — [11] И. А. Вайсман. *ДАН СССР*, **62**, 211, 1948. А. П. Знойко. *ДАН СССР*, **68**, 837, 1021, 1949; **69**, 169, 1949. М. Л. Чепелевецкий. *ЖЭТФ*, **23**, 327, 1952. — [12] W. E. Elsasser. *Journ. de phys. et le rad.*, **5**, 625, 1934. E. Feenberg a. K. C. Hammark. *Phys. Rev.*, **75**, 1968, 1949. М. Гоепперт-Майер. *Phys. Rev.*, **75**, 1969, 1949; **78**, 16, 1950. L. W. Nordheim. *Phys. Rev.*, **75**, 1984, 1949. — [13] Э. Ферми. *Ядерная физика*, ИИЛ, 1951, стр. 232. — М. А. Левитская. *ДАН СССР*, **74**, 37, 1950. — [15] V. F. Weisskopf. *ZS. f. Phys.*, **133**, 276, 1952. — [16] М. Л. Чепелевецкий. *ЖЭТФ*, **23**, 331, 1952. — [17] J. E. Mack. *Rev. Mod. Phys.*, **22**, 64, 1950; *Усп. физ. наук*, **44**, 393, 1951. — [18] R. A. Alpher a. R. C. Hermann. *Rev. Mod. Phys.*, **22**, 153, 1950.
-

НЕКОТОРЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ И ВЫЧИСЛЕНИЕ МАСС АТОМОВ

Г. П. Майтак

Найдено, что общие дефекты масс атомных ядер с однотипным (четным или нечетным) зарядом Z и постоянным изотопическим числом приближенно линейно зависят от Z . На основании этого для групп атомов с постоянным изотопическим числом и только четным или нечетным зарядом ядра составлены эмпирические уравнения для вычисления масс атомов. Эти уравнения, описывающие приблизительно параллельные и равноотстоящие прямые линии, сведены к более общим уравнениям. Согласно масс атомов, вычисленных по полученным уравнениям, с опытными данными подтверждает указанные закономерности и пригодность полученных уравнений для вычисления масс атомов.

Общие дефекты масс атомных ядер с однотипным (четным или нечетным) зарядом Z и постоянным изотопическим числом находятся приблизительно в линейной зависимости от Z . Это позволило для групп атомов, в которых изотопическое число постоянно, а заряд ядра только четный или нечетный, получить, пользуясь опытными величинами общих дефектов масс ядер, эмпирические уравнения для вычисления масс атомов, которые и сообщаются в этой работе.

Опытные значения общих дефектов масс ядер Δ , выраженные везде в массовых единицах, определялись по уравнению

$$\Delta = (1,00893n + 1,00758p) - (M - 0,00055),$$

где числа 1,00893, 1,00758 и 0,00055 — массы нейтрона, протона и электрона, n и p — соответственно числа нейтронов и протонов в ядре и M — величина точно измеренной массы соответствующего атома по физической шкале атомных весов [1]. По полученным таким путем для 155 атомов, указанных в табл. 1, опытными величинам Δ методом наименьших квадратов были определены параметры линейных уравнений для вычисления этой величины у атомов 21 группы четных и 6 групп нечетных Z , в которых имеется не менее двух атомов с точно измеренными массами. Из этих уравнений по формуле

$$M = (1,00758 + 0,00055)Z + 1,00893(Z + N) - \Delta,$$

где N — номер группы атомов, равный их изотопическому числу, а остальные обозначения и числа имеют ранее указанные значения, были получены параметры линейных уравнений

$$M = a + bZ \quad (1)$$

для вычисления масс атомов тех же групп, приведенные в табл. 1.

Коэффициенты при Z и свободные члены указаны с точностью до 0,00001, так как массы атомов в большинстве случаев известны с точностью до 0,0001, а при определении каждого параметра число использованных значений масс атомов было для атомов с массой от 3 до 50 близко к 10, а для атомов с массой от 50 до 150 около 3.

В столбце δ приведены разности свободных членов уравнений для масс атомов каждой данной группы и на единицу меньшей, считая от

Таблица 1

Параметры групповых уравнений (I) для вычисления масс атомов

№ группы	a	b	δ	Атомы, по измеренным массам ко- рых были определены приведенные параметры групповых уравнений	
				Символы	Число
Ч е т н ы е Z					
—2	1,99770	—1,96636	0,99238	C ¹⁰ — Mg ²⁷	4
—1	1,99780	—0,97398	0,98766	He ³ — A ³⁵	9
0	1,99810	0,01368	—	He ⁴ — Ca ⁴⁰	10
1	1,99749	1,02274	1,00906	He ⁵ — A ³⁷	9
2	1,99744	2,02306	1,00032	He ⁶ — Ni ⁵⁸	14
3	1,99668	3,03588	1,01282	Be ¹¹ — Cr ⁵¹	11
4	1,99776	4,01396	0,97808	Si ³² — Zn ⁶⁴ (без Ca ⁴⁴)	8
5	1,99739	5,02110	1,00714	S ³⁷ — Ni ⁶¹	7
6	1,99821	5,99933	0,97823	Ti ⁵⁰ — Zn ⁶⁶	5
7	1,99865	6,98845	0,98912	Ti ⁵¹ , Zn ⁶⁷	2
8	1,99976	7,95466	0,96621	Ni ⁶¹ , Zn ⁶⁸ , Ru ⁹⁶	3
10	1,99980	9,95137	1,99671 : 2 = = 0,99835	Zn ⁷⁰ , Mo ⁹⁴ — Pd ¹⁰²	4
11	1,99906	10,98523	1,03386	Mo ⁹⁵ , Ru ⁹⁹	2
12	1,99931	11,97250	0,98727	Mo ⁹⁹ — Pd ¹⁰⁴	3
13	1,99931	12,97442	1,00192	Mo ⁹⁷ — Pd ¹⁰⁵	3
14	1,99956	13,96269	0,98827	Mo ⁹⁸ — Pd ¹⁰⁶	3
16	1,99931	15,97338	2,01069 : 2 = = 1,00535	Pd ¹⁰⁸ , Sn ¹¹⁶	2
18	1,99881	17,99624	2,01286 : 2 = = 1,00643	Pd ¹¹⁰ , Sn ¹¹⁷	2
26	2,00231	25,82318	1,82694 : 2 = = 0,97837	Nd ¹⁴⁶ , Gd ¹⁵⁴	2
28	2,00256	27,80804	1,98486 : 2 = = 0,99243	Nd ¹⁴⁸ , Gd ¹⁵⁶	2
30	2,00231	29,82490	2,01686 : 2 = = 1,00843	Nd ¹⁵⁰ , Gd ¹⁵⁸	2
Н е ч е т н ы е Z					
—1	1,99785	0,97532	1,00250	Li ⁵ — K ³⁷	9
0	1,99739	0,02718	—	Li ⁶ — K ³⁸	9
1	1,99723	1,02652	0,99934	Li ⁷ — K ³⁹	9
2	1,99679	2,03379	1,00727	Li ⁸ — K ⁴⁰	9
3	1,99661	3,03619	1,00240	B ¹³ — Sc ⁴⁵	9
4	1,99669	4,03530	0,99911	Al ³⁰ — Cl ³⁸	3
Всего					155

нулевой в обоих направлениях. В некоторых случаях эти разности вычислялись из разностей свободных членов уравнений более отдаленных групп, так как для многих групп уравнения еще не могли быть составлены вследствие того, что массы атомов, входящих в эти группы, ко времени написания этой работы еще не были измерены точно. Разности, обозначенные δ , близки по величине, так же как и коэффициенты при Z . Следовательно, все полученные для масс атомов групповые уравнения представляют прямые линии, приблизительно параллельные и равноотстоящие, и могут быть поэтому сведены к более общим уравнениям, которые получаются из уравнений нулевых групп прибавлением к ним третьих членов, равных произведению соответствующих средних δ на номер

группы N . Полученные групповые уравнения были сведены таким образом к двум общим уравнениям:

$$M = 1,99845Z + 0,99662N + 0,01368, \text{ для атомов с четными } Z \text{ (2a)}$$

и

$$M = 1,99709Z + 1,00212N + 0,02718, \text{ для атомов с нечетными } Z, \text{ (2б)}$$

которые при подстановке в них числовых значений N — номера группы атомов — превращаются в уравнения, близкие к приведенным для соответствующих групп. В общем уравнении для вычисления масс атомов с четными Z коэффициент при Z равен среднему из 18 значений его в уравнениях от —2-й до 18-й группы, а коэффициент при N равен среднему из приведенных 17 значений δ для тех же групп. При составлении общего уравнения для атомов с нечетными Z аналогичным образом были использованы все 6 приведенных групповых уравнений. Уравнения 26, 28 и 30-й групп при составлении общего уравнения для атомов с четными Z не были использованы, так как они более значительно отклоняются от параллельности остальным; это могло быть обусловлено и тем, что в этих группах известны массы атомов только двух, одних и тех же во всех трех группах элементов — Nd и Gd — с Z , отличающимся всего на 4.

При более точном рассмотрении можно заметить разницу между четными и нечетными группами. Так, разность δ уравнений (1) для масс атомов с четными Z , стоящая в строке каждой данной четной группы, несколько меньше, чем в строках предшествующей и последующей нечетных групп. В уравнениях (1) для масс атомов с четными Z от 2-й до 14-й группы (без 9-й и 10-й, так как в 9-й группе нет атомов с точно измеренными массами, и групповое уравнение не было составлено) свободные члены 7 уравнений четных групп, начиная от нулевой в обоих направлениях, превышают свободные члены уравнений предшествующих им нечетных групп в среднем на 0,98439, а свободные члены 7 уравнений нечетных групп превышают свободные члены уравнений предшествующих им четных групп в среднем на 1,00594. Несколько отличаются в уравнениях масс атомов четных и нечетных групп при четных Z и средние значения коэффициентов при Z . Так, средняя величина коэффициента при Z для 7 указанных уравнений четных групп равна 1,99853, а для нечетных 1,99805. В групповое уравнение для вычисления масс атомов каждой четной группы N оба указанных значения δ входят одинаковое число $N/2$ раз. Поэтому в общем уравнении для масс атомов четных групп при четных Z , основываясь на данных, полученных из групповых уравнений от —2-й до 14-й группы (без 9-й и 10-й), коэффициент при N можно считать равным среднему арифметическому чисел 0,98439 и 1,00594, равному 0,99516, и оно будет иметь вид:

$$M = 1,99853Z + 0,99516N + 0,01368. \quad (3a)$$

В уравнениях же для вычисления масс атомов каждой нечетной группы N при четных Z указанные разности δ входят неодинаковое число раз: число 1,00594 входит $(N+1)/2$ раз, а число 0,98439 входит $(N-1)/2$ раз. Поэтому общим уравнением для масс атомов нечетных групп на основании тех же данных будет

$$\begin{aligned} M &= 1,99805Z + 1,00594(N+1)/2 + 0,98439(N-1)/2 + 0,01368 = \\ &= 1,99805Z + 0,99516N + 0,02446. \end{aligned} \quad (3б)$$

В групповых уравнениях масс атомов с нечетными Z соотношение разностей свободных членов уравнений соседних групп, в зависимости от их четности или нечетности, повидимому, обратное, но здесь известно

меньше точно измеренных масс атомов, и поэтому составлено было еще мало уравнений.

Нами были сравнены поправки ΔM к массам атомов, вычисленным по полученным уравнениям и более сложному полуэмпирическому уравнению

$$M = A - 0,00081Z + 0,00611A + 0,014A^{1/2} + \\ + 0,083\left(\frac{A}{2} - Z\right)^2 A^{-1} + 0,000627Z^2 A^{1/2} + \varepsilon, \quad (4)$$

где A — массовое число, а $\varepsilon = 0$ при нечетных A и $\pm 0,036 A^{-3/4}$ при четных A (со знаком плюс, если Z нечетное, и со знаком минус, если оно четное). Этим уравнением пользуются в настоящее время [2]. Был определен также ход поправок в группах от —2-й до 6-й атомов четных Z и от —1-й до 4-й атомов нечетных Z , содержащих не менее пяти атомов с точно измеренными массами (в 4-й группе нечетных Z три атома) [1]. Для 77 атомов четных Z , находящихся в группах от —2-й до 6-й, в табл. 2

Таблица 2

Сравнение поправок ΔM к массам атомов, вычисленным по приведенным уравнениям

Уравнение	Число атомов, для которых поправки (в %) имеют величину			Атомы, для которых поправки (в %) $0,05 \leq \Delta M < 0,3$
	$0,0001 \leq \Delta M < 0,005$	$0,005 \leq \Delta M < 0,05$	$0,05 \leq \Delta M < 0,3$	
(1) параметры в табл. 1	35	38	4	He ³ , He ⁴ , He ⁵ , He ⁶
(2а)	13	48	16	He ³ , He ⁴ , He ⁵ , He ⁶ , C ¹⁰ , C ¹¹ , C ¹³ , C ¹⁴ , C ¹⁵ , Be ⁷ , Be ⁹ , Be ¹⁰ , Be ¹¹ , O ¹⁸ , O ¹⁹ , Ne ²³
(3а) и (3б)	12	54	11	He ³ , He ⁴ , He ⁶ , C ¹⁰ , C ¹⁴ , C ¹⁵ , Be ¹⁰ , Be ¹¹ , O ¹⁸ , O ¹⁹ , Ne ²³
(4)	14	50	13	He ⁴ , He ⁶ , C ¹⁰ , C ¹¹ , C ¹⁵ , Be ⁸ , Be ⁹ , Be ¹⁰ , Be ¹¹ , O ¹⁸ , O ¹⁹ , Ne ²³

сопоставлены поправки к массам атомов, вычисленным по приведенным уравнениям. К измеренным величинам масс этих атомов ближе всего подходят значения, вычисленные по групповым уравнениям (1). Уравнения (2) — (4) дают близкие результаты, но уравнения (3) и (4) лучшие, чем уравнение (2), и более близкие между собою. По уравнению (3) меньше, чем по уравнению (2), как атомов с малыми ($\Delta M < 0,005\%$), так и с большими ($0,05 \leq \Delta M < 0,3\%$) поправками, но первых меньше на единицу, а вторых — на пять. По уравнению (4) получается на два больше, чем по уравнению (3), как атомов с малыми ($\Delta M < 0,005\%$), так и с большими ($0,05 \leq \Delta M < 0,3\%$) поправками. Из последнего столбца табл. 2 видно, что по уравнениям (2) — (4) большие поправки относятся к одним и тем же атомам.

Рис. 1 и 2 приведены для иллюстрации хода поправок к массам атомов, вычисленным по приведенным групповым уравнениям. Поправки отсчитываются по оси абсцисс, для каждой кривой отдельно, от парал-

лельной оси ординат прямой с тем же номером, равным номеру группы атомов, вправо со знаком плюс, влево со знаком минус. Отклонению каждой кривой поправок от прямой начала ее отсчета на 1 мм соответствует поправка массы атома на 0,001 единицы массы. Заметна общность хода приведенных кривых [менее заметна она у кривых, отвечаю-

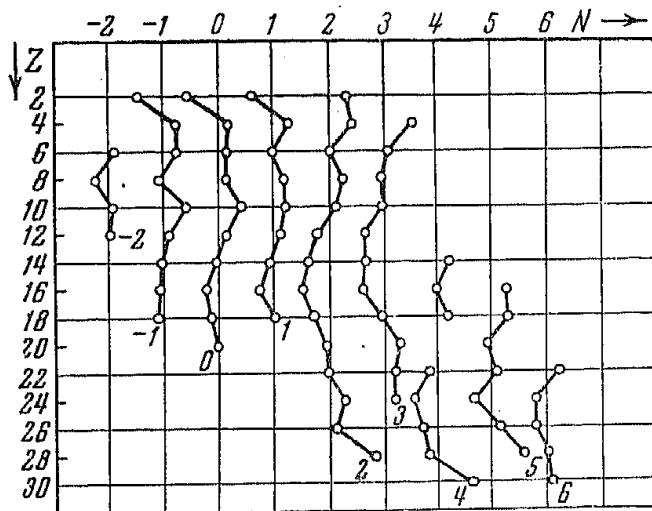


Рис. 1. Поправки к массам атомов, вычисленным по групповым уравнениям атомов с четными Z

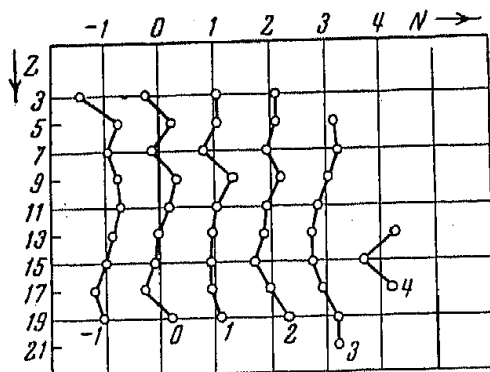


Рис. 2. Поправки к массам атомов, вычисленным по групповым уравнениям атомов с нечетными Z

щих уравнениям (2) и особенно (4)], хотя и не на всех участках. Вероятнее все же, что она имеет место и будет ясна после точного измерения масс большего числа атомов. Последнее даст поэтому возможность не только уточнить параметры приведенных общих уравнений, но и учесть закономерные отклонения от них.

Киев

Поступила в редакцию
21 июля 1953 г.

Литература

- [1] Научные и технические основы ядерной энергетики. Сб. статей под ред. К. Гудмена, ИИЛ, М., 1948, стр. 334. A. Friedlander and I. W. Kennedy. Introduction to Radiochemistry, N-Y, 1949, p. 299.—[2] Там же, стр. 69. Э. Ферми. Ядерная физика, ИИЛ, М., 1951, стр. 13.

КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ СООТНОШЕНИЯ В РЯДАХ ФУРЬЕ ЭЛЕКТРОННОЙ ПЛОТНОСТИ КРИСТАЛЛОВ

Б. К. Вайнштейн

Построение синтеза Фурье по рентгенографическим данным дает распределение электронной плотности в кристаллической решетке, максимумы (пики) которого отвечают атомам. С учетом теплового движения найдена зависимость от атомного номера величин, характеризующих электронную плотность атомов. Рассмотрены вопросы нормировки и точности F - и F^2 -рядов.

1. Интегральные характеристики распределения электронной плотности атома

Интегральными характеристиками распределения электронной плотности атома являются число электронов в атоме, электронная плотность в центре атома $\rho(0)$ (высота пика) и среднее квадратичное значение электронной плотности $|\rho(\mathbf{r})|^2$. Для оценки точности определения координат атомов нужно знать значение второй производной в максимуме и среднее квадратичное значение первой производной электронной плотности $|\partial\rho/\partial x|^2$. Все характеристики, относящиеся к кристаллу, могут быть достаточно точно вычислены через характеристики атомов, входящих в решетку. Аналогичные величины выступают и в проекции электронной плотности.

Число электронов в ячейке есть сумма электронов входящих в нее атомов. Это число определяет нулевой член ряда Фурье F_{000} — интеграл по электронной плотности ячейки

$$F_{000} = Z = \int_V \rho(xyz) d\tau = \sum Z_i. \quad (1)$$

Z_i (число электронов в данном атоме) есть интеграл по электронной плотности атома $\rho(r)$, записываемый обычно в сферических координатах

$$Z_i = 4\pi \int \rho(r) r^2 dr = f(0). \quad (2)$$

Это выражение дает значение начальной точки f -кривой, являющейся интегральным преобразованием Фурье электронной плотности атома

$$f(s) = 4\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 \frac{\sin sr}{sr} dr. \quad (3)$$

Обратно, зная $f(s)$, можно вычислить электронную плотность атома в любой точке, обращая интеграл Фурье (3):

$$\rho(r) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty f(s) s^2 \frac{\sin sr}{sr} ds. \quad (4)$$

В декартовых координатах $\rho(\mathbf{r})$ имеет вид

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi^3} \int f(s) e^{i(\mathbf{s}\mathbf{r})} d\tau_s; \quad (\mathbf{s}\mathbf{r}) = s_x x + s_y y + s_z z. \quad (4a)$$

Электронная плотность в центре атома, где $r = 0$, будет по (4)

$$\rho(0) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty f(s) s^2 ds. \quad (5)$$

Среднее квадратичное значение электронной плотности атома, помещенного в объем V , есть $[\rho^2]$:

$$\overline{\rho^2(\mathbf{r})} = \frac{1}{V} \int \rho^2(\mathbf{r}) d\tau = \frac{4\pi}{V} \int_0^\infty \rho^2(r) r^2 dr. \quad (6)$$

(Следует писать $|\rho(\mathbf{r})|^2$, но ρ всюду положительно, поэтому знак абсолютной величины опускается.) Эту величину можно выразить через $f(s)$, если воспользоваться интегральным равенством Буняковского, которое в одномерном случае записывается как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\rho(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(s)|^2 ds, \quad (7)$$

а для трехмерного случая принимает вид:

$$\int \rho^2(\mathbf{r}) d\tau = 4\pi \int_0^\infty \rho^2(r) r^2 dr = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty f^2(s) s^2 ds = G_1. \quad (8)$$

Следовательно,

$$\overline{\rho^2(\mathbf{r})} = G_1 / V. \quad (9)$$

Значение второй производной в центре атома $(\partial^2 \rho / \partial r^2)_{r=0}$ также можно найти по f -кривой, не предопределяя заранее ее вида. Разлагая в (4) $\sin \mathbf{s}\mathbf{r} / \mathbf{s}\mathbf{r}$ в ряд и дифференцируя под знаком интеграла, получим

$$\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} \right)_{r=0} = - \frac{1}{6\pi^2} \int_0^\infty f(s) s^4 ds. \quad (10)$$

В случае сферической симметрии в центре атома $\partial^2 \rho / \partial r^2 = \partial^2 \rho / \partial x^2$. Обратимся теперь к среднему квадратичному значению первой производной. Дифференцируя (4a), заметим, что интегральным преобразованием Фурье $\partial \rho / \partial x$ является $i s_x f(s)$. Имея формулу (8), дающую способ нахождения среднего квадратичного функции по ее интегральному преобразованию Фурье, получим

$$\overline{\left| \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|^2} + \overline{\left| \frac{\partial \rho}{\partial y} \right|^2} + \overline{\left| \frac{\partial \rho}{\partial z} \right|^2} = \frac{1}{2\pi^2 V} \int_0^\infty f^2(s) s^2 ds = \frac{3G_2}{V} \quad (11)$$

или, так как все три слагаемых равны,

$$G_2 = \frac{1}{6\pi^2} \int_0^\infty f^2(s) s^2 ds. \quad (12)$$

¹ В этом случае $(\partial^2 \rho / \partial x^2) + (\partial^2 \rho / \partial y^2) + (\partial^2 \rho / \partial z^2) = (\partial^2 \rho / \partial r^2) + (2/r)(\partial \rho / \partial r)$; представляя также и первую производную рядом и имея в виду равенство всех производных по осям, получим $\partial^2 \rho / \partial x^2 = \partial^2 \rho / \partial r^2$.

Аналогичным путем можно было бы получить и выражение (10). Рассмотрим теперь случай проекции электронной плотности атома, соответствующий использованию двумерных рядов Фурье. Проекция электронной плотности атома определяется выражением [2]:

$$\sigma(a) = 2 \int_{r=a}^{\infty} \frac{r}{\sqrt{r^2 - a^2}} \rho(r) dr. \quad (13)$$

Подставляя в этот интеграл $\rho(r)$ по (4) и имея в виду, что получающийся промежуточный интеграл равен

$$\int_{r=a}^{\infty} \frac{\sin sr}{\sqrt{r^2 - a^2}} dr = \frac{\pi}{2} J_0(sa),$$

получим для проекции электронной плотности выражение (переходим от обозначения a к r)

$$\sigma(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} f(s) s J_0(sr) ds; \quad (14)$$

$J_0(sr)$ — функция Бесселя. Для $\sigma(0)$ получим

$$\sigma(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} f(s) s ds. \quad (15)$$

Действуя далее так же, как при выводе формул (6)–(9), получим

$$\overline{\sigma^2(r)} = \frac{1}{S} \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} f^2(s) s ds = \frac{G_3}{S}. \quad (16)$$

Путем разложения в ряд $J_0(sr)$ и дифференцирования (14) найдем

$$\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} \right)_{r=0} = \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = - \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} f(s) s^2 ds. \quad (17)$$

Наконец, для $|\partial \sigma / \partial x|^2$ будем иметь формулу

$$\left| \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right|^2 = \frac{1}{4\pi S} \int_0^{\infty} f^2(s) s^3 ds. \quad (18)$$

2. Метод подсчета характеристик

Правые части выражений (5), (8), (10), (12) и (15)–(18) имеют совершенно одинаковый вид

$$\int D(s) ds, \quad (19a)$$

где $D(s)$ — радиальная функция в обратном пространстве, определяющая ту или иную характеристику и имеющая вид произведения f или f^2 на s в степени до четвертой. Разберем, например, смысл интеграла (5) для $\rho(0)$. Для его подсчета нужно просуммировать (проинтегрировать) по всему объему обратного пространства значения $(1/8\pi^3)f(s)$, которые вследствие сферической симметрии одинаковы в шаровом

слое объемом $4\pi^2 s^2 ds$; следовательно, радиальная функция для $\rho(0)$ есть

$$D_{\rho(0)}(s) = (1/2\pi^2) f(s) s^2.$$

Также, например, и в случае $(\partial^2 \rho / \partial r^2)_{r=0}$ на объем шарового слоя умножается величина $(1/8\pi^3)(-1/3)f(s)s^2$, что дает радиальную функцию $D_{\partial^2 \rho / \partial r^2} = -(1/6\pi^2)f(s)s^4$.

Для двумерного случая шаровому слою соответствует кольцо площади $2\pi s ds$ на плоскости в обратном пространстве.

Изображение радиальной функции той или иной характеристики на графике в зависимости от s (или $\sin \theta / \lambda = s / 4\pi$) наглядно представляет ее свойства. Численное интегрирование (19) позволяет находить значение характеристик как площади под кривой $D(s)$ (рис. 1), не аппроксимируя аналитически вид $f(s)$ какой-либо формулой, которую не всегда можно удовлетворительно подобрать. Обрыву ряда Фурье соответствует интегрирование до некоторого конечного значения $s_{\text{обр}}$, т. е. отсечение некоторой части площади под кривой $D(s)$. Влияние обрыва удобно характеризовать величиной p_s :

$$p_s = \int_0^{s_{\text{обр}}} D(s) ds / \int_0^{\infty} D(s) ds; \quad \int_0^{s_{\text{обр}}} D(s) ds = p_s \int_0^{\infty} D(s) ds. \quad (196)$$

Влияние теплового движения (см. ниже) приводит к стягиванию кривой $D(s)$ к меньшим s , т. е. также к уменьшению площади. Каждая характеристика отзывается на эти факторы по-разному и имеет максимум в разных областях $\sin \theta / \lambda$.

В основу подсчетов были положены f -кривые для нейтральных атомов, полученные согласно статистической теории, приведенные в [3]². Статистическая теория [4] учитывает не только увеличение электронной плотности атома с атомным номером Z , но и изменение его «формы», т. е. относительно большую концентрированность у центра электронной плотности тяжелых атомов, что оказывается существенным, особенно в случае сильного различия атомных номеров. Изменение «формы» атома соответствующим образом сказывается на f -кривых, которые, как и атомы, в действительности не являются подобными.

Атомы в кристаллах находятся в тепловом движении, что учитывается умножением атомного фактора покоящегося атома на температурный множитель

$$f_T = \exp \{-B(\sin \theta / \lambda)^2\}; \quad B = 8\pi^2 u_x^2, \quad (20)$$

где B — величина, определяющаяся средним квадратичным смещением атома из положения равновесия. Имеющиеся в литературе данные [5,6,2] указывают, что величина B в зависимости от прочностей связи,

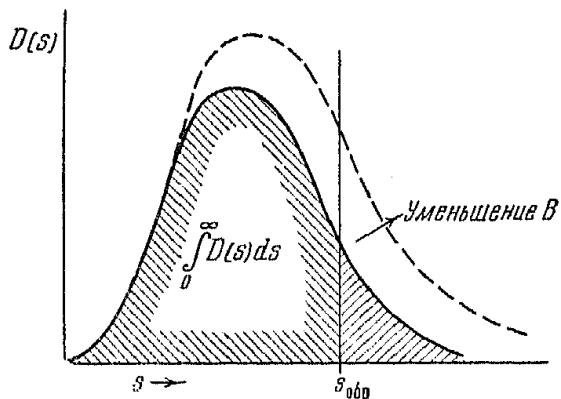


Рис. 1. Радиальная функция $D(s)$ в обратном пространстве, влияние обрыва (отсечение части площади) и теплового движения (уменьшение B)

² «Статистическая» f -кривая для $Z=8$ и значения f -кривых для $\sin \theta / \lambda > 1,2$ были найдены по f -кривой цезия ($Z=55$), приведенной в [3] до $\sin \theta / \lambda = 2,0$.

массы атомов и т. п. колеблется от 4 (для органических соединений) до 1 и менее, чему отвечают средние квадратичные смещения в произвольном направлении $\sqrt{3u_x^2}$ порядка 0,40—0,10 Å.

Таким образом, для подсчетов характеристик в интегральные формулы подставлялось f по статистической теории, умноженное на температурный множитель при $B=4, 3, 2, 1$. Использование «изотропного» температурного множителя для этой цели вполне приемлемо, поскольку учитывается весь объем обратного пространства, по которому усредняется в действительности анизотропная величина f_T .

Подсчет характеристик проводился численным интегрированием для $Z=8, 16, 32, 64, 80$, в некоторых случаях для $Z=8, 32, 80$. По полученным результатам подбиралась формула зависимости от Z при разных B , причем оказалось, что во всех случаях вполне удовлетворительный результат дает простой вид зависимости

$$kZ^\alpha, \quad (21)$$

причем α зависит от B очень слабо, а k — сильнее. Отличие результата, даваемого формулами типа (21), от результата, получаемого прямым интегрированием для произвольного Z , составляет не более 3%. Вполне удовлетворительно получаются и значения характеристик, если сравнить их даже с данными прямого интегрирования по f -кривым для легких атомов по Фоку-Хартри [3], а не по статистической теории (кроме водорода), что вполне естественно объясняется «интегральностью» характеристик, мало чувствительных в целом к незначительным различиям в статистических и точных f -кривых.

3. Электронная плотность в центре атома

Получая из экспериментальных данных величины F_{hkl} и строя по ним ряд Фурье, мы получаем атомы как пики распределения электронной плотности. Высота этих пиков, т. е. значение $\rho(0)$, принимаемое обычно прямо пропорциональным Z , на самом деле зависит от Z более сильно, что неблагоприятно для обнаружения легких атомов в присутствии тяжелых.

Находясь в кристаллической решетке, атом проявляет себя в обратном пространстве уже не в виде непрерывного распределения «плотности» $f(s)$, а в виде дискретного набора узлов обратной решетки с весом F_{hkl} . При этом меняется и математическая форма описания явления дифракции — от интеграла Фурье мы переходим к ряду, учитываем структурный фактор. Однако характеристики каждого атома сохраняются и в решетке.

Применение метода, изложенного в предыдущем разделе, к формулам (5) и (15) дает для значений $\rho(0)$ (трехмерные ряды)

$$\rho(0) = kZ^\alpha p_{\text{эл.}} / \text{Å}^3 \quad (22)$$

и $\sigma(0)$ (двумерные ряды — случай проекций)

$$\sigma(0) = kZ^\alpha p_{\text{эл.}} / \text{Å}^2. \quad (23)$$

В этой таблице указана также величина p , характеризующая влияние обрыва ряда для конкретного случая $(\sin \theta / \lambda)_{\text{обр}} = 0,65^3$ (мы всюду будем измерять $\sin \theta / \lambda$ прямо в Å^{-1}). Если обрыва нет, то $p=1$.

Величины k , α и p принимают, в зависимости от B , значения, приведенные в табл. 1.

³ Это соответствует работе на излучении $\text{Cu } K_{\alpha_1} \lambda = 1,537 \text{ Å}$.

Таблица 1

B	$\rho(0)$ по (22)			$\sigma(0)$ по (23)		
	h	α	$p_{0,65}$	h	α	$p_{0,65}$
1	3,8	1,29	0,33	1,82	1,23	0,56
2	2,15	1,27	0,50	1,28	1,21	0,73
3	1,48	1,25	0,65	1,06	1,19	0,83
4	1,11	1,23	0,78	0,93	1,17	0,89

На рис. 2 и 3 изображены радиальные функции, характеризующие соответственно $\rho(0)$ и $\sigma(0)$ для ртути ($Z=80$), германия ($Z=32$) и кислорода ($Z=8$). Эти рисунки дают представление о роли теплового

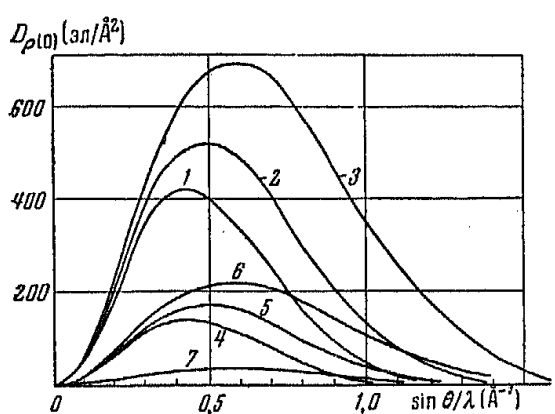


Рис. 2

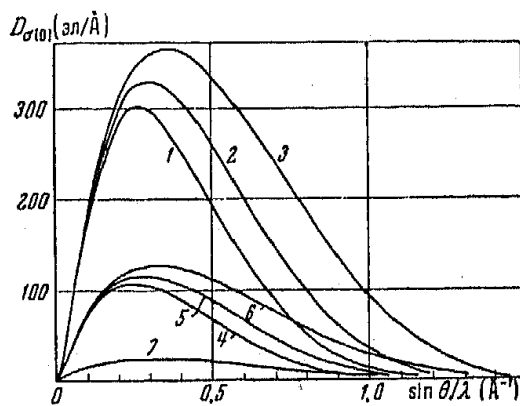


Рис. 3

Рис. 2. Радиальные функции для $\rho(0)$. Кривые 1, 2, 3 — для ртути ($Z=80$), соответственно при $B=4, 3, 2$; кривые 4, 5, 6 — для германия ($Z=32$), соответственно при $B=4, 3, 2$; кривая 7 — для кислорода, $Z=8$, $B=2$

Рис. 3. Радиальные функции для $\sigma(0)$ (обозначения те же, что на рис. 2)

движения, которое по мере увеличения B стягивает радиальную функцию к меньшим $\sin \theta / \lambda$, мало отражаясь на ближних и влияя в основном на дальние рефлексy. Пользуясь рис. 2 и 3, можно оценить влияние обрыва (т. е. величину p) как отношение оставшейся под $D(s)$ площади (рис. 1) ко всей первоначальной для произвольного $(\sin \theta / \lambda)_{\text{обр}}$. Это отношение не совсем одинаково для различных Z (отличаясь на 3—5%), так как максимумы кривых для легких атомов слегка сдвигаются в сторону меньших $\sin \theta / \lambda$, что отражает большую размазанность электронной оболочки при меньших Z .

Формула (22) показывает, что отношение $\rho(0)$ для различных Z во всех случаях будет порядка $(Z_1/Z_2)^{1/4}$. Например, если в структуре совместно присутствуют атомы железа и углерода, то отношение Z есть $26:6=4,35$, но отношение высот пиков будет $4,35^{1/4}=6,3$. В случае более сильного различия атомных номеров, например в 10 раз (ртуть и кислород), пик тяжелого атома будет в $10^{1/4}=1,8$ раз больше пика легкого.

Для $\sigma(0)$ зависимость от Z и B несколько более слабая. Меньшая зависимость от B объясняется относительно меньшей ролью (количеством) дальних отражений при переходе от всего обратного пространства к плоскости в нем. По этой причине имеется и меньшее влияние обрыва (p больше).

4. Нормировка ряда электронной плотности

Приведение структурных амплитуд к абсолютной шкале, что нужно, например, для определения их знаков, можно произвести, используя среднее квадратичное значение электронной плотности входящих в ячейку атомов [формулы (6), (8), (9) [1]]. Для элементарной ячейки кристалла объема V

$$\overline{\rho^2} = \frac{1}{V} \int \rho^2(\mathbf{r}) d\tau. \quad (24)$$

Большие значения $\rho(\mathbf{r})$, а тем более $\rho^2(\mathbf{r})$ принимает только в атомах, поэтому интеграл (24) с большой точностью можно заменить суммой соответствующих интегралов (6) по всем атомам ячейки, т. е. используя (8) и (9), написать

$$\overline{\rho^2} = \sum_i G_{1i} / V. \quad (25)$$

С другой стороны, равенство Буняковского (соотношение полноты) для рядов Фурье связывает сумму квадратов модулей коэффициентов Фурье с (24):

$$\overline{\rho^2} = \frac{1}{V} \int \rho^2(\mathbf{r}) d\tau = \frac{1}{V^2} \sum |F_{hkl}|^2. \quad (26)$$

Эту формулу можно получить и как частный случай формулы F^2 -рядов

$$\frac{1}{V} \int \rho(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r} + \mathbf{u}) d\tau = \frac{1}{V^2} \sum F_{hkl}^2 \exp\{-2\pi i(\mathbf{u}\mathbf{H})\}, \quad (27)$$

положив в ней $\mathbf{u} = 0$. Таким образом, (26) есть величина начального пика F^2 -ряда.

Сравнивая (24) и (26), получим

$$\frac{1}{V} \sum_i F_{hkl}^2 = \sum_i G_{1i}. \quad (28)$$

Таким образом, зная заранее G_{1i} , можно нормировать полученную экспериментальную сумму всех F_{hkl}^2 к абсолютной шкале. Достоинство этого метода — учет сразу всех отражений, т. е. максимальное усреднение ошибок и полное отсутствие каких-либо предположений о размещении атомов в ячейке; недостаток — необходимость предварительной, хотя бы и грубой оценки теплового движения, т. е. величины B .

Аналогичным путем для проекций электронной плотности получим, учитывая (16) и связывая $\overline{\sigma^2}$ с соответствующей зоной отражений

$$\overline{\sigma^2} = \frac{1}{S} \int \sigma^2(\mathbf{r}) dS = \frac{1}{S^2} \sum |F_{hko}|^2, \quad (29)$$

$$\frac{1}{S} \sum F_{hko}^2 = \sum_i G_{3i}. \quad (30)$$

Значения характеристик

$$G_1 = kZ^\alpha \rho_{\text{эл.}}^2 / \text{\AA}^3 \quad (31)$$

и

$$G_3 = kZ^\alpha \rho_{\text{эл.}}^2 / \text{\AA}^2 \quad (32)$$

даны в табл. 2.

Таблица 2

B	G ₁ по (31)			G ₃ по (32)		
	h	α	p _{0,65}	h	α	p _{0,65}
1	0,44	2,47	0,66	0,385	2,37	0,83
2	0,29	2,42	0,82	0,315	2,33	0,93
3	0,23	2,38	0,94	0,275	2,30	0,98
4	0,20	2,34	0,97	0,245	2,28	0,99

На рис. 4 и 5 приведены примеры радиальных функций характеристик G_1 и G_3 . По сравнению с кривыми рис. 2 и 3 эти кривые имеют максимум ближе к $\sin \theta / \lambda = 0$, что отвечает более быстрому падению f^2 -кривой по сравнению с f -кривой. Поэтому влияние обрыва, учитываемое величиной p , здесь меньше.

Можно ориентировочно рекомендовать использовать следующие величины B : для органических кристаллов $B=4$, для таких же кристаллов, имеющих в своем составе тяжелые атомы, $B=3$, для ион-

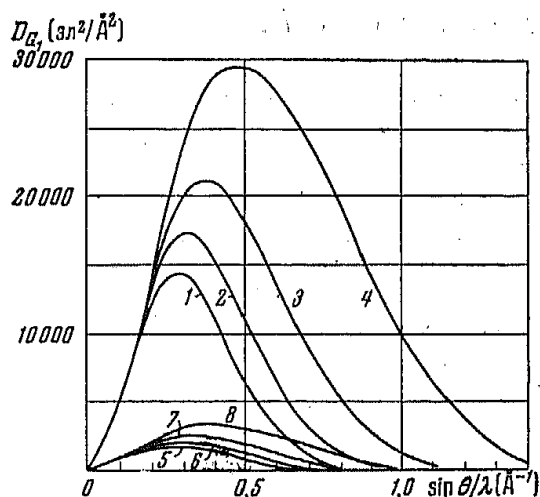


Рис. 4. Радиальные функции характеристики $G_1 = V \rho^2$. Кривые 1—4—для $Z=80$, соответственно при $B=4, 3, 2, 1$; кривые 5—8—для $Z=32$ и соответственно $B=4, 3, 2, 1$

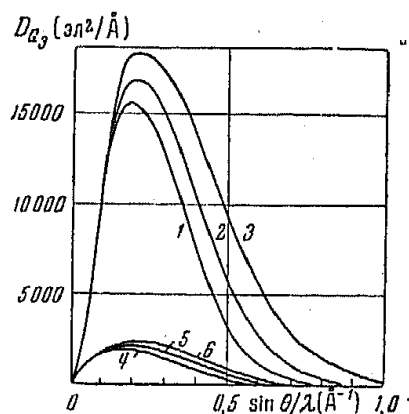


Рис. 5. Радиальные функции характеристики $G_3 = S \sigma^2$. Кривые 1, 2, 3—для $Z=80$, $B=4, 3, 2$; кривые 4, 5, 6—для $Z=32$, $B=4, 3, 2$

ных кристаллов $B=2$, для прочих кристаллов с ковалентными связями, например силикатов, $B=1$. Следует отметить, что ошибка в оценке B не очень сильно отзовется на нормировке. Например, при переходе от $B=4$ к $B=3$ нормированные значения F^2 изменятся приблизительно на 15%, и, следовательно, F —на 8%, даже переход от $B=4$ к $B=2$ дает еще изменение F^2 порядка 25% для легких и 40% для тяжелых атомов, и, следовательно, F —на 13—20%, что еще не очень существенно для определения знаков амплитуд.

Таким образом, например для органических соединений, формула (28) примет вид:

$$\sum F_{hkl}^2 / V = 0,20 \sum_i Z_i^{2,34}, \quad (28a)$$

и если в ячейку входят только атомы углерода (n атомов), для которых $6^{2,34} = 65$ (а водородом можно пренебречь), то

$$\sum F_{hkl}^2 / V = n \cdot 13 \text{ эл}^2 / \text{\AA}^3. \quad (28б)$$

Заметим, что если на основании каких-либо экспериментальных данных или теоретических соображений можно сделать более точное предположение о B , то значения коэффициентов k и α найдутся интерполяцией или экстраполяцией по k и α для целочисленных B , приведенных в табл. 2, например путем построения графика (см. [1]). Это замечание относится и ко всем приводимым в дальнейшем изложении формулам, где даны лишь целочисленные B .

В качестве одного из возможных путей нахождения B из эксперимента можно предложить использовать статистическое соотношение Вильсона [7]

$$\bar{F}^2 = \sum_i f_i^2$$

следующим образом. Строим график распределения всех F^2 в зависимости от $\sin \theta / \lambda$ (т. е. $\sum_{\sin \theta / \lambda = 0}^{0.1} F^2$; $\sum_{\sin \theta / \lambda = 0.1}^{0.2} F^2$ и т. д.), который будет повторять ход кривых рис. 4 (или рис. 5, если брать одну зону). Поскольку положение максимума распределения чувствительно к B , то сравнение положения его на экспериментальном распределении с теоретическими кривыми прямо даст значение B .

5. О возможности обнаружения легких атомов в присутствии тяжелых

Возможность обнаружения легких атомов в присутствии тяжелых зависит от ошибок в определении $F_{\text{эксп}}$, обрыва ряда и, разумеется, от соотношения атомных номеров и количества тяжелых и легких атомов.

Рассмотрение литературных данных [2, 5, 8] показывает, что обрыв при $\sin \theta / \lambda = 1,0$ уже не играет существенной роли (ср. рис. 2), практически мало влияя на обнаруживаемость легких атомов. Остановимся на роли ошибок в определении $F_{\text{эксп}}$. Если обозначить ошибку через ΔF_{hkl} , то ряд, построенный по $F_{hkl} + \Delta F_{hkl}$, состоит из «истинной» картины и волны ошибок, возникшей от суммирования ΔF_{hkl} . Средняя квадратичная величина волны ошибок может быть подсчитана по (26), если вставить в эту формулу не F_{hkl} , а ΔF_{hkl} . Если положить относительную ошибку определения F_{hkl} равной b , т. е. $\Delta F_{hkl} = b F_{hkl}$, то по (26) $|\Delta \rho|^2 = b^2 \bar{\rho}^2$, и учитывая (28), получим

$$V |\Delta \rho|^2 = b \sqrt{\sum_i G_{ii} / V}. \quad (33)$$

На примере гипотетической структуры мы рассчитали 15 рядов со случайным распределением знаков bF . Как и следовало ожидать, оказалось, что волна ошибок состоит из случайного распределения максимумов и минимумов, высоты которых в $1,5 \div 2$ раза больше $V |\Delta \rho|^2$, что вполне естественно, поскольку $\Delta \rho$ есть «волна». Пики или провалы волн ошибок могут совершенно поглотить или исказить положение легкого атома, если его высота сравнима с амплитудой волны ошибок, т. е. составляет $1,5 \div 2 \sqrt{V |\Delta \rho|^2}$. Поэтому для обнаружения легкого атома следует потребовать, чтобы для него $\rho(0)$ было больше амплитуды волны ошибок не менее чем в $1,5 \div 2$ раза, если не говорить о возмущающем действии волны ошибок на координаты пика. Следовательно, должно быть

$$\rho(0)_{\text{легк}} > 3b \sqrt{\bar{\rho}^2}. \quad (34)$$

Вставляя в (34) $\rho(0)$ по (22) и $\bar{\rho}^2$ по (25) и (31) для $B = 4$, получим

$$0,75 Z_{\text{легк}}^{1,23} / \sqrt{\sum_i Z_i^{2,34} / V} > b. \quad (35)$$

Для других B оценка, даваемая этой формулой, сильно не изменится, поскольку и G_1 и $\rho(0)$ растут примерно одинаково. Практические ограничения на b накладываются только при сильном различии Z , входящих в структуру атомов. Для водорода в органических соединениях и для структур с атомами, различающимися по Z в 10 раз (при оптимальном числе тяжелых атомов, играющих основную роль в создании волны ошибок), требуемая точность составляет примерно 25—30%. Если структура состоит из двух сортов атомов — легких и тяжелых, то, пренебрегая в (35) легкими атомами, получим

$$0,75 (Z_{\text{легк}}^{1,23} / Z_{\text{тяж}}^{1,17}) \sqrt{V / n_{\text{тяж}}} > b. \quad (35a)$$

Характерная величина $\sqrt{V/n}$ — корень из объема, приходящегося на один тяжелый атом, играет важную роль во всех анализах точности рентгеноструктурных исследований [9–12].

Совершенно аналогично (29), (30), (32) получим для случая проекций ($B = 4$)

$$0,6 Z_{\text{легк}}^{1,17} / \sqrt{\sum Z_i^{2,28} / S} > b. \quad (36a)$$

$$0,6 (Z_{\text{легк}}^{1,17} / Z_{\text{тяж}}^{1,14}) \sqrt{S / n_{\text{тяж}}} > b. \quad (36b)$$

Применение двумерных рядов сильно повышает требования к точности измерений — для указанных выше случаев она достигает примерно 10%. Это связано с тем, что $\sqrt{V/n}$ всегда больше $\sqrt{S/n}$. Если взять «усредненное» ребро ячейки a , то отношение корней будет $\sqrt{a^3/n} : \sqrt{a^2/n} = \sqrt{a} (\text{\AA})$, что и определяет примерно разницу в точности.

Если имеет место существенный обрыв, то $\Delta\rho$ есть ряд, построенный по ΔF_{hhl} , а после места обрыва в него входят полные F_{hhl} . Это увеличит подкоренное выражение в (33), что можно учесть следующим образом (рис. 6): если обрыв оставляет от G (на рис. 4 и 5) долю p , а ошибка в определении F_{hhl} есть b , то эффективное $G_{\text{эфф}}$ есть

$$G_{\text{эфф}} = pb^2G + (1-p)G. \quad (37)$$

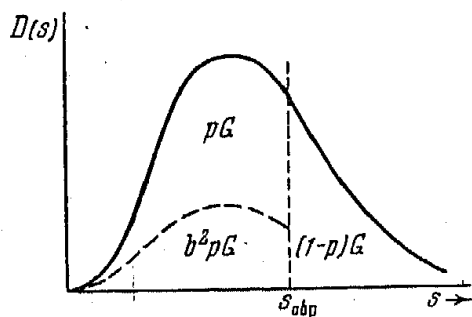


Рис. 6. Влияние обрыва на $G_{\text{эфф}}$

Следует, однако, отметить, что второе слагаемое, дающее среднюю квадратичную величину волн обрыва, практически сказывается лишь около тяжелого атома, не далее чем на $2 \div 2,5 \text{ \AA}$. Поэтому, если, например, в ячейке есть тяжелый атом, то лишь для атомов, находящихся рядом с ним, справедливо $G_{\text{эфф}}$, найденное по формуле (37), а для остальных проще и правильнее использовать формулу (33).

6. Точность определения координат атомов

Этот вопрос рассматривался в ряде работ [9-12]. Основная формула для определения ошибки в определении положения атома такова:

$$\Delta x = \frac{\partial \Delta \rho}{\partial x} / \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}. \quad (38)$$

Ее можно получить следующим путем (рис. 7). $\rho(x)$ — сечение данного пика. Волна ошибок $\Delta \rho$, возникающая от ошибок в определении F_{int} , складываясь с $\rho(x)$, сдвигает положение максимума. В отсутствие $\Delta \rho$ положение максимума определяется условием $\partial \rho / \partial x = 0$; при наличии $\Delta \rho$

$$\partial (\rho + \Delta \rho) / \partial x = 0,$$

$$\text{т. е. } \partial \rho / \partial x = -\partial \Delta \rho / \partial x.$$

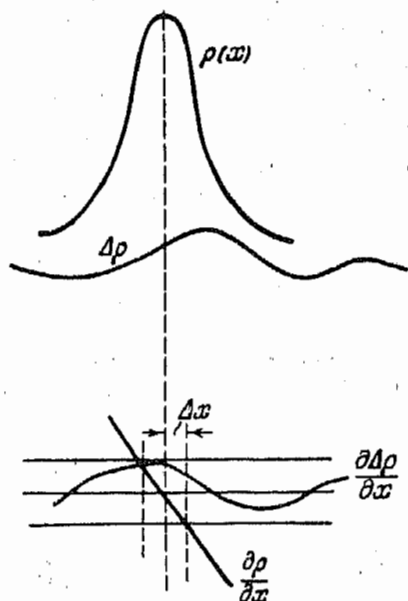


Рис. 7. Влияние волны ошибок на координаты пика

Ход кривой $\partial \rho / \partial x$ и величина $\partial \Delta \rho / \partial x$ изображены в нижней части рис. 7. Из него следует, что наклон кривой $\partial \rho / \partial x$, т. е. $\partial^2 \rho / \partial x^2$, умноженный на Δx , равен $\partial \Delta \rho / \partial x$, т. е. мы получаем (38). Для полной ошибки Δr в числителе должен стоять $\text{grad } \Delta \rho$.

Вторая производная характеризует остроту пика — кривизну его в точке максимума. Чем острее пик, тем меньше поддается он возмущающему действию волны ошибок. Значение второй производной в максимуме дается выражениями (10) и (17), в которых решающую роль играют далекие отражения, дающие наиболее острые гармоники, так как имеется множитель s^4 .

Параметры формул для $\partial^2 \rho / \partial x^2$

$$\partial^2 \rho / \partial x^2 = k Z^\alpha p' \text{ эл.} / \text{\AA}^5 \quad (39)$$

и $\partial^2 \sigma / \partial x^2$

$$\partial^2 \sigma / \partial x^2 = k Z^\alpha p' \text{ эл.} / \text{\AA}^4 \quad (40)$$

сведены в табл. 3.

Таблица 3

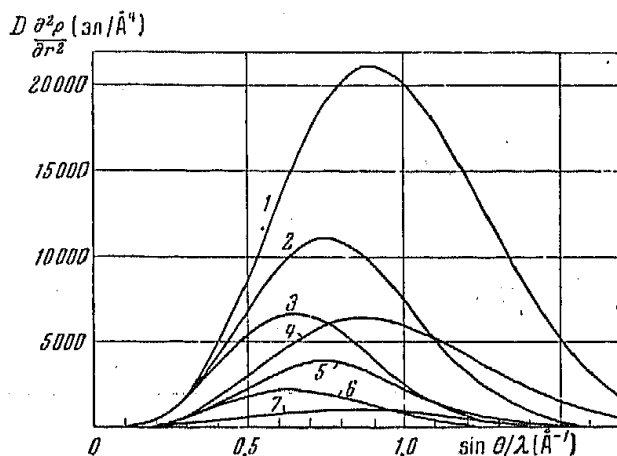
B	$\partial^2 \rho / \partial x^2$ по (39)				$\partial^2 \sigma / \partial x^2$ по (40)			
	h	α	$p'_{0,65}$	$p'_{1,4}$	h	α	$p'_{0,65}$	$p'_{1,4}$
1	136	1,40	0,08	0,70	56	1,35	0,17	0,83
2	46,7	1,35	0,20	0,91	25	1,31	0,33	0,95
3	24,4	1,31	0,33	0,98	14,7	1,28	0,50	0,99
4	14,7	1,28	0,50	1	10	1,26	0,63	1

Обрыв, особенно для малых B , вследствие решающей роли дальних отражений резко сказывается на второй производной. В табл. 3 и далее в табл. 4 кроме значений $p'_{0,65}$, которые отвечают работе на излучении Cu , мы даем значения $p'_{1,4}$, которые отвечают использованию излучения $\text{Mo } K_\alpha$, с $\lambda = 0,708 \text{ \AA}$. Сравнение этих p' показывает, насколько увеличивает точность использование излучения молибдена.

В то же время ясно, что применение излучения Си для исследования кристаллов с малыми B совершенно неоправдано.

На рис. 8 и 9 даны соответствующие кривые, максимум которых по сравнению с кривыми для $\rho(0)$ и $\sigma(0)$ (рис. 2 и 3) сдвинут к дальним $\sin \theta / \lambda$.

Рис. 8. Радиальные функции для $\partial^2 \rho / \partial r^2$. Кривые 1, 2, 3 — для $Z = 80$, соответственно при $B = 2, 3, 4$; кривые 4, 5, 6 — для $Z = 32$, соответственно при $B = 2, 3, 4$; кривая 7 — $Z = 8, B = 2$



Формулы (39) и (40) и табл. 3 показывают, что различие в кривизне максимумов атомов оказывается намного больше, чем отношение атомных номеров. Например, при различии Z в 10 раз различие

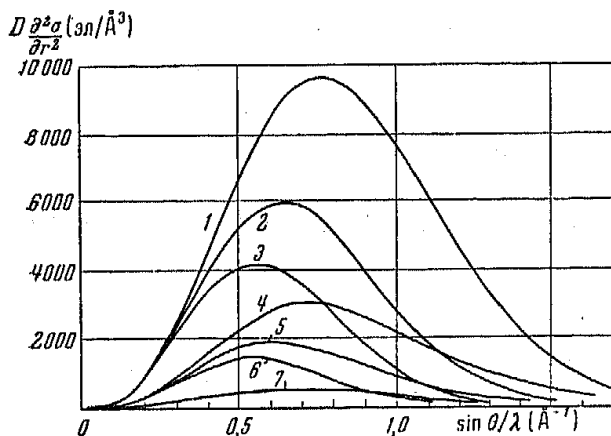


Рис. 9. Радиальные функции для $\partial^2 \sigma / \partial r^2$ (обозначения те же, что на рис. 8)

в кривизне будет порядка $10^{1.30} = 20$ раз. Обратимся теперь к оценке числителя (38). Если волна ошибок возникает от ряда

$$\Delta \rho = \frac{1}{V} \sum \Delta F_{hkl} \exp \{-2\pi i (hx/a + ky/b + lz/c)\}, \quad (41)$$

то ее производная есть

$$\frac{\partial \Delta \rho}{\partial x} = \frac{1}{V} \sum (-2\pi i h/a) \Delta F_{hkl} \exp \{-2\pi i (hx/a + ky/b + lz/c)\} \quad (42)$$

с коэффициентом Фурье $(-2\pi i h/a) \Delta F_{hkl}$. Полагая, что средняя ошибка определения F есть b , т. е. что $\Delta F_{hkl} = b F_{hkl}$, и используя равенство Буняковского (26), получим для суммы трех производных по осям [ср. (4а) и (11)]

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial \Delta \rho}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Delta \rho}{\partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Delta \rho}{\partial z} \right|^2 = \\ & = \frac{1}{V} \int \left(\left| \frac{\partial \Delta \rho}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Delta \rho}{\partial y} \right|^2 + \left| \frac{\partial \Delta \rho}{\partial z} \right|^2 \right) d\tau = \frac{b^2}{V^2} \sum s^2 |F_{hkl}|^2. \end{aligned} \quad (43)$$

Рассуждая так же, как и в разделе 4, заменим интеграл на сумму соответствующих характеристик по атомам [формулы (11) и (12)], откуда

$$\left| \frac{\partial \Delta p}{\partial x} \right|^2 = b^2 \sum_i G_{2i} / V. \quad (44)$$

Расчет характеристики G_2

$$G_2 = k Z^\alpha p_{\text{эл.}}^2 / \text{\AA}^5 \quad (45)$$

и отвечающей ей в случае проекций G_4

$$G_4 = k Z^\alpha p_{\text{эл.}}^2 / \text{\AA}^4 \quad (46)$$

привел к следующим результатам (табл. 4).

Таблица 4

B	G_2 по (45)				G_4 по (46)			
	h	α	$p_{0,65}$	$p_{1,4}$	h	α	$p_{0,65}$	$p_{1,4}$
1	5,8	2,60	0,32	0,97	3,8	2,54	0,48	0,98
2	2,30	2,55	0,58	1	1,94	2,49	0,70	1
3	1,30	2,50	0,80	1	1,32	2,44	0,87	1
4	0,90	2,45	0,90	1	1,02	2,40	0,95	1

Соответствующие кривые даны на рис. 10 и 11.

Таким образом, вероятная ошибка в определении положения атома определится делением корня из правой части выражения (44) на (39).

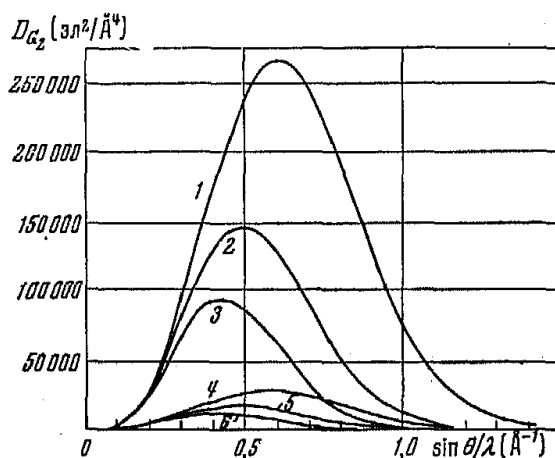


Рис. 10. Радиальные функции характеристики G_2 . Кривые 1, 2, 3 — для $Z=80$, соответственно при $B=2, 3, 4$; кривые 4, 5, 6 — для $Z=32$, соответственно при $B=2, 3, 4$.

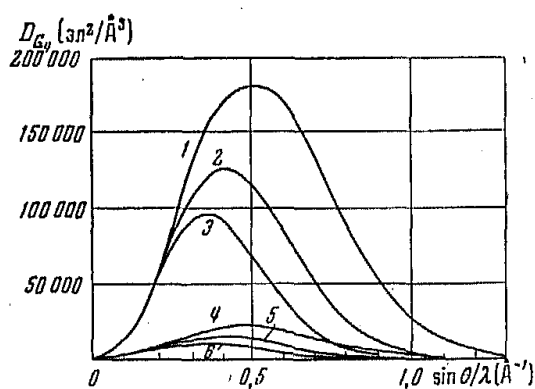


Рис. 11. Радиальные функции характеристики G_4 (обозначения те же, что на рис. 10)

Если атом находится в положении с тремя степенями свободы, то

$$\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2, \quad \text{т. е.} \quad \Delta r = \sqrt{3} \Delta x. \quad (47a)$$

Для межатомного расстояния ошибка будет

$$\Delta r_{jk} = \sqrt{\Delta r_j^2 + \Delta r_k^2}. \quad (47b)$$

Таким образом, мы получим для трехмерного ряда Фурье, понимая под Δr среднюю квадратичную ошибку:

$$\Delta r = \sqrt{3} b \sqrt{\sum_i G_{2i} / V} \left/ \frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} \right. \quad (48)$$

и для двумерного ряда

$$\Delta r = \sqrt{2} b \sqrt{\sum_i G_{4i} / S} \left/ \frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} \right. \quad (49)$$

Подставляя в (48) выражения (39), (45), найдем

$$\text{при } B = 1 \quad \Delta r_j = 0,030 (b / \sqrt{V}) \left(\sqrt{\sum_i Z_i^{2,60}} / Z_j^{1,40} \right); \quad (50a)$$

$$\text{при } B = 2 \quad \Delta r_j = 0,056 (b / \sqrt{V}) \left(\sqrt{\sum_i Z_i^{2,55}} / Z_j^{1,35} \right); \quad (50б)$$

$$\text{при } B = 3 \quad \Delta r_j = 0,081 (b / \sqrt{V}) \left(\sqrt{\sum_i Z_i^{2,50}} / Z_j^{1,31} \right); \quad (50в)$$

$$\text{при } B = 4 \quad \Delta r_j = 0,11 (b / \sqrt{V}) \left(\sqrt{\sum_i Z_i^{2,45}} / Z_j^{1,28} \right). \quad (50г)$$

Коэффициент перед этими формулами растет почти точно пропорционально B и примерно равен $0,27 B$. Пусть структура состоит из атомов одного сорта. Извлекая корень из $\sum Z_i^2$, получим при делении на знаменатель примерно одинаковую, почти не зависящую от B величину $Z^{-0,07}$ и придем к формуле

$$\Delta r = 0,027 B b \sqrt{n / V} Z^{-0,07} \text{ \AA}. \quad (51)$$

Эта формула показывает, что если структура состоит из одинаковых атомов, то при прочих равных условиях точность определения их координат очень слабо, но все же зависит от Z — тяжелые атомы определяются лучше. Подчеркнем, что здесь пока речь идет об атомах с разным Z в разных («своих») структурах, а не в одной и той же. Если принимать представление о подобии атомных функций, то эта точность была бы одинаковой для всех Z [12].

Подставляя в (49) выражения (40), (46), получим для случая проекций:

$$\text{при } B = 1 \quad \Delta r_j = 0,049 (b / \sqrt{S}) \left(\sqrt{\sum_i Z_i^{2,54}} / Z_j^{1,35} \right); \quad (52a)$$

$$\text{при } B = 2 \quad \Delta r_j = 0,079 (b / \sqrt{S}) \left(\sqrt{\sum_i Z_i^{2,49}} / Z_j^{1,31} \right); \quad (52б)$$

$$\text{при } B = 3 \quad \Delta r_j = 0,111 (b / \sqrt{S}) \left(\sqrt{\sum_i Z_i^{2,44}} / Z_j^{1,28} \right); \quad (52в)$$

$$\text{при } B = 4 \quad \Delta r_j = 0,143 (b / \sqrt{S}) \left(\sqrt{\sum_i Z_i^{2,40}} / Z_j^{1,26} \right), \quad (52г)$$

а для случая структуры из одинаковых атомов

$$\Delta r = (0,015 + 0,032 B) b \sqrt{n / S} Z^{-0,07} \text{ \AA}. \quad (53)$$

Зависимость от B здесь более слабая, чем в трехмерном случае, как и должно быть.

Отметим, что по (50) и (52), после того как найдена ошибка для какого-либо (например, тяжелого) атома, Δr для других атомов этой же структуры можно найти, пользуясь отношением вторых производных, которое согласно (39), (40) будет $(Z_j/Z_h)^{1,26-1,40}$ для разных случаев, поскольку Δr обратно пропорционально $\partial^2\rho/\partial r^2$.

Сделаем некоторые оценки, пользуясь полученными формулами, прежде всего для структур из одинаковых атомов. В чистом виде этот случай — структуры простых веществ — почти не встречается, однако на его примере удобно проследить влияние величин b , V и обрыва. Практически он близок к случаю органических структур, а также структур, в которых тяжелых атомов больше, чем легких. Тогда тяжелые атомы практически полностью определяют $\sum_i Z_i^2$ в формулах (50), и оценка будет относиться к ним.

Величина $\sqrt{n/V}$, о которой мы уже говорили выше, колеблется для различных структур не очень значительно — объем на один атом составляет примерно от 15 до 40 Å³, что дает для $\sqrt{n/V} \approx 0,25-0,15$ (в среднем 0,20). Тогда, если эксперимент выполнен с хорошей точностью при $b=0,2$, получим для $B=4$ по (51) $\Delta r \approx 0,004$ Å; для $B=2-0,002$ Å. Для проекций $\sqrt{n/S}$ примерно будет 0,4—0,3; тогда по (53) при $b=0,2$ и $B=4$ будет $\Delta r \approx 0,01$ Å; для $B=2-0,006$ Å. Визуальная оценка интенсивностей, когда b порядка 0,5, приведет к значению Δr для трехмерного ряда $\approx 0,01$ Å; для двумерного ряда $\approx 0,03-0,05$ Å.

Остановимся на влиянии обрыва. Обрыв уменьшает вторую производную. Для $(\sin \theta/\lambda)_{\text{обр}} = 0,65$ и 1,4 доля этого уменьшения p' дана в табл. 3. Пользуясь графиками рис. 8 и 9, эту величину можно оценить для любого обрыва по кривой $Z=32$ или 80, так как p' слабо зависит от Z . Величины b^2G_2 и b^2G_4 от обрыва увеличиваются, так же как и b^2G_1 (см. рис. 6). Площадь до $(\sin \theta/\lambda)_{\text{обр}}$ нужно умножать на pb^2 . Для оставшейся после обрыва части ряда $\Delta F=F$, т. е. $b=1$, а доля соответствующей площади есть $(1-p)$ (см. рис. 6). Легко видеть, что тогда b в выражениях (48) — (53) нужно заменить на $b_{\text{эфф}}$ по формуле

$$b_{\text{эфф}} = \sqrt{pb^2 + 1 - p} / p'. \quad (53)$$

Величины $p_{0,65}$ и $p_{1,4}$ указаны в табл. 4; для любого обрыва их можно найти по графикам рис. 10, 11. Тогда для указанных выше примеров при $B=4$ и обрыве при $(\sin \theta/\lambda) = 0,65$, $b=0,2$ возрастает в трехмерном случае до эффективного $b_{\text{эфф}} = 0,75$; в случае $B=2$ до $b_{\text{эфф}} \approx 3$, что резко уменьшает точность определения Δr (от нескольких тысячных до сотых Å). Величина $b_{\text{эфф}}$ создается по (53) в основном за счет p и, главным образом, p' , а b играет в случае сильного обрыва незначительную роль. Отсюда понятно, что при сильном обрыве нет никакого смысла увеличивать точность измерений b , но при работе без обрыва Δr прямо пропорционально b . На двумерный ряд обрыв влияет относительно меньше (ср. p и p' для двумерного и трехмерного случая в табл. 3 и 4), но абсолютные величины Δr получаются при $(\sin \theta/\lambda)_{\text{обр}} = 0,65$ порядка 0,05 Å.

Мы сделали оценку точности для структур из одинаковых атомов. Разберем теперь два примера точности определения координат атомов разных атомных номеров в одной структуре при отсутствии обрыва.

1) PbSO_4 ; $a=8,45$, $b=5,38$; $c=6,93$ Å; $V=315$ Å³, $Z=4$. Величину B здесь целесообразно принять равной 2. Тогда по (506) получим для случая визуальной оценки $b=0,5$ $\Delta r_{\text{Pb}}=0,0023$; $\Delta r_{\text{S}}=0,020$; $\Delta r_{\text{O}}=0,053$ Å. Для проекции на грань ac получим $S=59$ Å², и по (526) $\Delta r_{\text{Pb}}=0,008$, $\Delta r_{\text{S}}=0,066$; $\Delta r_{\text{O}}=0,165$ Å. Следовательно, метод проек-

ций для определения легких атомов в присутствии тяжелых требует очень большой точности определения амплитуд. При $b = 0,1 \Delta r_0$ составило бы $\approx 0,03 \text{ \AA}$. Обрыв в таких случаях вообще практически не позволит говорить о «точности» определения легкого атома.

2) Водород в органических соединениях. Волна ошибок возникает в основном от «тяжелых» в этом случае атомов углерода. Здесь следует принять $B = 4$ и $V/n = 20 \text{ \AA}^3$ [12]. Вторая производная для углерода по (39в) будет $150 \text{ эл./\AA}^5$. Прямой расчет по (10) дает $144 \text{ эл./\AA}^5$, т. е. для $Z = 6$ статистическая теория и формулы (39), основанные на ней, дают вполне удовлетворительные результаты. Тогда при очень хорошей точности $b = 0,1$ получим по (51) или (50г) $\Delta r_c = 0,0025 \text{ \AA}$. Вторая производная максимума, отвечающего атому водорода, по (39в) будет $14,7 \text{ эл./\AA}^5$, однако здесь эта оценка, основанная на статистической теории, уже груба. Прямой расчет по f -кривой водорода [4] по (10) дает $\partial^2 \rho / \partial r^2 = 4,6 \text{ эл./\AA}^5$, т. е. кривизна в максимуме электронной плотности атома водорода меньше таковой у углерода в 31 раз. Во столько же раз больше и ошибка: $\Delta r_H = 0,08 \text{ \AA}$. Таким образом, точность определения положения водорода рентгеновским методом невысока при очень большой точности измерений. Практический путь к ее увеличению — уменьшение B , т. е. съемка при низких температурах.

7. Дополнительные замечания о точности. F^2 -ряды

Во все формулы точности входит величина b — относительная ошибка определения амплитуд. Оценка ее возможна двумя путями. Первый путь, наиболее правильный, состоит в учете всех возможных ошибок эксперимента. Второй путь, менее строгий, но практически более удобный и дающий в общем правильный результат, состоит в сравнении вычисленных и экспериментальных амплитуд. Недостаток его тот, что мы, в сущности, не знаем, насколько правильны вычисленные амплитуды. Однако, несмотря на это, отклонение ($|F_{\text{эксп}}| - |F_{\text{выч}}|$) в ту или иную сторону дает в среднем приемлемую оценку «флуктуаций» из-за ошибок измерений. Применение такой оценки возможно только на конечной стадии исследования. Для этого нужно, во-первых, нормировать $\sum F_{\text{эксп}}^2$ по (28) или (31) (с учетом обрыва, если он есть) или прямо нормировать эту сумму

$$\sum F_{\text{эксп}}^2 = \sum F_{\text{выч}}^2 \quad (54)$$

к таковой по вычисленным $F_{\text{выч}}^2$, по одинаковым hkl (с учетом теплового фактора). После этого возможны различные способы оценки b . Наиболее распространенный из них — подсчет величины

$$b = \sum ||F_{\text{эксп}}| - |F_{\text{выч}}|| / \sum |F_{\text{эксп}}|. \quad (55)$$

По (55) можно составить представление о роли амплитуд с ошибочно принятым знаком. Если имеет место ошибка в знаке, то ΔF становится практически равным $|2F_{\text{эксп}}|$, т. е. резко увеличивается, что при большом количестве ошибок серьезно повлияет на весь числитель (55).

Мы не будем останавливаться на вопросах точности интерполяции при определении координат максимумов, на вопросах влияния сближения атомов, что систематически изменяет числитель (38); разбор этих вопросов можно найти в [2, 9, 10, 11]. Отметим, что влияние сближения практически существует лишь в случае проекций, когда максимумы могут оказаться не только очень близко, но даже сливаться.

Остановимся в заключение на оценке точности F^2 -рядов. Если атому соответствует f -кривая, то пику F^2 -ряда соответствует произведение f -кривых для атомов, расстояние между которыми дает данный пик: $f_{z_i} f_{z_j}$, а если атомы одинаковы, то f_z^2 . Здесь же следует отметить, что $f_{z_i} f_{z_j}$ с достаточной точностью можно заменить на $f_{z_{cp}}^2$, где $Z_{cp} = \sqrt{Z_i Z_j}$. Тогда, подставляя в (10) и (12) соответственно не f и f^2 , а f^2 и f^4 , получим нужные характеристики. Подстановка f^2 в (10) приводит к выражению (12) для f ; эта величина у нас вычислена (45), но теперь она играет другую роль — роль второй производной пика F^2 -ряда — функции межатомных расстояний $P(r)$. Мы рассмотрим лишь один случай — трехмерный ряд, $B=2$. Тогда [см. (45), табл. 4]:

$$\frac{\partial^2(P)}{\partial r^2} = 2,30 Z_i^{2,55} = 2,30 (Z_i Z_j)^{1,27}. \quad (56)$$

Первое выражение справедливо для пика от двух одинаковых атомов, для двух различных оно достаточно точно заменится на второе.

Для характеристики среднего квадратичного первой производной G_5 по (12) при подстановке туда f^4 получается для $B=2$:

$$G_{5ij} = 0,08 Z^{4,76} = 0,08 (Z_i Z_j)^{2,38}. \quad (57)$$

Аналогично (44) следует взять сумму G_5 , но уже по всем пикам, а не атомам. В начале координат сложатся все пики типа $i=j$, для остальных $i \neq j$

$$\sum G_5 = 0,08 \left(\sum_{i=j} Z_i^{1,76} + \sum_{i \neq j} (Z_i Z_j)^{2,38} \right). \quad (58)$$

Если в структуре имеется несколько атомов одинакового сорта, то и во вторую сумму попадут члены первого типа. Так как зависимость от Z здесь очень сильна, то можно в (58) учесть только тяжелые атомы, остальные дадут ничтожную добавку, если имеется различие в Z хотя бы более чем вдвое. Итак, для случая наличия атомов с преобладающим Z или для структур из одинаковых атомов (58) перейдет в

$$\sum G_5 = 0,08 n_{\text{тяж}}^2 Z_{\text{тяж}}^{4,76}. \quad (58a)$$

Имея в виду, что ошибке b в определении F отвечает $2b$ в определении F^2 , мы придем для Δr по (48) к формуле

$$\Delta r = 0,4 b n_{\text{тяж}} Z_{\text{тяж}}^{2,38} / [\sqrt{V} (Z_i Z_j)^{1,27}]. \quad (59)$$

Если нет выделяющихся по Z атомов, то вместо $n Z^{2,38}$ в числителе следует поставить корень из двух сумм (58), а коэффициент 0,08 в (59) уже учтен. Для наиболее тяжелых атомов структуры или для структуры из одинаковых атомов получим, аналогично (51),

$$\Delta r = 0,4 b n Z^{-0,16} / \sqrt{V} = 0,4 \sqrt{n^2 / V} Z^{-0,16}. \quad (60)$$

Это выражение, если не говорить о коэффициентах, больше выражения (51) в $\sqrt{n}$ раз. Следовательно, ошибка в определении координат пиков F^2 -ряда зависит не только от объема на один (тяжелый) атом в структуре, но и от числа атомов в ячейке.

Если по (51) мы получили при $b=0,2$ и $B=2$ $\Delta r \approx 0,002 \text{ \AA}$, то по (60) при оптимальном n порядка 20 для средних Z получим $\Delta r \approx 0,05 \text{ \AA}$. Здесь, однако, следует иметь в виду, что Δr для F^2 -ряда означает

прямо ошибку в расстоянии, а не в координате. В то же время вследствие хорошей сходимости F^2 -рядов для них несущественна ошибка обрыва, тогда как для F -рядов она значительно ухудшает точность.

Для рассмотренного выше примера структуры PbSO_4 получим $\Delta r_{\text{Pb-Pb}} = 0,022$; $\Delta r_{\text{Pb-S}} = 0,16$; $\Delta r_{\text{Pb-O}} = 0,4 \text{ \AA}$. Эти ошибки почти на порядок выше соответствующих ошибок F -ряда (см. стр. 58), величина их находится в хорошем согласии с практикой, показывающей, что по F^2 -рядам можно определять лишь расстояния от тяжелых атомов, а легкие атомы почти неуловимы. Сделанные оценки показывают, что точность определения расстояний по F^2 -рядам примерно на порядок ниже соответствующей точности F -рядов.

8. Выводы

Ряд имеющих значение для практики рентгеноструктурного анализа вопросов — нормировку амплитуд, оценку точности и т. п. — можно решать, если пользоваться найденными заранее величинами — интегральными характеристиками атомов. Эти характеристики рассчитываются как интегралы по соответствующим радиальным функциям в обратном пространстве, и в итоге выражаются простой функцией от атомного номера типа kZ^α . Найден конкретный вид характеристик для трехмерных и двумерных рядов при различных B . Рассмотрены вопросы точности F - и F^2 -рядов.

Институт кристаллографии
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
19 августа 1953 г.

Литература

- [1] Б. К. Вайнштейн. ДАН СССР, 93, 821, 1953. — [2] А. И. Китайгородский. Рентгеноструктурный анализ, Гостехиздат, 1950. — [3] Internationale Tabellen zur Bestimmung von Kristallstrukturen, B. II, Berlin, 1935, стр. 571—573. — [4] П. Гомбаш. Статистическая теория атома и ее применения, ИИЛ, 1951. — [5] Р. Джеймс. Оптические принципы дифракции рентгеновских лучей, ИИЛ, 1950. — [6] K. Lonsdale. Acta Cryst., 1, 70, 1948. — [7] A. J. G. Wilson. Acta Cryst., 2, 318, 1949. — [8] R. W. James. Acta Cryst., 1, 132, 1948. — [9] A. D. Booth. Proc. Roy. Soc. (A), 188, 77, 1946. — [10] A. D. Booth, K. H. V. Britten. Proc. Roy. Soc. (A), 193, 305, 1948. — [11] D. W. J. Cruickshank. Acta Cryst., 2, 65, 1949. — [12] А. И. Китайгородский. Журн. техн. физ., 20, 397, 1950.

О ТЕПЛОВОМ РАСШИРЕНИИ КРИСТАЛЛОВ

В. Л. Шмарц

При помощи простых соображений Френкеля выводятся формулы для коэффициентов линейного расширения металлов и ионных кристаллов. Устанавливается соотношение между теплоемкостью, коэффициентом расширения и параметром решетки, обобщающее известный закон Грюнайзена.

Тепловое расширение объясняется ангармоничностью тепловых колебаний в кристалле. Основанные на учете ангармоничности теоретические оценки коэффициента расширения согласуются с опытом лишь по порядку величин. Такова, например, формула Френкеля [1]

$$\alpha = k / r_0^3 E$$

(k — константа Больцмана, E — модуль Юнга). Оказывается, что уточнение и видоизменение вывода Френкеля позволяют получить численно согласующиеся с опытом формулы коэффициента расширения и установить новые закономерности теплового расширения.

Следуя Френкелю [1], будем следить за движением какой-либо частицы кристалла (т. е. атома или иона), считая другие неподвижными. При смещении колеблющейся частицы из положения равновесия на расстояние ξ , ее энергия изменяется от значения $w(r_0)$ до $w(r_0 + \xi)$, равного (с точностью до ξ^3)

$$w(r_0 + \xi) = w(r_0) + \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_0 \xi + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right)_0 \xi^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}\right)_0 \xi^3. \quad (1)$$

Смещение частицы характеризуется как расстоянием от положения равновесия ξ , так и углами направления смещения θ, φ . Энергия частицы, конечно, является функцией всех параметров смещения, однако хаотичность колебаний, т. е. равная вероятность смещения частицы по любому направлению, ведет к независимости суммарной энергии колебаний частицы от направления. В разложении энергии в ряд, который должен был бы включать производные по всем переменным r, θ, φ , остаются лишь радиальные члены.

Сила, с которой эта частица действует на остальные, равна

$$F_T = -\frac{d}{d\xi} \Delta w = -\frac{d}{d\xi} [w(r_0 + \xi) - w(r_0)] = -f\xi + g\xi^2, \quad (2)$$

где $f = (\partial^2 w / \partial r^2)_0$, $g = -1/2 (\partial^3 w / \partial r^3)_0$. В формуле (2) учтено, что $(\partial w / \partial r)_0 = 0$ вследствие условия равновесия.

При усреднении F_T получим $\bar{F}_T = g\xi^2$, так как среднее отклонение от положения равновесия ξ равно нулю. Квадратичное относительно смещения выражение $g\xi^2$ и характеризует ангармоничность тепловых колебаний.

Пусть в элементарной ячейке (кубической, с параметром решетки r_0) находится s частиц, действующих на площадь поверхности ячейки ($6r_0^2$) с силой $s\bar{F}_T$. Тогда сила, с которой частицы в результате тепло-

вых колебаний действуют на единицу площади поверхности, т. е. «тепловое давление», равно

$$p_T = sg \bar{\xi}^2 / 6r_0^2. \quad (3)$$

Это давление вызывает изменение объема ΔV , которое продолжается до тех пор, пока силы упругости, возникающие при изменении объема $p_{упр} = -K\Delta V / V_0$, не уравновесят теплового давления

$$K \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{sg \bar{\xi}^2}{6r_0^2}. \quad (4)$$

Изменение объема и представляет собой объемное тепловое расширение, связанное с α соотношением $\Delta V = 3V_0 \int_0^T \alpha dT$. Для получения окончательной формулы для α выразим $\bar{\xi}^2$ через энергию тепловых колебаний. Последнюю можно считать равной (с точностью до $\bar{\xi}^2$)

$$\Delta \bar{w} = \frac{f \bar{\xi}^2}{2} = \int_0^T \frac{c}{N} dT \quad (5)$$

(c/N — теплоемкость, отнесенная к одной частице кристалла).

Если до сих пор мы лишь уточняли отдельные положения вывода Френкеля [1], то в этом пункте наш вывод существенно отличается от его рассуждений. Френкель берет для энергии тепловых колебаний частицы кристалла классическое выражение энергии осциллятора с одной степенью свободы $kT/2$. Но колебания частиц кристалла не являются классическими. Мы учитываем неклассический характер колебаний в кристалле, выражая энергию колебаний через теплоемкость c , не подчиняющуюся классическим законам¹. Выразив $\bar{\xi}^2$ при помощи (5) через теплоемкость, преобразуем (4) к виду

$$\int_0^T \alpha dT = \frac{gs \int_0^T \frac{c}{N} dT}{9fKr_0^2}. \quad (6)$$

Дифференцируя (6) по температуре, находим

$$\alpha = gc / 9fK(N/s)r_0^2. \quad (7)$$

¹ Можно было бы перейти к выражению неклассического характера колебаний при помощи дебаевской формулы для энергии

$$\Delta \bar{w} = 9k\Theta_D \left(\frac{T}{\Theta_D} \right)^4 \int_0^{\Theta_D/T} \frac{x^3 dx}{e^x - 1},$$

где Θ_D — характеристическая температура (см. [2], стр. 123). В формулу коэффициента расширения вошли бы тогда теоретические дебаевские теплоемкости, совпадающие, впрочем, с экспериментальными для большинства простых кристаллов. Не желая усложнять расчет, мы определяем $\Delta \bar{w}$ при помощи (5), непосредственно используя экспериментальные значения теплоемкости.

1. Тепловое расширение металлов

В [1] приведены приближенные оценки коэффициентов f , g . Мы вычислим их при помощи выражения энергии частицы, как функции межатомного расстояния r . Это выражение получено Френкелем [1]²

$$w(r) = -\frac{A}{r} + \frac{Ar_0}{2r^3}. \quad (8)$$

Тогда по определению

$$f = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right)_0 = \frac{A}{r_0^3}, \quad g = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial r^3} \right)_0 = \frac{3A}{r_0^4},$$

а коэффициент расширения будет равен

$$\alpha = c / 3K(N/s)r_0^3. \quad (9)$$

Если считать N числом колеблющихся частиц в грамм-атоме металла, то c будет теплоемкостью грамм-атома, а $(N/s)r_0^3 = V'_0$ объемом грамм-атома.

Следовательно,

$$\alpha = c / 3KV'_0. \quad (10)$$

Из (8) может быть выведено (полученное впервые Френкелем [1]) соотношение, связывающее модуль упругости K с энергией грамм-атома металла при абсолютном нуле W :

$$K = \frac{2}{9} \frac{|W_0|}{V'_0}. \quad (11)$$

Учитывая (11), преобразуем (10) к виду

$$\alpha = \frac{3}{2} \frac{c}{|W_0|}. \quad (12)$$

Формулу (12) можно получить и независимо от (11) при помощи несколько иного вывода, чем приведенный здесь.

Формулы (10), (12) могут выполняться, в первую очередь, для кристаллов кубической системы, где применимо использованное выше положение о независимости теплового движения (следовательно, и расширения) от направления. Для кристаллов других систем эти формулы дают усредненный по направлениям коэффициент расширения, соответствующий расширению поликристалла.

Из (12) следует, что отношение теплоемкости к коэффициенту расширения не зависит от температуры (закон Грюнайзена [3], который хорошо подтверждается опытом).

Постоянная A формулы (8) по Френкелю зависит лишь от типа решетки и валентности металла. Она, таким образом, одинакова для металлов одной подгруппы периодической системы с одинаковыми решетками. Мы будем называть такие металлы «сходными». Равновесные значения энергии таких металлов при $r=r_0$ удовлетворяют благодаря

² На обосновании применимости формулы (8) к металлам мы останавливаться не будем. Отметим лишь следующее. Формула Френкеля предполагает наличие в металлах центральных сил. Возражения против теории центральных сил, которые основаны на применимости известных соотношений Коши к металлам (например, возражения Зейтца [2] против работ Грюнайзена [3]), неубедительны и должны отпасть. Большинство металлов имеет решетки, состоящие из вставленных друг в друга простых решеток, а Борн [4] показал, что для таких решеток соотношения Коши «уже не выполняются» даже в случае центральных сил. На этот факт указывал еще в 1929 г. Иоффе [5].

одинаковости A условию $W_0 = \text{const}/r_0$. Для сходных металлов из (12) следует

$$\alpha / cr_0 = \text{const} \quad (13)$$

— новая важная закономерность теплового расширения, обобщающая соотношение Грюнайзена. Если выполняется закон Дюлонга — Пти ($c = \text{const}$), соотношение (13) преобразуется в условие

$$\alpha / r_0 = \text{const}, \quad (14)$$

т. е. коэффициент α становится тогда пропорциональным параметру решетки для сходных металлов.

Таблица 1

Зависимости $\alpha / cr_0 = \text{const}$, $\alpha / r_0 = \text{const}$ в металлах

А. Соотношение $\alpha / r_0 = \text{const}$ (t вблизи 0°C)

Элемент	Группа и тип решетки	$r_0, \text{\AA}$	$10^{-6} \alpha, \text{град.}^{-1}$	$10^2 \alpha / r_0, \text{град.}^{-1} \text{см}^{-1}$
Li Na K Rb Cs	I (A) Кубическая объемно- центр. решетка	3,50 4,28 5,33 5,62 6,05	56 71 83 90 97	16,0 16,6 15,6 16,0 16,0
Cu Ag Au	I (B) Кубическая гранецентр. решетка	3,61 4,08 4,07	16,5 18,9 14,4	4,58 4,63 3,53
Zn Cd	II (B) Гексагональная решетка	2,66 2,97	25,8—26,3 28,8	9,80—9,88 9,80

Б. Соотношение $\alpha / cr_0 = \text{const}$

Элемент	Группа и тип решетки	$t = T - 273^\circ \text{C}$	$c, \text{кал.град.}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}$	$10^{-6} \alpha, \text{град.}^{-1}$	$r_0, \text{\AA}$	$\alpha / cr_0, \text{кал.}^{-1} \cdot \text{см}^{-1} \cdot \text{моль}$
Be	II (A)	—100 ÷ —50	2,44	7,0	2,28	126
		0	3,73	10,6	—	125
		100	4,75	13,2	—	122
		200	5,01	14,8	—	130
		400	5,31	17,4	—	144
		600	5,94	18,7	—	140
Mg	Гексаго- нальная компакт- ная решет- ка	—100	5,11	2,05	3,20	125
		0	5,89	24,5	—	130
		100	6,22	27,2	—	137
		200	6,55	29,0	—	138
		400	7,72	32,5	—	131
Ti	IV (A)	20	6,80	7,14	2,95	355
Zr	Гексаго- нальная компактная решетка	20	6,02	6,3	3,22	325

В табл. 1 проводится сопоставление установленных в данной работе закономерностей расширения (13), (14). Соотношение (14) проверяется в случае несоответствия опыту закона Дюлонга — Пти. Опыт подтверждает соотношения (13), (14).

Вычислим теперь коэффициенты расширения по формулам (10) и (12). Для вычисления используем экспериментальные значения сжимаемости $\beta = 1/K$, а также величины энергий металлов, определяемые как суммы энергии ионизации и сублимации. Такое выражение энергии металлов неоднократно употреблялось в работах Френкеля [1], Кузнецова [6], Гомбаша [7].

Таблица 2

Определение коэффициентов расширения металлов

(t вблизи 0 °C)

Элемент	$\beta, \frac{\text{см}^2}{\text{кг}}$ 10^{-6}	$W_0, \frac{\text{ккал}}{\text{моль}}$	$c, \frac{\text{кал} \cdot \text{град.}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}}$	$\alpha \text{ из (10)}$ $10^{-6} \text{ град.}^{-1}$	$\alpha \text{ из (12)}$ $10^{-6} \text{ град.}^{-1}$	$\alpha_{\text{эксп}}$ $10^{-6} \text{ град.}^{-1}$
Li	8,70	163	5,81	56	54	56
Na	15,62	143	6,80	64	71	71
K	35,65	120	6,92	78	86	83
Rb	52	115	6,86	91	90	90
Cs	70	108	6,93	97	96	97
Be	0,78	707	3,73	8,4	7,9	10,6
Mg	2,95	560	5,89	18	16	24,5
Ca	5,70	466	6,75	21	22	25
Ti	0,8	—	6,80	7,3	—	7,14
Zr	1,10	—	6,02	6,7	—	6,3
Th	1,82	—	6,50	8,2	—	11,1

Вычисления показывают, таким образом, что теоретические и экспериментальные значения α хорошо согласуются между собой (в особенности для щелочных металлов).

2. Тепловое расширение ионных кристаллов

Для определения α мы используем обычную формулу теории ионной решетки, дающую зависимость энергии частицы (в данном случае иона) от межатомного расстояния:

$$w(r) = -(k'e^2/r) + (k'e^2r_0^{n-1}/nr^n). \quad (15)$$

Здесь k' — константа Маделунга, e — заряд электрона, n — показатель степени в выражении, характеризующем энергию сил отталкивания. Вычислив $f = (n-1)k'e^2/r_0^3$ и $g = (n+4)(n-1)k'e^2/2r_0^4$, получим

$$\alpha = (n+4)c/18KV'_0. \quad (16)$$

Согласно теории ионной решетки модуль упругости K удовлетворяет соотношению

$$K = (n-1)W_{\text{кул}}/9V'_0$$

($W_{\text{кул}} = Nk'e^2/r_0$ — кулоновская часть энергии ионного кристалла, вычисленная Маделунгом).

Следовательно,

$$\alpha = \frac{n+4}{2(n-1)} \frac{c}{W_{\text{кул}}}. \quad (17)$$

При вычислении значений, приведенных в табл. 3, использовано теоретическое значение c , соответствующее закону Дюлонга — Пти для двухатомных кристаллов ($c = 12$ кал/моль·град.). Для показателя n использованы наиболее точные значения, определенные Гильдебрандом и Шерманом (см. [2,4]).

Таблица 3

Определение α для ионных кристаллов

Соединение	$W_{\text{кул}}$ ккаль/моль	n	α из (17) 10^{-6} град. $^{-1}$	$\alpha_{\text{эксп}}$ 10^{-6} град. $^{-1}$
NaBr	193	11,1	46,5	40,7
NaJ	178	12,1	48,8	45,0
KBr	175	12,1	49,8	37,3
KJ	163	12,3	53,1	40,7
CsBr	156	11,0	55,8	47,0
CsJ	147	12,0	59,1	48,7
AgCl	209	9,5	45,5	32,9
AgBr	201	9,6	47,1	34,7

Как видно из таблицы, теоретические значения α близки к опытным данным.

Следует отметить, что сходное с (17) выражение приводится в книге Кузнецова [6]. Наша формула отличается от формулы Кузнецова лишь множителем c/N (вместо константы Больцмана k), благодаря чему наши результаты значительно ближе к опыту. Теоретические значения, вычисленные по формуле Кузнецова, в несколько раз меньше экспериментальных. Недостатком формулы Кузнецова (как указывает сам автор книги) является отсутствие зависимости α от температуры. Согласно (17) такая зависимость существует и подчиняется закону Грюнайзена.

Выводы

1. Измененное выражение энергии тепловых колебаний позволило получить правильную зависимость коэффициента расширения от температуры (закон Грюнайзена). При выводе этой зависимости мы шли не формально термодинамическим путем (как в теории Грюнайзена [3]), а использовали простые физические соображения Френкеля об ангармоничности колебаний.

2. Удалось обобщить закон Грюнайзена, связав коэффициент расширения, помимо теплоемкости, с важнейшей константой твердого тела — параметром решетки.

3. Применение имеющих ясный физический смысл выражений для энергии сцепления привело к численному согласию с опытом теоретических значений α для ряда металлических и ионных кристаллов.

Приведенные в работе выводы не могут отобразить полностью сложный процесс теплового расширения металлов (здесь не учитываются, в частности, аномалии теплоемкости и расширения ферромагнетиков, обусловленные нецентральными силами). Однако для простых по строению металлов первых групп периодической системы наши результаты служат новым подтверждением применимости теории сил сцепления Френкеля [1], следствием которой эти результаты являются.

В заключение считаю своим долгом принести глубокую благодарность проф. Б. Н. Финкельштейну и А. Ф. Кирпичеву за обсуждение результатов настоящей работы и ценные замечания.

Днепропетровский государственный
университет

Поступила в редакцию
15 августа 1953 г.

Литература

- [1] Я. И. Френкель. Введение в теорию металлов, ГИТТЛ, М.—Л., 1950.—
[2] Ф. Зейтц. Современная теория твердого тела, ГИТТЛ, М.—Л., 1949.—
[3] E. Grüneisen. Ann. d. Phys., 26, 241, 393, 1908.—[4] М. Борн и М. Геп-
перт-Майер. Теория твердого тела, ОНТИ, М.—Л., 1938, стр. 40 и 158.—
[5] А. Ф. Иоффе. Физика кристаллов, Госиздат, М.—Л., 1929.—[6] В. Д. Куз-
нецов. Физика твердого тела, т. I, изд-во «Красное знамя», Томск, 1937.—[7] П. Гом-
баш. Статистическая теория атома и ее применения, ИИЛ, Москва, 1951.

ПРОТОННЫЙ РЕЗОНАНС В РАСТВОРАХ ПАРАМАГНИТНЫХ СОЛЕЙ

Б. М. Козырев и А. И. Ривкинд

Исследовано резонансное протонное поглощение в водных растворах парамагнитных солей. По полученным данным вычислены эффективные магнитные моменты $\mu_{\text{эфф}}$, характеризующие влияние парамагнитных ионов на уменьшение протонного времени релаксации T_1 . Результаты измерений показали, что на релаксационный механизм протонного резонанса в растворах существенное действие оказывают детали молекулярного движения. Последнее обстоятельство особенно ярко проявляется в случае комплексных парамагнитных ионов, что может быть использовано для выяснения их структуры.

1. Введение

Релаксационный механизм протонного резонанса в растворах парамагнитных солей был рассмотрен в работе [1]. Для обратного значения времени спин-решеточной релаксации T_1 в этой работе найдено

$$1/T_1 = 2\pi\gamma^2\mu_{\text{эфф}}^2 N/5aD. \quad (1)$$

Здесь γ — протонное гиромагнитное отношение; N — число парамагнитных ионов в 1 см^3 раствора; $\mu_{\text{эфф}}$ — их эффективный магнитный момент в магнетонах μ_B ; a — эффективный радиус ионов в сантиметрах и D — коэффициент диффузии. $\mu_{\text{эфф}}$ характеризует степень «каталитического действия» парамагнетика, т. е. влияние его на уменьшение времени T_1 .

Допуская приложимость макроскопического закона Стокса к движению ионов в вязкой среде, $D = kT/6\pi\eta a$ (η — коэффициент вязкости), авторы [1] получили формулу

$$1/T_1 = 12\pi^2\gamma^2\eta N\mu_{\text{эфф}}^2/5kT. \quad (2)$$

Формула (2) подвергалась неоднократной экспериментальной проверке [1, 2]. При этом в области не слишком больших вязкостей было установлено, в общем, достаточно хорошее ее согласие с опытом. Для ионов Cr^{+3} , Mn^{+2} , Fe^{+3} и Cu^{+2} , исследованных в виде простых солей в водных растворах, $\mu_{\text{эфф}}$ в пределах ошибок опыта действительно оказалось постоянной величиной, не зависящей от N и η и удовлетворительно согласующейся со значениями соответствующих магнитных моментов $\mu_{\text{ст}}$, полученных из измерений статической восприимчивости.

Основной задачей настоящей работы являлась более широкая и детальная проверка теории. В частности, было сомнительно, что закон Стокса дает достаточное приближение в случаях, когда форма парамагнитных частиц в растворе грубо несимметрична. Последнее может иметь место, например, в итоге частичного разрушения гидратных оболочек ионов под действием тех или иных факторов, а также при комплексообразовании или в результате гидролиза.

2. Метод измерений

Основные узлы использованной аппаратуры описаны в работе одного из авторов [3]. Дополнительно был применен приемник частотно-модулированных сигналов с катодным осциллографом на выходе. Измерялась относительная интенсивность линии протонного резонанса в условиях частичного насыщения $\chi''_{\text{нас}}$, как функция концентрации парамагнетика N , $\chi''_{\text{нас}} = f(N)$. Амплитуда осциллирующего магнитного поля H_1 частоты $\nu = 1,000 \cdot 10^7$ гц имела в измерительной катушке строго постоянное для всех опытов значение ~ 0.1 Ое. Перпендикулярно осциллирующему полю к веществу прикладывалось сильное статическое поле электромагнита H_0 , при его резонансном значении $H_0^* = 2\pi\nu/\gamma$. Поле H_0 было модулировано слабым пятидесятипериодным магнитным полем H_m , амплитуда которого поддерживалась постоянной и равной $\sim 0,2$ Ое. Неоднородность поля электромагнита, оцененная по минимальной достигнутой ширине резонансных линий, имела порядок 0,15 Ое. Сигналы наблюдались на 12,7-сантиметровом экране катодного осциллографа, снабженном миллиметровой сеткой. Точность отсчетов интенсивностей линий на экране осциллографа в области концентраций растворов, использованной для вычисления $\mu_{\text{эфф}}$, нигде не была ниже 2%. Повторимость результатов в пределах указанной точности была полной. Стеклообразные ампулы, применявшиеся при измерениях, имели одинаковые размеры и заполнялись 2,20 см³ раствора. Положение измерительной катушки между полюсами электромагнита и ампулы с раствором в измерительной катушке было фиксировано и всегда сохранялось неизменным.

При использованных концентрациях растворов их электропроводность не могла заметно влиять на напряженность поля H_1 частоты 10^7 гц, что было подтверждено опытами с растворами солей MnSO_4 , содержащими 0,001 моль/л H_2SO_4 . Добавка кислоты заметно увеличивала электропроводность, но интенсивность резонансных линий при этом не менялась. Описанная методика дала возможность получить экспериментальные кривые $\chi''_{\text{нас}} = f(N)$ для всех исследованных растворов в одном и том же масштабе по оси χ'' . Все опыты проводились при комнатной температуре и с растворами, приготовленными в день измерения.

По измеренным кривым $\chi''_{\text{нас}} = f(N)$ методом сравнения определялись эффективные моменты ионов $\mu_{\text{эфф}}$. В качестве эталона использовались водные растворы MnCl_2 , для которых полная кривая $\chi''_{\text{нас}} = f(N)$ лежала в области еще весьма слабых концентраций, так что вязкость эталонных растворов с достаточной степенью точности могла быть приравнена к вязкости воды.

На основании предыдущих абсолютных измерений [1, 2] можно считать установленным, что эффективный магнитный момент $\mu_{\text{эфф}}$ для растворов солей двухвалентного марганца практически не зависит от концентрации и весьма близок по величине к $\mu_{\text{ст}}$. Нами для иона Mn^{+2} принято

$$\mu_{\text{эфф}} = \mu_{\text{ст}} = 5,9\mu_B = \text{const}(N).$$

Как следует из теоретического рассмотрения [1], любая данная степень насыщения, или, что то же, величина $\chi''_{\text{нас}}$, зависит от значений γ , H_1 , T_1 и T_2 , где T_2 — параметр ширины резонансной линии. В наших опытах амплитуда осциллирующего поля H_1 поддерживалась неизменной; ширина линий определялась неоднородностью поля H_0 и, таким образом, тоже была постоянной. При таких условиях величина $\chi''_{\text{нас}}$ однозначно зависит от T_1 . Учитывая это, на основании формулы (2) можно написать

$$\eta_1 N_1 \mu_{эфф1}^2 = \eta_2 N_2 \mu_{эфф2}^2 \quad (3)$$

В формуле (3) величины с индексом 1 относятся к эталонному раствору $MnCl_2$, а с индексом 2 — к раствору, значение $\mu_{эфф}$ для которого требуется определить, причем оба раствора характеризуются одним и тем же значением $\chi_{нас}''$. По формуле (3) вычислялись все значения $\mu_{эфф}$, сообщаемые в настоящей работе.

3. Экспериментальные результаты и обсуждение

В табл. 1 сведены результаты измерений $\mu_{эфф}$ в водных растворах простых (некомплексных) солей.

Таблица 1

Значения $\mu_{эфф}$ для парамагнитных ионов в водных растворах простых солей

Ион	Терм свободного иона	Тип исследованной соли	Интервал концентраций (моль/л)	$\mu_{ст}$ (в ед. μ_B)	$\mu_{эфф}$ (в ед. μ_B)	$\mu_{эфф}$ по данным работы [2] (в ед. μ_B)
V^{+4}	$^2D_{3/2}$	$VOCl_2$; $VOSO_4$	$0,05 \div 0,2$	$\sim 1,4^1$	$1,40 \pm 0,01$	—
Cr^{+3}	$^5D_0$	$CrK(SO_4)_2$	$0,003 \div 0,013$	3,8	$5,10 \pm 0,10$	4,8
Mn^{+2}	$^6S_{5/2}$	$MnCl_2$; $MnSO_4$	—	5,9	5,90 (Принято)	6,1
Fe^{+3}	$^6S_{5/2}$	$Fe(NH_4)(SO_4)_2$	$0,002 \div 0,015$	5,9	$5,90 \pm 0,00$	5,6
Fe^{+2}	$^5D_4^1$	$FeCl_2$; $Fe(NH_4)_2(SO_4)_2$	$0,05 \div 0,2$	5,3	$1,27 \pm 0,01^*$	1,5
Co^{+2}	$^4F_{9/2}$	$CoSO_4$	$0,1 \div 0,4$	5,0	$0,74 \pm 0,025^*$	0,89
Ni^{+2}	$^3F_4$	$NiSO_4$; $Ni(NO_3)_2$	$0,05 \div 0,2$	3,1	$1,30 \pm 0,01^*$	1,4
Cu^{+2}	$^2D_{5/2}$	$CuSO_4$	$0,02 \div 0,08$	2,0	$2,10 \pm 0,02$	2,0 (Принято)
Gd^{+3}	$^8S_{7/2}$	$Gd(NO_3)_3$	$0,002 \div 0,008$	7,9	$6,43 \pm 0,03$	10,8

¹ Статический момент был вычислен по закону Кюри из измерений магнитной восприимчивости при комнатной температуре.

В четвертом столбце под интервалом концентраций следует понимать область, использованную для вычисления моментов. Среднее значение $\mu_{эфф}$ в этой области дается первыми цифрами шестого столбца; вторые цифры указывают наблюдавшиеся отклонения от среднего. Эти отклонения, как правило, были невелики, однако носили закономерный характер: с разведением раствора $\mu_{эфф}$ несколько возрастало. Единственное исключение, когда рост $\mu_{эфф}$ с разведением довольно значителен, составляют растворы солей Co^{+2} . Там, где это было необходимо, учитывалась вязкость растворов. Такие случаи в табл. 1 отмечены звездочкой. Растворы солей железа измерялись в слабокислой среде ($0,0005 \div 0,001$ молей кислоты на 1 л раствора) для предупреждения гидролиза.

Из сравнения двух последних столбцов табл. 1 следует, что за исключением растворов Gd^{+3} в общем имеется согласие наших результатов с полученными в работе [2], причем нужно учитывать, что в работе [2]

значения $\mu_{\text{эфф}}$ выводились из данных по абсолютным измерениям времени спин-решеточной релаксации T_1 , а поэтому не могут претендовать на точность. Как видно из табл. 1, соответствие между $\mu_{\text{эфф}}$ и $\mu_{\text{ст}}$ даже внутри группы ионов, находящихся в S -состоянии или в эффективном S -состоянии, является весьма грубым: для Cr^{+3} $\mu_{\text{эфф}} \approx 1,34 \mu_{\text{ст}}$, для Gd^{+3} $\mu_{\text{эфф}} \approx 0,8 \mu_{\text{ст}}$.

Такое расхождение лежит далеко за пределами ошибок опыта и является повидимому, следствием приближенности формулы (2). Как показывает подсчет, лучшее соответствие между $\mu_{\text{эфф}}$ и $\mu_{\text{ст}}$ для этой группы ионов можно получить, если пользоваться формулой (1). Последнее, очевидно, является выражением того факта, что закон Стокса, благодаря применению которого из формулы (1) получена формула (2), плохо описывает процесс диффузии ионов даже в случаях, когда форма частиц близка к шаровой. К сожалению, мы не располагаем настолько надежными данными по эффективным радиусам ионов, чтобы сделанный вывод можно было считать окончательным.

Измерения в растворах, содержащих ионы Fe^{+2} , Co^{+2} и Ni^{+2} , характеризующиеся сильной спин-орбитальной связью, подтверждают ранее делавшиеся выводы об их сравнительно слабом влиянии на время T_1 [1, 2]. Действительно, для Fe^{+2} $\mu_{\text{эфф}} \approx 0,24 \mu_{\text{ст}}$, для Co^{+2} $\mu_{\text{эфф}} \approx 0,15 \mu_{\text{ст}}$, для Ni^{+2} $\mu_{\text{эфф}} \approx 0,42 \mu_{\text{ст}}$ (см. табл. 1). Такое полное несоответствие между $\mu_{\text{эфф}}$ и $\mu_{\text{ст}}$ нельзя приписывать только неточности формулы (2). Имеются две более веские причины, каждая из которых может вызвать уменьшение $\mu_{\text{эфф}}$. Первая из них указана в работе [1] и заключается в том, что в магнитный момент этих ионов значительный вклад вносят недиагональные матричные элементы, которые неэффективны в отношении ядерной релаксации. С другой стороны, не исключена возможность того, что времена спин-решеточной релаксации τ_L ионов Fe^{+2} , Co^{+2} и Ni^{+2} слишком коротки. Последнее, повидимому, подтверждается отсутствием измеримого электронного парамагнитного резонанса в водных растворах этих солей. Как видно из теории [1], слишком короткое время $\tau_L < 10^{-11}$ сек. должно ограничивать величину времени корреляции τ_c , которое определяет значение T_1 .

Поскольку измерения показали, что на время спин-решеточной протонной релаксации T_1 существенное влияние действительно оказывают детали молекулярного движения, как того и требует формула (1) (наличие произведения aD в знаменателе этой формулы), представляло интерес исследовать растворы, содержащие комплексные ионы, для которых aD должно еще сильнее отклоняться от даваемых по закону Стокса величин. Нами были изучены водные растворы, содержащие комплексы $[\text{Cr}(\text{H}_2\text{O})_4\text{SO}_4]^{+1}$, $[\text{Cu}(\text{NH}_3)_4]^{+2}$, $[\text{Fe}(\text{CNS})_x]^{3-x}$ и $[\text{Ni}(\text{NH}_3)_6]^{+2}$. Фиолетовые растворы хромово-калиевых квасцов (значение $\mu_{\text{эфф}}$ для них приведено в табл. 1) после нагревания до $\sim 75^\circ\text{C}$ приобретают зеленую окраску в связи с образованием комплексного иона $[\text{Cr}(\text{H}_2\text{O})_4\text{SO}_4]^{+1}$. Кривые $\chi''_{\text{нас}}(N)$ как для фиолетовых, так и зеленых растворов представлены на рис. 1. Эффективный магнитный момент для зеленых растворов оказался равным $\mu_{\text{эфф}} = 3,5 \mu_B$.

Комплексный ион $[\text{Cu}(\text{NH}_3)_4]^{+2}$ был получен растворением соли CuSO_4 в 2%-ном водном растворе аммиака. Соответствующая кривая $\chi''_{\text{нас}}(N)$ показана на рис. 2. Здесь же для сравнения нанесена кривая $\chi''_{\text{нас}}(N)$ для раствора CuSO_4 в воде. $\mu_{\text{эфф}}$, отвечающее иону $[\text{Cu}(\text{NH}_3)_4]^{+2}$, равно $1,52 \mu_B$.

Железо-роданидные комплексы $[\text{Fe}(\text{CNS})_x]^{3-x}$ изучались в водных растворах железо-аммиачных квасцов, в которые добавлялся роданистый

аммоний. Как известно, соотношение между содержанием в растворе свободного иона железа Fe^{+3} и различных возможных форм комплекса $[\text{Fe}(\text{CNS})_x]^{3-x}$ зависит от абсолютной величины концентрации роданид-иона CNS^{-1} . На рис. 3 приведены кривые $\chi''_{\text{нас}}(N)$ для растворов $\text{Fe}(\text{NH}_4)(\text{SO}_4)_2$, содержащих 0,3, 0,1 и 0,05 моль/л роданистого аммония. Значения $\mu_{\text{эфф}}$ получились равными:

при 0,3 моль/л NH_4CNS	$\mu_{\text{эфф}} = 3,4 \mu_{\text{В}}$
» 0,1 моль/л NH_4CNS	$\mu_{\text{эфф}} = 4,2 \mu_{\text{В}}$
» 0,05 моль/л NH_4CNS	$\mu_{\text{эфф}} = 4,65 \mu_{\text{В}}$

(Верхняя кривая на рис. 3 относится к водному раствору $\text{Fe}(\text{NH}_4)(\text{SO}_4)_2$, значение $\mu_{\text{эфф}}$ для которого указано в табл. 1).

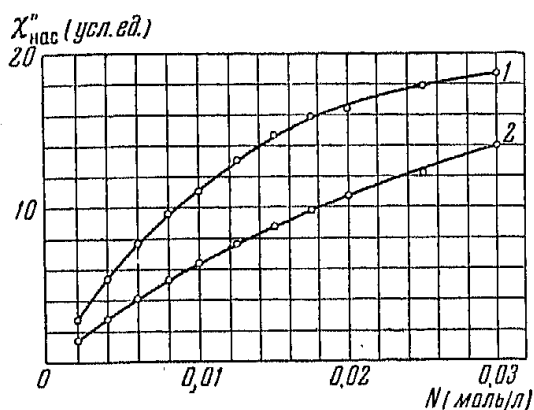


Рис. 1

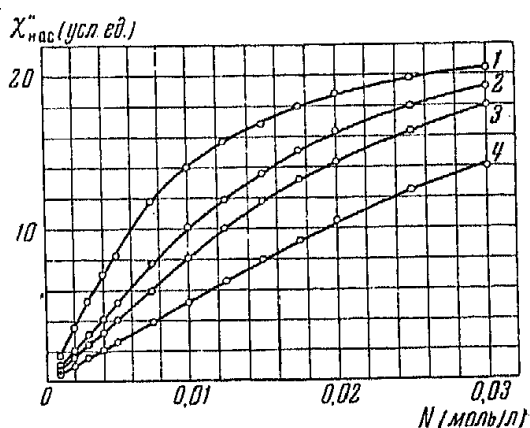


Рис. 3

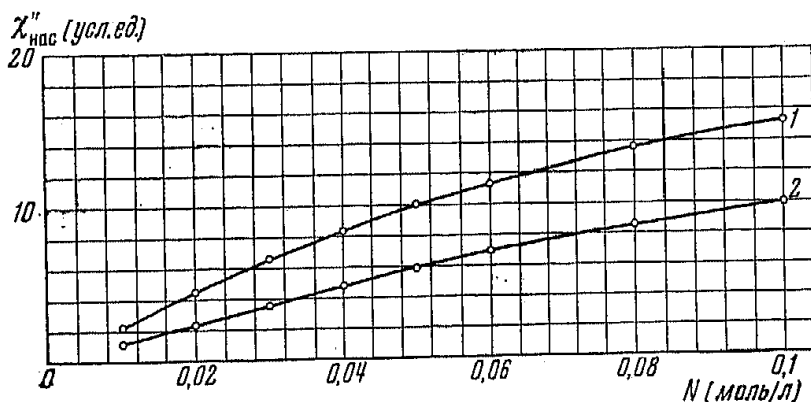


Рис. 2

Рис. 1. Кривые $\chi''_{\text{нас}} = f(N)$ для водных растворов $\text{CrK}(\text{SO}_4)_2$. 1 — фиолетовые растворы; 2 — зеленые растворы

Рис. 2. Кривые $\chi''_{\text{нас}} = f(N)$ для растворов CuSO_4 . 1 — в воде; 2 — в 2%-ном водном растворе аммиака

Рис. 3. Кривые $\chi''_{\text{нас}} = f(N)$ для растворов $\text{Fe}(\text{NH}_4)(\text{SO}_4)_2$. Водные растворы с добавкой: 1 — $\sim 0,0005$ моль/л H_2SO_4 ; 2 — 0,05 моль/л NH_4CNS ; 3 — 0,1 моль/л NH_4CNS ; 4 — 0,3 моль/л NH_4CNS

Несколько неожиданный результат был получен для иона $[\text{Ni}(\text{NH}_3)_6]^{+2}$. Измерения для соли NiSO_4 в 6%-ном водном растворе аммиака дали значение $\mu_{\text{эфф}} = 2,00$, т. е. значительно большее, чем для водного раствора NiSO_4 (см. табл. 1).

Таким образом, оставляя пока в стороне последний случай, можно отметить, что для изученных комплексных солей значения $\mu_{\text{эфф}}$ намного меньше $\mu_{\text{эфф}}$, полученных при исследовании простых солей тех же ионов. Этот результат нельзя отнести за счет изменения $\mu_{\text{ст}}$ при комплексообразовании. Для выбранных комплексных соединений $\mu_{\text{ст}}$ практически не отличается от его значений в простых солях соответствующих ионов, что было проверено измерениями статической восприимчивости растворов². Поэтому, если оставаться в рамках релаксационной теории [1], возможным объяснением нам кажется следующее. Конфигурация молекул в составе комплексного парамагнитного иона несомненно менее симметрична, чем форма сольватированного простого иона; в результате в случае растворов комплексных солей произведение aD должно быть больше той величины, которую дает закон Стокса, и, соответственно, эффективность действия комплексных ионов должна быть меньше требуемой по формуле (2)³. Более детальный анализ опять-таки затруднен отсутствием проверенных значений эффективных радиусов a .

Из предложенной нами схемы выпадает эффект роста $\mu_{\text{эфф}}$ при комплексообразовании, наблюдавшийся для ионов никеля. Мы полагаем, что в данном случае, как уже указывалось, величина $\mu_{\text{эфф}}$ ограничивается малым значением времени спин-решеточной релаксации τ_L электронных спинов. При образовании комплекса τ_L может возрасти, что должно обусловить рост $\mu_{\text{эфф}}$. Можно ожидать, что эффект, аналогичный комплексообразованию, должен вызывать и гидролиз парамагнитных солей. Как показали измерения, в неподкисленных растворах железо-аммиачных квасцов $\mu_{\text{эфф}} = 4,78 \mu_B$, т.е. существенно меньше значения $\mu_{\text{эфф}}$ для растворов $\text{Fe}(\text{NH}_4)(\text{SO}_4)_2$, в которые для устранения гидролиза была добавлена кислота (см. табл. 1).

Несомненно, что дальнейшее исследование протонного резонанса в растворах, содержащих комплексные парамагнитные ионы, может много способствовать выяснению структуры последних.

Физико-технический институт
Казанского филиала Академии наук СССР.

Поступила в редакцию
8 января 1954 г.

Литература

- [1] N. Bloembergen, E. M. Purcell and R. V. Pound. Phys. Rev., 73, 679, 1948.—[2] R. L. Conger and P. W. Selwood. Journ. Chem. Phys., 20, 383, 1952.—[3] А. И. Ривкинд. Изв. АН СССР, серия физ., 16, 541, 1952.

² Указанные измерения выполнены П. Г. Тишковым.

³ Во избежание недоразумений напомним, что формула (2) вытекает из формулы (1) при допущении $aD = kT/6\pi\eta$. В нашем случае, учитывая использованные низкие концентрации, последнее практически равносильно утверждению, что aD имеет одно и то же значение для всех растворов. Если же aD для растворов разных ионов оказывается неодинаковым, то формула (2) должна давать значения $\mu_{\text{эфф}}$, отличные от тех, которые требует теория ($\mu_{\text{эфф}} \sim \mu_{\text{ст}}$). Сказанное и делает возможным обсуждение значений величины aD при анализе значений $\mu_{\text{эфф}}$, полученных из формулы (2), не содержащей aD в явном виде.

ФЕРРОМАГНЕТИЗМ ВЕЩЕСТВ ТИПА ФЕРРИТОВ И АНТИФЕРРОМАГНЕТИЗМ

К. Б. Власов и Б. Х. Ишмухаметов

Произведен квантово-механический расчет свободной энергии и магнитного уравнения состояния (зависимости самопроизвольной намагниченности от напряженности магнитного поля и температуры и восприимчивости от температуры) по методу энергетического центра тяжести для веществ типа ферритов и антиферромагнетиков.

Известно, что многие вещества, называемые антиферромагнетиками, обладают специфическими свойствами: температурная зависимость восприимчивости этих веществ отличается от температурной зависимости, характерной для парамагнитных веществ, а именно, на кривой температурной зависимости восприимчивости имеется максимум при так называемой антиферромагнитной точке Кюри T_c . Вблизи этой же температуры наблюдается аномальный ход теплоемкости, электросопротивления, коэффициента теплового расширения и т. п. Для объяснения этого явления было сначала предположено, а потом подтверждено экспериментально в опытах по диффракции нейтронов [1], что в антиферромагнетиках при температурах ниже антиферромагнитной точки Кюри устанавливается дальний порядок в расположении элементарных магнитных моментов. Эти моменты ориентированы антипараллельно друг другу.

Наряду с антиферромагнетиками существует ряд веществ, к числу которых относятся ферриты, перовскиты и др., у которых также предполагается антипараллельная ориентация элементарных магнитных моментов. Однако, в отличие от антиферромагнетиков, эти вещества могут обладать самопроизвольной намагниченностью. На основании опытов по нейтронной диффракции [2], а также исходя из величин атомных магнитных моментов, кристаллическую решетку этих веществ в магнитном отношении можно разбить на две подрешетки таким образом, что в каждой из подрешеток при температуре абсолютного нуля элементарные моменты ориентированы параллельно друг другу. Если намагниченности этих подрешеток не равны друг другу, то вещество обладает результирующей самопроизвольной намагниченностью, равной разности намагниченностей подрешеток.

Теория ферромагнетизма веществ типа ферритов и антиферромагнетизма в основном была развита в работах [3-5] и в [6] при помощи полуклассического метода молекулярного поля, аналогично теории ферромагнетизма Вейсса.

В настоящей работе делается попытка построения квантово-механической теории ферромагнетизма веществ типа ферритов и антиферромагнетизма при помощи метода энергетического центра тяжести [7].

1. Ферромагнетизм веществ типа ферритов

Ферриты имеют общую химическую формулу Fe_2O_3MO , где M — двухвалентный металл, например Cu , Ag , Mg , Pb , Ni , Mn , Co , Fe и др. Их кристаллическая решетка относится к решетке типа шпи-

нелей. Ионы кислорода, наиболее крупные в решетке, образуют плотную кубическую упаковку, в междоузлиях которой помещаются металлические ионы. Места (узлы), занятые металлическими ионами, разбиваются на два типа: тетраэдрические или узлы A и октаэдрические или узлы B . В ячейке, соответствующей одной молекуле, занят один узел типа A и два узла типа B . Кристаллическая решетка шпинелей может быть нормальной или обращенной. В нормальной решетке узлы типа B заняты ионами трехвалентного металла (в ферритах — ионами трехвалентного железа), а узлы типа A — ионами двухвалентного металла. В обращенной решетке узлы типа A заняты трехвалентными ионами, а остальные двух- и трехвалентные ионы распределены в узлах типа B . Ферриты, обладающие нормальной структурой, как, например, феррит цинка, не ферромагнитны. Ферриты, обладающие обращенной или смешанной (частично обращенной) структурой, ферромагнитны.

Рассмотрим ферриты ферромагнитных металлов (железа, кобальта и никеля), обладающие обращенной структурой. В магнитном отношении решетку этих ферритов можно разбить на две подрешетки: подрешетку, образуемую тетраэдрическими узлами, и подрешетку, образуемую октаэдрическими узлами, которые вблизи температуры абсолютного нуля намагничены до насыщения в противоположных относительно друг друга направлениях. Обозначим через n_1 число электронов трехвалентного иона металла (железа), обладающих нескомпенсированным спином, а n_2 — число электронов двухвалентного иона металла, обладающих нескомпенсированным спином. Тогда в первой подрешетке будет находиться $N_1 = Nn_1$ электронов, а во второй $N_2 = N(n_1 + n_2)$ электронов, обладающих нескомпенсированным спином, где N — число молекул в единице объема (или граммолекуле).

Энергия системы электронов складывается в первом приближении из энергии электронов в изолированных атомах, из квазикулоновской энергии электростатического взаимодействия электронов и из так называемой обменной энергии. От расстановки спинов электронов по атомам зависит только величина обменной энергии. В нашем случае обменная энергия запишется в виде:

$$\varepsilon = -\frac{1}{2} \left[\sum_{q \neq q'=1}^{r_1} A_{q_h, q'_h} + 2 \sum_{q, j=1}^{r_1, r_2} D_{q_h, j_h} + \sum_{j \neq j'=1}^{r_2} B_{j_h, j'_h} + \right. \\ \left. + \sum_{q \neq q'=1}^{N_1-r_1} A_{q_h, q'_h} + 2 \sum_{q, j=1}^{N_1-r_1, N_2-r_2} D_{q_h, j_h} + \sum_{j \neq j'=1}^{N_2-r_2} B_{j_h, j'_h} \right]. \quad (1)$$

Выражение (1) представляет собой так называемый диагональный матричный элемент оператора энергии в данном состоянии; $A_{q, q'}$ — интегралы обмена между электронами первой подрешетки, $B_{j, j'}$ — аналогичные интегралы для второй подрешетки, $D_{q, j}$ — интегралы обмена между электронами атомов, относящихся к различным подрешеткам; r_1 и r_2 — числа электронов, обладающих «правым» спином соответственно в первой и второй подрешетках; h и k — индексы, указывающие, что данный электрон имеет «правый» или «левый» спин¹.

¹ Здесь следует указать на следующее обстоятельство: намагниченность подрешеток, а следовательно, и величины r_1 и r_2 в случае ферритов и антиферромагнетиков, как можно показать, исходя из перестановочных соотношений для операторов энергии и момента количества движения, не являются интегралами движения, а приближенная волновая функция, соответствующая разбиению антиферромагнетика

Для вычисления средней энергии системы при данных r_1 и r_2 нужно взять среднее от ϵ по всевозможным расстановкам спинов, соответствующих данным r_1 и r_2 . Это среднее значение определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}(r_1, r_2) = & -\frac{1}{2} \left[\frac{\binom{N_1-2}{r_1-2}}{\binom{N_1}{r_1}} \sum_{q \neq q'=1}^{N_1} A_{q,q'} + 2 \frac{\binom{N_1-1}{r_1-1} \binom{N_2-1}{r_2-1}}{\binom{N_1}{r_1} \binom{N_2}{r_2}} \sum_{q,j=1}^{N_1, N_2} D_{q,j} + \right. \\ & + \frac{\binom{N_2-2}{r_2-2}}{\binom{N_2}{r_2}} \sum_{j \neq j'=1}^{N_2} B_{j,j'} + \frac{\binom{N_1-2}{N_1-r_1-2}}{\binom{N_1}{r_1}} \sum_{q \neq q'=1}^{N_1} A_{q,q'} + \\ & \left. + 2 \frac{\binom{N_1-1}{N_1-r_1-1} \binom{N_2-1}{N_2-r_2-1}}{\binom{N_1}{r_1} \binom{N_2}{r_2}} \sum_{q,j=1}^{N_1, N_2} D_{q,j} + \frac{\binom{N_2-2}{N_2-r_2-2}}{\binom{N_2}{r_2}} \sum_{j \neq j'=1}^{N_2} B_{j,j'} \right]. \quad (2) \end{aligned}$$

После несложных преобразований для части энергии, зависящей от намагниченности, с учетом магнитного поля H получим следующее выражение:

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}(m_1, m_2) = & -\frac{1}{2} \left\{ \frac{2m_1^2}{N_1^2} \sum_{q,q'}^{N_1} A_{q,q'} + \frac{4m_1 m_2}{N_1 N_2} \sum_{q,j}^{N_1, N_2} D_{q,j} + \frac{2m_2^2}{N_2^2} \sum_{j,j'}^{N_2} B_{j,j'} \right\} - \\ & - 2\mu_0 H (m_1 + m_2), \quad (3) \end{aligned}$$

где

$$m_1 = r_1 - (N_1/2); \quad m_2 = r_2 - (N_2/2). \quad (4)$$

Фазовая сумма имеет вид

$$Z = \sum_{m_1=-N_1/2}^{N_1/2} \sum_{m_2=-N_2/2}^{N_2/2} \binom{N_1}{(N_1/2) + m_1} \binom{N_2}{(N_2/2) + m_2} e^{-\bar{\epsilon}/kT}. \quad (5)$$

В этой сумме подавляющую роль играют те члены, для которых m_1 и m_2 близки к некоторым средним значениям $\bar{m}_1$ и $\bar{m}_2$. Поэтому в (5) суммирование можно снять, подставив вместо m_1 и m_2 их средние значения $\bar{m}_1$ и $\bar{m}_2$.

Учитывая формулу Стирлинга $\ln n! = n(\ln n - 1)$ и вводя средние значения относительной намагниченности подрешеток $y_1 = 2\bar{m}_1/N_1$ и $y_2 = 2\bar{m}_2/N_2$, для свободной энергии системы получим следующее выражение:

(или феррита) на подрешетки, не является собственной функцией оператора полной энергии системы. Однако для антиферромагнетиков в работе [8] показано, что точное значение основного состояния должно быть близким к энергии, соответствующей этой приближенной волновой функции. Поэтому ошибки, связанные с приближенным описанием явлений в антиферромагнетиках и ферритах путем введения понятий намагниченностей подрешеток, повидимому, не столь велики, как ошибки, связанные с использованием в нашей работе приближением энергетического центра тяжести в области температур ниже точки Кюри.

$$\begin{aligned}
\Phi(y_1, y_2, H) = & -kT \ln Z = \frac{N_1}{2} kT [(1 + y_1) \ln(1 + y_1) + \\
& + (1 - y_1) \ln(1 - y_1)] + \frac{N_2}{2} kT [(1 + y_2) \ln(1 + y_2) + (1 - y_2) \ln(1 - y_2)] - \\
& - \frac{1}{4} y_1^2 \sum_{q \neq q'}^{N_1} A_{q, q'} - \frac{1}{2} y_1 y_2 \sum_{q, j}^{N_1, N_2} D_{q, j} - \\
& - \frac{1}{4} y_2^2 \sum_{j \neq j'}^{N_2} B_{j, j'} - 2\mu_0 H \left(y_1 \frac{N_1}{2} + y_2 \frac{N_2}{2} \right). \quad (6)
\end{aligned}$$

Из условий минимума

$$\partial \Phi / \partial y_1 = 0; \quad \partial \Phi / \partial y_2 = 0 \quad (7)$$

находим магнитное уравнение состояния (уравнение для намагниченности):

$$\begin{aligned}
y_1 = \text{th} \left[\frac{\Theta_1}{T} y_1 + \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^{1/2} \frac{\Theta_{12}}{T} y_2 + \frac{\mu_0 H}{kT} \right], \\
y_2 = \text{th} \left[\left(\frac{N_1}{N_2} \right)^{1/2} \frac{\Theta_{12}}{T} y_1 + \frac{\Theta_2}{T} y_2 + \frac{\mu_0 H}{kT} \right], \quad (8)
\end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\Theta_1 = \frac{\Sigma A_{q, q'}}{2kN_1}, \quad \Theta_2 = \frac{\Sigma B_{q, q'}}{2kN_2}, \quad \Theta_{12} = \frac{\Sigma D_{q, q'}}{2k(N_1 N_2)^{1/2}}. \quad (9)$$

Величины Θ_1 , Θ_2 и Θ_{12} , имеющие размерность температуры, пропорциональны соответственно суммам обменных интегралов в первой, второй подрешетках и между подрешетками.

Для нахождения результирующей самопроизвольной намагниченности, выраженной в относительных единицах, к уравнениям (8) следует добавить следующее соотношение:

$$y = \frac{N_1 y_1 + N_2 y_2}{N_1 + N_2} \quad \text{или} \quad y = \frac{N_1 y_1 - N_2 y_2}{N_1 - N_2}, \quad (10)$$

в зависимости от знака y_2 , который определяется из анализа уравнений (8). Уравнения (10) и (8) определяют зависимость самопроизвольной намагниченности от температуры и напряженности магнитного поля. Для нахождения точки Кюри следует в (8) разложить гиперболический тангенс в ряд, ограничиваясь двумя членами разложения, определить y_1 и y_2 , подставить в (10) и приравнять y нулю (полагая напряженность магнитного поля также равной нулю). Из этого условия получим для температуры Кюри Θ следующее выражение²:

$$\Theta_\Phi = \frac{\Theta_1}{2} + \frac{\Theta_2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\Theta_1}{2} - \frac{\Theta_2}{2} \right)^2 + \Theta_{12}^2}. \quad (11)$$

При температурах выше точки Кюри в разложении в ряд гиперболического тангенса можно ограничиться первым членом разложения и определить температурную зависимость восприимчивости. В результате простых вычислений получим для восприимчивости выражение

² Знак плюс или минус перед корнем квадратным выбирается из физических соображений, а именно, выбирается тот знак, при котором соответствующее значение Θ_Φ приводит к наилучшему согласию с опытными данными.

$$\frac{1}{\chi} = \frac{T}{C} + \frac{1}{\chi_0} - \frac{\sigma}{T - \Theta}, \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} C &= \frac{N_1 + N_2}{k} \mu_0^2, \\ \Theta &= \frac{1}{N_1 + N_2} [N_1 \Theta_2 + N_2 \Theta_1 - 2(N_1 N_2)^{1/2} \Theta_{12}], \\ \frac{1}{\chi_0} &= -\frac{1}{C(N_1 + N_2)} [N_1 \Theta_1 + N_2 \Theta_2 + 2(N_1 N_2)^{1/2} \Theta_{12}], \\ \sigma &= \frac{\Theta_{12}^2 - \Theta_1 \Theta_2}{C} - \frac{\Theta}{\chi_0}. \end{aligned} \quad (13)$$

Выражение для парамагнитной температуры Кюри $\Theta_{\text{п}}$ можно получить из (12), если приравнять $1/\chi$ нулю. Если это проделать, то окажется, что парамагнитная температура Кюри равна ферромагнитной $\Theta_{\text{п}} = \Theta_{\text{ф}}$.

Произведем сравнение полученных теоретических зависимостей с опытными данными.

Зависимость (12), которой должна подчиняться восприимчивость веществ типа ферритов при температурах выше точки Кюри, установленная впервые на основании полуклассической модели молекулярного поля Неелем, хорошо согласуется с опытными данными. На основании этих данных по значениям C , Θ , σ и $1/\chi_0$ можно по (13) определить величины Θ_1 , Θ_2 и Θ_{12} , по (11) ферромагнитную точку Кюри и вычислить по (8) и (10) температурную зависимость самопроизвольной намагниченности. При этом удобно пользоваться соотношением

$$\Theta_1 + \Theta_2 = \Theta - (C/\chi_0), \quad (14)$$

полученным на основании второго и третьего равенств в (13), а также записать уравнения (8) в виде (при $H = 0$):

$$\begin{aligned} &\text{arc th} \left[\left(\frac{N_1}{N_2} \right)^{1/2} \frac{\Theta_{\text{ф}}}{\Theta_{12}} \tau \text{arc th } y_1 - \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^{1/2} \frac{\Theta_1}{\Theta_{12}} y_1 \right] = \\ &= \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^{1/2} \frac{1}{\Theta_{\text{ф}}} \left[\Theta_{12} - \frac{\Theta_1 \Theta_2}{\Theta_{12}} \right] \frac{y_1}{\tau} + \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^{1/2} \frac{\Theta_2}{\Theta_{12}} \text{arc th } y_1, \end{aligned} \quad (15')$$

$$y_2 = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^{1/2} \frac{\Theta_{\text{ф}}}{\Theta_{12}} \tau \text{arc th } y_1 - \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^{1/2} \frac{\Theta_1}{\Theta_{12}} y_1, \quad (15'')$$

где

$$\tau = T/\Theta_{\text{ф}}.$$

Из (15') определяется температурная зависимость y_1 , а затем по (15'') температурная зависимость y_2 и по (10) температурная зависимость самопроизвольной намагниченности y .

Используя данные [9], приведенные в табл. 1, получим значения для величин Θ_1 , Θ_2 , Θ_{12} и $\Theta_{\text{ф}}$, приведенные в табл. 2. При этом для магнетита, ферритов кобальта и никеля взяты значения для n_1 и n_2 , приведенные в табл. 1. Из таблиц видно, что между теоретической ферромагнитной температурой Кюри, равной парамагнитной температуре Кюри, и экспериментальной имеется различие в несколько десятков градусов. Такое различие наблюдается и в металлических ферромагнетиках и, как показал Вонсовский [10], может быть объяснено наличием ближнего порядка в ориентации спинов вблизи точки Кюри.

Таблица 1

Вещество	C	$1/\chi_0$	σ	θ	θ_{Π}	θ_{Φ}	n_1	n_2
Магнетит $\text{Fe}_2\text{O}_3\text{FeO}$	14,2	103,2	15 100	770	869	847	5	4
Феррит кобальта $\text{Fe}_2\text{O}_3\text{CoO}$	13,9	111,9	11 550	744	812	769	5	3
Феррит никеля $\text{Fe}_2\text{O}_3\text{NiO}$	19,5	191,8	7 750	863	896	870	5	2

Таблица 2

Вещество	θ_{12}	θ_1	θ_2	$\theta_{\Pi} = \theta_{\Phi}$ теорет.
Магнетит $\text{Fe}_2\text{O}_3\text{FeO}$	—1207	—464	—224	869
Феррит кобальта $\text{Fe}_2\text{O}_3\text{CoO}$	—1211	—531	—281	812
Феррит никеля $\text{Fe}_2\text{O}_3\text{NiO}$	—2334	—1437	—1440	896

На рис. 1, 2 и 3 приведено сравнение температурных зависимостей самопроизвольной намагниченности, соответственно в магнетите, феррите кобальта и феррите никеля, полученных экспериментально [5]

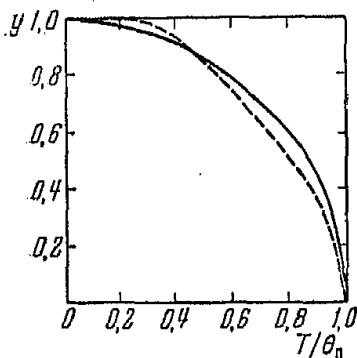


Рис. 1

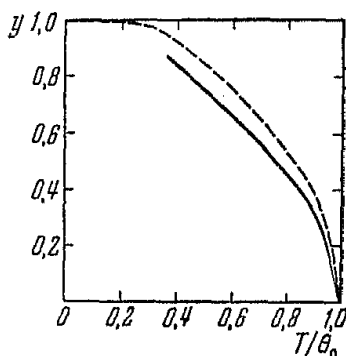


Рис. 2

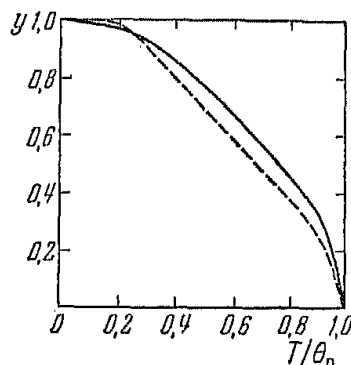


Рис. 3

(сплошная кривая), и по формулам (15) и (10) (пунктирная кривая). В качестве ферромагнитной точки Кюри подставлялось при этом теоретическое ее значение, равное парамагнитной точке Кюри. Как видно из рисунков, имеется лишь общее качественное согласие теории с опытными данными³. На большее согласие теория претендовать и не может, так как:

1) метод энергетического центра тяжести, строго говоря, применим лишь для области температур выше точки Кюри и только с некоторыми оговорками в области температур вблизи точки Кюри;

2) электроны в незаполненных оболочках ферромагнитных ионов, как это принимается обычно в работах, посвященных исследованию

³ Безусловно, подобрав значения θ_1 , θ_2 и θ_{12} в области температур ниже точки Кюри, можно получить гораздо лучшее согласие между теоретической и опытной кривыми. Однако тогда эти подобранные величины, приводящие к хорошему согласию между теоретической и опытной кривыми в области температур ниже точки Кюри, будут отличаться от величин θ_1 , θ_2 и θ_{12} , полученных из парамагнитных измерений в области температур выше точки Кюри. Следует отметить, что подобное различие имеет место и в ферромагнитных металлах (атомные магнитные моменты, определяемые из ферромагнитных и парамагнитных измерений, различны). Интересно отметить, что если для феррита, кобальта и никеля положить $\theta_1 = \theta_2 = 0$, то в области температур ниже точки Кюри получается даже лучшее согласие между теоретической и опытной кривыми, чем на рис. 2 и 3.

ферромагнитных металлов [11], рассматривались независимыми (каждому электрону приписывалось квантовое число $j = 1/2$, и учитывался обмен между электронами). Однако не исключена возможность, что в ферритах каждый ион ведет себя как целое, обладая квантовым числом $j > 1/2$;

3) предполагалось, что рассматриваемые ферриты обладают полностью обращенной структурой, между тем как они могут иметь смешанную структуру с преобладанием обращенной. Возможно, что этим объясняется различие в величинах атомных магнитных моментов, приводимых различными авторами. Например, согласно [12] атомный магнитный момент феррита кобальта равен 3,3, а согласно [6] — 3,94 электронным магнетонам.

Следует заметить, что в данной работе не нашла себе объяснения также дробность атомных магнитных моментов, обсуждаемая, например, Гальпериным [13]. Однако такие же трудности имеют место и в теории металлических ферромагнетиков (см., например, [14]). Кроме того, для решения этой проблемы нет еще достаточно достоверных и полных данных о величинах атомных магнитных моментов и структуре ферритов.

Произведем сравнение результатов данных расчетов с результатами теории Нееля.

Согласно Неелю [3-5], постулировавшему, что на магнитный момент иона действует молекулярное поле, пропорциональное намагниченностям подрешеток I_a и I_b , самопроизвольная намагниченность I_s ферритов определяется из уравнений:

$$\begin{aligned} I_s &= \mu I_b - \lambda I_a, \\ I_a &= M_{ja} B_{ja} \left(\frac{M_{ja} n (\alpha \lambda I_a + \mu I_b)}{kT} \right), \\ I_b &= M_{jb} B_{jb} \left(\frac{M_{jb} n (\beta \mu I_b + \lambda I_a)}{kT} \right), \end{aligned} \quad (16)$$

где B_{ja} и B_{jb} — функции Бриллюэна (см., например, [15]), M_{ja} и M_{jb} — максимальные значения намагниченностей, создаваемых ионами одного сорта, n , α и β — так называемые коэффициенты молекулярного поля, λ и μ — относительные числа, пропорциональные числу ионов с нескомпенсированным магнитным моментом в первой и второй подрешетках (в нашем случае $\lambda = 1$, $\mu = 2$). В случае, если, например, в подрешетке B имеются ионы, обладающие различными квантовыми числами j (ионы железа Fe и ионы металла M), то

$$\begin{aligned} M_{jb} &= 1/2 (M_{Fe} + M_M), \\ j_b &= 1/2 (j_{Fe} + j_M). \end{aligned} \quad (17)$$

Кроме того, полагается, что коэффициент молекулярного поля n зависит от температуры

$$n = n_0 (1 + \gamma T). \quad (18)$$

Таким образом в теорию входят четыре постоянных: n_0 , α , β и γ , которые определяются из опыта.

Слабым местом теории Нееля является то, что зависимость молекулярного поля от намагниченностей подрешеток им по существу постулируется. С этой точки зрения, приводимый в данной статье расчет может служить некоторым обоснованием теории Нееля, так как в нем молекулярное поле не постулируется, а непосредственно получается из расчета. В самом деле, если в (16) положить $j = 1/2$,

то функция Бриллюэна перейдет в гиперболический тангенс, и уравнения (16) в наших обозначениях примут вид:

$$y_1 = \text{th} \left(\frac{\Theta_1}{T} y_1 + \mu \frac{\Theta_{12}}{T} y_2 \right), \quad y_2 = \text{th} \left(\frac{\Theta_2}{T} y_2 + \lambda \frac{\Theta_{12}}{T} y_1 \right) \quad (19)$$

или

$$y_1 = \text{th} \left(\frac{\Theta_1}{T} y_1 + \left(\frac{\mu}{\lambda} \right)^{1/2} \frac{\Theta'_{12}}{T} y_2 \right), \quad y_2 = \text{th} \left(\frac{\Theta_2}{T} y_2 + \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{1/2} \frac{\Theta'_{12}}{T} y_1 \right).$$

(19) отличается от (8) лишь коэффициентом перед Θ_{12} : вместо корня квадратного из отношения чисел электронов, обладающих нескомпенсированным спином, в подрешетках в уравнениях теории Нееля стоит корень квадратный из отношения чисел магнитных ионов в подрешетках.

Усложнение же, вводимое Неелем, заключающееся в употреблении функции Бриллюэна для значений квантового числа j , определяемого из измерений на изолированных ионах или атомах (разбавленные растворы или пары), пока не находит себе строгого оправдания, так как ионы и атомы в твердых телах ведут себя иначе, чем в разбавленных растворах или парах. Так, например, в металлических ферромагнетиках наилучшие результаты получаются для значения $j = 1/2$, а не для значений j , соответствующих изолированным атомам [15]. На незаконность такого обобщения указывает также тот факт, что значение постоянной Кюри, определенное на опыте для ферритов железа, кобальта и никеля, отличается от значения, полученного по формулам теории. Введение же Неелем [4] температурной зависимости молекулярного поля (18) для устранения этого расхождения представляется искусственным, не говоря уже о том, что это приводит к введению добавочной постоянной. Преимущество же приведенного в данной работе расчета заключается в том, что он, во-первых, обосновывает и устанавливает рамки применимости метода молекулярного поля и, во-вторых, позволяет установить пути дальнейшего развития теории,

2. Антиферромагнетизм

В выражение (6) для свободной энергии тип решетки, а также природа атомов явно не входят (они скрыты в суммах). Поэтому это выражение можно применить и для случая антиферромагнетиков⁴.

В антиферромагнетиках $N_1 = N_2 = N/2$; $\sum_{j,j'} B_{jj'} = \sum_{q,q'} A_{qq'}$ и при

$\sum_{q,j} D_{qj} < 0$ осуществляется антипараллельная ориентация спинов, т. е.

$$y_1 = -y_2, \quad (20)$$

и результирующая намагниченность при отсутствии магнитного поля равна нулю.

При наличии магнитного поля условие (20) нарушается. Вместо (20) будем иметь

$$y_1 = y + \Delta y_1, \quad y_2 = -y + \Delta y_2, \quad (20')$$

где Δy_1 и Δy_2 — приращения средних намагниченностей подрешеток, обусловленные действием магнитного поля. Полагая $\Delta y_1 = \Delta y_2$ [это равносильно тому, что мы пренебрегаем членом $(\Delta y_1 - \Delta y_2)y$ по сравнению с членом $(\Delta y_1 + \Delta y_2)y$], получим для свободной энергии антиферромагнетика вместо (6) следующее выражение:

⁴ Строго говоря, антиферромагнетики существенно отличаются от ферритов тем, что в ферритах разбиение на подрешетки однозначное (определяется типами узлов), в антиферромагнетиках же магнитные подрешетки совершенно эквивалентны друг другу и не могут быть локализованы относительно кристаллической решетки.

$$\begin{aligned} \Phi(y, \Delta y, H) = & \frac{N}{4} kT [(1+y+\Delta y) \ln(1+y+\Delta y) + \\ & + (1-y-\Delta y) \ln(1-y-\Delta y) + (1-y+\Delta y) \ln(1-y+\Delta y) + \\ & + (1+y-\Delta y) \ln(1+y-\Delta y)] - \frac{1}{2} (y^2 + \Delta y^2) \sum_{q \neq q'}^N A_{qq'} - \\ & - \frac{1}{2} (\Delta y^2 - y^2) \sum_{q,j}^N D_{qj} - 2\mu_0 \frac{N}{2} H \Delta y. \end{aligned} \quad (21)$$

Равновесное значение для y найдем из условия минимума:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{N}{4} kT \ln \frac{(1+y+\Delta y)(1+y-\Delta y)}{(1-y-\Delta y)(1-y+\Delta y)} - y \sum_{q \neq q'} A_{qq'} + y \sum_{q,j} D_{qj} = 0. \quad (22)$$

Пренебрегая Δy по сравнению с y в (22) и вводя обозначение

$$T_C = \left(\sum_{q \neq q'} A_{qq'} - \sum_{q,j} D_{qj} \right) / Nk, \quad (23)$$

получим выражение для определения температурной зависимости y

$$\ln \frac{1+y}{1-y} = \frac{2T_C}{T} y \quad \text{или} \quad y = \text{th} \frac{T_C}{T} y. \quad (24)$$

Температура T_C является антиферромагнитной точкой Кюри, выше которой исчезает дальний порядок в ориентации спинов.

Равновесное значение для Δy найдем из второго условия минимума:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial (\Delta y)} = & \frac{N}{4} kT \ln \frac{(1+y+\Delta y)(1-y+\Delta y)}{(1-y-\Delta y)(1+y-\Delta y)} - \\ & - \Delta y \left(\sum_{q \neq q'} A_{qq'} + \sum_{q,j} D_{qj} \right) - 2\mu_0 \frac{N}{2} H = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$H = \frac{kT}{4\mu_0} \ln \frac{(1+y+\Delta y)(1-y+\Delta y)}{(1-y-\Delta y)(1+y-\Delta y)} - \frac{\left(\sum_{q \neq q'} A_{qq'} + \sum_{q,j} D_{qj} \right)}{N\mu_0} \Delta y. \quad (25)$$

Так называемая параллельная восприимчивость $\chi_{\parallel}$ (поле H направлено вдоль y) определяется из соотношения

$$\frac{1}{\chi_{\parallel}} = \frac{1}{N\mu_0} \frac{\partial H}{\partial (\Delta y)}. \quad (26)$$

Согласно (25) и (26) имеем

$$\frac{1}{\chi_{\parallel}} = \frac{kT}{N\mu_0^2 (1-y^2)} + \frac{k\theta}{N\mu_0^2}, \quad (27)$$

где введено обозначение

$$\theta = - \left(\sum_{q \neq q'} A_{qq'} + \sum_{q,j} D_{qj} \right) / Nk. \quad (28)$$

Величина θ является парамагнитной точкой Кюри. В самом деле, выше антиферромагнитной точки Кюри T_c $y = 0$ и (27) примет вид закона Кюри — Вейсса⁵:

$$\chi = \frac{N\mu_0^2}{k(T+\theta)} = \frac{C}{T+\theta}. \quad (29)$$

Ниже антиферромагнитной точки Кюри (27) можно записать еще в виде:

$$\chi_{\parallel} = C(1-y^2)/T_c \left[\tau + \frac{\theta}{T_c}(1-y^2) \right], \quad (30)$$

где

$$\tau = T/T_c. \quad (31)$$

Рассмотрим теперь случай, когда магнитное поле направлено перпендикулярно плоскости, в которой лежат спины при отсутствии поля. Положение этой плоскости при отсутствии внешнего поля или при относительно слабых полях, т. е. при полях, при которых магнитная энергия во внешнем поле меньше кристаллографической магнитной энергии анизотропии, определяется силами магнитной анизотропии. При наложении поля спиновые магнитные моменты слегка повернутся на некоторый угол α по направлению поля. В каждой подрешетке вектор средней намагниченности в нашем приближении слегка изменит свое направление, оставаясь неизменным по величине. Так как число состояний в фазовой сумме (5) определяется лишь числами m_1 и m_2 или пропорциональными им величинами $|y_1|$ и $|y_2|$, а энергию обменного взаимодействия можно по Дираку записать в виде скалярного произведения, то свободная энергия будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \Phi(y_1, y_2, \mathbf{H}) = & \frac{N}{4} kT [(1+|y_1|) \ln(1+|y_1|) + (1-|y_1|) \ln(1-|y_1|) + \\ & + (1+|y_2|) \ln(1+|y_2|) + (1-|y_2|) \ln(1-|y_2|)] - \\ & - \frac{1}{4} (y_1^2 + y_2^2) \sum_{q \neq q'} A_{qq'} - \frac{1}{2} (y_1 y_2) \sum_{q,j} D_{qj} - \mu_0 \frac{N}{2} (\mathbf{H}, y_1 - y_2). \end{aligned} \quad (32)$$

Принимая во внимание, что $|y_1| = |y_2| = y$, имеем

$$(y_1 y_2) = y^2 \cos(180 - 2\alpha); (\mathbf{H}, y_1 - y_2) = 2Hy \sin \alpha \approx 2Hy \alpha$$

и из условия минимума свободной энергии $\partial \Phi / \partial \alpha = 0$ получим значение $\alpha = -N\mu_0 H / 2y \Sigma D$, зная которое, можем определить приращение намагниченности вдоль направления поля

$$\Delta I = N\mu_0 y \sin \alpha \approx N\mu_0 y \alpha = -N^2 \mu_0^2 H / 2 \Sigma D.$$

Окончательно, учитывая (23) и (28), получаем для перпендикулярной восприимчивости следующее выражение:

⁵ При расчете полагалось, что электроны, обладающие нескомпенсированным спином в ионах, ведут себя независимо. Если, как это обычно делается в методе молекулярного поля, считать, что элементарным магнитиком является магнитный момент иона, то значение для постоянной Кюри в (29) будет иным. Однако значения величин постоянных Кюри, рассчитанных на основании теории, в которой элементарными магнитиками считаются магнитные моменты ионов и в качестве квантовых чисел j подставляются значения их, справедливые для магнитноизолированных ионов, в большинстве случаев также отличаются от величин, получающихся на опыте [13], т. е. пока теория может объяснить лишь ход кривой температурной зависимости восприимчивости.

$$\chi_{\perp} = N\mu_0^2/k(T_C + \theta), \quad (33)$$

т. е.

$$\chi_{\perp} = (\chi_{\parallel})_{T=T_C}. \quad (34)$$

Выше антиферромагнитной точки Кюри перпендикулярная и параллельная восприимчивости равны между собой и изменяются с температурой по закону Кюри — Вейсса.

В случае поликристаллических веществ при отсутствии кристаллографической текстуры усреднение приводит к следующему выражению для результирующей восприимчивости:

$$\chi = 2/3 \chi_{\perp} + 1/3 \chi_{\parallel}. \quad (35)$$

Результаты расчета можно свести к следующим положениям.

1) Выше антиферромагнитной точки Кюри восприимчивость изменяется по закону Кюри — Вейсса. При этом парамагнитная точка Кюри отличается по величине от антиферромагнитной точки Кюри. Теоретически это объясняется наличием обменного взаимодействия не только между подрешетками, но и внутри каждой из подрешеток.

2) Ниже антиферромагнитной точки Кюри имеется анизотропия восприимчивости, а именно, перпендикулярная восприимчивость не зависит от температуры, параллельная восприимчивость зависит от температуры, стремясь при абсолютном нуле температур к нулю и при антиферромагнитной точке Кюри стремясь к величине перпендикулярной восприимчивости.

3) Вид кривой температурной зависимости параллельной (или результирующей) восприимчивости определяется величиной отношения парамагнитной точки Кюри к антиферромагнитной точке Кюри: чем меньше это отношение, тем больший наклон по отношению к оси температур вблизи точки Кюри образует касательная к этой кривой (кривая идет более круто).

Положения 1), 2) и их объяснение полностью совпадают с положениями Нееля и Ван-Флека (см. обзор [6]), установленными ими на основании метода молекулярного поля.

Сравнение теоретической температурной зависимости с экспериментальной затруднено крайней малочисленностью опытных данных. Температурная зависимость параллельной и перпендикулярной восприимчивости приведена только в [17]. На рис. 4 произведено сравнение теоретической температурной зависимости параллельной восприимчивости (пунктирная кривая) с экспериментальными данными для MnF_2 и FeF_2 . Согласие получается довольно хорошее, если принять во внимание, что теория справедлива лишь в области высоких температур. Перпендикулярная восприимчивость согласно [17] с понижением температуры в MnF_2 растет, а в FeF_2 падает. Это расхождение с предсказанием теории может быть вызвано двумя причинами: во-первых, авторы сообщения [17] сами измеряли непосредственно лишь разность перпендикулярной и параллельной восприимчивости, а температурную зависимость перпендикулярной восприимчивости получили путем пересчета, используя данные о температурной зависимости результирующей восприимчивости других авторов [18, 19], что могло

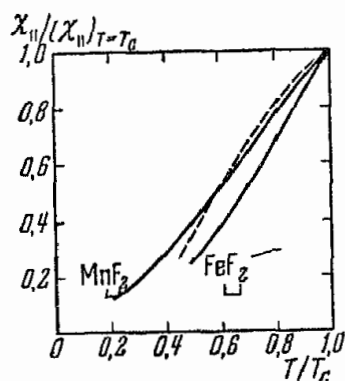


Рис. 4

привести к неправильной зависимости, и, во-вторых, при выводе формулы (32) делалось много грубых приближений. Предсказание теории, что вид кривой температурной зависимости параллельной (а следовательно, для поликристаллов и результирующей) восприимчивости определяется величиной отношения θ/T_c , подтверждается опытно на таких веществах, как FeO и FeF₂, а именно, согласно данным [16] при температурах $T > 1/2 T_c$ восприимчивость с понижением температуры для FeF₂ ($\theta/T_c = 1,48$) спадает более резко, чем для FeO ($\theta/T_c = 2,9$), даже если совместить эти кривые при нуле градусов температуры.

Однако следует заметить, что в веществах, обладающих сравнительно большим значением отношения θ/T_c , таких, как MnO ($\theta/T_c = 5$), это предсказание теории уже не выполняется. Кроме того, в веществах типа MnO для объяснения ряда экспериментальных фактов приходится производить разбиение элементарных магнетиков более чем на две подрешетки [6].

Расхождение между теоретическими и опытными кривыми может происходить также из-за того, что кривые температурной зависимости восприимчивости снимаются при сравнительно больших полях, при которых может уже сказаться зависимость восприимчивости от поля. Эта зависимость обусловлена тем, что при очень больших полях, когда энергия антиферромагнетика во внешнем магнитном поле становится больше энергии магнитной кристаллографической анизотропии, плоскость, в которой ориентированы элементарные магнитные моменты, ориентируется перпендикулярно направлению поля, и результирующая восприимчивость определяется лишь перпендикулярной восприимчивостью. При промежуточных полях восприимчивость зависит от поля.

В антиферромагнетиках возможно также существование антиферромагнитных областей и процессов смещения граничных слоев между ними, что также может сказаться на характере температурной зависимости восприимчивости.

В заключение приносим благодарность проф. С. В. Вонсовскому за обсуждение работы.

Институт физики металлов
Уральского филиала Академии наук СССР

Поступила в редакцию
20 октября 1953 г.

Литература

- [1] Р. П. Озеров. Усп. физ. наук, 47, 445, 1952. — [2] Р. П. Озеров. Усп. физ. наук, 47, 445, 1952. J. M. Hastings a. L. M. Corliss. Rev. Mod. Phys., 25, 114, 1953. — [3] L. Neel. Ann. de phys., 3, 137, 1948. — [4] L. Neel. Journ. de phys. et le radium, 12, 258, 1951. Сборник сокращенных переводов и обзоров иностранной периодической литературы «Проблемы современной физики», 5, Ферромагнетизм, I, ИИЛ, реферат 57, стр. 161, 1952. — [5] R. Pauthenet. Ann. de phys., 7, 710, 1952. — [6] J. H. Van Vleck. Journ. de phys. et le radium, 12, 262, 1951. — [7] С. В. Вонсовский, и Я. С. Шур. Ферромагнетизм, ГИТТЛ, М.—Л., 1948. — [8] P. W. Anderson. Phys. Rev., 83, 1260, 1951. — [9] M. Fallot a. P. Maroni. Journ. de phys. et le radium, 12, 256, 1951. «Проблемы современной физики», 5, Ферромагнетизм, I, ИИЛ, реферат 58, стр. 163, 1952. — [10] С. В. Вонсовский ДАН СССР, 27, 550, 1940. — [11] C. Möller. ZS. f. Phys., 82, 559, 1933. — [12] J. L. Snoek. Journ. de phys. et le radium, 12, 228, 1951. — [13] Ф. Гальперин. ДАН СССР, 88, 643, 1953. — [14] С. В. Вонсовский и К. Б. Власов. ЖЭТФ, 25, 327, 1953. — [15] Ф. Зейтц. Современная теория твердого тела, ГИТТЛ, М.—Л., 1949. — [16] H. Bisette. Ann. de phys., 1, 233, 1946. — [17] J. W. Stout a. L. M. Matarrese. Rev. Mod. Phys., 25, 338, 1953. — [18] W. J. de Haas, B. H. Schultz a. J. Koolhaus. Physica, 7, 57, 1940. — [19] H. Bisette et B. Tsai. C. R., 212, 119, 1941.

УГЛОВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВТОРИЧНЫХ ИОНОВ ПРИ БОМБАРДИРОВКЕ ИОНАМИ ЩЕЛОЧНЫХ МЕТАЛЛОВ ТАНТАЛОВОЙ МИШЕНИ

У. А. Арифов и А. Х. Аюханов

Исследовалось распределение энергии и интенсивности вторичных ионов Na и Rb в зависимости от угла падения первичных и угла вылета вторичных ионов при бомбардировке чистой нагретой танталовой мишени. Показано наличие угловой зависимости максимальной энергии рассеянных ионов, совпадающей со значениями энергии упругого соударения сталкивающихся частиц. Обнаружена линейная зависимость интенсивности вторичных ионов от угла вылета.

1. Введение

В предыдущих работах авторов [1,2] было показано, что при бомбардировке ионами щелочных металлов тщательно очищенной танталовой поверхности вторичная ионная эмиссия, при условии $m_{\text{миш}} > m_{\text{иона}}$, в значительной мере представляет собою явление рассеяния в вакуум первичных ионов мишенью. При этом выяснилось, что рассеяние происходит не на мишени как «твердой стенке», а на отдельных атомах, которые в момент соударения в первом приближении можно считать свободными.

Максимальная энергия частиц, рассеянных в результате однократного процесса столкновения, близка к энергии, вычисленной по закону упругого столкновения двух частиц. Так как энергия рассеянных ионов должна зависеть от угла рассеяния, то очевидно, что полный анализ процесса рассеяния возможен только при условии изучения углового распределения рассеянных ионов как по интенсивностям, так и по значениям энергии. В наших работах мы не наблюдали вторичных частиц, энергия которых превышала бы энергию, вычисленную из закона упругих соударений двух частиц. В противоречии с этим, анализ недавних работ Еремеева [3] показывает, что полученные им данные магнитоспектрометрического изучения вторичной ионной эмиссии определенно свидетельствуют о наличии частиц с энергиями, превышающими те, которые можно вычислить из закона упругого соударения двух частиц. Таким образом необходимо дальнейшее экспериментальное изучение вопроса.

Если действительно имеет место упругое рассеяние ионов поверхностными атомами мишени, то предельная энергия рассеянных ионов должна существенным образом зависеть от угла падения первичных ионов и угла вылета вторичных ионов. Вследствие этого опытное подтверждение или опровержение расчетных соотношений в широком диапазоне углов падения и вылета представляет значительный интерес.

С другой стороны, изучение распределения вторичных частиц по энергиям при разных углах падения, а также исследование интегрального значения коэффициента вторичной ионно-ионной эмиссии в зависимости от угла должно помочь выяснению природы вторичных ионов, обладающих скоростями, промежуточными между тепловыми и предельно большими, получаемыми в этих опытах. В связи с этим и была предпринята экспериментальная работа, результаты которой излагаются ниже.

2. Прибор и методика эксперимента

Для исследования характеристик рассеяния ионов в зависимости от угла падения был использован прибор с двумя шлифами, схема которого дана на рис. 1 (один из шлифов, перпендикулярный к плоскости чертежа, указан пунктиром). Прибор состоял из описанного уже источника ионов [1], 127-градусного фокусирующего цилиндрического конденсатора *ЦК*, приемной части в виде цилиндра *Ц* со щелями для входа первичного пучка и приема вторичных ионов на коллектор *F*, помещаемого против одной из щелей, и мишени *М* — полоски из Та размером $30 \times 5 \times 0,03$ мм, натянутой по оси цилиндра. Цилиндр имел восемь строго одинаковых по размерам щелей, расположенных по окружности цилиндра через $14^\circ 18'$, одна из которых использовалась для приема и исследования вторичных ионов, а остальные служили как отверстия для входа первичного

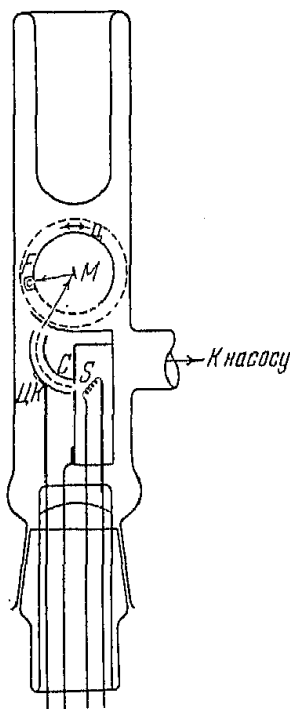


Рис. 1. Схема вакуумного прибора. Пучок ионов, полученных путем поверхностной ионизации молекул щелочно-галогидных солей на спирали *S*, ускоряется полем спираль — корпус, отделяется от нейтральных частиц цилиндрическим конденсатором *ЦК* и направляется на мишень *М*

пучка ионов под определенным фиксированным углом к мишени. Вся жестко связанная приемная часть, включая мишень, приемный цилиндр *Ц* и приемник для вторичных ионов (коллектор *F*), могла вращаться вокруг оси, совпадающей с осью цилиндра *Ц*. Этим вращением обеспечивалась возможность приема первичного пучка под тем или иным углом падения к поверхности мишени, определяющимся номером щели, через которую проходил первичный пучок. При исследовании тока вторичных ионов в зависимости от угла падения первичного пучка приемная щель для вторичных частиц, за которой был помещен коллектор *F*, располагалась всегда перпендикулярно к поверхности мишени. Между щелью приемного цилиндра *Ц* и коллектором *F* создавалось электрическое поле, тормозящее положительные ионы.

Для удобства дальнейшего изложения введем понятие об углах падения первичных и вылета вторичных ионов. Угол между направлением падения пучка первичных ионов и нормалью к поверхности мишени назовем углом падения первичных ионов и обозначим его через φ . Угол между нормалью к поверхности мишени и направлением вылета рассеянных ионов назовем углом вылета рассеянных ионов и обозначим через θ . Сумму углов падения первичных и вылета вторичных ионов обозначим через α . Как нетрудно видеть, значение α определяется через угол рассеяния β выражением

$$\alpha = \varphi + \theta = \pi - \beta.$$

Схема установки, служившей для измерений, представлена на рис. 2. Вторичный ионный ток на коллектор измерялся ламповым электрометром, а суммарный ток (ток на мишень и приемный цилиндр) обычным зеркальным гальванометром.

Для исследования зависимости предельных энергий вторичных ионов от угла падения φ первичного пучка снимались вольтамперные характеристики вторичных ионов, т. е. измерялись величины ионных токов на коллектор через каждые $14^\circ 18'$ в зависимости от напряжения плоского

задерживающего поля, создаваемого между коллектором F и приемным цилиндром $Ц$.

Особое внимание уделялось чистоте условий опыта. По окончании процесса достижения вакуума ($\approx 10^{-6}$ мм рт. ст.), требующего обычно нагревания стенок стеклянных частей установки и обезгаживания токами высокой частоты металлических частей прибора, производилось очищение мишени. Мишень очищалась прокаливанием при высокой температуре при обязательном наличии в ловушках вакуумной установки и прибора жидкого азота.

Для уменьшения влияния адсорбции остаточных газов и загрязнения поверхности мишени самим пучком первичных ионов измерения проводились при высокой температуре ($\approx 1350^\circ \text{K}$). При подготовке мишени к измерениям ионный пучок находился в отклоненном состоянии и не попадал в приемную часть. Ионный пучок подавался к поверхности мишени только при измерениях на время, не превышающее нескольких периодов электрометра. Перед снятием каждой точки вольтамперной характеристики мишень прокаливалась при высокой температуре (до 2500°K) сначала более длительное время (2—3 мин.), а затем, после остывания, непосредственно перед измерением, еще раз кратковременно; после понижения температуры мишени до нужного значения подавался пучок, и производилось измерение.

Изображение ширины пучка на поверхности мишени при угле падения в $14^\circ 18'$ было не более 1 мм и проходило через ось вращения приемной части прибора. Это обстоятельство имело важное значение и потому всегда контролировалось по свечению, производимому ионным пучком Na на поверхности мишени, загрязненной окислами Na.

Вольтамперные характеристики снимались последовательно для каждой щели в отдельности при одной и той же чувствительности электрометра.

3. Результаты измерений

Результаты измерений, полученные при бомбардировке танталовой мишени ионами Na при начальной энергии $E_0 = 170 \text{ eV}$ и ионами Rb при $E_0 = 360 \text{ eV}$, приведены на рис. 3 и 4. Здесь по оси абсцисс отложены значения задерживающего поля, а по оси ординат — токи вторичных ионов на коллектор F , отнесенные к суммарному току, отсчитанному по гальванометру (в произвольных единицах). Черными точками, крестиками и треугольниками и т. д. соответственно обозначены измерения на 1, 2, 3-й и т. д. щелях.

Как видно из кривых, полное задержание ионов происходит для разных углов падения φ не при одинаковых значениях задерживающего напряжения, т. е. предельная энергия вторичных ионов зависит от угла падения первичных ионов. Ближайшее рассмотрение этих предельных значений энергий показывает, что они находятся в удовлетворительном согласии с соотношением для нецентрального упругого соударения

$$E = E_0 \frac{(m_1 - m_2)^2}{m_2^2 [\cos \beta + \sqrt{(m_1/m_2)^2 - \sin^2 \beta}]^2}, \quad (1)$$

где E — предельная энергия вторичных ионов, E_0 — энергия первичных ионов, β — угол рассеяния, m_1 и m_2 — массы атомов мишени и бомбардирующих ионов.

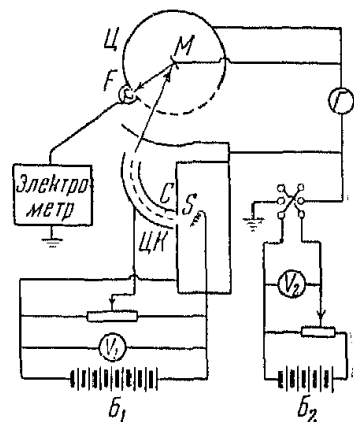


Рис. 2. Принципиальная схема установки для измерения углового распределения, максимальной энергии и интенсивности вторичных ионов

Вычисленные значения для

$$\eta_T = \frac{(m_1 - m_2)^2}{m_2^2 [\cos \beta + \sqrt{(m_1/m_2)^2 - \sin^2 \beta}]^2}$$

(2)

и полученные из опыта значения $\eta_e = E/E_0$ для ионов Na и Rb приведены в табл. 1.

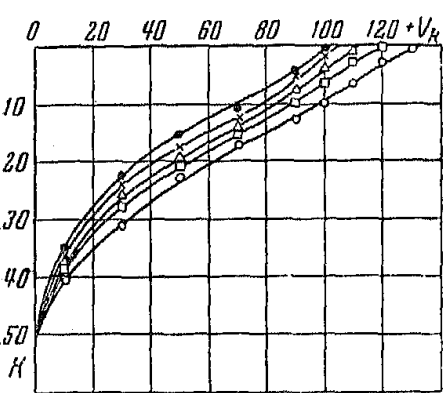


Рис. 3

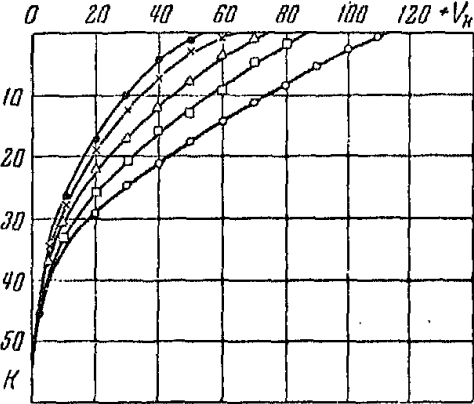


Рис. 4

Рис. 3. Вольтамперные характеристики вторичной ионной эмиссии чистого, нагретого до температуры 1350°K тантала, бомбардируемого положительными ионами Na с энергией 170 eV при различных углах падения ϕ первичного ионного пучка. Углы падения ϕ первичного ионного пучка: ●—14°18', ×—28°36', Δ—42°54', □—57°12', ○—71°30'

Рис. 4. Вольтамперные характеристики вторичной ионной эмиссии чистого, нагретого до температуры 1350°K тантала, бомбардируемого положительными ионами Rb с энергией 360 eV при различных углах падения ϕ первичного ионного пучка. Углы падения ϕ первичного ионного пучка: ●—14°18', ×—28°36', Δ—42°54', □—57°12', ○—71°30'

Таблица 1

Ионы	Щели (углы падения ϕ , при $\theta = 0$; $\alpha = \phi$)									
	1		2		3		4		5	
	η_T	η_e	η_T	η_e	η_T	η_e	η_T	η_e	η_T	η_e
Na	0,61	0,60	0,62	0,62	0,64	0,65	0,67	0,70	0,72	0,76
Rb	0,13	0,15	0,15	0,18	0,17	0,20	0,20	0,24	0,26	0,31

Таким образом η_T и η_e достаточно хорошо совпадают. Это обстоятельство несомненно указывает на существование вторичных частиц, полученных путем рассеяния первичных ионов в результате однократного нецентрального столкновения с поверхностными атомами тантала.

Кривые рис. 3 и 4 показывают, кроме того, что зависимость от угла падения первичного пучка сказывается не только на предельных значениях энергии вторичных ионов: с изменением угла падения несколько видоизменяется вся кривая распределения энергии. Число ионов, обладающих большими энергиями, относительно больше при большом угле падения и, наоборот, при меньших углах падения ионов с большими энергиями относительно меньше. Это хорошо согласуется с предположением, что проникновение первичных ионов на большую глубину затруднено при их падении на поверхность под большим углом.

Измерения числа ионов, распространяющихся перпендикулярно к поверхности мишени, при различных углах падения первичных ионов Na и Rb показали, что число рассеянных ионов, измеренное без задерживающего поля, в пределах ошибок опыта не зависит от угла падения.

Для исследования распределения вторичных ионов по углам вылета θ прибор снабжался еще одним шлифом, ось которого совпадала с осью приемного цилиндра. В этом случае приемный цилиндр $\mathcal{C}$ и жестко связанная с ним мишень M оставались неподвижными по отношению к

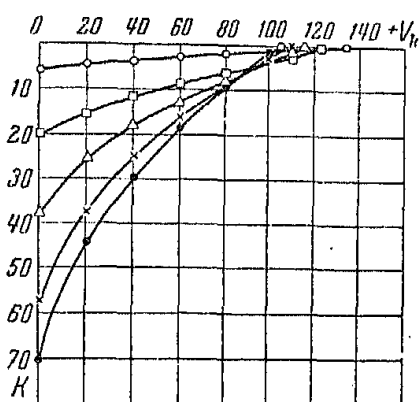


Рис. 5

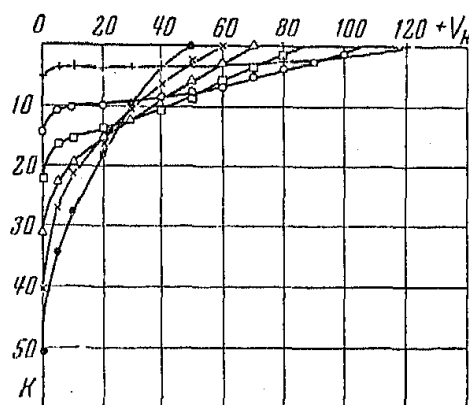


Рис. 6

Рис. 5. Вольтамперные характеристики вторичной ионной эмиссии чистого нагретого до температуры 1350°K тантала, бомбардируемого положительными ионами Na с энергией 180 eV при различных углах вылета θ вторичных ионов. Углы вылета θ вторичных ионов: $\bullet$ — $28^\circ36'$, $\times$ — $42^\circ54'$, Δ — $57^\circ12'$, $\square$ — $71^\circ30'$, $\circ$ — $85^\circ48'$

Рис. 6. Вольтамперные характеристики вторичной ионной эмиссии чистого, нагретого до температуры 1350°K тантала, бомбардируемого положительными ионами Rb с энергией 360 eV. Углы вылета θ вторичных ионов: $\bullet$ — $14^\circ18'$, $\times$ — $28^\circ36'$, Δ — $42^\circ54'$, $\square$ — $57^\circ12'$, $\circ$ — $71^\circ30'$, $+$ — $85^\circ48'$

источнику ионов; следовательно, угол падения был всегда постоянным (в нашем случае первичный пучок направлялся перпендикулярно к поверхности мишени, т. е. $\varphi = 0$). Экранированный коллектор F , связанный с другим шлифом, мог вращаться вокруг приемного цилиндра $\mathcal{C}$, переходя от одной щели к другой, меняя значение θ и сохраняя неизменное расстояние от приемного цилиндра. Прибор позволял исследовать углы вылета θ , начиная с $14^\circ18'$. Для исследования предельных энергий ионов, распространяющихся под разными углами вылета θ , так же как и при исследовании зависимости от угла падения φ , были сняты вольтамперные характеристики ионных токов на каждую щель через $14^\circ18'$. Полученные кривые для ионов Na при энергии первичных ионов 180 eV и для ионов Rb при энергии первичных ионов 360 eV приведены на рис. 5 и 6. Здесь по оси абсцисс отложены значения задерживающего поля, а по оси ординат отложены токи вторичных ионов на коллектор F , отнесенные к суммарному току, отсчитанному по гальванометру (в произвольных единицах). Черными точками, крестиками, треугольниками и т. д. соответственно обозначены измерения на 1, 2, 3-й и т. д. щелях.

Из этих кривых видно, что предельные энергии вторичных ионов различны для разных щелей, т. е. эти предельные энергии зависят от угла вылета θ вторичных ионов.

Ближайшее рассмотрение предельных энергий показывает, что для ионов Na и Rb они находятся в удовлетворительном согласии с соотношением для упругих нецентральных соударений (1). Вычисленные из (2) значения $\gamma_{\text{т}}$ и полученные из опыта значения $\gamma_{\text{э}}$ для ионов Na и Rb приведены в табл. 2.

Т а б л и ц а 2

Ионы	Щели (углы вылета θ , при $\varphi = 0$; $\alpha = \theta$)											
	1		2		3		4		5		6	
	η_T	η_{θ}	η_T	η_{θ}	η_T	η_{θ}	η_T	η_{θ}	η_T	η_{θ}	η_T	η_{θ}
Na	—	—	0,62	0,58	0,64	0,6	0,67	0,63	0,72	0,69	0,76	0,74
Rb	0,13	0,14	0,15	0,17	0,17	0,20	0,20	0,24	0,26	0,30	0,33	0,34

Представляет интерес зависимость числа вторичных ионов от угла вылета. Как видно из тех же кривых рис. 5 и 6, число вторичных ионов уменьшается с увеличением угла вылета. Значения ионных токов, измеренных без задерживающего поля между коллектором и щелью приемного цилиндра, в зависимости от угла вылета, дают распределение, в общем отличающееся от косинусоидального.

Результаты опытов находятся в хорошем соответствии с представлением о глубинном характере процесса возникновения вторичных ионов в

результате многократных соударений с атомами мишени. В самом деле, если руководствоваться этой точкой зрения, то нужно допустить, что с увеличением угла падения глубина проникновения первичных ионов уменьшится, в результате чего вторичные ионы, выходящие в вакуум нормально к поверхности мишени, будут покидать поверхность с большей средней энергией. Зависимость от угла вылета θ в этом случае будет сильнее косинусоидальной, так как идущие из некоторой глубины ионы при движении к поверхности будут испытывать дополнительные рассеяния, тем большие, чем больше угол вылета. При больших углах вылета в вакуум будет выходить лишь небольшое число быстрых

ионов. Имеют шанс сохранить скорость, полученную в результате первого столкновения, лишь те ионы, которые претерпели соударения с атомами мишени, находящимися в самом поверхностном слое.

На рис. 7 для сравнения с теоретическим графиком косинусоиды (пунктир) приведены построенные по углам вылета значения числа вторичных ионов Rb. Здесь по оси абсцисс отложены углы вылета θ , а по оси ординат — относительное число ионов, распространяющихся под этими углами вылета.

Сравнение с законом косинуса полученных значений токов в грубом приближении дает совпадение при $\alpha > 40^\circ$ (при $\varphi = 0$), однако при $\alpha < 40^\circ$ имеет место закономерное отклонение, показывающее относительное преобладание вторичных ионов в направлении нормали к поверхности мишени. Полученные точки гораздо лучше ложатся на прямую, пересекающую ось углов при 90° .

Выводы

1. Максимальные энергии ионов вторичной эмиссии являются однозначной функцией угла между направлением первичного пучка и направлением вылета рассеянного иона. Эти максимальные энергии хорошо совпадают со значениями, вычисленными в предположении упругого нецентрального столкновения первичного иона с поверхностными атомами мишени.

2. Число вторичных ионов, вылетающих в направлении нормали к поверхности мишени, практически не зависит от угла падения первичных ионов.

3. Число вторичных ионов, распространяющихся под различными углами вылета, отстает от закона косинуса и в первом приближении может быть описано линейной зависимостью.

В заключение авторы приносят благодарность проф. С. В. Стародубцеву за постоянный интерес к работе.

Физико-технический институт
Академии наук Узбекской ССР

Поступила в редакцию
31 октября 1953 г.

Литература

- [1] У. А. Арифов и А. Х. Аюханов. ДАН УзССР, 4. 12, 1951.— [2] У. А. Арифов, А. Х. Аюханов и С. В. Стародубцев. ДАН УзССР, 1, 12, 1953.— [3] М. А. Еремеев. ДАН СССР, 72, 775, 1952.

ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ГИСТЕРЕЗИС В МОНОКРИСТАЛЛАХ BaTiO_3

Н. С. Новосильцев и А. Л. Ходаков

Изучен диэлектрический гистерезис при 50 гц в монокристаллах BaTiO_3 . Осциллограммы снимались в сильных полях, близких к пробойному, при которых наблюдается тенденция к исчезновению основного фазового перехода. По осциллограммам вычислены значения поляризации и диэлектрической проницаемости.

Для выяснения динамики процессов в сегнетоэлектриках и для решения ряда вопросов, связанных с их практическим использованием в технике, представляет интерес изучение гистерезиса. В керамике титаната бария диэлектрический гистерезис был исследован еще в 1946 г. Вулом [1], а также в работе [2] и в 1949 г. Ржановым [3]. Однако на монокристаллах гистерезис исследовался мало. Так как в предыдущих наших работах [4,5] было установлено существование ряда модификаций кристаллов, отличающихся характером хода зависимости диэлектрической проницаемости от температуры, нами было предпринято всестороннее изучение таких модификаций.

В настоящей статье сообщаются результаты изучения гистерезиса в двух партиях кристаллов при различных температурах и напряженностях поля. Измерения производились на установке, построенной по схеме, описанной в работе [6]. Кристаллы были выращены в тиглях из железа Армко. Растворителем в обоих случаях служила смесь 40% поташа и 60% соды. Для приготовления первой партии кристаллов в тигель загружалось 1,5 мол.% готового титаната бария в порошке. Для растворения титаната бария герметически завинченный тигель подогревался до температуры 1050° С. Кристаллизация происходила в процессе равномерного охлаждения до 700° С в течение 135 час., причем при 1,5% BaTiO_3 насыщение достигалось при температуре 830° С. Химический анализ этой партии кристаллов показал наличие в них примесей до 0,2% (в том числе железа только следы). Внешний вид кристаллов изображен на рис. 1 (вклейка).

Для приготовления кристаллов второй партии (рис. 2, вклейка) в тигель загружался BaTiO_3 в количестве 3 мол.%. Для растворения тигель сперва нагревался до 1075° С, а затем равномерно охлаждался до 700° С в течение 92 час. В этом случае насыщение раствора и начало образования кристаллов наступало при 960° С. В обоих случаях выпадение кристаллов BaTiO_3 из расплава происходило до 700° С включительно; по этой причине дальнейшее медленное охлаждение не имело смысла. Примеси в кристаллах второй партии по данным химического анализа не превышали 0,1%; железа наблюдались также только следы.

Диэлектрические и оптические свойства кристаллов изучались ранее [4]. Кристаллы обладали отчетливо выраженным доменным строением. Исследование температурного хода диэлектрической проницаемости кристаллов, проведенное при частоте 10⁶ гц, показало существование точки Кюри у первой партии при 80° С и у второй при 60° С. Подобные кристаллы обнаруживают дисперсию диэлектрической проницаемости в области частот 10⁵—10⁸ гц и рост потерь в той же области частот. Изучение реверсивной проницаемости и ее температурного хода, а также старения указывали на существование гистерезисных явлений.

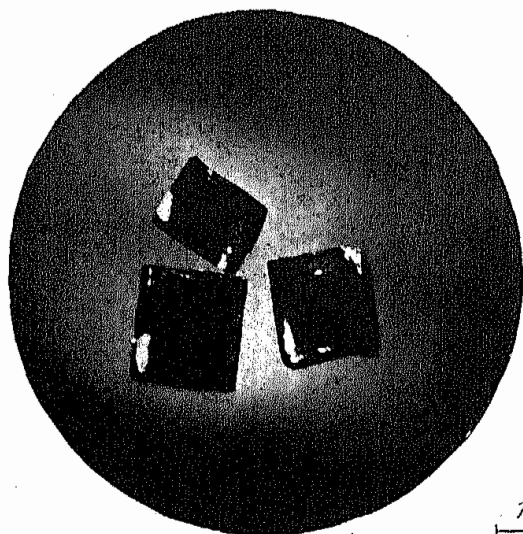


Рис. 1

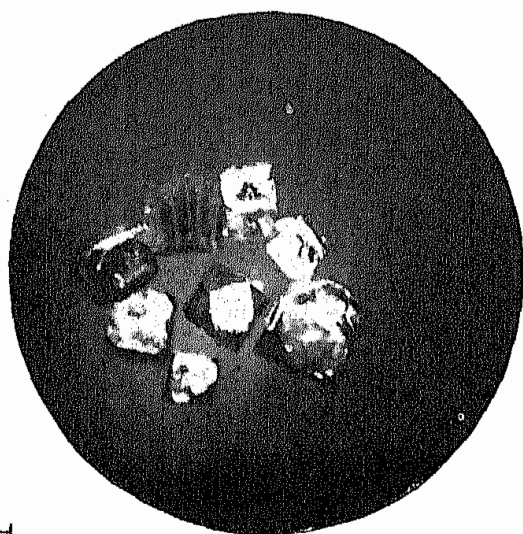
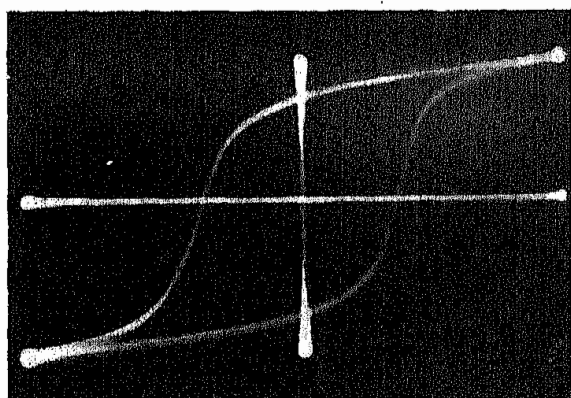
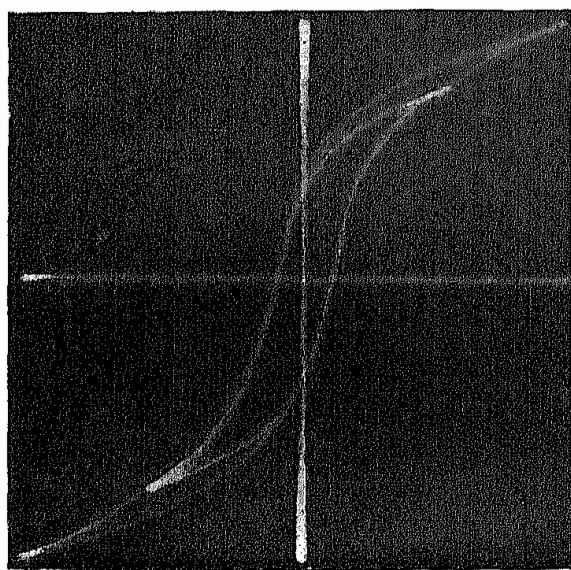


Рис. 2

1 мм



α



β

Рис. 6. α — осциллограмма кристалла;
 β — осциллограмма керамики

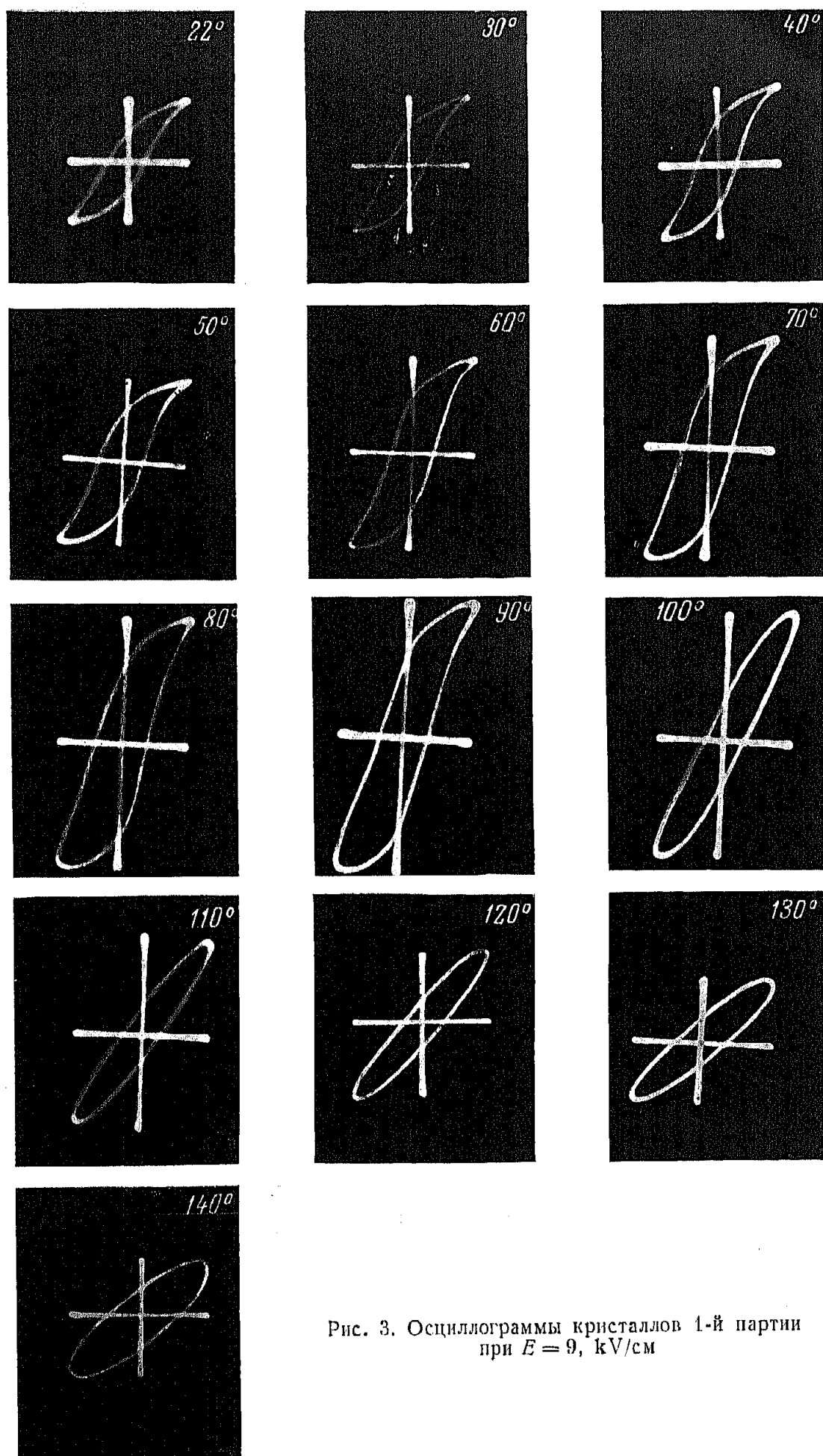


Рис. 3. Осциллограммы кристаллов 1-й партии при $E = 9 \text{ kV/cm}$

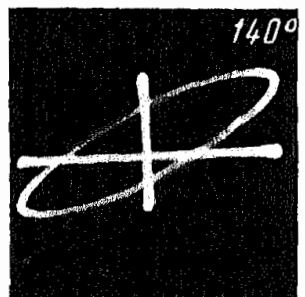
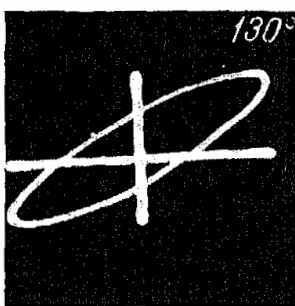
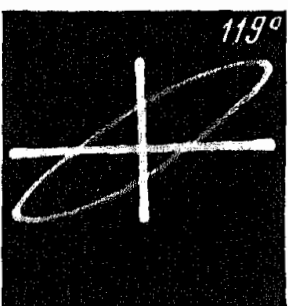
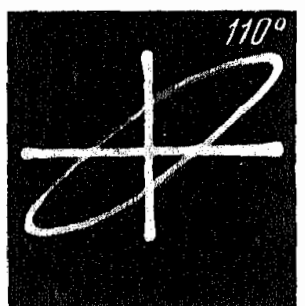
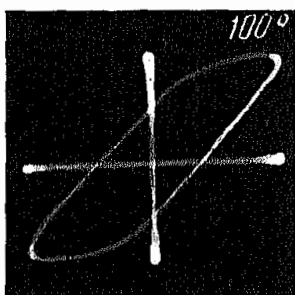
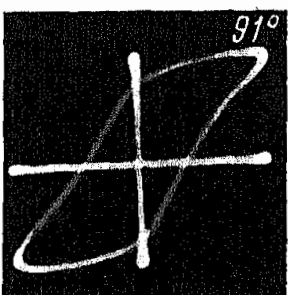
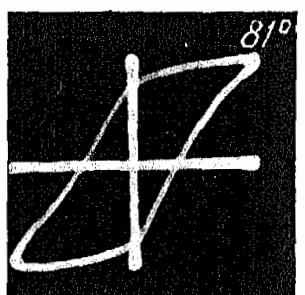
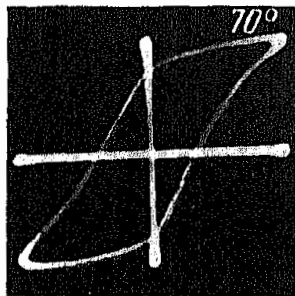
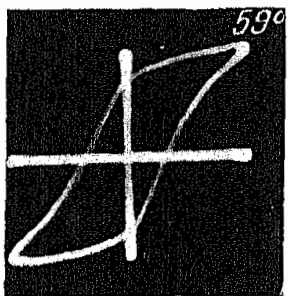
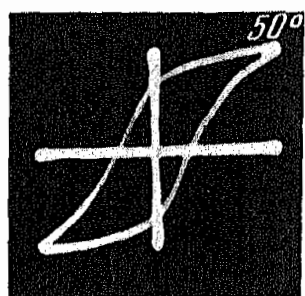
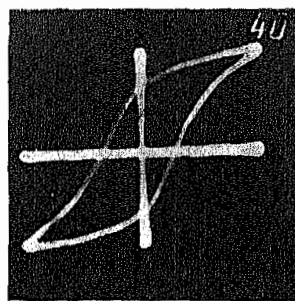
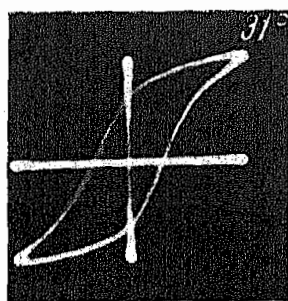
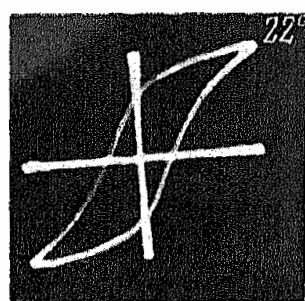


Рис. 4. Осциллограммы кристаллов 1-й партии
при $E = 22,0 \text{ kV/cm}$

Для кристаллов первой партии были сняты две серии осциллограмм петель гистерезиса на частоте 50 гц при различных температурах. Одна серия была снята при градиенте поля $E = 9,1$ кВ/см (рис. 3, вклейка), другая (рис. 4, вклейка) при 22,0 кВ/см; при напряженностях более 22 кВ/см наступает пробой. Следует отметить, что при 22 кВ/см у кристаллов этой партии насыщение еще не достигается, однако вычисленное из осциллограмм рис. 4 значение индуцированной поляризации и соответствующее значение диэлектрической проницаемости дали величину $\epsilon = 1960$ при комнатной температуре, в то время как измеренная ϵ при $f = 10^6$ гц имела величину 1800. Осциллограммы 10–13 (рис. 4), соответствующие температурам выше 120°С при $E = 22$ кВ/см, обнаруживают асимметрию, что, повидимому, объясняется при этих условиях высоковольтной поляризацией и односторонней проводимостью.

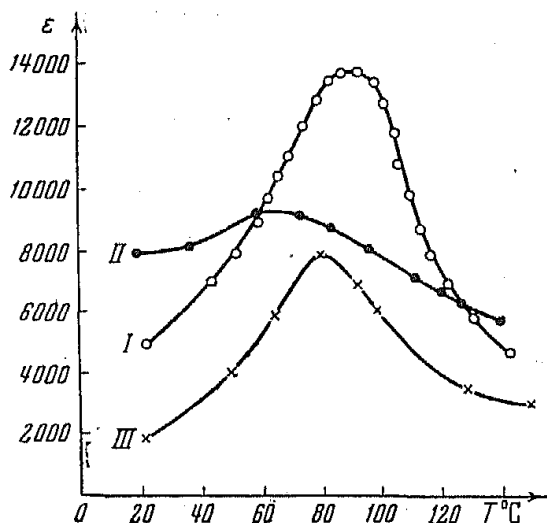


Рис. 5. Зависимость диэлектрической проницаемости от температуры. I — при 9,1 кВ/см и частоте 50 гц; II — при 22,0 кВ/см и частоте 50 гц; III — при 0,5 кВ/см и частоте 10⁶ гц

шая напряженность поля сглаживает кривую температурного хода ϵ , понижает максимум диэлектрической проницаемости в точке Кюри и повышает значение ϵ в сегнетоэлектрической области вдали от точки Кюри. В некоторых сортах керамики BaTiO₃ [7] при $E = 14,4$ кВ/см почти полностью исчезает максимум в точке Кюри. Такая же тенденция наблюдается и у кристаллов. Для сравнения на рис. 5 приведена кривая температурного хода кристаллов той же партии, построенная на основании результатов измерений резонансным методом (при малом градиенте поля высокой частоты). Пик диэлектрической проницаемости на этой кривой несколько смещен в сторону более высоких температур по сравнению с кривой, вычисленной из наклона касательной к петлям гистерезиса при $E = 9,1$ кВ/см.

Петли гистерезиса снимались при частоте сети 50 гц. Поэтому на форме петли должны сильно сказываться низкочастотные потери. Присутствие таких потерь отчетливо выступает на осциллограммах, снятых при температурах выше точки Кюри. Здесь петля не исчезает, а превращается в релеевскую фигуру, подтверждающую наличие заметных потерь. Величина поляризации этих кристаллов при температуре 22°С и $E = 22$ кВ/см достигает $15,2 \cdot 10^{-6}$ кул/см².

Кристаллы второй партии давали более широкие осциллограммы, указывающие на большую величину потерь. На рис. 6 (вклейка) для сравнения приведены осциллограммы, полученные с кристаллами второй партии при 25°С (а) и керамикой при 22°С (б). У кристаллов этой

На рис. 5 приведена зависимость от температуры диэлектрической проницаемости кристаллов, вычисленная по осциллограммам петель гистерезиса при различных градиентах поля. Можно показать, что увеличение напряженности поля влияет так же, как и в случае керамики BaTiO₃ [7]. Боль-

На рис. 5 приведена зависимость от температуры диэлектрической проницаемости кристаллов, вычисленная по осциллограммам петель гистерезиса при различных градиентах поля. Можно показать, что увеличение напряженности поля влияет так же, как и в случае керамики BaTiO₃ [7]. Боль-

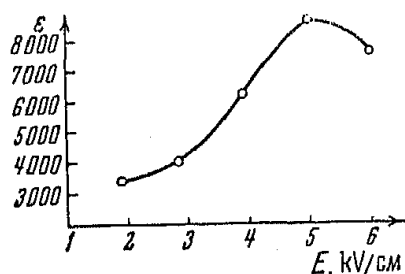


Рис. 7. Зависимость диэлектрической проницаемости от градиента поля для кристаллов 2-й партии

партии в сильных полях насыщение наступает раньше. На рис. 7 приведена для них зависимость диэлектрической проницаемости от градиента поля, вычисленная из осциллограммы.

Ростовский и / Д государственный
университет

Поступила в редакцию
20 октября 1953 г.

Литература

- [1] Б. М. Вул. ДАН СССР, 51, 21, 1946.— [2] A. Bretteville. Journ. Amer. Ser. Soc., 29, 303, 1946.— [3] А. В. Ржапов. ЖЭТФ, 19, 502, 1949.— [4] И. Н. Беляев, Н. С. Новосильцев, Е. Г. Фесенко, А. Л. Ходаков. ЖЭТФ, 23, 211, 1952.— [5] И. Н. Беляев, Н. С. Новосильцев, Е. Г. Фесенко, А. Л. Ходаков. ДАН СССР, 78, 875, 1951.— [6] C. V. Sawyer, C. N. Tower. Phys. Rev., 35, 269, 1930.— [7] Н. С. Новосильцев, А. Л. Ходаков и М. С. Шильман. ЖЭТФ, 23, 336, 1952.
-

ЗАЖИГАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО РАЗРЯДА В ГАЗАХ НА ПЕРЕМЕННОМ ТОКЕ ЗВУКОВОЙ ЧАСТОТЫ В ТРУБКАХ С ВНЕШНИМИ И ВНУТРЕННИМИ ЭЛЕКТРОДАМИ

Н. А. Капцов и Н. А. Попов

Произведено сравнение условий зажигания и горения разряда в трубках с внешними и внутренними электродами в зависимости от частоты приложенного напряжения. В случае внешних электродов установлено наличие двух типов разряда: неустойчивого — при малых напряжениях и устойчивого — при более высоких, и, соответственно, двух значений напряжения зажигания разряда. При частоте порядка 10 кГц кривые зависимости напряжения зажигания от частоты для обоих видов разряда приближаются одна к другой.

1. Введение

Известно, что стационарный электрический разряд постоянного тока в разреженных газах может иметь место только в разрядных трубках с внутренними электродами. Высокочастотный разряд, напротив, может гореть одинаково хорошо как при внутренних, так и при внешних электродах [1-4]. В настоящей работе первоначально была поставлена задача определить нижнюю границу частот, при которых может поддерживаться стационарный разряд в трубках с внешними электродами, и сравнить на этих частотах характер зажигания и горения разряда при внутренних и при внешних электродах. В ходе исследования выяснилось, что при низкой звуковой частоте в трубках с внешними электродами при напряжении, почти не превышающем напряжения зажигания разряда на переменном токе при внутренних электродах, имеют место вспышки неустойчивого разряда в виде отдельных импульсов¹. Этот неустойчивый разряд также явился объектом настоящего исследования. Его появление удалось проследить вплоть до частоты 30 Гц, представлявшей собой нижний предел частоты для использованного нами генератора.

2. Методика эксперимента

Источником переменного напряжения служил генератор звуковой частоты ЗГ-2а с усилителем У-50 и повышающим трансформатором. Разрядный ток определялся по измеряемому электростатическим вольтметром падению напряжения на известном безиндукционном сопротивлении, включенном последовательно с разрядной трубкой, а также при помощи термопары и зеркального гальванометра. Напряжение на разрядной трубке измерялось киловольтметром того же типа. Разряд исследовался в H_2 , Ne и Kг в изготовленных нами специальных трубках, наполненных газом при давлении от 0,5 до 3 мм рт. ст. и отпаянных от вакуумной установки. Трубки с плоскими внешними и внутренними электродами имели одни и те же размеры, одинаковое расстояние между электродами, откачивались, прогревались и наполнялись газом одновременно. Кроме того, были изготовлены трубки с внешними кольцеобраз-

¹ Такие вспышки неустойчивого разряда на 50-периодном токе описаны также в работах [5-7].

ными электродами. Зажигание и протекание разряда наблюдалось по его излучению при помощи электронного умножителя ФЭУ-19 и осциллографа ЭО-4. Частота развертки осциллографа синхронизовалась с частотой напряжения, подаваемого на разрядную трубку. При выполнении экспериментов соблюдались следующие необходимые условия: стабильность работы генератора и фотоумножителя и тщательная экранировка электрической схемы, включая разрядную трубку и электроизмерительные приборы. Неоднократная проверка формы кривой переменного напряжения, подаваемого на трубку, показала, что эта кривая во всех случаях представляла собой синусоиду.

3. Результаты экспериментов

Визуальное наблюдение картины, получающейся на осциллографе при подаче на трубки с внешними электродами переменного напряжения в диапазоне частот от 30 до 10 000 гц, и снятые осциллограммы показали, что в случае внешних электродов разряд может иметь две различные формы. При больших частотах и достаточно большой амплитуде подаваемого напряжения в трубке в каждый полупериод напряжения возникает разряд, длящийся определенную долю полупериода, так же как это имеет место при разряде на переменном токе с частотой 50 гц в трубках с внутренними электродами². При малых частотах и малой амплитуде напряжения в трубке с внешними электродами возникают в отдельные полупериоды кратковременные нерегулярные импульсы тока, дающие на экране осциллографа отдельные узкие пики, вызванные слабыми вспышками свечения трубки. С повышением напряжения до некоторого значения эти импульсы переходят в стационарный разряд переменного тока. Каждому из этих двух видов разряда соответствует свое напряжение зажигания, зависящее от частоты, давления и рода газа. Ниже приводятся раздельно результаты наблюдений и измерений, полученные для каждого из этих двух случаев.

а) Нестабильный разряд

На рис. 1 представлены осциллограммы фототока при нестабильном разряде в водороде при частоте 50 гц, давлении газа 2 мм рт. ст. и расстоянии между внешними электродами 5 см. Частота развертки осциллографа синхронизована с частотой наложенного напряжения так, что на экране укладывается один период напряжения. Из рассмотрения этих осциллограмм видно, что при нестабильном разряде трубка в течение большей части периода совсем не светится и только в моменты, соответствующие максимуму напряжения в каждый полупериод, вспыхивает кратковременными импульсами (рис. 1, а), причем яркость свечения того же порядка, что и яркость излучения самостоятельного разряда при внутренних электродах в тех же условиях. С увеличением амплитуды напряжения число вспышек за полупериод увеличивается, причем каждая последующая вспышка в течение того же полупериода обладает меньшей яркостью, чем предыдущая (рис. 1, б). При дальнейшем повышении напряжения каждый последующий импульс тока начинается раньше, чем прекращается предыдущий (рис. 1, в и г). Таким образом слабое свечение газа поддерживается в течение большей части каждого полупериода и модулировано частотой повторения вспышек. При увеличении частоты напряжения, подаваемого на внешние электроды при постоянной амплитуде последнего, картина на экране осциллографа изменяется так же, как и при увеличении амплитуды напряжения при неизменной частоте.

² Исследованию продолжительности существования плазмы в течение каждого полупериода при этом виде разряда в зависимости от частоты и других условий будет посвящена отдельная статья.

К статье Н. А. Капцова и Н. А. Попова «Зажигание электрического разряда в газах на переменном токе звуковой частоты в трубках с внешними и внутренними электродами»

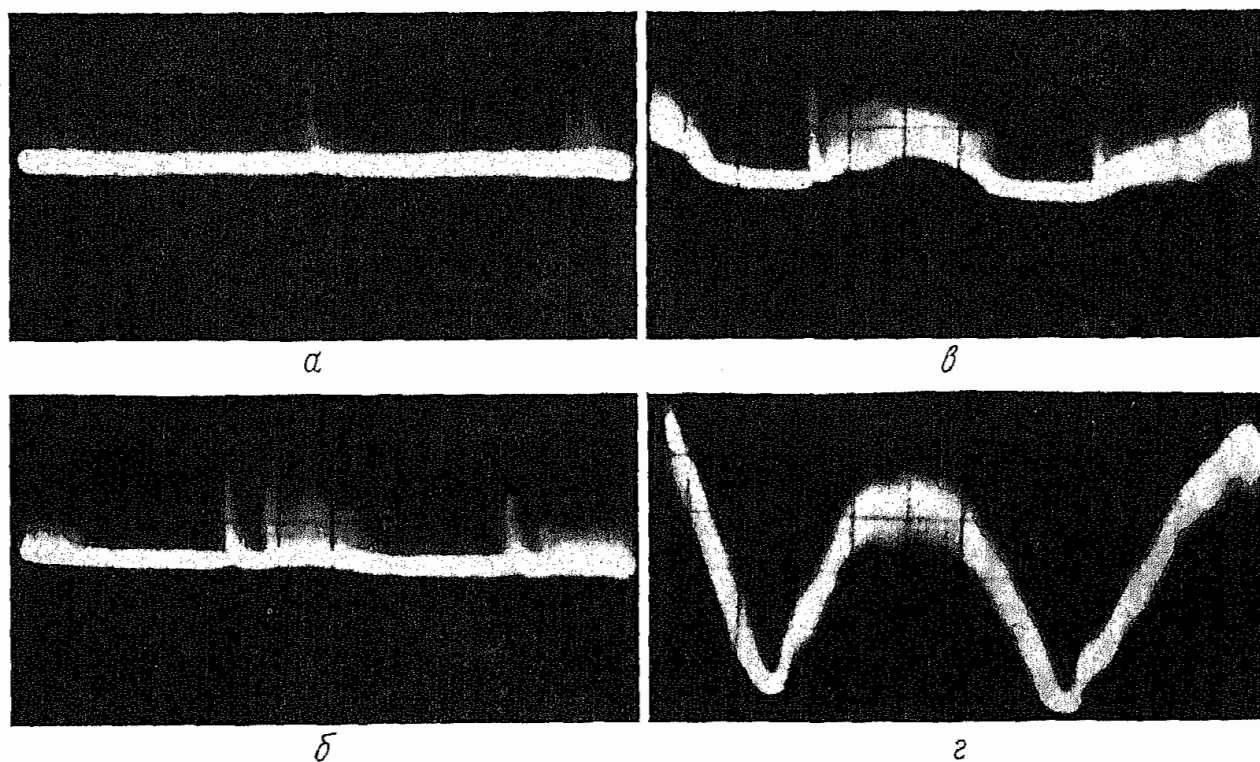


Рис. 1. Осциллограммы фототока при нестабильном разряде в трубке с внешними кольцеобразными электродами. Газ, наполняющий трубку, водород при давлении 2 мм рт. ст. Расстояние между электродами 5 см; частота тока 50 гц. a — 300 V; δ — 500 V; β — 1000 V; z — 5000 V

В полном соответствии с осциллограммами фототока визуальное наблюдение нестабильного разряда показывает, что импульсам фототока на экране осциллографа соответствует свечение трубки, представляющее собой слабые вспышки трубки по всей ее длине в виде узкого светящегося канала, занимающего малую часть сечения трубки. С увеличением амплитуды или частоты приложенного напряжения ширина светящегося канала увеличивается, свечение трубки становится ярче и устойчивее и, наконец, заполняет при каждой вспышке все сечение трубки. Это явление наблюдалось во всех исследованных нами газах: воздухе, водороде, неоне и криптоне.

Таким образом можно считать экспериментально установленным, что для каждой данной разрядной трубки с внешними электродами и данным газовым наполнением при определенной амплитуде приложенного к ней синусоидального напряжения происходит зажигание разряда в виде повторяющихся кратковременных вспышек. Эту амплитуду мы будем называть в дальнейшем напряжением нестабильного зажигания в трубке с внешними электродами.

Проведенные нами опыты показали, что в отношении нестабильного зажигания имеют место следующие закономерности.

1) Нестабильное зажигание разрядных трубок с внешними электродами происходит при любых низких частотах вплоть до самых низких звуковых частот.

2) Напряжение нестабильного зажигания трубки с плоскими внешними электродами в пределах точности эксперимента почти не отличается при прочих равных условиях от напряжения зажигания трубки с внутренними электродами и в исследованном диапазоне частот (от 30 до 10 000 гц) не зависит от частоты.

3) Напряжение нестабильного зажигания для трубок с внешними кольцеобразными электродами меньше при прочих равных условиях, чем напряжение нестабильного зажигания для трубок с внешними плоскими электродами.

4) Продолжительность вспышек при нестабильном горении разрядной трубки с внешними электродами на низкой частоте имеет порядок величины 10^{-4} сек.

5) Представленные на рис. 2 вольтамперные характеристики трубок с внутренними (сплошные кривые) и трубок с внешними (пунктирные кривые) электродами показали, что при напряжениях, несколько более низких, чем напряжение зажигания трубок с внутренними электродами, т. е. в области несамостоятельного разряда, вольтамперные характеристики трубок с внутренними и трубок с внешними электродами не отличаются друг от друга. При приближении к напряжению зажигания разряда на внутренних электродах и почти равном ему в пределах точности измерений напряжении нестабильного зажигания трубок с внешними электродами разрядный ток при внутренних электродах начинает резко возрастать, а при внешних как бы стремится к насыщению.

При снятии вольтамперных характеристик (рис. 2) нами исключался из рассмотрения емкостной ток между электродами, который измерялся для различных частот и напряжений отдельно при отсутствии разряда и затем графически вычитался из общего тока (емкостного и разрядного).

То обстоятельство, что яркость свечения разрядного канала в трубке при каждой вспышке нестабильного разряда того же порядка, что и яркость свечения трубки с внутренними электродами, а также совпадение напряжения нестабильного зажигания с напряжением зажигания самостоятельного разряда на переменном токе в трубках с внутренними электродами, показывает, что в нестабильном разряде при внешних электродах мы имеем дело с кратковременными импульсами самостоятельного разряда, которые вызываются прохождением вдоль трубки одиночных первичных лавин, так как вторичные лавины не могут возникнуть из-за

отсутствия катода внутри трубки. Кинетическая энергия заряженных частиц в лавинах при этом является достаточной для того, чтобы вызвать свечение газа. Лавины электронов под действием внешнего поля движутся к аноду, положительные ионы — к катоду. Движение лавин прекращается при достижении ими стенок разрядной трубки в том месте, где с наружной стороны приложены внешние электроды. Движение каждой отдельной лавины или группы лавин наблюдалось нами как вспышка раз-

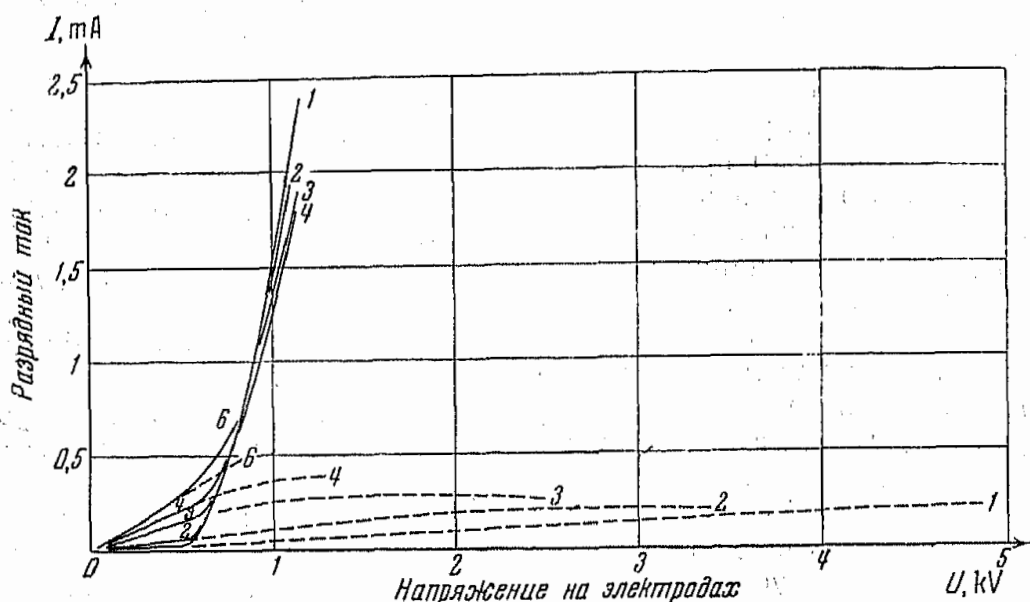


Рис. 2. Вольтамперные характеристики двух одинаковых разрядных трубок с плоскими электродами. В одной трубке электроды внутренние (сплошные кривые), в другой — внешние (пунктирные кривые). Газ, наполняющий трубки, — криптон, при давлении 1 мм рт. ст.; расстояние между электродами 30 см. Цифры около кривых означают частоту разрядного тока в килогерцах

рядной трубки и фиксировалось на экране осциллографа при помощи фотоумножителя в виде импульсов фототока. В течение одного полупериода напряжения лавины продолжают свое движение к электродам до тех пор, пока поверхностный заряд на стекле перед электродами, полученный стеклом от лавин, полностью не экранирует поле электродов.

В следующий полупериод напряжения электроды приобретают противоположные знаки, внутренние поверхности стекла против электродов перезаряжаются, и лавинный разряд возникает вновь. Разрядный ток внутри трубки замыкается емкостным током в стекле и током проводимости во внешней цепи.

б) Стабильный разряд

Если на частоте 1—2 кГц начать увеличивать напряжение на внешних электродах трубки, наполненной газом до давления в несколько миллиметров ртутного столба и находящейся в режиме нестабильного разряда, то (при определенном для каждого данного случая значении амплитуды напряжения на внешних электродах трубки) отдельные беспорядочные пики фототока на экране осциллографа пропадают, и разряд переходит из нестабильного в стабильный. Это значение амплитуды переменного напряжения мы будем называть напряжением стабильного зажигания. Напряжение стабильного зажигания и напряжение стабильного горения тем выше, чем меньше частота, и при прочих равных условиях выше, чем напряжение зажигания и напряжение горения разряда в трубке с внутренними электродами.

На рис. 3 приведены кривые зависимости от частоты напряжения стабильного зажигания для внутренних и внешних плоских электродов и кривые зависимости от частоты напряжения нестабильного зажигания для таких же трубок с внешними электродами. Расстояние между электродами в этих опытах было 30 см, газ — криптон, при давлении 2,7 и 1 мм рт. ст. Аналогичные кривые зависимости напряжения стабильного зажигания от частоты получены и для других исследованных нами газов.

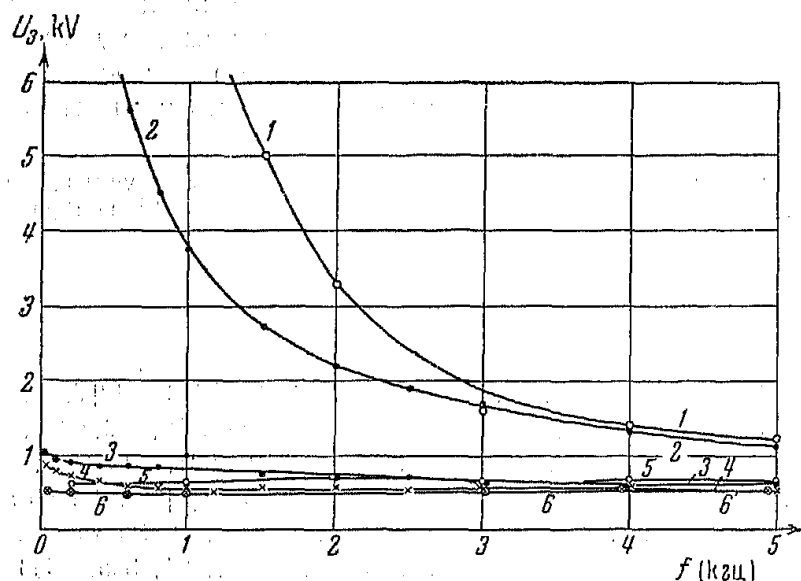


Рис. 3. Зависимость напряжения стабильного (кривые 1, 2, 4, 6) и нестабильного (кривые 3, 5) зажигания от частоты для разрядных трубок с внутренними (кривые 4, 6) и внешними (кривые 1, 2, 3, 5) электродами. Газ, наполняющий трубки, — криптон, при давлении 1 мм рт. ст. (кривые 1, 5, 6) и 2,7 мм. рт. ст. (кривые 2, 3, 4); расстояние между электродами 30 см

При частотах, меньших 1 кГц, примененная нами аппаратура не позволила нам получить стабильное зажигание разряда при внешних электродах, так как в этой области частот напряжение стабильного зажигания быстро возрастает с уменьшением частоты. При частотах от 3 до 10 кГц имеет место более слабая зависимость напряжения стабильного зажигания от частоты. В этом интервале частот напряжение стабильного зажигания с увеличением частоты уменьшается и постепенно приближается к напряжению нестабильного зажигания трубок с внешними электродами, а следовательно, и к напряжению зажигания разряда переменного тока в трубках с внутренними электродами.

Анализ осциллограмм фототока, полученного при горении разрядных трубок с внешними электродами при амплитуде переменного напряжения на них, равного или более высокого, чем напряжение стабильного зажигания, показал, что в этом случае в разрядной трубке имеет место самостоятельный разряд с постоянно существующей плазмой в центральной части трубки. По своему характеру такой разряд занимает промежуточное место между разрядом на переменном токе низкой звуковой частоты и высокочастотным. Подробное исследование этой переходной формы разряда будет нами дано в отдельной статье.

Выводы

1. Зажигание и горение разряда на переменном токе в трубках с разреженным газом как с внутренними, так и с внешними электродами имеет место не только при высокой частоте, но наблюдается в своеобразной форме нестабильного зажигания и на переменном токе любой низкой частоты.

2. При увеличении амплитуды напряжения низкой частоты на внешних электродах, начиная от нуля, при напряжении, соответствующем напряжению зажигания разряда в трубке с внутренними электродами, происходит зажигание нестабильной формы разряда, представляющей собой ряд чередующихся кратковременных импульсов. При дальнейшем увеличении напряжения имеет место зажигание стабильной формы разряда.

3. Напряжение нестабильного зажигания в диапазоне частот от 30 до 10 000 гц не зависит от частоты. Напряжение зажигания стабильного разряда в трубках с внешними электродами в том же диапазоне частот уменьшается с увеличением частоты и постепенно приближается к напряжению зажигания разряда в трубках с внутренними электродами.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
28 ноября 1953 г.

Литература

- [1] E. Hiedemann. Ann. d. Phys., 85, 649, 1928.—[2] J. J. Thomson, Phil. Mag., 23, 1, 1937.—[3] L. Rohde. Ann. d. Phys., 12, 569, 1932.—[4] W. Gill a. R. Donaldson. Phil. Mag., 2, 129, 1926; 12, 719, 1931.—[5] S. R. Khastgira. C. M. Srivastava. Indian Journ. Phys., 27, 109, 1953.—[6] N. Subrahmanyam a. N. A. Ramaiah. ZS. f. Phys., 135, 274, 1953.—[7] A. P. Saxena, M. G. Bhatwdekar a. N. A. Ramaiah. Journ. Chem. Phys., 21, 365, 1953.

ИССЛЕДОВАНИЕ РАБОТЫ ДИФфуЗИОННО-КОНДЕНСАЦИОННОЙ КАМЕРЫ

В. К. Ляпидевский и Ю. А. Щербаков

Приводятся результаты исследования работы прямоугольной диффузионно-конденсационной камеры, наполненной воздухом и парами спирта при общем давлении 1 атм. Изучено вертикальное распределение температуры в объеме камеры и показано, что теплообмен с боковыми стенками камеры является определяющим фактором. В то же время показано, что камера работает стабильно при различных температурных режимах. Приводятся фотографии следов ионизирующих частиц.

В диффузионно-конденсационной камере [1] пересыщение, необходимое для конденсации и роста капель на ионах, возникает в процессе диффузии пара через газ от нагреваемой поверхности к охлаждаемой. Вблизи охлаждаемой поверхности образуется область пересыщенного пара высотой в несколько сантиметров с пересыщением $S(x)$, которое удовлетворяет условию $S_1 < S(x) < S_2$, где S_1 — пересыщение, при котором капли, образовавшиеся на ионах, растут до видимых размеров, а S_2 — пересыщение, при котором образуется сплошной туман. Если через область, где $S_1 < S(x) < S_2$, пройдет ионизирующая частица, то она может быть зарегистрирована. Капли на ионах растут до видимых размеров, образуют след и затем падают на дно камеры.

В отличие от камеры Вильсона с расширением, диффузионно-конденсационная камера может работать непрерывно, если число центров конденсации, образующихся в единице ее рабочего объема в одну секунду (ионная нагрузка), не превышает определенной критической величины. Вследствие непрерывности действия диффузионно-конденсационная камера позволяет зарегистрировать все акты ионизации, возникающие в ее объеме, если частота их появления не превышает разрешающей способности регистрирующего устройства. Если же ионная нагрузка превышает критическую величину, непрерывная регистрация ионизирующих частиц в диффузионной камере становится невозможной. В этом случае камеру можно использовать при работе с пульсирующими источниками излучения (например, с пульсирующими ускорителями [2]). Время нечувствительности диффузионной камеры значительно меньше, чем время нечувствительности обычной камеры Вильсона. Это преимущество диффузионной камеры особенно существенно при высоких давлениях газа в рабочем объеме камеры.

Одним из основных параметров, определяющих величину и качество чувствительного слоя, является пересыщение $S(x)$. В отличие от камеры Вильсона с расширением, в диффузионной камере давление пара и температура не постоянны по высоте; поэтому и пересыщение, возникающее в объеме камеры при диффузии пара от нагреваемой поверхности к охлаждаемой, различно в различных сечениях. Пересыщение в сечении x , $S(x) = p(x)/p_n(x)$, где $p(x)$ — давление пара в камере в сечении x , а $p_n(x)$ — давление насыщенного пара, соответствующее температуре в сечении x . Температурное распределение в значительной мере определяет пересыщение $S(x)$, а следовательно, и условия работы диффузионной

камеры. Поэтому исследование температурного распределения представляет практический интерес.

В настоящей статье приводятся результаты исследования работы диффузионно-конденсационной камеры.

Аппаратура

Схематически камера показана на рис. 1. Дно камеры 1 с размерами 200×300 мм² охлаждается твердой углекислотой. Стенки камеры 2 высотой 190 мм выполнены из стекла толщиной 2,5 мм. В крышке камеры 3 размещен электронагреватель. Камера наполнялась воздухом при атмосферном давлении. В качестве источника пара служила поверхность жидкости, наливаемой в желоб 4, закрепленный на крышке. Температура крышки и дна измерялась медно-константановыми термопарами. Температура жидкости в желобе измерялась при помощи термометра 5.

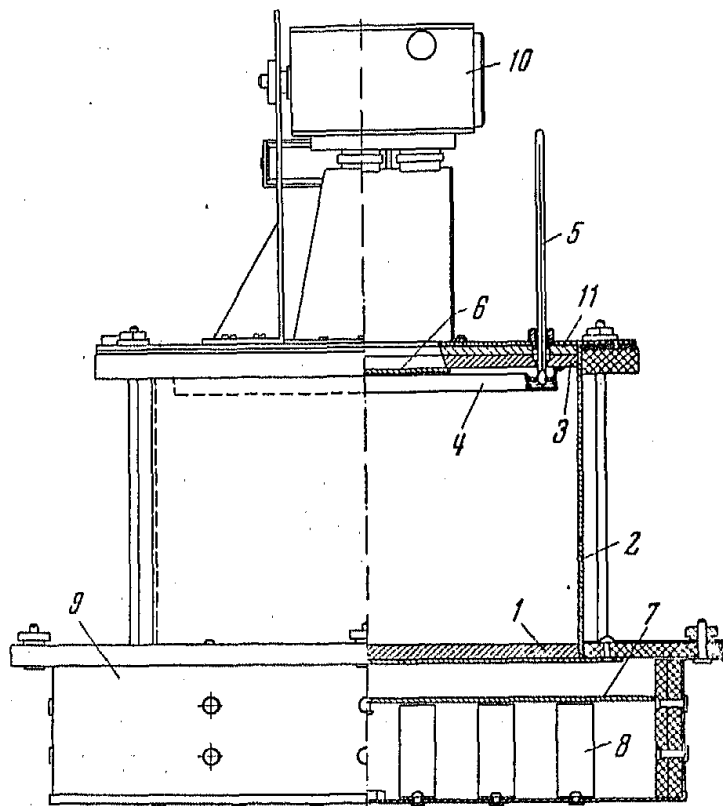


Рис. 1. Схема камеры. 1—дно камеры, 2—стенки, 3—крышка, 4—желоб, 5—термометр, 6—окно, 7—подвижная пластинка, 8—пружины, 9—контейнер для сухого льда, 10—фотоаппарат, 11—электронагреватель

Для измерения температуры в объеме камеры использовались медно-константановые термопары и спиртовые термометры. Термопара крепилась во втулке на верхней крышке и при измерении температуры в различных сечениях камеры передвигалась в вертикальном направлении. С целью уменьшения подвода тепла из лежащих выше сечений конец термопары имел горизонтальный участок. Необходимая длина горизонтального участка определялась экспериментально. Термометр подвешивался в объеме камеры горизонтально на двух нитях, проходивших через отверстия в крышке камеры. Показания термопары сравнивались с показаниями термометра, находившегося на той же высоте, что и термопара. Термопара и термометр, помещаемые в объеме камеры так, что их оси лежали в одной и той же горизонтальной плоскости, показывали одну и ту же температуру. В ряде экспериментов, когда необходимо было установить, изменяется ли температурное распределение в объеме камеры при

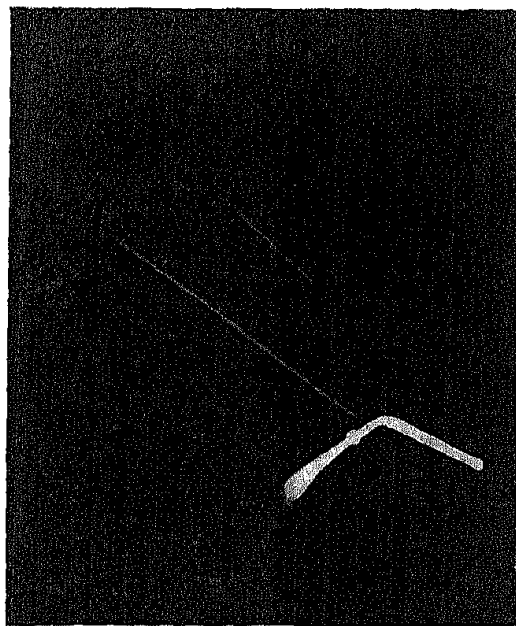
К статье В. К. Ляпидевского и Ю. А. Щербакова «Исследование работы диффузионно-конденсационной камеры»



Рис. 2. Фотография следов электронов в диффузионно-конденсационной камере при непрерывном освещении. Экспозиция $\frac{1}{2}$ сек.



a



b

Рис. 3. Фотографии следов сильно ионизующих частиц в диффузионно-конденсационной камере. *a* — непрерывное освещение, экспозиция $\frac{1}{2}$ сек., *b* — освещение импульсной лампой

изменении тех или иных факторов, температура измерялась при помощи стационарно закрепленных в объеме камеры термометров или термопар.

Наблюдения производились через боковые стенки, фотографирование — через окно *б* в верхней крышке размерами 100×85 мм². Дно камеры зачернялось. Для визуального наблюдения следов чувствительный слой камеры освещался лампой дневного света мощностью 15 W. Источником освещения при фотографировании служили кино-проекторные лампы мощностью 1000 W. Фотографирование производилось также и при освещении импульсной лампой, которая работала с конденсаторами емкостью $8 \mu\text{F}$ при напряжении 4 kV.

Фотографии следов ионизирующих частиц приведены на рис. 2 и 3.

Если камера загрязнена нейтральными центрами конденсации, то наличие большого числа капель, образующихся на них, может привести к падению пересыщения в чувствительном слое, а следовательно, и к уменьшению его высоты и ухудшению качества следов. Загрязнение камеры нейтральными центрами легко обнаружить благодаря большому фону капель, не уменьшающемуся при включении электрического поля. В отличие от камеры Вильсона с расширением, диффузионная камера, благодаря непрерывности действия, самоочищается от нейтральных центров конденсации. Эта особенность диффузионной камеры существенно облегчает ее эксплуатацию. Если в объеме камеры нет постоянно действующего источника нейтральных центров, то полное очищение газа камеры происходит за время порядка десятков минут. Так, например, камера, наполненная неочищенным атмосферным воздухом, начинает работать нормально уже через 10—15 мин.

Следы тяжелых частиц падают на дно, почти не деформируясь, треки электронов падают с большей скоростью (вследствие большого размера капель) и через 1—2 сек. после образования распадаются. Меньший размер капель, образующих след сильно ионизирующей частицы, можно объяснить местным уменьшением пересыщения благодаря большой концентрации ионов в районе следа.

Высота чувствительного слоя определялась при помощи параллельного светового луча шириной 30 мм и высотой 5 мм. Свет, проходя через чувствительный слой, рассеивается каплями, образовавшимися на ионах, обнаруживая след частицы. Перемещая луч в вертикальном направлении, можно было определять верхнюю границу чувствительного слоя с точностью до 2—3 мм.

Ионы, образовавшиеся выше чувствительного слоя, также являются центрами конденсации. Однако капли, образующиеся на них, не растут до видимых размеров до тех пор, пока не попадают в чувствительный слой. При большом фоне излучения число заряженных капель, диффундирующих из верхних областей камеры в чувствительный слой, становится значительным. Капельный фон уменьшает пересыщение и ухудшает условия фотографирования.

Число заряженных капель, попадающих в чувствительный слой, может быть уменьшено при помощи определенным образом заданного электрического поля, предотвращающего попадание ионов из нерабочего объема в чувствительный слой. Применявшееся нами электрическое поле, приложенное между крышкой и дном камеры, существенно уменьшало капельный фон.

После интенсивного облучения камера делается нечувствительной к ионизации. Время нечувствительности диффузионной камеры после импульса ионизации — порядка минуты и тем больше, чем больше высота камеры. Большое время нечувствительности, повидимому, объясняется малой скоростью диффузии заряженных капель из лежащих выше областей камеры в чувствительный слой. Применение электрического поля, увеличивая скорость собирания заряженных капель, существенно уменьшает время нечувствительности. Поле напряженностью 50 V/cm

уменьшает время нечувствительности в описанной камере после очень сильного импульса облучения до 4—5 сек. Влияния поля на качество следов, образованных релятивистской частицей, проходящей через чувствительный слой камеры, обнаружено не было.

Исследование температурного распределения в камере

Вертикальное распределение температуры в объеме камеры, наполненной воздухом и парами метилового спирта, показано на кривой I рис. 4. При среднем температурном градиенте, равном $3,9^\circ\text{C}/\text{см}$, градиент в чувствительном слое высотой 1,5 см составлял $26^\circ\text{C}/\text{см}$. Как видно из рассмотрения кривой II рис. 4, при повышении температуры верхней крышки температурный градиент вблизи дна практически не изменился, хотя средний градиент температуры увеличивается с $3,9^\circ\text{C}/\text{см}$ до $6,3^\circ\text{C}/\text{см}$.

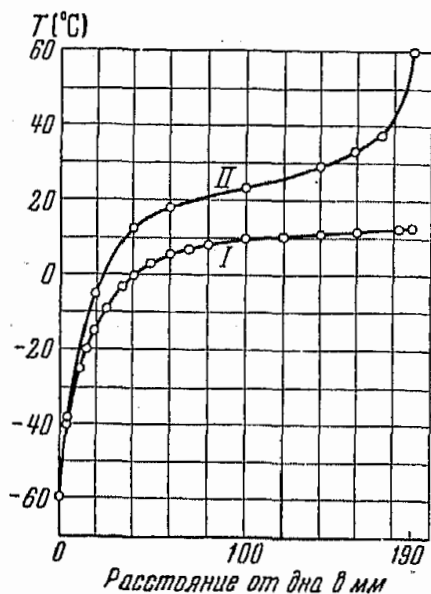


Рис. 4. Распределение температуры в камере. Кривые I и II получены в камере со стеклянными стенками без теплоизоляции. Температура воздуха $T = 15^\circ\text{C}$. Кривая II получена при подогреве крышки

Чувствительный слой при повышении температуры верхней крышки растет. Поскольку при этом температурный градиент в чувствительной области изменяется незначительно, увеличение высоты чувствительного слоя следует отнести за счет увеличения потока пара.

При замене метилового спирта на этиловый распределение температуры в объеме камеры, находящейся в определенном температурном режиме (температура крышки и дна, а также температура окружающего камеру воздуха одинакова в обоих случаях), остается без изменения.

На поверхности термометра (или термопары), находящегося в чувствительном слое, происходит конденсация пара.

С целью выяснения влияния конденсации на показания термометра температурное распределение в работающей камере (т. е. когда в чувствительном слое камеры имеет место конденсация на ионах и нейтральных центрах) сравнивалось с температурным распределением в той же камере, находящейся в том же температурном режиме, но без конденсации в ее объеме. Камера со стационарно закрепленными в ее объеме термометрами наполнялась атмосферным воздухом, причем испаряющаяся жидкость в желоб не заливалась. По истечении нескольких минут влага, содержащаяся в воздухе, конденсировалась и оседала на дно. Конденсация в камере прекращалась. Показания термометров, помещенных в объеме камеры, регистрировались после полного прекращения конденсации в камере. Затем в желоб наливался этиловый спирт.

Неоднократные наблюдения показали, что показания термометров в объеме камеры заметно не изменяются при переходе от нерабочих условий, когда конденсация в объеме камеры отсутствует, к рабочим условиям, когда конденсация в объеме камеры имеет место. Такие же измерения были проведены при помощи медно-константановых термопар.

Таким образом конденсация пара на термометре незначительно (для данной конструкции камеры и данного потока пара не более чем на 1°C) изменяет температуру термометра. Вместе с тем показано, что конденсация в чувствительном слое камеры не изменяет температурного распределения в ее объеме.

Температурное распределение в камере не изменяется при изменении числа центров конденсации в чувствительном слое от нескольких пар ионов в 1 см^3 (фон космического излучения) до нескольких тысяч пар ионов в 1 см^3 . Число центров конденсации изменялось при помощи источника γ -лучей.

При одинаковых средних градиентах температуры градиент в чувствительном слое может быть различен (кривые I и III рис. 5).

Камера, наполненная атмосферным воздухом и парами этилового спирта, работает стабильно при различных температурных распределениях (кривые III и I рис. 5), со средним градиентом в чувствительном слое от 4 до $30^\circ\text{C}/\text{см}$.

Обсуждение результатов измерений

Нелинейность вертикального распределения температуры в диффузионной камере, подобной описанной выше, была недавно экспериментально обнаружена также в работе [3]. Однако авторы этой работы не объясняют, чем вызвана резкая нелинейность вертикального температурного распределения от 4 до $30^\circ\text{C}/\text{см}$.

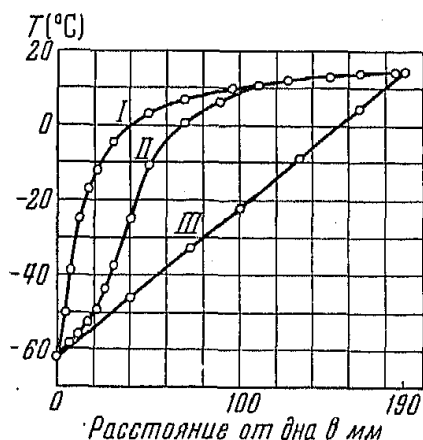


Рис. 5. Распределение температуры в камере. Кривая I получена в камере со стеклянными стенками, омываемыми комнатным воздухом, кривая II получена в той же камере при омывании ее стенок охлажденным воздухом ($T=15^\circ\text{C}$). Кривая III получена в камере с металлическими стенками, теплоизолированными мипорой

Температурное распределение в газе диффузионной камеры без учета влияния стенок определялось теоретически в работах [4-6]. В работе [4] вычислено вертикальное распределение путем решения уравнения переноса тепла от верхней крышки ко дну без учета конденсации в объеме камеры. Найденное температурное распределение в предположении, что коэффициенты теплопроводности и диффузии являются линейными функциями температуры, незначительно отличается от линейного. Отклонение от линейности тем больше, чем больше поток пара от нагреваемой поверхности, к охлаждаемой.

Влияние конденсации в объеме камеры на температурное распределение вычислялось в работе [5]. Температурное распределение в объеме камеры с учетом конденсации имеет нелинейный характер и сильно зависит от числа центров конденсации. Чем больше центров конденсации в чувствительном слое, тем больше нелинейность температурного распределения. Однако, как было показано выше, изменение в широких пределах условий конденсации (потока пара и числа центров конденсации) практически не изменяет температурного распределения в объеме камеры. Поэтому резкая нелинейность вертикального температурного распределения в диффузионной камере данной конструкции может быть объяснена только влиянием стенок. Если же температурное распределение в камере задается стенками, то 1) в камере данного типа в ряде случаев должна существовать конвекция, осуществляющая перенос тепла от стенок к газу или от газа к стенкам и 2) температурное распределение в объеме камеры можно регулировать, изменяя температурное распределение по ее стенкам.

В камере рассматриваемой конструкции нелинейность вертикального температурного распределения по стенкам может быть обусловлена теплообменом между стенками и окружающей средой. В этом случае распределение температуры по стенкам должно зависеть от температуры окружающего камеру воздуха.

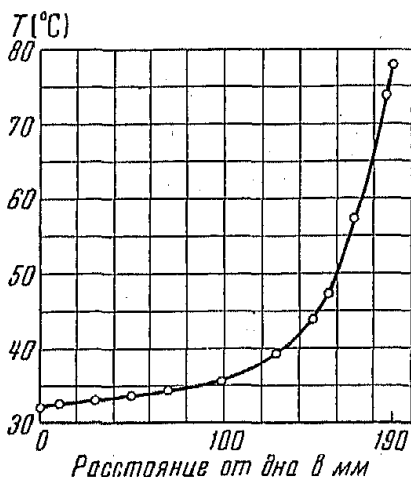
Если верхняя крышка камеры находится при комнатной температуре, то стенки камеры с охлаждаемым дном будут находиться при температуре ниже комнатной, и поток тепла будет направлен от воздуха комнаты к стенкам камеры. Если понизить температуру воздуха, окружающего камеру, то поток тепла к стенкам камеры уменьшится и кривая температурного распределения несколько спрямится. Такой же эффект должен наблюдаться при повышении температуры дна и крышки камеры. Если температуру дна и крышки повысить так, чтобы поток тепла изменил свое направление, то кривые температурного распределения должны изменить свою кривизну.

Влияние понижения температуры окружающего камеру воздуха показано на рис. 5. Кривая *I* получена в обычных условиях, когда стенки камеры омывались воздухом комнатной температуры. Кривая *II* показывает температурное распределение в камере, стенки которой омываются охлажденным при помощи твердой углекислоты воздухом. Как и следовало ожидать, кривая температурного распределения во втором случае благодаря уменьшению подвода тепла к стенкам камеры спрямляется.

При нагревании дна и крышки камеры выше комнатной температуры поток тепла к стенкам камеры меняет свое направление. Соответственно этому кривые температурного распределения изменяют свою кривизну. На рис. 6 дано температурное распределение в камере, имеющей температуру верхней крышки 78°C и дна 32°C . В этом случае поток тепла направлен от стенок камеры к воздуху комнаты.

В камере с охлаждаемым до низких температур (-50 , -60°C) дном при нагревании верхней крышки выше комнатной температуры кривые температурного распределения обнаруживают точку перегиба (см. кривую *II* рис. 4). В сечении, соответствующем точке перегиба, тепловой поток от камеры к воздуху комнаты меняет свое направление. Существенно отметить, что нагревание верхней крышки в камере рассматриваемой конструкции мало влияет на вертикальное распределение температуры в чувствительном слое (см. рис. 4, кривая *II*). Этот экспериментальный факт позволяет объяснить, почему средний температурный градиент в камере данного типа не является параметром, существенно влияющим на высоту чувствительного слоя. Увеличение температуры верхней крышки увеличивает поток пара. Вместе с тем вблизи верхней крышки существенно возрастает число нейтральных центров конденсации; поэтому при увеличении температуры верхней крышки растет высота чувствительного слоя и капельный фон. Тот экспериментальный факт, что увеличение температуры верхней крышки, существенно изменяя условия конденсации в объеме камеры, в то же время не изменяет температурного распределения в чувствительном слое, полностью может быть объяснен определяющим влиянием стенок на температурное распределение в объеме камеры.

Рис. 6. Температурное распределение в камере со стеклянными стенками без теплоизоляции ($T=15^{\circ}\text{C}$)



Точно так же может быть объяснено, почему температурное распределение не изменяется при изменении числа заряженных центров конденсации. Изменение условий конденсации, изменяя количество тепла, выде-

ляющегося в объеме камеры, изменяет температуру газа, но возникающая разность температур вызывает изменение скорости конвекции, которая выравнивает температуру в горизонтальной плоскости. В результате вертикальное температурное распределение, как это подтверждает опыт, практически не меняется.

Регулирование температурного распределения в объеме камеры путем задания температурного распределения по ее стенкам может иметь практическое значение только в том случае, если изменение условий теплообмена со стенками несущественно изменит характер движения газа в камере. Если скорость конвекции велика, след ионизирующей частицы может деформироваться за время, прошедшее от момента прохождения частиц до момента фотографирования.

Наши наблюдения показывают, что диффузионная камера работает стабильно при различных температурных распределениях — при резко нелинейном (кривая I рис. 5) и линейном (кривая III рис. 5), несмотря на то, что условия теплообмена со стенками изменяются при изменении температурного распределения. Этот экспериментальный факт имеет практическое значение, так как указывает на возможность регулирования условий работы камеры заданием требуемого температурного градиента по ее стенкам. Так, например, спрямление температурного распределения в камере путем уменьшения подвода тепла к ее стенкам позволяет увеличить высоту чувствительного слоя с 1,5 см (кривая I рис. 5) до 5 см (кривая II рис. 5). Таким образом, изменяя температурное распределение по стенкам камеры, можно изменять высоту чувствительного слоя, не нарушая стабильности работы камеры.

В заключение считаем своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность М. С. Козодаеву за постоянный интерес и внимание к работе.

Московский инженерно-физический
институт

Поступила в редакцию
5 августа 1953 г.

Литература

- [1] A. Langsdorf. Phys. Rev., 49, 422, 1936.— [2] R. P. Shutt, E. C. Fowler, D. H. Miller, A. M. Thorndike a. W. B. Fowler. Phys. Rev., 84, 1247, 1951.— [3] H. L. Morrison a. G. J. Plain. Rev. Sci. Instr., 23, 607, 1952.— [4] A. Langsdorf. Rev. Sci. Instr., 10, 91, 1939.— [5] C. Sueue G. Tagliaferri. Nuovo Cimento, 9, 1092, 1952.— [6] А. Г. Амелин. Теоретические основы образования тумана в химических производствах, ГТТИ, 1951.

ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

СТАТИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАСС НЕСТАБИЛЬНЫХ
НЕЙТРАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ И ИХ ПРОДУКТОВ РАСПАДА¹

Г. Е. Чиковани

При исследовании динамики двухчастичного распада нейтральных V^0 -частиц вводится в рассмотрение величина [1-4]

$$\bar{\alpha} = \alpha_0 = \left(\frac{P_+^2 - P_-^2}{P^2} \right) = \frac{m_+^2 - m_-^2}{M^2}, \quad (1)$$

где P и M — импульс и масса распадающейся частицы, m_+ и m_- — импульсы и массы продуктов распада. Значки $+$ и $-$ указывают на знак заряда этих частиц. В системе покоя распадающейся частицы из законов сохранения энергии и импульса и равенства (1) следует

$$m_+^2 = \frac{M^2}{4} (1 + \alpha_0)^2 - P^{*2}, \quad (2)$$

$$m_-^2 = \frac{M^2}{4} (1 - \alpha_0)^2 - P^{*2}, \quad (3)$$

где P^* — импульс продукта распада.

Ниже мы будем считать, что ось абсцисс лабораторной системы координат и системы покоя распадающейся частицы совпадает с линией ее полета. В системе покоя будем иметь

$$P^{*2} = \frac{3}{2} \overline{P_T'^2} = 3 \overline{P_{L+}'^2} = 3 \overline{P_{L-}'^2}, \quad (4)$$

где P_T' — поперечная составляющая импульса любого из продуктов распада, а P_{L+}' и P_{L-}' — продольные составляющие импульсов положительного и отрицательного продуктов, соответственно. Учитывая, что $P_T' = P_T$, где P_T — поперечная составляющая импульса в лабораторной системе координат, из (2) и (3) получаем

$$m_+^2 = \frac{M^2}{4} (1 + \alpha_0)^2 - \frac{3}{2} \overline{P_T'^2}, \quad (2')$$

$$m_-^2 = \frac{M^2}{4} (1 - \alpha_0)^2 - \frac{3}{2} \overline{P_T'^2}. \quad (3')$$

Применив преобразование Лоренца для продольных составляющих импульсов, в лабораторной системе координат будем иметь

$$P_{L+} = (P_{L+}' + \beta E_+) / \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (5)$$

$$P_{L-} = (P_{L-}' + \beta E_-) / \sqrt{1 - \beta^2}, \quad (6)$$

где E_+ и E_- — энергии продуктов распада в системе покоя, а β — скорость V^0 -частицы. Тогда

¹ О методе, использованном в этой работе, было доложено на совещании по космическим лучам 26 мая 1953 г.

$$\overline{P_{L+}^2} = \frac{1}{2} \overline{P_T^2} \left(1 + \frac{\overline{P^2}}{M^2} \right) + \frac{\overline{P^2}}{M^2} E_+'^2, \quad (5')$$

$$\overline{P_{L-}^2} = \frac{1}{2} \overline{P_T^2} \left(1 + \frac{\overline{P^2}}{M^2} \right) + \frac{\overline{P^2}}{M^2} E_-'^2, \quad (6')$$

так как $\overline{P_{L+}'} = \overline{P_{L-}'} = 0$.

Легко показать, что

$$E_+'^2 = \frac{M^2}{4} (1 + \alpha_0)^2; \quad (7)$$

$$E_-'^2 = \frac{M^2}{4} (1 - \alpha_0)^2. \quad (8)$$

Тогда

$$\overline{P_{L+}^2} = \frac{1}{2} \overline{P_T^2} \left(1 + \frac{\overline{P^2}}{M^2} \right) + \frac{\overline{P^2}}{4} (1 + \alpha_0)^2, \quad (9)$$

$$\overline{P_{L-}^2} = \frac{1}{2} \overline{P_T^2} \left(1 + \frac{\overline{P^2}}{M^2} \right) + \frac{\overline{P^2}}{4} (1 - \alpha_0)^2. \quad (10)$$

Из этих равенств имеем

$$\overline{P^2} = \frac{1}{\alpha_0} (\overline{P_{L+}^2} - \overline{P_{L-}^2}), \quad (11)$$

$$M^2 = \frac{1/2 \overline{P_T^2} (\overline{P_{L+}^2} - \overline{P_{L-}^2}) / \alpha_0}{\overline{P_{L+}^2} - 1/2 \overline{P_T^2} - (\overline{P_{L+}^2} - \overline{P_{L-}^2}) (1 - \alpha_0)^2 / \alpha_0}. \quad (12)$$

Из равенств (1), (2'), (3') и (12) можно определить массы распадающейся частицы и продуктов распада, используя непосредственно измеряемые величины — импульсы и их составляющие, — не задаваясь заранее схемой распада и не прибегая к оценкам ионизации, вносящим большие погрешности.

Полученный метод был применен для обработки данных, опубликованных в [4]. Из этой работы нами были отобраны 16 случаев распада частиц (по нумерации авторов № 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 19, 20, 21), поскольку, как указывают сами авторы [4], приводимые ими 22 случая не удовлетворяют условию изотропности из-за искусственности отбора.

Результаты обработки приведены в табл. 1. Из этих данных на основании соотношений (2'), (3') и (12) получаем

$$M = (1996 \pm 150) m_e; \quad m_+ = (1606 \pm 20) m_e; \quad m_- = (241 \pm 70) m_e.$$

Большие ошибки в определении масс обусловлены малым количеством статистических данных. Однако, если принять, что положительный продукт распада является протоном и использовать данные табл. 1 и соотношений (2') и (3'), оказывается возможным определить значения масс с большей точностью. Вычисления дают

$$M = (2196 \pm 3) m_e,$$

$$m_- = (280 \pm 28) m_e.$$

Полученное значение массы V_1^0 -частицы хорошо совпадает с опубликованной величиной [4] $(2195 \pm 6) m_e$. Значение массы $(280 \pm 28) m_e$, полученное для отрицательного продукта в предположении, что положительным продуктом является протон, указывает на то, что подавляющее большинство отрицательных частиц является π -мезонами.

Следует отметить, что ошибка, приводимая нами, $\pm 3 m_e$ для массы V_1^0 -частицы — средняя, а $\pm 6 m_e$, которая дана в [4], среднеквадратичная, поэтому пределы погрешности $\pm 6 m_e$ более достоверны, чем приводимые нами $\pm 3 m_e$.

Таблица 1

α_0	0,68
$\overline{P_T^2} \text{ (MeV)}^2$	7671,25
$\overline{P_{L+}^2} \text{ (MeV)}^2$	194584
$\overline{P_{L-}^2} \text{ (MeV)}^2$	11716

Литература

[1] R. Armenteros, K. Barker, C. Butler a. A. Cachon. Phil. Mag., 42, 1413, 1951.—[2] R. Leighton, S. Wanlassa. C. Anderson. Phys. Rev., 89, 148, 1953.—[3] C. Butler. Unstable Heavy Cosmic Rays Mesons, Progres in Cosmic Rays Physics, Амстердам, 1952.—[4] R. Armenteros, K. Barker, C. Butler. M. Coatesa. M. Sowerly. Phil. Mag., 44, 861, 1953.

РАДИАЦИОННАЯ ПОПРАВКА К ВРЕМЕНИ ЖИЗНИ π^0 -МЕЗОНА

А. Д. Галанин и В. Г. Соловьев

Время жизни π^0 -мезона было вычислено в работах [1,2]. Добавочный член L' к функции Лагранжа, соответствующий взаимодействию нейтрального псевдоскалярного мезона с электромагнитным полем, в первом приближении имеет следующий вид (членами порядка $(\mu/m)^2$ пренебрегаем, связь мезона с нуклонным полем псевдоскалярная)

$$L' = \frac{e^2 g}{16\pi^2 m} \varphi A_\mu(q_1) A_\nu(q_2) \text{Sp}(\gamma_5 \hat{q}_1 \hat{q}_2 \gamma_\mu \gamma_\nu), \quad (1)$$

где φ — волновая функция мезона, A_μ — 4-потенциал электромагнитного поля, $\hat{q} = q_\mu \gamma_\mu$; $\gamma_\mu = \beta \alpha_\mu$, при $\mu = 1, 2, 3$, $\gamma_4 = \beta$; $\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$; $\gamma_5^2 = -1$; $q_{1\mu}$, $q_{2\mu}$ — 4-импульсы квантов, μ — масса мезона, m — масса нуклона, $\hbar = c = 1$. График, соответствующий этому процессу, дан на рис. 1.

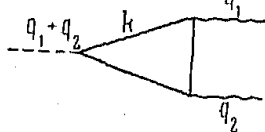


Рис. 1

Приведенный здесь результат может быть весьма просто получен методом «распутывания» операторов, предложенным в работе [3]. Добавочный член L' к функции Лагранжа можно записать следующим образом

$$\frac{g}{4\pi^2 i} \varphi \int d^4 k \text{Sp} [\gamma_5 (\hat{p} - \hat{k} - e \hat{A} - m)^{-1}], \quad (2)$$

где $\hat{p} = \gamma_\mu p_\mu$ — дифференциальный оператор, действующий на функцию координат A_μ . Записав

$$(\hat{p} - \hat{k} - e \hat{A} - m)^{-1} = [(p - k - e A)^2 - m^2 - \frac{e}{2} \gamma_\mu \gamma_\nu F_{\mu\nu}]^{-1} (\hat{p} - \hat{k} - e \hat{A} + m),$$

где $F_{\mu\nu}$ — тензор поля, $F_{\mu\nu} = (\partial A_\nu / \partial x_\mu) - (\partial A_\mu / \partial x_\nu)$, и введя экспоненциальный оператор согласно [3], получим

$$-\frac{g}{4\pi^2} \varphi \int_0^\infty dW \int d^4 k \text{Sp} \left\{ \gamma_5 \exp \left\{ iW \left[(p - k - e A)^2 - m^2 - \frac{e}{2} \gamma_\mu \gamma_\nu F_{\mu\nu} \right] \right\} \times \right. \\ \left. \times (\hat{p} - \hat{k} - e \hat{A} + m) \right\}.$$

Если мы производим вычисление до второй степени e , то мы должны разложить экспоненту в ряд, пользуясь методом [3], и ограничиться вторым членом. В результате получим (опущены члены, обращающиеся в нуль при вычислении следа)

$$\frac{ge^2}{32\pi^2} m \varphi \int_0^\infty W^2 dW \left[e^{-iWm^2} \text{Sp} (\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_{\mu'} \gamma_{\nu'}) \int d^4 k \int_0^1 ds \int_0^s ds' \exp \{ iW (p - k)^2 (1 - s) \} \times \right. \\ \left. \times F_{\mu\nu} \exp \{ iW (p - k)^2 (s - s') \} F_{\mu'\nu'} \exp \{ iW (p - k)^2 s' \} \right].$$

Положив $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^0 e^{iq_1 x}$, $F_{\mu'\nu'} = F_{\mu'\nu'}^0 e^{iq_2 x}$ и перенеся координатную часть через оператор дифференцирования, получим, принимая во внимание, что $q_1^2 = q_2^2 = 0$, $2q_1 q_2 = \mu^2$ и что $(i/2)^2 F_{\mu\nu} F_{\mu'\nu'} \text{Sp} (\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_{\mu'} \gamma_{\nu'}) = 8e^2$ (HE), следующий

результат

$$-\frac{2ge^2}{\pi^2} m \varphi(\text{HE}) \int_0^\infty W^2 dW e^{-iWm^2} \int d^4k \int_0^1 ds \int_0^s ds' \times \\ \times \exp \{iW[k^2 - 2k(q_1 + q_2)(1-s) - 2kq_2(s-s') + \mu^2(1-s)]\}.$$

Пользуясь формулой

$$\int d^4k e^{-ix \cdot k} = \frac{1}{4ix^2},$$

произведем интегрирование по d^4k

$$-\frac{e^2 g}{2\pi^2 i} \varphi m(\text{HE}) \int_0^\infty e^{-iWm^2} dW \int_0^1 ds \int_0^s ds' \exp \{iW\mu^2 s'(1-s)\},$$

а затем по W

$$\frac{ge^2}{2\pi^2} m \varphi(\text{HE}) \int_0^1 ds \int_0^s ds' \frac{1}{m^2 - \mu^2 s'(1-s)} = \\ = -\frac{ge^2}{2\pi^2} \frac{m}{\mu^2} \varphi(\text{HE}) \int_0^1 \frac{ds}{s} \ln \left[1 - \frac{\mu^2}{m^2} s(1-s) \right].$$

Разложив в ряд по μ^2/m^2 , имеем

$$L' = \frac{ge^2}{4m\pi^2} \varphi(\text{HE}) \left[1 + \frac{1}{12} \left(\frac{\mu}{m} \right)^2 + \dots \right]. \quad (3)$$

Первый член совпадает с (1), а поправка за счет конечной массы мезона весьма мала.

Применение этого метода к вычислению радиационных поправок наталкивается на некоторые трудности при исключении бесконечностей. Поэтому мы при-

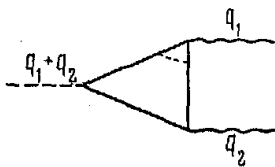


Рис. 2

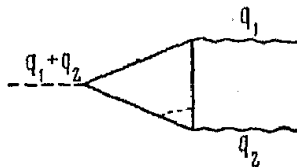
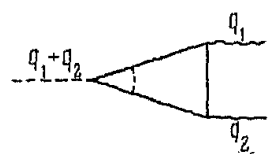


Рис. 3



меним для вычисления радиационных поправок обычный способ. Радиационным поправкам к распаду π^0 -мезона соответствуют графики, изображенные на рис. 2, 3, 4. При этом на графике рис. 2 виртуальные мезоны — нейтральные, а на остальных графиках как нейтральные, так и заряженные. Вычисления мы будем производить для симметричной теории.



Рис. 4

Фактор распространения $S'_F(\hat{p})$ вычислен в работе [4] (перенормировки здесь уже произведены, массой мезона пренебрегаем, g^2 не в хевисайдовских единицах)

$$-\frac{g^2 \hat{p}}{8\pi p^2} \left[1 - \frac{p^2 - m^2}{p^2} \ln \left(1 - \frac{p^2}{m^2} \right) \right]. \quad (4)$$

Для вершинной части $\Gamma_5(\hat{p}_1, \hat{p}_2)$ (рис. 3) там же получено следующее выражение (при $\mu = 0$)

$$\Gamma_5(\hat{p}_1, \hat{p}_2) = -\frac{g^2}{4\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[\frac{B-C}{A} - 2\gamma_5 \ln \frac{A}{m^2(x+y)^2} \right];$$

$$A = m^2(x+y)^2 - (1-x-y)[y(p_1^2 - m^2) + x(p_2^2 - m^2)];$$

$$B = (\hat{p}_2 - m)\gamma_5(\hat{p}_1 - m) - (y\hat{p}_1 + x\hat{p}_2)\gamma_5(\hat{p}_1 - m) -$$

$$- (\hat{p}_2 - m)\gamma_5(y\hat{p}_1 + x\hat{p}_2) - (x+y)[y(p_1^2 - m^2) + x(p_2^2 - m^2)]\gamma_5;$$

$$C = \gamma_5(1-x-y)[(p_1^2 - m^2)y + (p_2^2 - m^2)x],$$
(5)

а для $\Gamma_\mu(\hat{p}_1, \hat{p}_2)$ (рис. 2) вычисления приводят к следующему результату (также при $\mu = 0$)

$$\Gamma_\mu(\hat{p}_1, \hat{p}_2) = -\frac{g^2}{4\pi} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left[\frac{B_\mu - \gamma_\mu A}{A} - \gamma_\mu \ln \frac{A}{m^2(x+y)^2} \right];$$

$$A = (x+y)^2 m^2 - (1-x-y)[x(p_1^2 - m^2) + y(p_2^2 - m^2)];$$

$$B_\mu = (x\hat{p}_1 + y\hat{p}_2)\gamma_\mu(x\hat{p}_1 + y\hat{p}_2) + (\hat{p}_1 - m)\gamma_\mu(\hat{p}_2 - m) -$$

$$- (\hat{p}_1 - m)\gamma_\mu(x\hat{p}_1 + y\hat{p}_2) - (x\hat{p}_1 + y\hat{p}_2)\gamma_\mu(\hat{p}_2 - m).$$
(6)

Дальнейшие вычисления производятся обычным методом. В результате получается следующее выражение для L' с точностью до g^4

$$L' = \frac{g^2}{16\pi^2 m} \varphi A_\mu(q_1) A_\nu(q_2) \text{Sp}(\gamma_5 \hat{q}_1 \hat{p}_2 \gamma_\mu \gamma_\nu) \left[1 + \frac{7}{8\pi} g^2 \right].$$
(7)

Время жизни π^0 -мезона по отношению к распаду на два кванта с точностью до g^4 равно

$$\tau^{-1} = \frac{1}{\pi^2} \frac{g^2}{\hbar c} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \left(\frac{\mu}{4m} \right)^2 \frac{\mu c^2}{\hbar} \left[1 + \frac{7}{4\pi} \frac{g^2}{\hbar c} \right].$$
(8)

Если на основании экспериментальных данных [5] положить $\tau = 5 \cdot 10^{-16}$ сек., то $g^2/\hbar c$ окажется равным $\sim 0,13$. Следует отметить отсутствие малого множителя, например, вида $(\mu/m)^2$ в радиационной поправке.

Академия наук СССР

Поступило в редакцию
22 февраля 1954 г.

Литература

- [1] J. Steinberger. Phys. Rev., 76, 1180, 1949. — [2] J. Schwinger. Phys. Rev., 82, 664, 1951. — [3] R. P. Feynman. Phys. Rev., 84, 108, 1951. — [4] А. Д. Галанин. ЖЭТФ, 26, 417, 1954. — [5] B. A. n a n d. Proc. Roy. Soc., A, 220, 183, 1953.

Примечание при корректуре. В работе Кролля и Рудермана (Phys. Rev., 93, 233, 1954), без применения теории возмущений, показано, что $g^2/\hbar c \approx 25$. Поскольку не существует теории, справедливой при столь больших g^2 , то, строго говоря, нельзя утверждать, что этот результат находится в противоречии со временем жизни π^0 -мезона. Однако такое большое расхождение в значениях g^2 кажется странным и наводит на мысль о том, что псевдоскалярная связь не соответствует действительности.

ДИСПЕРСИЯ МИКРОВОЛН В АММИАКЕ ПРИ ДАВЛЕНИИ 10^{-2} мм рт. ст.

Б. Д. Осипов

Исследования дисперсии микроволн в аммиаке [1] и парах воды [2] проводились при давлениях порядка нескольких сантиметров ртутного столба, когда отдельные линии не разрешаются из-за большой ширины. Измерения делались в объемном резонаторе по изменению его собственной частоты при наполнении газом [3,4], а также по изменению длины волны в волноводной поглощающей ячейке [1]. Ниже приводятся некоторые теоретические формулы, а также результаты наших измерений.

Волна, распространяющаяся в направлении оси x , может быть записана следующим образом:

$$E = E_0 \exp(-px - i\omega t).$$

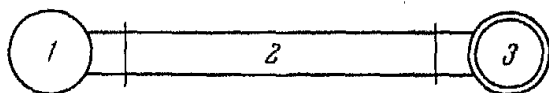


Рис. 1. 1 — генератор, 2 — поглощающая ячейка (волновод), 3 — детектор



Рис. 2. 1 — генератор, 2 — поглощающая ячейка (волновод), 3 — детектор, 4 — короткозамыкающий поршень

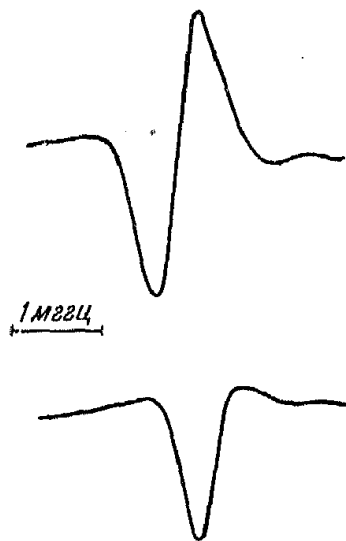


Рис. 3. Кривые дисперсии и поглощения для линии поглощения аммиака $J=6$, $K=5$ при давлении 10^{-2} мм рт. ст. Верхняя кривая — дисперсия, нижняя — поглощение

При наличии в волноводе поглощающего газа изменение постоянной распространения p из-за поглощения имеет вид:

$$\delta p = \alpha + i\beta,$$

где $\alpha = \alpha_0 / (1 + x^2)$ — поглощение, $\beta = \alpha_0 x / (1 + x^2)$ — дисперсия, ν_0 — резонансная частота линии поглощения, $\Delta\nu$ — полуширина линии поглощения, α_0 — максимальный коэффициент поглощения, а $x = (\nu - \nu_0) / \Delta\nu$.

В обычной схеме радиоспектроскопа (рис. 1) наблюдается поглощение α . Для наблюдения как α , так и β нами была использована схема, изображенная на рис. 2. В этом случае изменение мощности в приемном кристалле (детекторе) пропорционально величине

$$[\cos 2kl - \exp(-2\alpha_c l)] \frac{\alpha_0 l}{1 + x^2} + \sin 2kl \frac{\alpha_0 l x}{1 + x^2}. \quad (1)$$

Здесь $p = \alpha_c + ik$ — постоянная распространения в пустом волноводе, l — эффективная длина волновода. Из формулы (1) видно, что, меняя l , можно наблюдать либо поглощение, либо дисперсию. На рис. 3 приведены фотографии кривых дисперсии и поглощения для линии поглощения инверсионного спектра аммиака ($\nu_0 = 22732,5$ мГц; $J=6$, $K=5$), наблюдавшихся при давлении $\sim 10^{-2}$ мм рт. ст. Следует отметить, что при использовании обычного спектроскопа в изменение мощности на детекторе также входит член $x \frac{\alpha_0 l x}{1 + x^2} \sin 2kl$, где x — величина, меньшая единицы и обращающаяся в нуль при наличии только бегущей волны в поглощающей ячейке. Это обстоятельство необходимо учитывать при точном измерении резонансной частоты и при детальном исследовании формы линий поглощения.

Физический институт им П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
12 февраля 1954 г.

Литература

- [1] W. D. Hersberger. Journ. Appl. Phys., 17, 495, 1946.—[2] G. Birnbaum. Journ. Appl. Phys., 23, 220, 1952.—[3] G. Birnbaum. Journ. Appl. Phys., 22, 95, 1951.—[4] G. Birnbaum. Phys. Rev., 77, 144, 1950.

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О РЕЛЯТИВИСТСКИХ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЯХ СО СПЕКТРОМ МАСС

В. Л. Гинзбург и В. П. Силин

Исследование возможных релятивистских волновых уравнений для частиц, могущих находиться в состояниях с различными значениями массы, спина и заряда, проводится уже более 10 лет (см. [1-7]). Подобные уравнения представляют интерес в связи 1) с попытками рассматривать хотя бы часть известных частиц в качестве различных состояний некоторой «обобщенной частицы», масса и другие характеристики которой квантуются; 2) с релятивистской трактовкой возбужденных (изобарных) состояний нуклонов [1, 7, 8] и 3) со стремлением ввести в теорию новые переменные, необходимые для построения нелокальной теории поля [5].

Несмотря на то что развитие теории идет сейчас в основном по другому пути (по пути анализа взаимодействия между известными полями), отказываться от исследования новых релятивистских уравнений также нет оснований, и этому вопросу в 1953 г. были посвящены, в частности, работы [5, 6, 9]. Сделать несколько замечаний, касающихся этих работ, и является нашей целью.

1. В [2, 3] при исследовании релятивистских уравнений отбрасывались те из них, которые допускают в системе покоя решения $\Psi \sim \exp \{\pm \kappa t\}$, отвечающие мнимым массам (точнее, мнимым частотам) $m \equiv E_0 = \pm i\kappa$ (здесь и ниже $\hbar = c = 1$). Подобные решения, соответствующие состояниям с равным нулю зарядом (так как функция Ψ — вещественна) и плотностью энергии поля¹ $W = -T_{44} \sim \exp \{\pm 2\kappa t\}$, конечно, недопустимы и должны быть отброшены. Однако отсюда еще не следует, что дефектны исходные уравнения и, видимо, поэтому в [5] отброшены указанные решения, но сохранены сами уравнения. Такая возможность заслуживает внимания, так как при этом, в частности, уже несправедлив важный вывод [2, 3] о том, что бесконечномерные уравнения приводят к спектру с массами $m \rightarrow 0$. В то же время уравнения с мнимыми массами допускают обычную лагранжеву формулировку и находятся в пределах общей схемы [8], базирующейся на уравнениях типа

$$L_h \frac{\partial \Psi}{\partial x_h} + i\kappa \Psi = 0. \quad (1)$$

Между тем попытки выйти за пределы уравнений типа (1) (см. системы (30), (31) в [2] и работу [4]) приводят к существенному усложнению теории, невозможности просто ввести взаимодействие и т. д.

Отметим, что уравнения типа (1) с мнимыми массами, по крайней мере, в целом ряде случаев все же заведомо дефектны. Для примера рассмотрим уравнение $(\square + \kappa^2) \Psi(x_i) = 0$, могущее, разумеется, быть представленным в виде системы (1). Решение $\Psi \sim \exp \{ipx - iEt\}$ имеет место при условии

$$E^2 = -\kappa^2 + p^2, \quad (2)$$

и в системе покоя масса (частота) является мнимой $E_0 = \pm i\kappa$. Это решение можно отбросить, потребовав ограниченность Ψ -функции в четырехмерном пространстве, а не только в трехмерном, как обычно. Еще более существенно то, что при $p^2 \neq 0$ все решения, получающиеся из решения с $p = 0$ в результате преобразования Лоренца, отвечают минимому импульсу, т. е. не ограничены уже и в трехмерном пространстве. Поэтому при помощи дополнительного требования приходится отбрасывать только одно решение с $p = 0$. Трудность связана с другим обстоятельством — с тем, что соотношение (2), очевидно, удовлетворяется и при вещественных E и p , если $p^2 \geq \kappa^2$ (т. е. когда вектор $p_i = (p, iE)$ — пространственноподобный). Эти решения отвечают сверхсветовой скорости ($v = \partial E / \partial p = p / \sqrt{p^2 - \kappa^2} \geq 1$), и в то же время отбросить их путем наложения требований об интегрируемости или конечности нельзя. Во внешнем поле также имеются аналогичные решения. Так, в постоянном магнитном поле H_z для рассмотренной скалярной частицы вместо (2) имеем

$$E^2 = -\kappa^2 + p_z^2 + (2n + 1) |e| H_z \quad (\text{здесь } n = 0, 1, 2, \dots).$$

¹ Заметим, что в [3] и некоторых других работах утверждается, что для решений $\Psi \sim \exp \{\pm \kappa t\}$ энергия $W = 0$. Этот вывод не верен и связан с тем, что некоторые выражения выписываются обычно в предположении о комплексности функции Ψ и не годятся при вещественном Ψ .

Уравнения, приводящие к таким дефектным решениям (скорость является сверхсветовой, имеется решение с $E=0$), в силу сказанного должны быть отброшены. При этом появление наряду с решениями с мнимой массой решений с пространственноподобным p_i , как мы убедились на ряде примеров, является не исключением, а правилом, причем это относится также и к бесконечномерным уравнениям, но не ко всем. Рассмотрим, например, уравнение (об уравнениях этого типа см. [2, 5, 10]):

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} - \kappa^2 - \frac{\lambda^2}{2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_i} + \frac{1}{\lambda^4} u_i u_i \right)^2 + \right. \\ \left. + \beta^2 \lambda^2 \left[-\left(\frac{\partial^2}{\partial u_i \partial x_i} \right)^2 + \frac{1}{\lambda^4} \left(u_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^2 \right] \right\} \Psi(x_i, u_i) = 0, \quad (3)$$

которое при $\kappa=0$ совпадает с приведенным в [5] [при $\kappa=0$ уравнение (3) имеет при $E=p=0$ решение $\Psi(x_i, u_i) = \varphi(u_i) \neq 0$, от которого желательно, если не необходимо, избавиться]. В системе покоя имеем (подробнее см. [5])

$$E_0^2 = \frac{\kappa^2 + (2/\lambda^2)(n_1 + n_2 + n_3 - n_0 + 1)^2}{1 - 2\beta^2(n_0 + 1/2)}, \quad (4)$$

$$n_1, n_2, n_3, n_0 = 0, 1, 2, \dots$$

Если же $E=0$ и, например, $p_2=p_3=0$, $p_1 \neq 0$:

$$p_1^2 = - \frac{\kappa^2 + (2/\lambda^2)(n_1 + n_2 + n_3 - n_0 + 1)^2}{1 + 2\beta^2(n_1 + 1/2)}, \quad (5)$$

и решения с $p_1^2 > 0$ отсутствуют, что не имело бы места, например, если бы третий член в (3) равнялся $-\frac{\lambda^2}{2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_i} + \frac{1}{\lambda^4} u_i u_i \right)$. Поэтому все недопустимые решения уравнения (3) [для них $2\beta^2(n_0 + 1/2) > 1$] могут быть отброшены в результате требования ограниченности Ψ (см. выше), к которому в обычных случаях приходится прибегать только при наличии внешнего поля. В отбрасываемых «состояниях» заряд равен нулю и Ψ -функция не нормируема. Поэтому вопрос о переходах в эти «состояния» в обычной его постановке не возникает (и, следовательно, отбрасывание решений с мнимыми массами не аналогично недопустимому отбрасыванию решений уравнения Дирака с отрицательными энергиями). Неполнота системы допустимых решений уравнений с мнимыми массами в u_i -пространстве также еще не свидетельствует о дефектности этих уравнений (обратное мнение, высказанное в [10], необоснованно; вместе с тем вопрос о характере представлений группы Лоренца, отвечающих решениям уравнений типа (3), недостаточно ясен, и в этом пункте не исключено наличие определенных затруднений). Решающим моментом для выяснения допустимости использования уравнений с мнимыми массами должно явиться их исследование при наличии внешнего поля. Однако такая задача не решена еще ни для одного нетривиального бесконечномерного уравнения, и поэтому в настоящее время, пока рассматриваются только свободные уравнения, случай уравнений с мнимыми массами (но при отсутствии пространственноподобных решений) может обсуждаться наравне с другими.

2. В работе [9] утверждается, что теория, базирующаяся на уравнениях типа (3), релятивистски не инвариантна, так как соответствующие собственные функции (см. [5], (2)) зависят от переменных u_i релятивистски неинвариантным образом. Это утверждение неверно, так как собственные функции должны зависеть только от инвариантов лишь при отсутствии вырождения, когда это и имеет место (см. [5], (10)). При наличии же вырождения теория остается ковариантной, несмотря на неинвариантный вид собственных функций (см., например, случай трехмерных вращений в задаче о нерелятивистском изотропном осцилляторе при использовании декартовых координат). Что касается решения предложенных в [9] новых уравнений, то оно проведено в [9] совершенно некорректным образом, и его результаты неверны. Дело в том, что из условий $r_4 M \Psi = 0$ и $(-\lambda^2 M^2 + \lambda^{-2} r_\mu^2) \Psi = 0$ (см. [9], (22'')) при $M \neq 0$ следует, что $\Psi \sim \delta(r_4) \delta(r^2 - \lambda^4 M^2)$, и никак нельзя положить $\partial \Psi / \partial r_4 = \partial \Psi / \partial r = 0$, как это сделано в [9], и, следовательно, нельзя найти функцию, одновременно удовлетворяющую уравнениям (22') и (22'') работы [9]. Эти уравнения в действительности являются несовместными. Заметим, наконец, что недопустимо отождествлять (как это делается в конце статьи [9]) вектор $\vec{\tau}$ в обычном пространстве с вектором изотопического спина. Вообще, в силу отсутствия связи между изотопическим пространством и пространством-временем x_i , введение в релятивистские волновые уравнения без взаимодействия изотопических переменных [9] по своему

характеру существенно отлично от введения новых четырехмерных переменных типа u_i , связанных с обычным спином².

Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
19 апреля 1954 г.

Литература

[1] В. Л. Гинзбург. ЖЭТФ, 13, 33, 1943.— [2] В. Л. Гинзбург и И. Е. Тамм. ЖЭТФ, 17, 227, 1947.— [3] И. М. Гельфанд и А. М. Яглом. ЖЭТФ, 18, 703, 1948.— [4] Ю. М. Широков. ЖЭТФ, 21, 748, 1951.— [5] H. Yukawa. Phys. Rev., 91, 415, 416, 1953.— [6] A. Pais. Physica, 19, 869, 1953.— [7] В. Я. Файнберг. ЖЭТФ, 25, 636, 644, 1953.— [8] И. Е. Тамм, Ю. А. Гольфанд и В. Я. Файнберг. ЖЭТФ, 26, 649, 1954.— [9] J. Rayski. Nuovo Cimento, 10, 1729, 1953.— [10] В. Л. Гинзбург. ЖЭТФ, 25, 757, 1953.— [11] М. А. Марков. ЖЭТФ, 21, 761, 1951.

О КОНДЕНСАЦИИ ИДЕАЛЬНОГО БОЗЕ-ГАЗА В ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ

Б. Т. Гейликман

Как известно, в точке эйнштейновской конденсации идеального бозе-газа наблюдается лишь скачок производной теплоемкости по температуре, а не самой теплоемкости [1] (фазовый переход третьего рода). Мы покажем, что конденсация идеального бозе-газа в поле тяжести сопровождается скачком теплоемкости и является, следовательно, переходом второго, а не третьего рода [2].

Допустим, что газ заключен в ящик высотой L . На границах ящика будем требовать обращения ψ -функции в нуль. Если искать решение уравнения Шредингера в виде произведения множителей, зависящих соответственно только от x , y и z , то для множителя, зависящего от z , получаем уравнение:

$$(d^2\psi/dz^2) - \zeta\psi = 0. \quad (1)$$

Здесь

$$\zeta = \frac{z}{l} - \lambda; \quad l = \frac{\hbar^2 l_0}{(2m^2 g)^{1/2}}; \quad \lambda = \left(\frac{2}{m\hbar^2 g^2} \right)^{1/2} E'; \quad E' = E - \frac{\hbar^2}{2m} (k_x^2 + k_y^2).$$

Общее решение уравнения (1) имеет вид [3]

$$\psi = V\zeta \left[J_{1/2} \left(\frac{2}{3} i\zeta^{3/2} \right) + a J_{-1/2} \left(\frac{2}{3} i\zeta^{3/2} \right) \right].$$

Могут встретиться два случая: а) $z_0 = E'/mg < L$ и $L - z_0 \gg l$; б) $z_0 \gg L$. Легко видеть, что случай а) сводится к задаче с граничными условиями $(\psi)_{z=0} = (\psi)_{z=\infty} = 0$, которая была решена ранее [4]. В этом случае, очевидно, решение имеет вид:

$$\psi = V\zeta H_{1/2}^{(1)}(2/3 i\zeta^{3/2}); \quad (\psi)_{z=\infty} = 0.$$

Из условия $(\psi)_{z=0} = 0$ находим уровни энергии:

$$E'_n = \epsilon_0 \pi^{-2/3} \alpha_n^{2/3},$$

где $\epsilon_0 = (9m\hbar^2 g^2 \pi^2 / 8)^{1/2}$ и α_n — корни уравнения:

$$J_{1/2}(\alpha) + J_{-1/2}(\alpha) = 0,$$

при $n \gg 1$, $\alpha_n \approx \pi(n + 3/4)$; $n = 0, 1, 2, \dots$

Рассмотрим случай б). Если $(z_0 - L)/l \gg 1$, можно при любом z воспользоваться асимптотическим разложением $J_{\mp 1/2}(x)$:

² Наличие у частиц помимо электрического также и других «зарядов» (мезонного, электронно-нейтринного и т. п.; см. [11]), могущих в принципе принимать различные значения, приводит к необходимости введения новых изотопических переменных и к возможности рассматривать, например, нуклонные изобары, отличающиеся мезонным «зарядом». Поэтому, если встать на путь введения изотопических переменных в свободные уравнения, то открываются возможности значительно более широкие, чем использованные в [6].

$$\psi(\zeta) \approx \frac{1}{\lambda^{3/4} \zeta^{1/4}} \left[\cos \left(\frac{2}{3} \left(\frac{z_0 - z}{l} \right)^{3/2} - \frac{5\pi}{12} \right) \cos \left(\frac{2}{3} \left(\frac{z_0}{l} \right)^{3/2} - \frac{\pi}{12} \right) - \right. \\ \left. - \cos \left(\frac{2}{3} \left(\frac{z_0 - z}{l} \right)^{3/2} - \frac{\pi}{12} \right) \cos \left(\frac{2}{3} \left(\frac{z_0}{l} \right)^{3/2} - \frac{5\pi}{12} \right) \right]$$

(здесь a выбрано так, чтобы $(\psi)_{z=0} = 0$).

Из условия $(\psi)_{z=L} = 0$ находим уровни энергии:

$$E'^{3/2} - (E' - mgL)^{3/2} = 3/2 n \pi (mgL)^{3/2}; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

при $L \ll z_0$, $E' \approx (\hbar^2 / 2m) (n\pi / L)^2$.

Конденсация бозе-газа, как известно, определяется условием [1,5]:

$$\mu = \mu_{кр} = E_{мин},$$

μ — химический потенциал. Действительно, дальнейшее увеличение μ , отрицательного выше температуры конденсации, при понижении температуры, очевидно, невозможно, так как при $\mu > E_{мин}$ функция распределения стала бы отрицательной.

В нашем случае $E_{мин} = \epsilon_0 \alpha_1^{2/3} \approx 0$.

Из выражения для энергии системы:

$$U = \sum_s E_s [\exp \{(E_s - \mu) / \Theta\} - 1]^{-1}$$

(причем μ и $\partial \mu / \partial \Theta$ определяются условием $\sum_s [\exp \{(E_s - \mu) / \Theta\} - 1]^{-1} = N$) легко найти теплоемкость и разность теплоемкостей в точке конденсации:

$$\Delta C_V = (C_V)_{газ} - (C_V)_{конд} = \frac{\hbar}{\Theta} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \Theta} \right)_{\mu=\mu_{кр}=0} \sum_s E_s \exp \{(E_s - \mu_{кр}) / \Theta\} \times \\ \times [\exp \{(E_s - \mu_{кр}) / \Theta\} - 1]^{-2} = \frac{\hbar}{\Theta^2} S_2 \left(\mu_{кр} - \frac{S_2}{S_1} \right),$$

где

$$S_1 = \sum_s \exp \{(E_s - \mu_{кр}) / \Theta\} [\exp \{(E_s - \mu_{кр}) / \Theta\} - 1]^{-2} = V \sum_{l=1}^{\infty} d^{-3l} l^2 \exp \{l \mu_{кр} / \Theta\} b_l;$$

$$S_2 = \sum_s E_s \exp \{(E_s - \mu_{кр}) / \Theta\} [\exp \{(E_s - \mu_{кр}) / \Theta\} - 1]^{-2} =$$

$$= V \Theta^2 \sum_{l=1}^{\infty} l \exp \{l \mu_{кр} / \Theta\} \frac{\partial}{\partial \Theta} (b_l d^{-3l});$$

$$b_l = \frac{d^{3l}}{V} \sum_s \exp \{-l E_s / \Theta\},$$

$$d = \hbar / V \sqrt{2\pi m \Theta}.$$

Температура конденсации $\Theta_{кр}$ определяется из условия:

$$\sum_s [\exp \{(E_s - \mu_{кр}) / \Theta\} - 1]^{-1} = N.$$

В выражении для b_l главную роль играет, очевидно, область E от нуля до $\Theta / 2$. Поэтому, если $\Theta_{кр} \ll mgL$, то в b_l можно подставить $E'_n = \epsilon_0 (n + 3/4)^{2/3}$. Тогда, заменяя суммирование по n , k_x , k_y интегрированием, получаем при $\Theta_{кр} \ll mgL$

$$b_l \approx \frac{3}{4} V \pi \frac{d^{3l-2}}{l^{1/2} L} \left(\frac{\Theta}{\varepsilon_0} \right)^{1/2} \quad \text{и} \quad \Theta_K = \left(\frac{2}{3 \cdot 1,341} \frac{h^2 L \varepsilon_0^{1/2}}{v m \pi^{1/2}} \right)^{1/5}; \quad v = \frac{V}{N}.$$

При этом

$$S_1 = \frac{3}{4} V d^{-2} \frac{V \pi}{L} \left(\frac{\Theta}{\varepsilon_0} \right)^{1/2} \sum_{l=1}^{\infty} l^{-1/2} = \frac{3}{4} \frac{V}{L} d^{-2} V \pi \left(\frac{\Theta}{\varepsilon_0} \right)^{1/2} 2,612;$$

$$S_2 = \frac{15}{8} V \pi \frac{V}{L} d^{-2} \Theta \left(\frac{\Theta}{\varepsilon_0} \right)^{1/2} \cdot 1,341$$

и

$$\Delta C_V = - \frac{75}{16} V \pi k \frac{V}{L} d^{-2} \left(\frac{\Theta}{\varepsilon_0} \right)^{1/2} \frac{(1,341)^2}{2,612}.$$

Большее значение, разумеется, имеет случай, когда $\Theta_K \gg mgL$, т. е. $T_K \gg 5 \cdot 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{K}$ (при $L \approx 10^2 \text{ см}$, и $m = 6,7 \cdot 10^{-24} \text{ г}$). Тогда, если $l \ll \Theta / mgL$, в выражение для b_l можно подставить $E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2$; в этом случае (см. [5]) $b_l = d^3 (l-1) / l^{1/2}$; при $l \gg \Theta / mgL$, b_l совпадает с b_l при $\Theta \ll mgL$ (в промежуточном случае, $l \sim \Theta / mgL$, b_l трудно вычислить точно).

S_2 при $\Theta_K \gg mgL$ легко вычисляется:

$$S_2 \approx 3/2 \Theta_K V d^{-2} \cdot 2,612,$$

а S_1 , ввиду того что $mgL / \Theta \ll 1$, можно приближенно оценить следующим образом:

$$S_1 \approx \frac{V}{d^3} \sum_{l=1}^{l_{\text{макс}}} l^{-1/2} \approx \frac{V}{d^3} \int_0^{l_{\text{макс}}} x^{-1/2} dx = \frac{2V}{d^3} V l_{\text{макс}}, \quad (2)$$

где $l_{\text{макс}} \approx \Theta (mgL)^{-1}$.

Тогда

$$\Delta C_V \approx - \frac{9}{8} k N (2,612)^2 \frac{v}{d_K^3} \left(\frac{mgL}{\Theta_K} \right)^{1/2}.$$

Температура конденсации в этом случае определяется обычным уравнением $d_K^3 = 2,612 v$ (см. [1,5]). В конденсированной фазе, очевидно, $p(v) = \text{const}$ при $T = \text{const}$.

Такой же характер имеет конденсация заряженного бозе-газа, помещенного в однородное электрическое поле.

В отсутствие поля тяжести и электрического поля $b_l \approx 1 / l^{1/2}$ при любых l . Поэтому сумма S_1 расходится и ввиду этого скачок теплоемкости оказывается равным нулю. Сходимость S_1 в присутствии поля тяжести [см. (2)] объясняется изменением самого нижнего участка энергетического спектра и вызванным этим изменением другим законом убывания b_l при очень больших l ($l \gg \Theta / mgL$):

$$b_l \approx 1 / l^{1/2}.$$

Московский государственный
педагогический институт

Поступило в редакцию
2 апреля 1954 г.

Литература

- [1] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. Статистическая физика, ГТТИ, 1951, стр. 192.— [2] Б. Гейликман. Диссертация, МГПИ, Москва, 1951.— [3] Е. Янке, Ф. Эмде. Таблицы функций, ГТТИ, 1948.— [4] S. Flügge, H. Marschall. Rechenmethoden d. Quantentheorie, 1947, стр. 60.— [5] F. London. Phys. Rev., 54, 947, 1938.

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ТАНГЕНЦИАЛЬНЫХ РАЗРЫВОВ В СЖИМАЕМОЙ СРЕДЕ

С. И. Сыроватский

Задача об устойчивости тангенциального разрыва в сжимаемом газе по отношению к бесконечно малым возмущениям его поверхности рассматривалась Ландау [1,2]. Им было найдено, что при скачке скорости на разрыве, превышающем некоторое критическое значение (равное $2\sqrt{2}c$, если газ с обеих сторон разрыва одинаков; c — скорость звука), тангенциальный разрыв становится устойчивым по отношению к бесконечно малым возмущениям вида плоских поверхностных волн, нормаль к фронту которых совпадает с направлением относительной скорости обеих сред. Однако исследование возмущений только такого вида не исчерпывает задачи, так как произвольное возмущение поверхности разрыва представляет собой суперпозицию волн со всевозможными направлениями нормали в плоскости разрыва. Ниже исследуется устойчивость тангенциального разрыва в сжимаемой среде относительно произвольных бесконечно малых возмущений его поверхности.

Пусть плоскость $x=0$ есть поверхность тангенциального разрыва. Систему координат выберем так, чтобы в области $x<0$ среда покоилась, а в области $x>0$ двигалась с заданной скоростью v_0 вдоль оси y . Полагая

$$v = v_0 + v', \quad \rho = \rho_0 + \rho' \quad \text{и} \quad p = p_0 + p', \quad (1)$$

где v_0 , ρ_0 и p_0 — начальные стационарные значения скорости, плотности и давления, а v' , ρ' и p' — их малые возмущения, и, пренебрегая малыми второго порядка, из системы гидродинамических уравнений находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'}{\partial t} + (v_0 \nabla) v' &= - \frac{1}{\rho_0} \nabla p'; \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + v_0 \nabla \rho' + \rho_0 \operatorname{div} v' &= 0; \end{aligned} \quad (2)$$

$$p' = c^2 \rho'.$$

Здесь $c = \sqrt{(\partial p / \partial \rho)_s}$ есть адиабатическая скорость звука.

Так как произвольное возмущение поверхности разрыва может быть представлено в виде суперпозиции возмущений вида

$$\exp \{i(k_y y + k_z z)\} \quad (3)$$

с различными k_y и k_z , то в силу линейности системы (2) достаточно рассмотреть поведение возмущений, зависимость которых от y и z имеет вид (3). При этом из системы (2) следует

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + i k_y v_0 v' = - \frac{c^2}{\rho_0} \nabla \rho', \quad (4)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + i k_y v_0 \rho' = - \rho_0 \operatorname{div} v'. \quad (5)$$

Применяя к уравнению (4) операцию div и используя (5), находим

$$\nabla^2 \rho' - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + i k_y v_0 \right)^2 \rho' = 0, \quad (6)$$

где

$$\nabla^2 \equiv (\partial^2 / \partial x^2) - k^2, \quad k^2 = k_y^2 + k_z^2. \quad (7)$$

Решение (6) имеет вид:

$$\rho' \sim \exp \{\lambda x - i \omega t\}, \quad (8)$$

причем

$$\lambda^2 = k^2 - (\omega - k_y v_0)^2 / c^2. \quad (9)$$

Все выписанные соотношения справедливы как для области $x>0$, так и для области $x<0$, причем в последнем случае следует положить $v_0=0$. Величины, относящиеся к каждой из указанных областей, будем в дальнейшем обозначать со-

ответственно индексами 1 и 2, считая в общем случае, что газы в обеих областях различны, и, следовательно, различны скорости звука c_1 и c_2 и исходные плотности ρ_{01} и ρ_{02} .

Уравнение (9) показывает, что минимым значениям λ соответствуют действительные значения ω , т. е. устойчивые гармоники возмущения. Так как нас интересует возможная неустойчивость движения, то мы будем считать действительную часть λ отличной от нуля. Выбирая для каждой из областей 1 и 2 те из корней уравнения (9), действительная часть которых положительна, находим в соответствии с требованием ограниченности возмущения вдали от разрыва

$$\rho'_1 = A_1 \exp \{-\lambda_1 x + i(k_y y + k_z z - \omega t)\}; \quad (10)$$

$$\rho'_2 = A_2 \exp \{\lambda_2 x + i(k_y y + k_z z - \omega t)\}. \quad (11)$$

Пусть $x = \xi(y, z, t)$ — малое смещение поверхности разрыва в результате возмущения. Граничные условия на смещенной поверхности, а именно: равенство давлений и отсутствие потока вещества через поверхность разрыва, имеют вид:

$$p'_1 = p'_2; \quad (12)$$

$$v'_{1x} = (\partial \xi / \partial t) + (v_0 \nabla) \xi; \quad (13)$$

$$v'_{2x} = \partial \xi / \partial t, \quad (14)$$

при $x = \xi$ или с принятой точностью при $x = 0$. Исключая ξ из уравнений (13) и (14) [зависимость ξ от y и z определяется выражением (3)] и выражая v'_x через ρ' при помощи уравнения (4), имеем

$$\frac{c_1^2}{\rho_{01}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \rho'_1}{\partial x} \right) = \frac{c_2^2}{\rho_{02}} \left(\frac{\partial}{\partial t} + i k_1 v_0 \right)^2 \frac{\partial \rho'_2}{\partial x} \quad \text{при } x = 0. \quad (15)$$

Уравнение (12) при помощи последнего из уравнений (2) можно записать так:

$$c_1^2 \rho'_1 = c_2^2 \rho'_2 \quad \text{при } x = 0. \quad (16)$$

Подставляя в уравнения (15) и (16) решения (10) и (11), находим условие совместности этих уравнений:

$$-\frac{\lambda_1}{\rho_{01} (\omega - k_y v_0)^2} = \frac{\lambda_2}{\rho_{02} \omega^2}. \quad (17)$$

Наконец, вводя $\cos \theta = k_y / k$ (здесь θ — угол между векторами v_0 и $k = \{0, k_y, k_z\}$) и выражая λ_1 и λ_2 при помощи уравнения (9), получаем определяющее уравнение для ω

$$\frac{k^2 c_1^2 - (\omega - k v_0 \cos \theta)^2}{\rho_{01}^2 c_1^2 (\omega - k v_0 \cos \theta)^4} = \frac{k^2 c_2^2 - \omega^2}{\rho_{02}^2 c_2^2 \omega^4}. \quad (18)$$

Это уравнение полностью совпадает с уравнением для ω , полученным в [1,2] с той лишь разницей, что вместо v_0 в него входит $v_0 \cos \theta$. Последнее непосредственно вытекает из системы уравнений (2), в которую v_0 входит только в комбинации $(v_0 \nabla)$. Это означает, что характер возмущенного движения зависит только от проекции скачка скорости в разрыве на направление градиента возмущенных величин.

Исследование уравнения (18) показывает, что существует некоторое критическое значение $v_{кр}$, такое, что при условии

$$v_0 \cos \theta \geq v_{кр} \quad (19)$$

все корни уравнения (18) действительны, т. е. соответствующие гармоники возмущения устойчивы. В противоположном случае имеется корень с положительной мнимой частью, что ввиду (8) означает неограниченное нарастание возмущения со временем. Значение $v_{кр}$ легко определить в случае, если газ с обеих сторон поверхности разрыва можно считать идеальным с одинаковыми значениями $\gamma = c_p / c_v$. При этом

$$v_{кр}^2 = c_1^{2/\gamma} + c_2^{2/\gamma}. \quad (20)$$

Если, кроме того, температуры обоих газов одинаковы, то $c_1 = c_2 \equiv c$ и

$$v_{кр} = 2\sqrt{2}c. \quad (24)$$

Условие (19) показывает, что если скорость $v_0 < v_{кр}$, то рассматриваемое движение неустойчиво при малых возмущениях, соответствующих любым значениям угла θ . Если же скорость $v_0 > v_{кр}$, то существуют две области значений угла θ . Для одной из них выполняется соотношение (19), и движение для соответствующих возмущений оказывается устойчивым, для другой области углов соотношение (19) не выполняется, и движение неустойчиво. Так как вторая область существует всегда, то это означает, в противоположность выводу, сделанному в ^{1,2}, что тангенциальный разрыв в сжимаемой среде, так же как и в несжимаемой, неустойчив уже по отношению к бесконечно малым возмущениям.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
3 февраля 1954 г.

Литература

[1] Л. Д. Ландау. ДАН СССР, 44, 151, 1944.— [2] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред, Гостехиздат, 1953, стр. 393.

ПОЛЯРИЗАЦИЯ ПРИ РАССЕЯНИИ ПРОТОНОВ ПРОТОНАМИ

Я. А. Смородинский

Известно, что анализ данных по рассеянию протонов протонами оказывается весьма трудным из-за того, что в пределах ошибок опыта не удается заметить изменение сечения с углом рассеяния. Очевидно, что этот факт, вместе с фактом большой величины сечения, является доказательством того, что в рассеянии участвуют в сильной степени лишь состояния $^1S_0$ и $^3P_1$.

Ниже показывается, что крайне чувствительным методом определения других фаз является изучение поляризации при рассеянии. Для этой цели мы проанализируем результаты опытов по поляризации протонов с энергией 240 MeV, опубликованные в 1953 г.^[1]

При энергии 240 MeV величина дифференциального сечения равна ^[2] $4,97 \pm \pm 0,3 \cdot 10^{-27}$ см²/стерад или $1,5 \lambda^2$ см²/стерад, если выражать сечение в единицах λ^2 . Это означает, что обе фазы $^1S_0$ и $^3P_1$ велики (так как максимальный вклад каждой фазы в сечение равен λ^2). К сожалению, из-за отсутствия точных данных о зависимости сечения от энергии нельзя вычислить обе фазы независимо, так как значение сечения при одной энергии определяет только сумму квадратов синусов фаз.

Обращаясь к вопросу о поляризации, мы будем считать, что поляризация происходит от интерференции волн $^3P_0$ и $^3P_2$, так как волна $^3P_1$ не интерферирует с этими волнами, а в синглетных состояниях поляризации быть не может (волнами с $l \geq 2$ мы пренебрегаем).

Нетрудно показать, пользуясь обычной техникой сложения квантовых векторов, что амплитуда рассеяния в триплетном состоянии с магнитным числом $m=0$ определяется следующей формулой;

$$f(\theta) = \frac{1}{ik} e^{i\delta_0} \frac{1}{\sqrt{3}} \{ (-\sin \delta_0 + e^{i\Delta} \sin \delta_2) Y_{1-1}\chi_1 + \\ + (\sin \delta_0 + 2e^{i\Delta} \sin \delta_2) Y_{10}\chi_0 + (-\sin \delta_0 + e^{i\Delta} \sin \delta_2) Y_{11}\chi_{-1} \}. \quad (1)$$

Здесь δ_0 и δ_2 — фазы состояний $^3P_0$ и $^3P_2$ соответственно, $\Delta = \delta_2 - \delta_0$, а χ — триплетные спиновые функции.

Поляризация определяется как среднее значение

$$p = 2 \langle s_y \rangle = \langle \sigma_y \rangle,$$

где s_y — компонента спина протона, а σ_y — соответствующая матрица Паули.

Запишем (1) в виде

$$M_0 = a_{+1}\chi_{+1} + a_0\chi_0 + a_{-1}\chi_{-1}. \quad (2)$$

(В этой формуле можно считать, что коэффициенты a_m определяют собой ряды по шаровым функциям.) Определим сечение поляризации формулой

$$d\sigma_p = (M_0^+, \sigma_y M_0) d\Omega = \frac{1}{2} (M_0^+, (\sigma_1 + \sigma_2)_y M_0) d\Omega. \quad (3)$$

где $\frac{1}{2}(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)$ — оператор спина в триплетном состоянии. Очевидно, сечение поляризации есть произведение поляризации p на дифференциальное сечение. При помощи формулы (2) получаем ¹

$$d\sigma_p = V\sqrt{2} \operatorname{Im} a_0 (a_+ - a_-). \quad (4)$$

Подставляя в эту формулу значения коэффициентов a_m из (1), получаем

$$d\sigma_p = \lambda^2 3 \sin \Delta \sin \delta_2 \sin \delta_0 \sin 2\vartheta \cos \varphi. \quad (5)$$

Если считать фазу δ_2 малой, то

$$d\sigma_p \approx -\lambda^2 3 \sin \delta_2 \sin^2 \delta_0 \sin 2\vartheta \cos \varphi.$$

Для того чтобы оценить $\sin^2 \delta_0$, воспользуемся величиной сечения, приведенной выше. Получим неравенство

$$\frac{1}{2} < \sin^2 \delta_0 < 1. \quad (6)$$

Тогда для сечения поляризации получаем

$$1,5 |\sin \delta_2| < \frac{|d\sigma_p|}{\lambda^2 \sin 2\vartheta \cos \varphi} < 3 |\sin \delta_2|. \quad (7)$$

(Знак фазы δ_2 определить нельзя, так как из опытов известна только абсолютная величина поляризации.)

Измеренная поляризация при $\varphi = 0$ и $\vartheta = 49^\circ$ (в системе центра инерции) была $(22 \pm 5) \cdot 10^{-2}$. Отсюда для сечения поляризации получаем

$$d\sigma_p = (33 \pm 10) \cdot 10^{-2} \lambda^2; \quad (8)$$

из (7) получаем, что фаза δ_2 удовлетворяет неравенству

$$0,12 \pm 0,04 < \sin \delta_2 < 0,23 \pm 0,08. \quad (9)$$

Таким образом фаза δ_2 составляет около $10^\circ (\pm 3^\circ)$. Так как фаза δ_2 будет расти с энергией, то поляризационные эффекты должны сильно расти и представлять собой чувствительный метод для определения фаз. В частности, измерение зависимости поляризации от угла ϑ (для чего в двойном рассеянии можно, очевидно, изменять только угол второго рассеяния) позволит проверить, интерференция каких волн ответственна за наблюдаемый эффект.

Заметим, что фаза $\delta_2 = 10^\circ$ приведет к асимметрии рассеяния.

Сечение рассеяния при учете трех фаз $^1S_0$, $^3P_0$ и $^3P_2$ (для $^3P_2$ учитывается только интерференция) имеет вид

$$d\sigma = \lambda^2 \{ \sin^2 \delta_s + \sin^2 \delta_0 + 6 \sin \delta_0 \sin \delta_2 \cos \Delta (\cos^2 \vartheta - \frac{1}{3}) \}. \quad (10)$$

Полагая сферически симметричную часть сечения равной $1,5 \lambda^2$ и принимая для оценки $\sin^2 \delta_0 = 0,75$, $\delta_2 = 10^\circ$, получим

$$d\sigma = \lambda^2 \{ 1,5 \pm 0,2 \cos^2 \vartheta \}, \quad (11)$$

т. е. должна иметь место заметная асимметрия. Эта оценка, однако, довольно неточна, так как из-за множителя $\cos \Delta$ она более чувствительна к значению δ_0 , чем поляризация.

Поступила в редакцию
27 апреля 1954 г.

Литература

[1] C. L. Oxley et al. Phys. Rev., 91, 418, 1953.—[2] C. L. Oxley a. Schamberger. Phys. Rev., 85, 416, 1952.

¹ Используются соотношения:

$$(\sigma_1 + \sigma_2)_{y\chi_{\pm 1}} = \mp i V \sqrt{2} \chi_0 \quad \text{и} \quad (\sigma_1 + \sigma_2)_{y\chi_0} = i V \sqrt{2} (\chi_+ - \chi_-).$$

К ВОПРОСУ О СВЕРХПРОВОДИМОСТИ Bi_2Pd

Н. Е. Алексеевский, Н. Н. Журавлев и И. И. Лифанов

Ранее уже сообщалось [1, 2], что сплав Bi_2Pd переходит в сверхпроводящее состояние при температуре $1,70^\circ\text{K}$.

В настоящее время установлено [3], что образцы состава Bi_2Pd , закаленные и медленно охлажденные, имеют различную структуру, соответствующую двум модификациям соединения Bi_2Pd . Медленно охлажденные образцы представляют α -модификацию Bi_2Pd , кристаллы которой относятся к моноклинной сингонии и имеют следующие параметры: $a = 12,74 \pm 0,01 \text{ \AA}$; $b = 4,25 \pm 0,02 \text{ \AA}$; $c = 5,665 \pm 0,005 \text{ \AA}$; $\beta = 102^\circ 35' \pm 10'$; $V = 286 \text{ \AA}^3$; плотность, определенная гидростатическим взвешиванием, $\sigma = 11,0 \text{ г/см}^3$; $\sigma_x = 11,65 \text{ г/см}^3$; $Z = 4$. Пространственная группа $C_{2h}^3 - C_{2/m}$.

Быстро охлажденные образцы, представляющие β -модификацию, образуют кристаллы, относящиеся к тетрагональной сингонии, причем в этом случае $a = 3,362 \pm 0,001 \text{ \AA}$; $c = 12,983 \pm 0,001 \text{ \AA}$; $c/a = 3,862$; $V = 147 \text{ \AA}^3$; $\sigma = 11,7 \text{ г/см}^3$; $\sigma_x = 11,87 \text{ г/см}^3$; $Z = 2$. Пространственная группа $D_{4h}^{17} - I 4/mmm$.

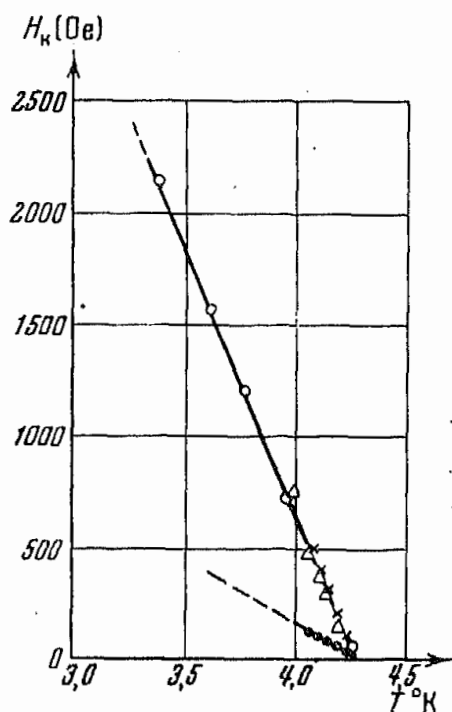


Рис. 1. Δ — измерения на переменном токе образца $\beta\text{-Bi}_2\text{Pd}$ № 1. Для образца $\beta\text{-Bi}_2\text{Pd}$ № 2: кружки — измерения сопротивления; черные точки — измерения магнитного момента H_{k1} ; крестики — измерения магнитного момента H_{k2} .

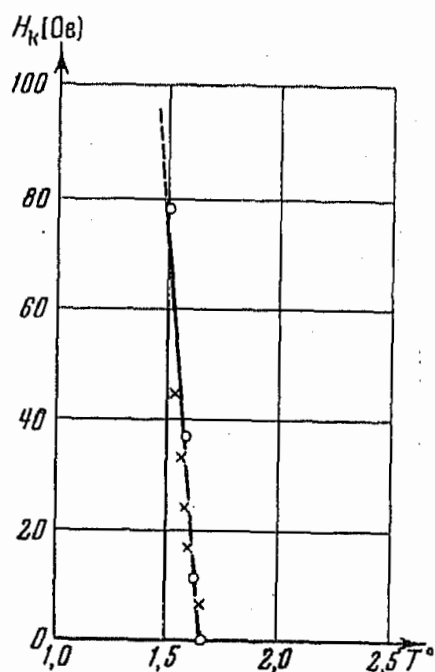


Рис. 2. Кружки — измерения на переменном токе образца $\alpha\text{-Bi}_2\text{Pd}$ № 1; крестики — измерения на переменном токе ранее исследованного образца Bi_2Pd .

Металлографический анализ образцов показал, что как для образцов, подвергнутых отжигу, так и для быстро охлажденных образцов, на микрофотографии шлифа получается однородное поле, однако в первом случае микротвердость составляет $140\text{--}200 \text{ кг/мм}^2$, тогда как во втором она равна $120\text{--}150 \text{ кг/мм}^2$. В том случае, когда образец охлажден на воздухе, на микрофотографии шлифа можно наблюдать обе фазы.

Представляло интерес исследовать тетрагональную модификацию в области низких температур и выяснить, не является ли она также сверхпроводящей. Для этой цели были проведены измерения сопротивления закаленных образцов при температуре жидкого гелия. Эти измерения показали, что при $T = 4,25^\circ\text{K}$ тетрагональная модификация Bi_2Pd переходит в сверхпроводящее состояние. Кроме измерения сопротивления были проведены измерения магнитных моментов образцов, а также проведены измерения на переменном токе, подтвердившие переход в сверхпроводящее состояние при той же температуре. Для измерений на переменном токе была использована схема, уже применявшаяся нами ранее (см. [2]). На рис. 1 показаны кривые критических полей двух образцов $\beta\text{-Bi}_2\text{Pd}$.

Если закаленный образец Bi_2Pd , переходящий в сверхпроводящее состояние при $T = 4,25^\circ\text{K}$, отжечь, то после отжига переход в сверхпроводящее состояние будет про-

исходить лишь при $1,7^\circ \text{K}$, что соответствует T_K моноклинной модификации. На рис. 2 приведена кривая критического поля для отожженного образца, полученная при измерениях на переменном токе. На этой же кривой приведены точки, соответствующие критическим полям образца Bi_2Pd , исследованного нами ранее [1].

Если образец, подвергавшийся отжигу, переплавить и вновь закалить, то сверхпроводимость вновь появляется при $4,25^\circ \text{K}$. Таким образом образцы Bi_2Pd ведут себя подобно образцам Bi_4Rh [1], с той лишь разницей, что после отжига Bi_4Rh полностью утрачивает сверхпроводимость, в то время как в случае Bi_2Pd отжиг лишь существенно снижает температуру перехода в сверхпроводящее состояние. Необходимо отметить, что если закалка произведена недостаточно быстро или если образец не полностью отожжен, то присутствие обеих фаз приводит к размытию кривых перехода настолько, что уменьшение сопротивления, начинаясь у 4°K , заканчивается лишь при $1,7^\circ \text{K}$. Такое большое размытие кривой перехода можно, вероятно, считать следствием больших напряжений, возникающих при охлаждении двухфазной системы. Ранее сообщалось [2], что в системе $\text{Bi}-\text{Pd}$, кроме Bi_2Pd , появление сверхпроводимости происходит и у сплавов, более богатых палладием. Так, например, соединение BiPd оказывается сверхпроводящим при $T = 3,77^\circ \text{K}$. Это соединение имеет ромбическую решетку [3-5], и ни существование этого соединения, ни переход его в сверхпроводящее состояние при $T = 3,7^\circ \text{K}$ не вызывают в настоящее время сомнений. Сплавы, более богатые палладием, как это уже отмечалось в предыдущем сообщении, хотя и переходили в сверхпроводящее состояние, однако их температуры перехода варьировали от образца к образцу. Появление сверхпроводимости в богатых палладием сплавах и их относительно высокие температуры перехода ($\sim 4^\circ \text{K}$) могут быть обусловлены частичным распадом образцов, в результате чего возможно образование одного из сверхпроводящих соединений.

Выражаем благодарность проф. Г. С. Жданову за советы и помощь при проведении рентгенографических и металлографических исследований.

Институт физических проблем
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
3 февраля 1954 г.

Литература

- [1] Н. Е. Алексеевский, Н. В. Брандт и Т. И. Костина. Изв. АН СССР, сер. физ., 16, 233, 1952.—[2] Н. Е. Алексеевский. ЖЭТФ, 23, 484, 1952.—[3] Н. Н. Журавлев и Г. С. Жданов. ЖЭТФ, 25, 485, 1953.—[4] Л. С. Зевин, Г. С. Жданов и Н. Н. Журавлев. ЖЭТФ, 25, 751, 1953.—[5] Д. М. Хейкер, Г. С. Жданов и Н. Н. Журавлев. ЖЭТФ, 25, 621, 1953.

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ФОСФОРИСТОЙ БРОНЗЫ ПРИ ГЕЛИЕВЫХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Р. А. Ченцов

Для измерения теплопроводности бронзы нами был применен метод, отличающийся от обычно принятого при низких температурах [1] и являющийся видоизменением известного метода определения отношения теплопроводности к электропроводности Кольера [2].

В ванну жидкого гелия помещался хорошо вакуумированный полый латунный цилиндр. Через дно цилиндра были сделаны выводы из медной проволоки, герметизированные при помощи уплотнений на клею БФ [3]. Между внутренними концами медных выводов при помощи обычного свинцово-оловянного припоя был напаян образец в виде проволоки. Для изготовления образцов употреблялась проволока из фосфористой бронзы диаметром 40μ , применяемая для изготовления термометров сопротивления [4].

Опыт заключался в определении электрического сопротивления образцов при различных измерительных токах. Величины тока i и сопротивления R измерялись при помощи потенциометрической схемы. За счет выделения джоулева тепла образец приобретал некоторый средний перегрев относительно ванны

$$\overline{\Delta T} = (1/L) \int_0^L (T - T_0) dL,$$

величина которого определялась по возрастанию сопротивления ΔR и температурному коэффициенту $\alpha = (1/R) (\partial R / \partial T)$. Пользуясь методом последовательных приближений,

легко показать, что при небольших перегревах, когда тепло- и электропроводность металла приблизительно постоянны вдоль образца, величина перегрева связана с мощностью $W = i^2 R$ соотношением

$$\overline{\Delta T} = \frac{L}{12s} \frac{W}{\kappa} \left(1 - \frac{9\gamma - \alpha}{5} \overline{\Delta T} + \dots \right) \approx \frac{L' W}{12s \kappa}, \quad (1)$$

где L — длина, s — сечение проволоки, κ — искомая теплопроводность бронзы, $\gamma = (1/\kappa) (d\kappa/dT)_i$ — ее температурный коэффициент.

Указанный метод исключительно прост с экспериментальной стороны и может быть применен для измерения теплопроводности различных электропроводящих материалов, обладающих достаточно большим температурным коэффициентом электрического сопротивления. Он становится особенно удобным при водородных и гелиевых температурах в связи с практически полным отсутствием теплообмена излучением и с возможностью резко уменьшить теплообмен через газ. В случае измерений при более высоких температурах этот паразитный теплообмен вызывает необходимость определения температуры в нескольких точках образца и введения громоздких поправок [6].

При измерении теплопроводности фосфористой бронзы мы вводили поправку на зависимость электропроводности от величины измерительного тока, связанную с частичным разрушением сверхпроводимости. При этом мы пользовались приближенным соотношением, связывающим величину сопротивления при разных токах:

$$[R(i) - R(i_0)]T = \text{const} \approx R(i_0) b \lg(i/i_0).$$

b слабо зависит от i_0 , но сильно меняется с температурой (от нуля при $T \sim 3,5^\circ \text{K}$ до $\sim 2,7$ при $1,2^\circ \text{K}$). Указанная поправка являлась довольно значительной и иногда составляла до половины измеряемого эффекта.

Нам не удалось избежать при напайке образцов покрытия припоем небольших концевых участков ($\sim 0,2$ — $0,25$ мм). При вычислении теплопроводности по формуле (1) тепловым сопротивлением этих участков мы пренебрегали.

Ошибки, связанные с пренебрежением тепловым сопротивлением медных выводов и скачком температуры при передаче тепла от поверхности твердого тела в жидкий гелий II [6], были достаточно малы.

Измерения проводились на четырех образцах длиной $\approx 3,3$; $2,7$; $1,0$ и $0,35$ см. Теплопроводность была определена в интервале температур $1,25$ — $2,7^\circ \text{K}$. Токи i_0 , к которым приводились результаты измерений (см. выше), составляли $0,1$ — 1 мА.

Полученные значения теплопроводности изображены в двойном логарифмическом масштабе на рис. 1. Значения теплопроводности, соответствующие разным токам, удовлетворительно ложатся на общую кривую. Между $1,7$ и $2,7^\circ \text{K}$ зависимость теплопроводности от температуры является кубической: $\kappa = 1,1 \cdot 10^{-3} T^3 \text{ W/cm} \cdot \text{град}^4$. При более низких температурах зависимость становится не столь быстрой.

Усредненные значения теплопроводности фосфористой бронзы при некоторых температурах приводятся в следующей таблице:

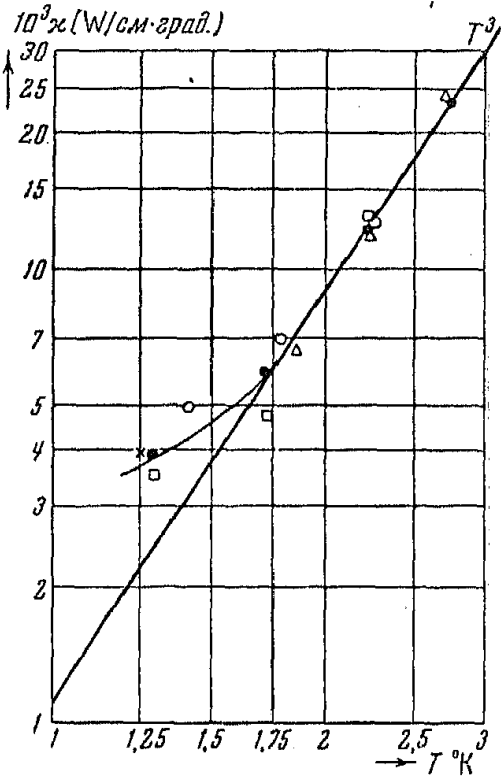


Рис. 1. Теплопроводность фосфористой бронзы при гелиевых температурах. $\circ$ — $L \approx 3,3$ см, $i_0 = 0,1$ мА; Δ — $L \approx 2,7$ см; $i_0 = 0,25$ — $0,35$ мА; $\bullet$ — $L \approx 1,0$ см, $i_0 = 0,3$ мА; $\square$ — $L \approx 0,35$ см, $i_0 = 1$ мА, $\times$ — $L \approx 0,35$ см, $i_0 = 0,2$ мА. Прямая линия соответствует зависимости $\kappa \sim T^3$

Таблица

$T^\circ \text{K}$	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6	2,8
$10^3 \kappa \text{ (W/cm} \cdot \text{град.)}$. .	4,0	4,3	5,2	6,6	8,9	11,8	15,4	20,2	26,0

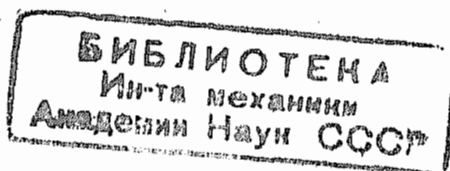
Точность определения κ составляет $\sim 5\%$ при температурах $2,7-1,8^\circ \text{K}$ и $\sim 10\%$ при более низких температурах.

Институт физических проблем
Академии наук СССР

Поступило в редакцию
6 февраля 1954 г.

Литература

- [1] J. L. Olsen, H. M. Rosenberg. *Advances in Physics*, **2**, 28, 1953.—
[2] F. Kohlrausch. *Berl. Ber.*, 711, 1899; *Wied. Ann.* **4**, 145, 1900. О. Д. Хвольсон. Курс физики, 5-е изд., Гос. изд-во РСФСР, 1923, т. 3, стр. 320.—
[3] Б. Н. Самойлов. *Журн. техн. физики*, **22**, 888, 1952.— [4] Специальный физический практикум (под ред. Г. В. Спивак), ГИТТЛ, М.—Л., 1945, т. 2, стр. 198—199. В. П. Пешков. *ЖЭТФ*, **16**, 1000, 1946.— [5] Jaeger, Disselhorst. *Berl. Ber.*, 719, 1899; *Wiss. Abhandl. d. Phys.-Techn. Reichsanst.*, **3**, 269, 1900. В. Е. Микрюков и С. М. Работнов, *Уч. зап. МГУ*, **74**, 167, 1944.—
[6] П. Л. Капица. *ЖЭТФ*, **11**, 1, 1941.



К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция ЖЭТФ просит авторов при направлении статей в печать руководствоваться изложенными ниже правилами. СТАТЬИ, ПРИСЛАННЫЕ БЕЗ СОБЛЮДЕНИЯ ПЕРЕЧИСЛЕННЫХ ПРАВИЛ, К РАССМОТРЕНИЮ РЕДАКЦИЕЙ ПРИНИМАТЬСЯ НЕ БУДУТ.

1. Статьи, являющиеся результатами работ, проведенных в институтах, должны обязательно иметь направление от соответствующего института.

2. Редакция в особенности обращает внимание авторов на то, что статьи должны быть изложены с предельной краткостью, совместимой с ясностью изложений, и окончательно обработаны. Следует избегать повторения данных таблиц или графиков в тексте статьи, а также представления численных результатов в виде таблиц и графиков одновременно.

Статьи объемом свыше 1 печ. листа (т. е. 21—22 стр. текста на пишущей машинке) вообще не допускаются. Как текст, так и графический материал должны представляться обязательно в двух экземплярах.

3. Статья должна иметь краткую аннотацию, указывающую цель и результаты работы. Аннотация и раздел «Выводы» (если таковой имеется в статье) не должны, однако, дублировать друг друга.

4. Статьи должны быть напечатаны на пишущей машинке с одной стороны листа; рукописные вставки не допускаются. Формулы должны быть вписаны четко чернилами. Все страницы рукописи должны быть пронумерованы. Таблицы должны быть напечатаны на отдельных от текста страницах.

СТАТЬИ ДОЛЖНЫ БЫТЬ ОБЯЗАТЕЛЬНО ПОДПИСАНЫ АВТОРОМ, А ПРИ НАЛИЧИИ НЕСКОЛЬКИХ АВТОРОВ ВСЕМИ СОАВТОРАМИ.

5. Во избежание недоразумений и ошибок следует делать ясное различие между заглавными и строчными буквами в формулах. В тех случаях, когда заглавные и строчные буквы одинаковы по начертанию и отличаются только своим размером (*V* и *v*, *U* и *u*, *W* и *w*, *O* и *o*, *K* и *k*, *S* и *s*, *I* и *i*, *C* и *c*, *P* и *p*), — необходимо заглавные буквы подчеркивать снизу двумя черточками (например, S), а строчные пометать двумя черточками сверху (например, s). Необходимо делать различие между буквой *C* (большой), *o* (малой) и 0 (нулем), для чего буквы *O* и *o* подчеркивать двумя черточками: O и o, а нуль оставлять без подчеркивания. Необходимо также различать буквы *I* и *J*, для чего в рукописи букву *I* писать как римскую единицу с точкой вверху. Греческие буквы должны подчеркиваться красным карандашом. Векторы подчеркивать синим или черным карандашом.

6. Подстрочные примечания должны иметь сплошную нумерацию по всей статье. Цитируемая литература должна даваться не в виде подстрочных примечаний, а общим списком в конце статьи, с указанием в тексте статьи ссылки порядковой цифрой над строкой, в прямых скобках (например, [1]). Цитируемая литература должна быть оформлена в следующем порядке: а) для журнальных статей указываются инициалы и фамилии авторов, название журнала, номер тома (подчеркнуть снизу), страница и год; б) для книг надо указывать инициалы и фамилии авторов, полное название книги, год и место издания (для книг иностранного происхождения — указывать данные русского перевода, если таковой имеется).

7. Все рисунки и чертежи должны быть представлены отдельно от рукописи и ни в коем случае не должны приклеиваться к оригиналу. Рисунки желательно снабжать разъясняющими подписями, которые должны быть собраны на отдельном листе. На обороте рисунков должна быть указана фамилия автора, название статьи и номер рисунка. Надписи на рисунках следует по возможности заменять цифрами или буквенными обозначениями в подписи к рисунку или в тексте.

Редакция просит авторов ограничиваться минимальным числом рисунков к статьям.

8. Редакция просит авторов отмечать на полях рукописи места, которые могут быть набраны петитом.

9. Редакция посылает автору одну корректуру. Изменения и дополнения в тексте не допускаются. Корректура с подписью автора должна быть выслана обратно в редакцию в течение суток с момента ее получения.

10. К рукописи должен быть приложен точный адрес, фамилия, имя и отчество автора, а также номер телефона, служебного или домашнего (для авторов, проживающих в Москве).

11. РУКОПИСИ, НЕ ПРИНЯТЫЕ РЕДАКЦИЕЙ, АВТОРУ НЕ ВОЗВРАЩАЮТСЯ.

Адрес редакции, Москва, Подсосенский пер., д. 21, Изд-во АН СССР.