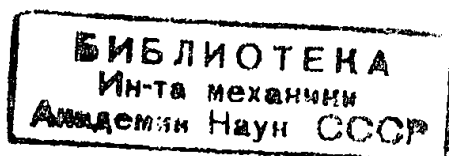


ЖУРНАЛ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 26

Вып. 1



ЯНВАРЬ 1954 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Ю. В. Вандакуров. Диффракция электромагнитных волн, испускаемых произвольно ориентированным электрическим или магнитным диполем, на идеально проводящей полуплоскости	3
Н. П. Клепиков. Излучение фотонов и электронно-позитронных пар в магнитном поле	19
Т. И. Либберберг и К. Б. Толпыго. Многоэлектронное рассмотрение движения электрона (дырки) в возмущенном кристалле	35
И. М. Виленский. О влиянии магнитного поля Земли на взаимодействие радиоволн в ионосфере	42
М. Е. Герценштейн. Самовозбуждение автоколебаний в газовом разряде при больших давлениях	57
Л. М. Свердлов и Н. Л. Пахомова. Колебательные спектры и постоянные потенциальной энергии этилена и его дейтерозамененных	64
Н. Б. Горный. Вторичная электронная эмиссия для различных граней монокристаллов меди, покрытых монокристаллическими пленками окиси меди	79
Н. Б. Горный. Вторичная электронная эмиссия для различных граней монокристаллов цинка, покрытых монокристаллическими пленками окиси цинка	88
И. Е. Балыгин. Пробой малых воздушных промежутков	89
В. М. Кельман, Н. М. Дусаев, Г. С. Малкиэль и Н. Н. Неводничий. -спектрометр с магнитной призмой и одной магнитной линзой	107
В. М. Мучник. Ионизация при разрушении капель в электрическом поле	109
А. Н. Кронгауз и В. К. Ляпидевский. Отрицательная фотопроводимость куприта	119
П. Н. Коханенко. О связи спектров поглощения избыточных металлов с типом решетки основного вещества	120

Дискуссии

В. А. Колесова. К вопросу об интерпретации колебательных спектров силикатов и силикатных стекол	124
Поправки	128

Редактор *Н. Н. АНДРЕЕВ*

Зам. редактора *М. М. СУЩИНСКИЙ*

Редколлегия

Н. А. КАПЦОВ, В. П. ПЕШКОВ, Д. В. СКОБЕЛЬЦЫН,
Н. Н. СОБОЛЕВ, М. М. СУЩИНСКИЙ, И. В. ТАММ,
Я. П. ТЕРЛЕЦКИЙ, В. Л. ФЕЙНБЕРГ

ЖУРНАЛ

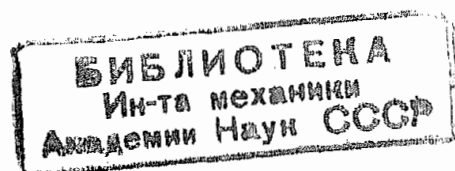
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

*Продолжение физической части
Журнала Русского физико-химического общества,
издававшегося с 1873 по 1930 г.*

РЕДАКТОР Н. Н. АНДРЕЕВ,
ЗАМ. РЕДАКТОРА М. М. СУЩИНСКИЙ

Редколлегия: акад. Н. Н. АНДРЕЕВ, д-р физ.-мат. наук
Н. А. КАПЦОВ, д-р физ.-мат. наук В. П. ПЕШКОВ,
акад. Д. В. СКОБЕЛЬЦЫН, канд. физ.-мат. наук
Н. Н. СОВОЛЕВ, канд. физ.-мат. наук М. М. СУЩИНСКИЙ,
акад. И. Е. ТАММ, д-р физ.-мат. наук Я. П. ТЕРЛЕЦКИЙ,
д-р физ.-мат. наук Е. Л. ФЕЙНБЕРГ

Том 26



ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

ДИФФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН, ИСПУСКАЕМЫХ ПРОИЗВОЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННЫМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ИЛИ МАГНИТНЫМ ДИПОЛЕМ, НА ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Ю. В. Вандакуров

Приведено строгое решение задачи о диффракции электромагнитных волн, испускаемых произвольно ориентированным электрическим или магнитным диполем, на идеально проводящей полуплоскости. Результат представлен в виде однократных интегралов с конечными пределами от табулированных функций.

1. Введение

Строгое решение задачи о диффракции плоских волн на идеально проводящей полуплоскости было получено Зоммерфельдом [1]. Ниже решается более общая задача, когда дипольный источник находится на конечном расстоянии от ребра полуплоскости. Рассматриваются отдельно различные направления диполя. В том случае, когда момент диполя параллелен ребру полуплоскости, возможно получить решение, удовлетворяющее всем поставленным условиям, находя вектор-потенциал поля, причем последний можно считать направленным параллельно диполю. При другой ориентации диполя проще определять декартовы компоненты полей: электрического — при магнитном диполе и магнитного — при электрическом.

Вследствие наличия острого края (ребра) необходимо ввести так называемые условия на ребре, заранее указывающие поведение компонент полей у данной особой линии. При этом последовательное применение для нахождения полей известных в настоящее время методов оказывается невозможным. Упомянутые затруднения ниже обойдены специальными приемами, причем теорема единственности¹ позволяет считать результат правильным.

Окончательный результат представлен в виде однократных интегралов, практическое пользование которыми при любых параметрах (частоте, положении диполя относительно полуплоскости) не представляет особого труда.

2. Постановка задачи

Пусть идеально проводящая полуплоскость находится в плоскости $y=0$ прямоугольной системы координат (x, y, z) при значениях $x \geq 0$, т. е. ось z совпадает с ребром ее. Введем также цилиндрические координаты (r, θ, z) , в которых полуплоскость соответствует значениям θ , равным нулю и 2π ².

Диполь поместим в точке D с координатами $r = \delta$, $\theta = \alpha$, $z = 0$. В силу симметрии достаточно считать, что α изменяется от нуля до π . При решении будем отдельно рассматривать три различных случая:

¹ В данном случае требуется специальное доказательство теоремы единственности. Это доказательство приведено ниже (раздел 7), причем основные идеи его взяты из работы [2].

² Считаем, что θ изменяется в пределах $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

1) диполь, параллельный оси z (диполь z); 2) диполь, направленный по r (радиальный диполь); 3) перпендикулярный к предыдущим диполь (диполь θ).

Эти направления в таком же порядке показаны на рис. 1.

В дальнейшем электрический диполь заменяется токами плотности $\mathbf{j}$ (магнитный диполь — фиктивными токами плотности $\mathbf{j}^*$), текущими в элементе объема τ , соответствующем значениям r, θ, z , лежащим в интервале:

$$\delta \leq r \leq \delta + h,$$

$$\alpha \leq \theta \leq \alpha + \beta,$$

$$-g \leq z \leq g.$$

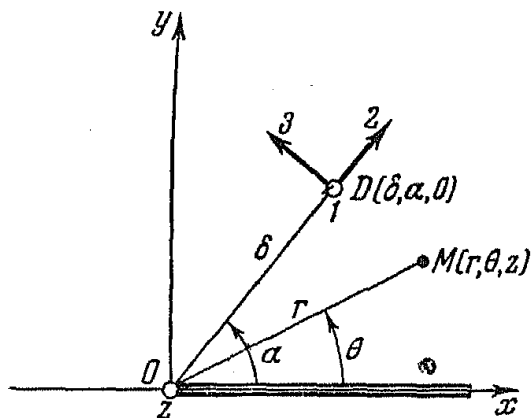


Рис. 1

В пределе при уменьшении τ до нуля (и соответствующем увеличении $\mathbf{j}$ или $\mathbf{j}^*$) должен получиться диполь того или иного направления.

Задачу будем решать для области, ограниченной с одной стороны двумя цилиндрическими поверхностями радиусов r_1 и r_2 , оси которых совпадают с осью z , и с другой стороны проводящей полуплоскостью (рис. 2). Устремляя r_1 к нулю, а r_2 к бесконечности, получим исходную полуплоскость в однородной среде.

Уравнения задачи обычным образом вытекают из уравнений Максвелла, которые мы запишем в форме³

$$\text{rot } \mathbf{H} = -\frac{k^2 c}{i\omega\mu} \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (1)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{i\omega\mu}{c} \mathbf{H} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^*, \quad (2)$$

где $k^2 = (\epsilon\omega - 4\pi\sigma i) \mu\omega / c^2$, $\text{Im}(k) \leq 0$, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ — электрическое и магнитное поля, ϵ , μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, σ — проводимость среды, $\text{Im}(k)$ — мнимая часть.

Вводя вектор-потенциал поля $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^*$, получим два ряда соотношений:

а) Электрический диполь ($\mathbf{j}^* = 0$),

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A}, \quad (3a)$$

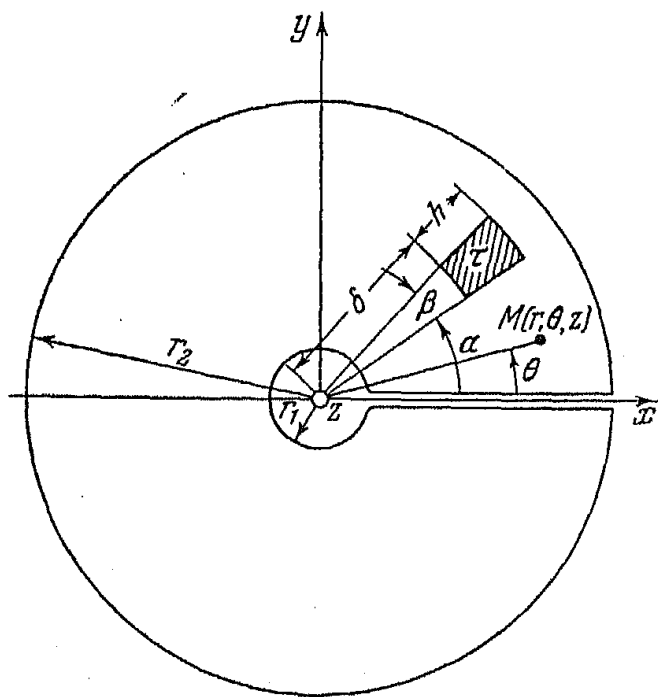


Рис. 2

³ Зависимость от времени взята в виде $e^{i\omega t}$.

$$\mathbf{E} = -\frac{i\omega}{ck^2} \text{grad div } \mathbf{A} - \frac{i\omega}{c} \mathbf{A}, \quad (4a)$$

$$\Delta \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi\mu}{c} \mathbf{j}, \quad (5a)$$

$$\Delta \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = -\frac{4\pi}{c} \text{rot } \mathbf{j}. \quad (6a)$$

б) Магнитный диполь ($\mathbf{j} = 0$),

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c} \text{rot } \mathbf{A}^*, \quad (36)$$

$$\mathbf{H} = -\frac{c}{i\omega\epsilon\mu} \text{grad div } \mathbf{A}^* - \frac{k^2 c}{i\omega\epsilon\mu} \mathbf{A}^*, \quad (46)$$

$$\Delta \mathbf{A}^* + k^2 \mathbf{A}^* = \frac{4\pi c}{c} \mathbf{j}^*, \quad (56)$$

$$\Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = \frac{4\pi}{c} \text{rot } \mathbf{j}^*. \quad (66)$$

Уравнения (5a), (56), (6a), (66) являются исходными при решении задачи. Из уравнений (6a) и (66) следует, что токи $\mathbf{j}$ (или $\mathbf{j}^*$) нужно считать зависящими от координат таким образом, чтобы в этих уравнениях справа стояли непрерывные или кусочно-непрерывные функции.

Для связи этих токов с электрическим (магнитным) моментом диполя $\mathbf{p}$ ($\mathbf{m}$) могут служить условия предельного перехода:

$$a) \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{\tau} \mathbf{j} r dr d\theta dz = i\omega \mathbf{p}, \quad (7a)$$

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{\tau} \mathbf{j}^* r dr d\theta dz = i\omega \mu \mathbf{m}. \quad (76)^4$$

Здесь предполагается, что токи $\mathbf{j}$ (или $\mathbf{j}^*$) имеют внутри объема τ постоянное направление.

Прежде чем переходить к граничным условиям, рассмотрим некоторые особенности, возникающие вследствие наличия у полуплоскости острого края. Известно, что в случае диффракции плоских волн некоторые компоненты электрического и магнитного полей у ребра полуплоскости обращаются в бесконечность, как $r^{-1/2}$. Следовательно, ребро будет особой линией решения, и для однозначности последнего необходимо задать порядок этой бесконечности. Это достигается введением условий на ребре (остром крае при экране в виде любой плоской фигуры). В работе [2] постулируется интегрируемость квадратов компонент полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ ⁵. Исходя из этого, показывается, что составляющие электрического и магнитного полей, параллельные острому краю, возле последнего ограничены, а другие компоненты при приближении к нему не могут стремиться к бесконечности быстрее, чем $r^{-1/2}$ (r — расстояние от острого края).

⁴ Это выражение вытекает из известного решения уравнения (56): $\mathbf{A}^* = -\frac{c}{c} \times \int_V \mathbf{j}^* \frac{e^{-ikR}}{R} dV$, где R — расстояние от места расположения элемента объема dV с током $\mathbf{j}^*$ до точки наблюдения. При достаточно малых τ $\mathbf{A}^* = -\frac{c}{c} \left[\int_{\tau} \mathbf{j}^* dV \right] \frac{e^{-ikR}}{R}$.

Кроме того, известно, что $\mathbf{A}^* = -\frac{i\omega\epsilon\mu\mathbf{m}}{c} \frac{e^{-ikR}}{R}$. Сравнение последних формул и дает (76).

⁵ Это соответствует конечности энергии, заключенной в любом конечном объеме.

В рассматриваемом конкретном случае условия на ребре сводятся к следующим основным положениям:

1) при малых r компоненты E_z, H_z, A_z, A_z^* ограничены по величине; 2) при малых r компоненты E_x, E_y, H_x, H_y либо стремятся к бесконечности, как $r^{-1/2}$, либо ограничены⁶. Если разложить эти компоненты по степеням r , начиная с $r^{-1/2}$, то оказывается, что коэффициент $\kappa(\theta, z)$, стоящий при $r^{-1/2}$, должен удовлетворять дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial^2 \kappa(\theta, z)}{\partial \theta^2} + \frac{1}{4} \kappa(\theta, z) = 0. \quad (8)$$

Рассмотрим граничные условия задачи. Если считать, что среда обладает хотя бы ничтожной конечной проводимостью σ , то при $z \rightarrow \pm \infty$ искомые величины должны экспоненциально затухать. На самой полуплоскости, т. е. при значениях θ , равных нулю и 2π , должны обратиться в нуль $E_x, E_z, \partial E_y / \partial \theta, H_y, \partial H_x / \partial \theta, \partial H_z / \partial \theta$ ⁸. Точно так же нужно считать, что при $r = r_1$ и $r = r_2$ равны нулю $E_z, \partial H_z / \partial r$ ($A_z, \partial A_z^* / \partial r$ в случае диполя z).

Значения других составляющих на границах интервала изменения r находятся не столь просто. Мы предположим, что при $r = r_1$ и $r = r_2$ обращаются в нуль $E_x, \partial E_y / \partial r, H_y, \partial H_x / \partial r$. Тогда в пределе при $r_1 = 0, r_2 = \infty$ получатся правильные значения граничных условий, но эти компоненты у ребра окажутся непрерывными. Назовем эти решения регулярными и обозначим через e_x, e_y, h_x, h_y . Таким образом из компонент полей по осям x и y мы выделили нерегулярные части e'_x, e'_y, h'_x, h'_y , удовлетворяющие однородным уравнениям (6), вышеуказанным граничным условиям, и обращающиеся в бесконечность при $r \rightarrow 0$, как $r^{-1/2}$. При этом

$$E_i = e_i + e'_i, \quad H_i = h_i + h'_i, \quad i = x, y. \quad (9)$$

Окончательно мы сформулируем условия задачи следующим образом:

1. Требуется найти решение уравнения

$$\Delta P + k^2 P = T, \quad \text{Im}(k) < 0, \quad (10)$$

где T — функция от r, θ, z , отличная от нуля только в элементе объема τ и соответствующая правой части уравнений (5а), (5б), (6а), (6б), при граничных условиях двух видов:

$$\left. \begin{aligned} a) \quad & P \Big|_{z \rightarrow \pm \infty} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z \rightarrow \pm \infty} \rightarrow 0, \\ & P \Big|_{\theta=0} = P \Big|_{\theta=2\pi} = 0, \\ & P \Big|_{r=r_1} = P \Big|_{r=r_2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (11a)$$

Здесь P — одна из величин E_z, e_x, h_y или A_z при электрическом диполе z .

⁶ Последнее возможно лишь для некоторых определенных положений диполя при фиксированном направлении его.

⁷ Это легко проверить, подставив разложения компонент в уравнения (6) без правой части и приравняв нулю коэффициент при наинизшей степени r .

⁸ Это вытекает из уравнений Максвелла. Например, из того, что при всех x и $z, E_x = 0$ и $E_z = 0$ следует, что и

$$\frac{1}{r} \frac{\partial E_y}{\partial \theta} = \frac{\partial E_y}{\partial y} = -\frac{\partial E_x}{\partial x} - \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0.$$

$$\left. \begin{aligned} \text{б) } P \Big|_{z \rightarrow \pm \infty} &\rightarrow 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} \Big|_{z \rightarrow \pm \infty} \rightarrow 0, \\ \frac{\partial P}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} &= \frac{\partial P}{\partial \theta} \Big|_{\theta=2\pi} = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial r} \Big|_{r=r_1} &= \frac{\partial P}{\partial r} \Big|_{r=r_2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

P — одна из величин H_z , e_y , h_x или A_z^* при магнитном диполе z .

В обоих случаях в полученном решении нужно положить $r_1 = 0$, $r_2 = \infty$.

2. При помощи уравнений Максвелла необходимо найти полное решение (в случае радиального диполя и диполя θ).

3. Нахождение решений, непрерывных у ребра полуплоскости

1. Общее решение

А) Пусть заданы граничные условия (11а). Решение уравнения (10) будем искать в цилиндрических координатах, причем используем метод Гринберга [3].

Применим два последовательных преобразования, сводящие (10) к одномерному уравнению. Для этого умножим его на $\left[\frac{1}{2\pi} e^{i\lambda z} dz \right] \times \left[\frac{1}{\pi} \sin \frac{n\theta}{2} d\theta \right]$ и проинтегрируем сначала по z от минус до плюс бесконечности, а затем по θ от нуля до 2π . В результате получим

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\bar{P}_n}{dr} \right) + \left[s^2 - \left(\frac{n}{2r} \right)^2 \right] \bar{P}_n = \bar{T}_n(r), \quad (12)$$

где

$$\bar{P}_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda z} P_n dz = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda z} \left[\int_0^{2\pi} P \sin \frac{n\theta}{2} d\theta \right] dz, \quad (13)$$

$$\bar{T}_n(r) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda z} \int_0^{2\pi} T \sin \frac{n\theta}{2} dz d\theta, \quad (14)$$

$$s^2 = k^2 - \lambda^2, \quad \text{Im}(s) < 0.$$

При этом $\bar{P}_n \Big|_{r=r_1} = \bar{P}_n \Big|_{r=r_2} = 0$, а обратный переход к P производится по формуле:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda z} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \bar{P}_n \sin \frac{n\theta}{2} \right] d\lambda. \quad (15)$$

Из уравнений (12) и указанных граничных условий находим, что

$$\begin{aligned} \bar{P}_n &= \frac{\pi i}{4} \left[H_{n/2}^{(1)}(sr_1) H_{n/2}^{(2)}(sr) - H_{n/2}^{(2)}(sr_1) H_{n/2}^{(1)}(sr) \right] \times \\ &\times \int_{r_1}^{r_2} \xi \left[H_{n/2}^{(1)}(sr_2) H_{n/2}^{(2)}(s\xi) - H_{n/2}^{(2)}(sr_2) H_{n/2}^{(1)}(s\xi) \right] \bar{T}_n(\xi) d\xi \times \\ &\times \left[H_{n/2}^{(2)}(sr_2) H_{n/2}^{(1)}(sr_1) - H_{n/2}^{(1)}(sr_2) H_{n/2}^{(2)}(sr_1) \right]^{-1} - \\ &- \frac{\pi i}{4} \int_{r_1}^r \xi \left[H_{n/2}^{(1)}(sr) H_{n/2}^{(2)}(s\xi) - H_{n/2}^{(2)}(sr) H_{n/2}^{(1)}(s\xi) \right] \bar{T}_n(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (16)$$

где $H_v^{(1)}(x)$, $H_v^{(2)}(x)$ — функции Ганкеля.

Перейдем теперь к нашему конкретному случаю, т. е. положим $r_1 = 0$, $r_2 = \infty$, считая, что $\bar{T}_n(r)$ отлична от нуля лишь при $\delta \leq r \leq \delta + h$. Используя асимптотические выражения для бesselевых функций, найдем

$$\begin{aligned} \bar{P}_n &= \frac{\pi i}{2} J_{n/2}(sr) \int_0^\infty \xi H_{n/2}^{(2)}(s\xi) \bar{T}_n(\xi) d\xi - \\ &- \frac{\pi i}{4} \int_0^r \xi [H_{n/2}^{(1)}(sr) H_{n/2}^{(2)}(s\xi) - H_{n/2}^{(2)}(sr) H_{n/2}^{(1)}(s\xi)] \bar{T}_n(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (17)$$

(15) совместно с (17) дает полное решение поставленной задачи.

Б) При граничных условиях (11б), поступая совершенно аналогично, получим вместо (17) следующее выражение для $\bar{P}_n$:

$$\begin{aligned} \bar{P}_n &= \frac{\pi i}{2} J_{n/2}(sr) \int_0^\infty \xi H_{n/2}^{(2)}(s\xi) \bar{T}_n'(\xi) d\xi - \\ &- \frac{\pi i}{4} \int_0^r \xi [H_{n/2}^{(1)}(sr) H_{n/2}^{(2)}(s\xi) - H_{n/2}^{(2)}(sr) H_{n/2}^{(1)}(s\xi)] \bar{T}_n'(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\bar{P}_n = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^\infty e^{i\lambda z} \left[\int_0^{2\pi} P \cos \frac{n\theta}{2} d\theta \right] dz, \quad (19)$$

$$\bar{T}_n'(r) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\infty}^\infty e^{i\lambda z} \int_0^{2\pi} T \cos \frac{n\theta}{2} dz d\theta, \quad (20)$$

$$s^2 = k^2 - \lambda^2, \quad \text{Im}(s) < 0.$$

Здесь обратный переход к P дается формулой:

$$P = \int_{-\infty}^\infty e^{-i\lambda z} \left[\frac{\bar{P}_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty \bar{P}_n \cos \frac{n\theta}{2} \right] d\lambda. \quad (21)$$

2. Решения для различных компонент различных диполей

а) Найдем A_z в случае электрического диполя z , когда граничные условия заданы в виде (11а), а $T = -\frac{4\pi\mu}{c} j_z$. Полагая, что

$$j_z = \begin{cases} j_0 & \text{при } \delta \leq r \leq \delta + h, \alpha \leq 0 \leq \alpha + \beta, -g \leq z \leq g, \\ 0 & \text{при других } r, \theta, z, \end{cases} \quad (22)$$

где j_0 — постоянная, найдем последовательно

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_\tau^g j_z r dr d\theta dz = \lim_{\substack{h \rightarrow 0, g \rightarrow 0 \\ \beta \rightarrow 0}} (2\delta h \beta g j_0) = i \omega p,$$

$$\bar{T}_n(r) = \frac{-2\mu j_0}{\pi c} \int_{-g}^g e^{i\lambda z} dz \int_\alpha^{\alpha+\beta} \sin \frac{n\theta}{2} d\theta \approx -\frac{4\mu \sin \frac{n\alpha}{2}}{\pi c} \beta g j_0 \text{ при } \delta \leq r \leq \delta + h,$$

$\overline{T}_n(r) = 0$ при остальных r ;

$$\begin{aligned} \overline{P}_n &= \frac{\omega \mu p}{c} J_{n/2}(sr) H_{n/2}^{(2)}(s\delta) \sin \frac{n\alpha}{2} - \\ &- \begin{cases} 0 & \text{при } r \leq \delta, \\ \frac{\omega \mu p}{2c} [H_{n/2}^{(1)}(sr) H_{n/2}^{(2)}(s\delta) - H_{n/2}^{(2)}(sr) H_{n/2}^{(1)}(s\delta)] \sin \frac{n\alpha}{2} & \text{при } r \geq \delta, \end{cases} \end{aligned} \quad (23)$$

$$A_z = -\frac{i \omega \mu p}{c} \Phi,$$

где

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda z} \left[\frac{1}{i} \sum_{n=1}^{\infty} J_{n/2}(sr) H_{n/2}^{(2)}(s\delta) \sin \frac{n\alpha}{2} \sin \frac{n\theta}{2} \right] d\lambda \quad \text{при } r \leq \delta, \\ \Phi &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda z} \left[\frac{1}{i} \sum_{n=1}^{\infty} J_{n/2}(s\delta) H_{n/2}^{(2)}(sr) \sin \frac{n\alpha}{2} \sin \frac{n\theta}{2} \right] d\lambda \quad \text{при } r \geq \delta. \end{aligned} \quad (24)$$

Функция Φ может быть выражена следующим образом через одно-кратные интегралы (см. Приложение):

$$\Phi = -\frac{ik}{2} \int_{-b}^{\infty} \frac{H_1^{(2)}(k\sqrt{R^2 + \xi^2})}{\sqrt{R^2 + \xi^2}} d\xi + \frac{ik}{2} \int_{-b_1}^{\infty} \frac{H_1^{(2)}(k\sqrt{R_1^2 + \xi^2})}{\sqrt{R_1^2 + \xi^2}} d\xi, \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{r^2 + \delta^2 - 2r\delta \cos(\theta - \alpha) + z^2}, \quad b = 2\sqrt{r\delta} \cos \frac{\theta - \alpha}{2}, \\ R_1 &= \sqrt{r^2 + \delta^2 - 2r\delta \cos(\theta + \alpha) + z^2}, \quad b_1 = 2\sqrt{r\delta} \cos \frac{\theta + \alpha}{2}, \end{aligned} \quad (25a)$$

$$2\pi \geq 0 > \pi + \alpha, \quad \text{Im}(k) < 0.$$

б) Найдем H_z в случае электрического радиального диполя:

$$|\mathbf{j}| = j_r, \quad T = \frac{4\pi}{cr} \frac{\partial j_r}{\partial \theta}.$$

Полагая

$$\begin{aligned} j_r &= j_0 \sin \frac{\pi}{\beta} (\theta - \alpha) \quad \text{при } \delta \leq r \leq \delta + h, \quad \alpha \leq \theta \leq \alpha + \beta, \quad -g \leq z \leq g, \\ j_r &= 0 \quad \text{при других } r, \theta, z, \end{aligned} \quad (26)$$

легко находим

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int j_r r dr d\theta dz = \lim_{\substack{h \rightarrow 0, g \rightarrow 0 \\ \beta \rightarrow 0}} \left(\frac{4}{\pi} \delta h \beta g j_0 \right) = i \omega p,$$

$$\overline{T}'_n(r) = \frac{4n \beta g j_0}{\pi^2 cr} \sin \frac{n\alpha}{2} \quad \text{при } \delta \leq r \leq \delta + h,$$

$$\overline{T}'_n(r) = 0 \quad \text{при других } r,$$

$$\overline{P}_n = -\frac{n \omega p}{2c\delta} J_{n/2}(sr) H_{n/2}^{(2)}(s\delta) \sin \frac{n\alpha}{2} \quad \text{при } r \leq \delta,$$

$$\overline{P}_n = -\frac{n \omega p}{2c\delta} J_{n/2}(s\delta) H_{n/2}^{(2)}(sr) \sin \frac{n\alpha}{2} \quad \text{при } r \geq \delta,$$

или окончательно

$$H_z = \frac{i\omega p}{c\delta} \frac{\partial F}{\partial \alpha}, \quad (27)$$

где

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda z} \left[\frac{J_0(sr) H_0^{(2)}(s\delta)}{2i} + \right. \\ \left. + \frac{1}{i} \sum_{n=1}^{\infty} J_{n/2}(sr) H_{n/2}^{(2)}(s\delta) \cos \frac{n\alpha}{2} \cos \frac{n\theta}{2} \right] d\lambda \quad \text{при } r \leq \delta, \quad (28)$$

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda z} \left[\frac{J_0(s\delta) H_0^{(2)}(sr)}{2i} + \right. \\ \left. + \frac{1}{i} \sum_{n=1}^{\infty} J_{n/2}(s\delta) H_{n/2}^{(2)}(sr) \cos \frac{n\alpha}{2} \cos \frac{n\theta}{2} \right] d\lambda \quad \text{при } r \geq \delta,$$

что можно записать и в замкнутой форме [см. ниже формулу (73)]:

$$F = -\frac{ik}{2} \int_{-b}^{\infty} \frac{H_1^{(2)}(k\sqrt{R^2 + \xi^2})}{\sqrt{R^2 + \xi^2}} d\xi - \frac{ik}{2} \int_{-b_1}^{\infty} \frac{H_1^{(2)}(k\sqrt{R_1^2 + \xi^2})}{\sqrt{R_1^2 + \xi^2}} d\xi, \quad (29)$$

$$2\pi \geq \theta > \alpha + \pi.$$

в) При определении H_z для электрического диполя θ , положив

$$j_\theta = j_0 \sin \frac{\pi}{h} (r - \delta) \quad \text{при } \delta \leq r \leq \delta + h, \alpha \leq \theta \leq \alpha + \beta, -g \leq z \leq g, \quad (30)$$

$$j_0 = 0 \quad \text{при других } r, \theta, z,$$

получим

$$H_z = -\frac{i\omega p}{c} \frac{\partial F}{\partial \delta}. \quad (31)$$

г) При определении h_x для электрического диполя имеем $T = (4\pi/c)(\partial j_y/\partial z)$, а граничные условия относятся к типу (116). Так как элемент объема τ мал, то можно считать, что $j_y = j_r \sin \alpha$ при радиальном диполе и $j_y = j_\theta \cos \alpha$ для диполя θ . В обоих случаях можно положить токи равными $j_0 \sin(\pi/2g)(z+g)$ в элементе объема τ и нулю в остальном пространстве. Как и раньше, для радиального диполя найдем

$$P = h_x = \frac{i\omega p}{c} \sin \alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda z} \lambda \left\{ \frac{J_0(sr) H_0^{(2)}(s\delta)}{2} + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} J_{n/2}(sr) H_{n/2}^{(2)}(s\delta) \cos \frac{n\alpha}{2} \cos \frac{n\theta}{2} \right\} d\lambda, \quad r \leq \delta. \quad (32)$$

При $r \geq \delta$ в этой формуле r и δ меняются местами. Умножение на $-i\lambda$ в подынтегральном выражении соответствует взятию производной по z от ранее встречавшихся интегралов. В результате получим при радиальном диполе

$$h_x = -\frac{i\omega p}{c} \sin \alpha \frac{\partial F}{\partial z}, \quad (33)$$

при диполе θ

$$h_x = -\frac{i\omega p}{c} \cos \alpha \frac{\partial F}{\partial z}. \quad (34)$$

д) Как и в пункте г), при определении h_y для электрического радиального диполя найдем

$$h_y = \frac{i\omega p}{c} \cos \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (35)$$

а в случае диполя θ

$$h_y = -\frac{i\omega p}{c} \sin \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (36)$$

е) Пусть теперь дан магнитный диполь. Учтя различие в уравнениях (5а), (6а) и (5б), (6б) и граничных условиях прямо из формул для электрического диполя, получим

при диполе z

$$A_z^* = -\frac{i\omega \mu \varepsilon m}{c} F, \quad (37)$$

при радиальном диполе

$$E_z = -\frac{i\omega \mu m}{c\delta} \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}, e_x = \frac{i\omega \mu m}{c} \sin \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial z}, e_y = -\frac{i\omega \mu m}{c} \cos \alpha \frac{\partial F}{\partial z} \quad (38)$$

и при диполе θ

$$E_z = \frac{i\omega \mu m}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial \delta}, e_x = \frac{i\omega \mu m}{c} \cos \alpha \frac{\partial \Phi}{\partial z}, e_y = \frac{i\omega \mu m}{c} \sin \alpha \frac{\partial F}{\partial z}. \quad (39)$$

4. Решение задачи в случае электрического диполя, параллельного ребру полуплоскости

Считая, что имеется лишь z -компонента вектор-потенциала, получим

$$A_z = \frac{\omega \mu p k}{2c} \left\{ \int_{-b}^{\infty} \frac{H_1^{(2)}(k\sqrt{R^2 + \xi^2})}{\sqrt{R^2 + \xi^2}} d\xi - \int_{-b_1}^{\infty} \frac{H_1^{(2)}(k\sqrt{R_1^2 + \xi^2})}{\sqrt{R_1^2 + \xi^2}} d\xi \right\}, \quad (40)$$

где $2\pi \geq \theta > \alpha + \pi$, $\text{Im}(k) < 0$.

Воспользовавшись формулой⁹

$$\int_0^{\infty} \frac{H_1^{(2)}(\sqrt{\sigma^2 + \eta^2})}{\sqrt{\sigma^2 + \eta^2}} d\eta = -\frac{e^{-i\sigma}}{i\sigma}, \quad \text{Im}(\sigma) \leq 0, \quad (41)$$

⁹ Эта формула является частным случаем известного равенства [4]:

$$\int_0^{\infty} K_p(\alpha \sqrt{x^2 + z^2}) \frac{x^{2q+1}}{(x^2 + z^2)^{p/2}} dx = \frac{2^q \Gamma(q+1)}{\alpha^{q+1} z^{p-q-1}} K_{p-q-1}(\alpha z),$$

$\alpha > 0$, $\text{Re}(q) > -1$, которое при $p=1$, $q=-1/2$, $z=1$ принимает вид:

$$\int_0^{\infty} K_1(\alpha \sqrt{x^2 + 1}) \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\pi}{2} \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}$$

(K — функция Макдональда). Последнее равенство можно аналитически продолжить в область мнимых α , т. е. положить $\alpha = i\beta$; тогда получим (41).

найдем другую форму решения:

$$A_z = \frac{i\omega\mu p}{2c} \left\{ \frac{e^{-ikR}}{R} - \frac{e^{-ikR_1}}{R_1} - \right. \\ \left. - ik \int_0^b \frac{H_1^{(2)}(k\sqrt{R^2 + \xi^2})}{\sqrt{R^2 + \xi^2}} d\xi + ik \int_0^{b_1} \frac{H_1^{(2)}(k\sqrt{R_1^2 + \xi^2})}{\sqrt{R_1^2 + \xi^2}} d\xi \right\}. \quad (42)$$

Это выражение для A_z позволяет легко выделить поле диполя, равное $(i\omega\mu p/c)(e^{-ikR}/R)$.

Из формулы (40) заключаем, что полученное решение справедливо, по принципу аналитического продолжения, во всем рассматриваемом пространстве. Из него непосредственно видно также, что граничные условия выполнены. Легко, далее, проверить, что если считать в (40) k вещественным, то удовлетворяются условия излучения, которые в нашем случае должны иметь вид:

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \zeta \left(\frac{\partial A_z}{\partial \zeta} + ikA_z \right) = 0, \quad \zeta = r, z, \quad (43)$$

так что можно, стало быть, считать k не только комплексным, но и вещественным. Непосредственная подстановка (40) в исходное уравнение (5а) позволяет заключить, что последнее удовлетворяется. Найдя магнитное поле

$$H_x = \frac{1}{\mu} \left[\sin \theta \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} \right], \\ H_y = \frac{1}{\mu} \left[-\cos \theta \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} \right], \\ H_z = 0, \quad (44)$$

сможем убедиться, что и условия на ребре также выполнены.

Приведем формулы для плотности поверхностного тока на полуплоскости — $j^{(n)}$:

$$j_x^{(n)} = \frac{c}{4\pi} [(H_z)_{\theta=2\pi} - (H_z)_{\theta=0}] = 0, \quad (45)$$

$$j_z^{(n)} = -\frac{k\omega p}{2\pi} \sqrt{\frac{\delta}{r}} \sin \frac{\alpha}{2} \left\{ \frac{H_1^{(2)}(kt)}{t} + kb_0 \int_0^{b_0} \frac{H_2^{(2)}(k\sqrt{R_0^2 + \xi^2})}{R_0^2 + \xi^2} d\xi \right\}.$$

Здесь

$$R_0 = \sqrt{r^2 + \delta^2 - 2r\delta \cos \alpha + z^2}, \quad b_0 = 2\sqrt{r\delta} \cos \frac{\alpha}{2}, \quad t = \sqrt{(r + \delta)^2 + z^2}.$$

Рассмотрим некоторые следствия, вытекающие из полученного решения. Из него можно, во-первых, найти вектор-потенциал поля A_z для нити с током, параллельной ребру полуплоскости. Заменяя для этого $i\omega p$ на $I dz$ (I — линейный ток) и используя формулу (69) Приложения, найдем

$$\bar{A}_z = \frac{\mu I}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi e^{i\lambda z} dz = \frac{\mu I}{c} \left\{ \int_{-b}^{\infty} \frac{e^{-ik\sqrt{\rho^2 + \xi^2}}}{\sqrt{\rho^2 + \xi^2}} d\xi - \int_{-b_1}^{\infty} \frac{e^{-ik\sqrt{\rho_1^2 + \xi^2}}}{\sqrt{\rho_1^2 + \xi^2}} d\xi \right\}, \quad (46)$$

где $\rho^2 = R^2 - z^2$, $\rho_1^2 = R_1^2 - z^2$ и при $\sigma = 0$, $k = \omega \sqrt{\epsilon\mu}/c$.

Также легко получаются из (40), как предельные случаи, известные формулы

1) для поля диполя, находящегося над полной плоскостью (диполь нужно удалить на бесконечность параллельно полуплоскости в сторону положительных x);

2) для диффракции плоских волн на полуплоскости — формула Зоммерфельда (достаточно считать, что $\alpha = \text{const}$, $\delta \rightarrow \infty$, причем $\frac{i\omega\mu p}{c} \frac{e^{-ik\delta}}{\delta} = 1$)¹⁰;

3) для потенциала статического поля (достаточно положить сначала $\sigma = 0$, а затем $\omega = 0$).

5. Решение задачи в случае электрического диполя, перпендикулярного ребру полуплоскости

Пусть угол, образованный направлением диполя и осью x , будет γ (считаем, что сам диполь расположен в плоскости $z = 0$). Поле такого диполя представляет собой сумму полей радиального диполя с тем же моментом, умноженного на $\cos(\gamma - \alpha)$, и диполя θ , умноженного на $\sin(\gamma - \alpha)$. Из формул раздела 4 находим

$$\begin{aligned} H_z &= \frac{i\omega p}{c} \left\{ \frac{\cos(\gamma - \alpha)}{\delta} \frac{\partial F}{\partial \alpha} - \sin(\gamma - \alpha) \frac{\partial F}{\partial \delta} \right\}, \\ h_x &= -\frac{i\omega p}{c} \sin \gamma \frac{\partial F}{\partial z}, \\ h_y &= \frac{i\omega p}{c} \cos \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \end{aligned} \quad (47)$$

Определить нерегулярные части полей H_x и H_y можно, составив $\text{div } \mathbf{H}$:

$$\frac{\partial h'_x}{\partial x} + \frac{\partial h'_y}{\partial y} - \frac{\omega p k}{c} \left(\sqrt{\frac{\delta}{r}} + \sqrt{\frac{r}{\delta}} \right) \sin \left(\gamma - \frac{\alpha}{2} \right) \cos \frac{\theta}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{H_1^{(2)}(kt)}{t} \right] = 0.$$

Оказывается, что это уравнение удовлетворяется, если положить

$$\begin{aligned} h'_x &= -\frac{\omega p}{c} \frac{1}{\sqrt{r\delta}} \sin \left(\gamma - \frac{\alpha}{2} \right) \cos \frac{\theta}{2} \frac{\partial}{\partial z} [H_0^{(2)}(kt)], \\ h'_y &= -\frac{\omega p}{c} \frac{1}{\sqrt{r\delta}} \sin \left(\gamma - \frac{\alpha}{2} \right) \sin \frac{\theta}{2} \frac{\partial}{\partial z} [H_0^{(2)}(kt)]. \end{aligned} \quad (48)$$

При этом выполнены все граничные условия (даже при вещественном k), и простой подстановкой можно убедиться, что как однородное уравнение (6а), так и уравнение (8), удовлетворяются.

Таким образом мы получаем решение, верное во всем пространстве:

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{\omega p k^2}{2c} z \sin \gamma \left\{ \int_{-b}^{\infty} \frac{H_2^{(2)}(k\sqrt{R^2 + \xi^2})}{R^2 + \xi^2} d\xi + \int_{-b_1}^{\infty} \frac{H_2^{(2)}(k\sqrt{R_1^2 + \xi^2})}{R_1^2 + \xi^2} d\xi \right\} + \\ &\quad + \frac{\omega p k}{c} \frac{z}{\sqrt{r\delta}} \sin \left(\gamma - \frac{\alpha}{2} \right) \cos \frac{\theta}{2} \frac{H_1^{(2)}(kt)}{t}; \\ H_y &= -\frac{\omega p k^2}{2c} z \cos \gamma \left\{ \int_{-b_1}^{\infty} \frac{H_2^{(2)}(k\sqrt{R^2 + \xi^2})}{R^2 + \xi^2} d\xi - \int_{-b_1}^{\infty} \frac{H_2^{(2)}(k\sqrt{R_1^2 + \xi^2})}{R_1^2 + \xi^2} d\xi \right\} + \\ &\quad + \frac{\omega p k}{c} \frac{z}{\sqrt{r\delta}} \sin \left(\gamma - \frac{\alpha}{2} \right) \sin \frac{\theta}{2} \frac{H_1^{(2)}(kt)}{t}; \end{aligned} \quad (49)$$

¹⁰ Здесь мы считаем, что вектор-потенциал поля плоских волн: $A_z^{\text{п.в.}} = e^{ikr \cos(\theta - \alpha)}$, при $r=0$ равен вектор-потенциалу поля диполя, взятому также при $r=0$.

$$\begin{aligned}
H_z = & \frac{\omega p k^2}{2c} \left\{ [\delta \sin(\gamma - \alpha) - r \sin(\gamma - 0)] \int_{-b}^{\infty} \frac{H_2^{(2)}(k \sqrt{R^2 + \xi^2})}{R^2 + \xi^2} d\xi + \right. \\
& + [\delta \sin(\gamma - \alpha) - r \sin(\gamma + 0)] \int_{-b_1}^{\infty} \frac{H_2^{(2)}(k \sqrt{R_1^2 + \xi^2})}{R_1^2 + \xi^2} d\xi \left. \right\} - \\
& - \frac{\omega p k}{c} \sqrt{\frac{r}{\delta}} \sin\left(\gamma - \frac{\alpha}{2}\right) \cos \frac{\theta}{2} \frac{H_1^{(2)}(kt)}{t}.
\end{aligned} \quad (49)$$

Легко заметить, что вектор-потенциал поля в данном случае должен иметь вид:

$$\begin{aligned}
A_x &= \frac{i\omega \mu p}{c} \left\{ \cos \gamma \Phi + \frac{i}{V r \delta} \sin\left(\gamma - \frac{\alpha}{2}\right) \sin \frac{\theta}{2} H_0^{(2)}(kt) \right\}, \\
A_y &= \frac{i\omega \mu p}{c} \left\{ \sin \gamma F - \frac{i}{V r \delta} \sin\left(\gamma - \frac{\alpha}{2}\right) \cos \frac{\theta}{2} H_0^{(2)}(kt) \right\}, \\
A_z &= 0.
\end{aligned} \quad (50)$$

Для плотности поверхностного тока на полуплоскости получим выражения:

$$\begin{aligned}
j_x^{(n)} &= \frac{\omega p k}{2\pi} \left\{ \sqrt{\frac{r}{\delta}} \sin\left(\gamma - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{H_1^{(2)}(kt)}{t} - \right. \\
& - k [\delta \sin(\gamma - \alpha) - r \sin \gamma] \int_0^{b_0} \frac{H_2^{(2)}(k \sqrt{R_0^2 + \xi^2})}{R_0^2 + \xi^2} d\xi \left. \right\},
\end{aligned} \quad (51)$$

$$j_z^{(n)} = - \frac{\omega p k}{2\pi} z \left\{ \frac{1}{V r \delta} \sin\left(\gamma - \frac{\alpha}{2}\right) \frac{H_1^{(2)}(kt)}{t} + k \sin \gamma \int_0^{b_0} \frac{H_0^{(2)}(k \sqrt{R_0^2 + \xi^2})}{R_0^2 + \xi^2} d\xi \right\}. \quad (51a)$$

Частными случаями полученного решения являются формулы: для диполя над полной плоскостью, для дифракции плоских волн на полуплоскости и для потенциала статического поля. Переход к постоянному полю здесь интересен тем, что при вычислении потенциала статического поля существенную роль играют нерегулярные части A_x и A_y , которые, следовательно, путем сравнения с известным решением, могут быть непосредственно проверены. Вычисления при указанных предельных переходах элементарны, и мы их приводить не будем.

6. Решение задачи в случае магнитного диполя

Если диполь параллелен ребру полуплоскости, то известен вектор-потенциал $\mathbf{A}^*$ [см. (37)], имеющий одну составляющую A_z^* .

В том случае, когда диполь перпендикулярен ребру, совершенно аналогично (49) находятся выражения для электрического поля:

$$\begin{aligned}
E_x &= - \frac{\omega \mu m k^2}{2c} z \sin \gamma \left\{ \int_{-b}^{\infty} \frac{H_2^{(2)}(k \sqrt{R^2 + \xi^2})}{R^2 + \xi^2} d\xi - \int_{-b_1}^{\infty} \frac{H_2^{(2)}(k \sqrt{R_1^2 + \xi^2})}{R_1^2 + \xi^2} d\xi \right\} - \\
& - \frac{\omega \mu m k}{c} \frac{z}{V r \delta} \cos\left(\gamma - \frac{\alpha}{2}\right) \sin \frac{\theta}{2} \frac{H_1^{(2)}(kt)}{t}, \\
E_y &= \frac{\omega \mu m k^2}{2c} z \cos \gamma \left\{ \int_{-b}^{\infty} \frac{H_2^{(2)}(k \sqrt{R^2 + \xi^2})}{R^2 + \xi^2} d\xi + \int_{-b_1}^{\infty} \frac{H_2^{(2)}(k \sqrt{R_1^2 + \xi^2})}{R_1^2 + \xi^2} d\xi \right\} + \\
& + \frac{\omega \mu m k}{c} \frac{z}{V r \delta} \cos\left(\gamma - \frac{\alpha}{2}\right) \cos \frac{\theta}{2} \frac{H_1^{(2)}(kt)}{t},
\end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned}
 E_z = & -\frac{\omega \mu m k^2}{2c} \left\{ [\delta \sin(\gamma - \alpha) - r \sin(\gamma - \theta)] \int_{-b}^{\infty} \frac{H_2^{(2)}(k \sqrt{R^2 + \xi^2})}{R^2 + \xi^2} d\xi - \right. \\
 & \left. - [\delta \sin(\gamma - \alpha) - r \sin(\gamma + \theta)] \int_{-b_1}^{\infty} \frac{H_2^{(2)}(k \sqrt{R_1^2 + \xi^2})}{R_1^2 + \xi^2} d\xi \right\} - \\
 & - \frac{\omega \mu m k}{c} \sqrt{\frac{r}{\delta}} \cos\left(\gamma - \frac{\alpha}{2}\right) \sin \frac{\theta}{2} \frac{H_1^{(2)}(kt)}{t}. \quad (52)
 \end{aligned}$$

7. Теорема единственности

Пусть $\mathbf{e}$, $\mathbf{h}$ — электрическое и магнитное поля разности двух решений, удовлетворяющие однородной системе уравнений Максвелла, условиям на бесконечности, указанным в разделе 4, граничным условиям на полуплоскости (где $e_x = e_z = 0$) и условиям на ребре (т. е. e_z , h_z у ребра ограничены, а другие компоненты при $r \rightarrow 0$ могут стремиться к бесконечности, но не быстрее, чем $r^{-1/2}$).

Если обозначить величины, комплексно сопряженные с $\mathbf{e}$ и $\mathbf{h}$, через $\mathbf{e}^*$ и $\mathbf{h}^*$, то из уравнений Максвелла известным путем получим тождество:

$$\operatorname{div}[\mathbf{h}\mathbf{e}^*] + \operatorname{div}[\mathbf{h}^*\mathbf{e}] = \frac{8\pi\sigma}{c} \mathbf{e}\mathbf{e}^*. \quad (53)$$

Проинтегрируем (53) по пространству, ограниченному с одной стороны поверхностью шара K большого радиуса R' и с другой стороны поверхностью обеих сторон полуплоскости, ребро которой окружено цилиндром малого радиуса ρ . К такой области можно применить теорему Гаусса — Остроградского, и мы получим интегралы по трем указанным поверхностям от проекций векторных произведений $[\mathbf{h}\mathbf{e}^*]$ и $[\mathbf{h}^*\mathbf{e}]$ на нормаль к этим поверхностям. Интеграл по поверхности полуплоскости обратится в нуль, так как здесь $e_x = e_z = 0$. Интеграл по цилиндрической поверхности, окружающей ребро, при $\rho \rightarrow 0$ будет стремиться к нулю, как $\sqrt{\rho}$, так как e_z , e_z^* , h_z , h_z^* ограничены при малых ρ , а элемент поверхности содержит множитель ρ . В результате получим

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} [h_\eta e_\xi^* - h_\xi e_\eta^* + h_\eta^* e_\xi - h_\xi^* e_\eta] R'^2 \sin \eta d\eta d\zeta = \frac{8\pi\sigma}{c} \int_V \mathbf{e}\mathbf{e}^* dV, \quad (54)$$

где ξ , η , ζ — сферические координаты.

При $\sigma \neq 0$ отсюда сразу следует, что $\mathbf{e}$ — тождественно равно нулю во всем пространстве. При $\sigma = 0$ доказательство может быть проведено обычным путем.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Найдем значения двух интегралов

$$\Phi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda z} \left[\frac{1}{i} \sum_{n=1}^{\infty} J_{n/2}(sr) H_{n/2}^{(2)}(s\delta) \sin \frac{n\alpha}{2} \sin \frac{n\theta}{2} \right] d\lambda, \quad (56)$$

$$\begin{aligned}
 F = & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda z} \left[\frac{1}{2i} J_0(sr) H_0^{(2)}(s\delta) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{i} \sum_{n=1}^{\infty} J_{n/2}(sr) H_{n/2}^{(2)}(s\delta) \cos \frac{n\alpha}{2} \cos \frac{n\theta}{2} \right] d\lambda, \quad (57)
 \end{aligned}$$

где $s = \sqrt{k^2 - \lambda^2}$, $\text{Im}(s) < 0$, $\text{Im}(k) < 0$, $r \leq \delta$, и надо считать, что при $r \gg \delta$ r и δ меняются местами.

Сначала вычислим интеграл (56). Представим ряд, стоящий под интегралом, при $r \leq \delta$, суммой двух контурных интегралов:

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} \sum_{n=1}^{\infty} J_{n/2}(sr) H_{n/2}^{(2)}(s\delta) \sin \frac{n\alpha}{2} \sin \frac{n\theta}{2} &= \frac{1}{2} \int_{L'} \frac{J_{\nu}(sr) H_{\nu}^{(2)}(s\delta) \sin \nu \alpha \sin \nu (\theta - 2\pi)}{\sin 2\pi \nu} d\nu - \\ &- \frac{1}{2} \int_{L''} \frac{J_{-\nu}(sr) H_{-\nu}^{(2)}(s\delta) \sin \nu \alpha \sin \nu (\theta - 2\pi)}{\sin 2\pi \nu} d\nu. \end{aligned}$$

Здесь контур L' представляет прямую L , идущую по мнимой оси снизу вверх и замкнутую вправо дугой большого радиуса R' , причем эта дуга проходит между полюсами подинтегрального выражения, находящимися в точках $\nu = \pm n/2$. Контур L'' отличается от L' лишь тем, что прямая L замыкается дугой влево. Рассмотрим, при каких значениях параметров контурные интегралы сходятся, для чего воспользуемся оценочными неравенствами, справедливыми при любых $\nu = u + it$

$$|J_{\nu}(x)| < C \left(\frac{x}{2}\right)^u / |\Gamma(\nu + 1)|^{11}, \quad (58)$$

$$|J_{\nu}(sr) H_{\nu}^{(2)}(s\delta)| < \frac{C_1}{|\nu|} \left(\frac{r}{\delta}\right)^u \left\{ 1 + \frac{2\pi u (s\delta/2)^{2u}}{[\Gamma(u+1)]^2} e^{-\pi t} \right\}, \quad (59)$$

где $u \geq 0$, $\text{Im}(s) \leq 0$, C, C_1 — не зависят от ν при достаточно больших ν , а $\Gamma(x)$ — γ -функция. Значит, при $2\pi \geq \theta > \alpha + \pi$ интегралы по дугам при больших R' обратятся в нуль, а интегралы по L будут сходиться. В результате при любых r и $2\pi \geq \theta > \alpha + \pi$ получим

$$\Phi = \frac{i}{4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda z} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{e^{-i\pi\nu} H_{\nu}^{(2)}(sr) H_{\nu}^{(2)}(s\delta) \sin \nu \alpha \sin \nu (\theta - 2\pi)}{\cos \pi \nu} d\lambda d\nu. \quad (60)$$

Внутренний интеграл здесь сводится к вычислению выражения:

$$\begin{aligned} Q(\psi) &= \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\cos \psi \nu}{\cos \pi \nu} e^{-i\pi \nu} H_{\nu}^{(2)}(sr) H_{\nu}^{(2)}(s\delta) d\nu, \\ &- \pi < \psi < \pi. \end{aligned} \quad (61)$$

Для преобразования (61) воспользуемся формулой

$$K_{\nu}(x) K_{\nu}(y) = \int_0^{\infty} K_0(\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy \operatorname{ch} \xi}) \operatorname{ch} \nu \xi d\xi, \quad (62)$$

верной при любых ν , но вещественных x и y . Если считать здесь x и y мнимыми $x = ir$, $y = i\delta$, то для сходимости интеграла надо полагать ν чисто-мнимой величиной. Тогда получим

$$e^{-i\pi \nu} H_{\nu}^{(2)}(sr) H_{\nu}^{(2)}(s\delta) = \frac{2i}{\pi} \int_0^{\infty} H_0^{(2)}(s\sqrt{r^2 + \delta^2 + 2r\delta \operatorname{ch} \xi}) \operatorname{ch} \nu \xi d\xi. \quad (63)$$

¹¹ Это неравенство получается совершенно так же, как и неравенство для $I_{\nu}(x)$ (см. [3], стр. 389).

Представим $Q(\psi)$ двойным интегралом, в котором изменим порядок интегрирования и вычислим внутренний интеграл

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\cos \psi v}{\cos \pi v} \operatorname{ch} vs dv = 2i \frac{\cos \frac{\psi}{2} \operatorname{ch} \frac{s}{2}}{\operatorname{ch} s + \cos \psi}, \quad -\pi < \psi < \pi, \quad (64)$$

$$Q(\psi) = -\frac{4}{\pi} \cos \frac{\psi}{2} \int_0^{\infty} H_0^{(2)}[s \sqrt{(r+\delta)^2 + 4r\delta u^2}] \frac{du}{u^3 + \cos^2 \frac{\psi}{2}}. \quad (65)$$

Заменяем функцию Ганкеля в (65) интегралом [4]

$$H_v^{(2)}(z) = \frac{i}{\pi} \exp\left\{\frac{i\pi v}{2}\right\} z^v \int_0^{\infty} \exp\left\{-\frac{i}{2}\left(t + \frac{z^2}{t}\right)\right\} \frac{dt}{t^{v+1}},$$

$$\operatorname{Re}(p) > -1, \quad 0 < \arg z < -\frac{\pi}{2}. \quad (66)$$

Снова изменяя порядок интегрирования, вычисляя внутренний элементарный интеграл и пользуясь (66), найдем:

$$Q(\psi) = -2H_0^{(2)}(s\rho_2) + \frac{4i}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\exp\left\{-is\sqrt{\rho_2^2 + \xi^2}\right\}}{\sqrt{\rho_2^2 + \xi^2}} d\xi, \quad (67)$$

где $\rho_2 = \sqrt{r^2 + \delta^2 - 2r\delta \cos \psi}$.

В результате, используя равенство

$$H_0^{(2)}(x) = \frac{2i}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\exp\{-ix\sqrt{1+v^2}\}}{\sqrt{1+v^2}} dv, \quad \operatorname{Im}(x) \leq 0, \quad (68)$$

получим вместо (60)

$$\Phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda z} \left[\int_{-b}^{\infty} \frac{\exp\{-is\sqrt{\rho^2 + \xi^2}\}}{\sqrt{\rho^2 + \xi^2}} d\xi - \int_{-b_1}^{\infty} \frac{\exp\{-is\sqrt{\rho_1^2 + \xi^2}\}}{\sqrt{\rho_1^2 + \xi^2}} d\xi \right] d\lambda, \quad (69)$$

где $s = \sqrt{k^2 - \lambda^2}$, $\rho = \sqrt{r^2 + \delta^2 - 2r\delta \cos(\theta - \alpha)}$, $b = 2\sqrt{r\delta} \cos \frac{\theta - \alpha}{2}$,

величины ρ_1, b_1 отличаются от ρ, b знаком перед α .

Полученный двойной интеграл легко сводится к однократному. Изменим в (69) порядок интегрирования и воспользуемся известной формулой [4]:

$$\int_0^{\infty} J_{\mu}(bt) \frac{K_{\nu}(a\sqrt{t^2 - y^2})}{(t^2 - y^2)^{\nu/2}} t^{\mu+1} dt =$$

$$= \frac{\pi}{2} \exp\left\{-\pi\left(\nu - \mu - \frac{1}{2}\right)i\right\} \frac{b^{\mu}}{a^{\nu}} \left[\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{y}\right]^{\nu - \mu - 1} H_{\nu - \mu - 1}^{(2)}(y\sqrt{a^2 + b^2}), \quad (70)$$

справедливой при условиях: $\operatorname{Re}(\nu) < 1$, a и b положительны, знак $\sqrt{t^2 - y^2}$ берется положительный, а особая точка $t = y$ обходится сверху.

Положив в (70) $\mu = -1/2$, $\nu = -1/2$, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-ibt - ia\sqrt{y^2 - t^2}\} dt = -\pi i \frac{ay}{V a^2 + b^2} H_1^{(2)}(y\sqrt{a^2 + b^2}), \quad (71)$$

a и b — положительные, $\text{Im}(\sqrt{y^2 - t^2}) < 0$, $\text{Im}(y) < 0$. Итак, при $2\pi \geq \theta > \alpha + \pi$, $\text{Im}(k) < 0$:

$$\Phi = -\frac{ik}{2} \left\{ \int_{-b}^{\infty} \frac{H_1^{(2)}(k\sqrt{R^2 + \xi^2})}{V R^2 + \xi^2} d\xi - \int_{-b_1}^{\infty} \frac{H_1^{(2)}(k\sqrt{R_1^2 + \xi^2})}{V R_1^2 + \xi^2} d\xi \right\}, \quad (72)$$

где $R = \sqrt{\rho^2 + z^2}$, $R_1 = \sqrt{\rho_1^2 + z^2}$.

Совершенно аналогично вычисляется и интеграл (52), который при тех же θ и k оказывается равным:

$$F = -\frac{ik}{2} \left\{ \int_{-b}^{\infty} \frac{H_1^{(2)}(k\sqrt{R^2 + \xi^2})}{V R^2 + \xi^2} d\xi + \int_{-b_1}^{\infty} \frac{H_1^{(2)}(k\sqrt{R_1^2 + \xi^2})}{V R_1^2 + \xi^2} d\xi \right\}. \quad (73)$$

В заключение приношу искреннюю благодарность проф. Г. А. Гринбергу, непосредственно руководившему настоящей работой, а также проф. Н. Н. Лебедеву и Я. С. Уфлянд, давшим ряд ценных советов и указаний.

Ленинградский физико-технический институт
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
23 июня 1953 г.

Литература

- [1] Ф. Франк и Р. Мизес. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ОНТИ, 1937.—[2] J. Meixner. Ann. d. Phys., (6) 6, 2, 1949.—[3] Г. А. Гринберг. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений, Изд-во АН СССР, 1948.—[4] И. М. Рыжик и И. С. Градштейн. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., ГИТТЛ, 1951.

ИЗЛУЧЕНИЕ ФОТОНОВ И ЭЛЕКТРОННО-ПОЗИТРОННЫХ ПАР В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Н. П. Клепиков

При помощи релятивистской квантовой теории рассматриваются явление светящегося электрона, а также излучение пар фотонами и электронами и однофотонная аннигиляция пар в магнитном поле. Получаемые результаты остаются справедливыми при очень сильных магнитных полях, когда интенсивность излучения электронов существенно отличается от интенсивности, вычисленной по классической теории.

1. Волновые функции и матричные элементы

Квантовая теория светящегося электрона привлекла в последнее время внимание ряда исследователей, получивших, однако, лишь некоторые частные результаты. Поэтому возникает необходимость рассмотреть теорию этого явления более последовательно, чем это делалось до сих пор, а также построить при помощи того же математического аппарата теорию других превращений частиц в магнитном поле.

Настоящая статья является развитием работ [1-4] по квантовой теории светящегося электрона, причем применимость вычислений для интенсивности излучения не ограничена здесь условием малости квантовых поправок к классическим формулам. Рассмотрены также явления, связанные с рождением и аннигиляцией электронно-позитронных пар в магнитном поле.

Для определения вероятности превращения частиц в магнитном поле найдем прежде всего стационарные волновые функции электронов в магнитном поле как собственные функции следующей полной системы коммутирующих операторов:

оператора энергии

$$\hat{\mathcal{H}} = c\rho_1\vec{\sigma}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right) + \rho_3mc^2, \quad (1.1)$$

оператора проекции импульса на магнитное поле

$$\hat{p}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z}, \quad (1.2)$$

оператора проекции импульса на спин

$$\hat{p}_\sigma = \vec{\sigma}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right) \quad (1.3)$$

и оператора у-координаты центра вращения

$$\hat{y}_0 = -\frac{1}{i}\frac{c\hbar}{eH}\frac{\partial}{\partial x}, \quad (1.4)$$

предполагая, что ось z направлена по магнитному полю и вектор-потенциал имеет вид

$$A_x = -Hy, \quad A_y = A_z = 0. \quad (1.5)$$

Собственные функции этой системы операторов имеют вид:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{L_x L_z}} \exp \left\{ -i\epsilon K t + i k_1 x + i k_3 z - \frac{\xi^2}{2} \right\} \begin{pmatrix} \alpha & A & \bar{H}_l(\xi) \\ s\alpha & B & \bar{H}_{l-1}(\xi) \\ s\epsilon\beta & A & \bar{H}_l(\xi) \\ \epsilon\beta & B & \bar{H}_{l-1}(\xi) \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \epsilon \frac{k_0}{K} \right)}, \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \epsilon \frac{k_0}{K} \right)}, \quad (1.7)$$

$$A = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + s \frac{k_3}{k} \right)}, \quad B = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - s \frac{k_3}{k} \right)}, \quad (1.8)$$

$\bar{H}_l(\xi) = \sqrt{\frac{1}{2^l l!}} \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} H_l(\xi)$ — нормированный полином Эрмита, $\xi = y\sqrt{\gamma} + \frac{k_1}{\sqrt{\gamma}}$, $k = \sqrt{k_0^2 + 2l\gamma}$, $sk\hbar$ — собственное значение оператора (1.3), $s = \pm 1$, $l = 0, 1, 2, \dots$ — целое число, $\gamma = eH/c\hbar$. Энергия электрона равна $E = \epsilon\hbar K$, $\epsilon = \pm 1$,

$$K = \sqrt{k_0^2 + k_3^2 + 2l\gamma}, \quad (1.9)$$

импульс вдоль поля равен $p_z = \hbar k_3$, $-\infty < k_3 < \infty$ и y -координата центра вращения равна $y_0 = -k_1/\gamma$, $-\infty < k_1 < \infty$. Из (1.9) следует

$$l = \frac{H_0}{2H} \left[\left(\frac{E}{mc^2} \right)^2 - 1 - \left(\frac{p_z}{mc} \right)^2 \right], \quad (1.10)$$

где $H_0 = m^2 c^3 / e\hbar = 4,67 \cdot 10^{13}$ Ое. Преобразованием координат и калибровки потенциала легко установить соответствие функций (1.6) с функциями других авторов, найденными для других наборов операторов (см. [3]).

Рассмотрим теперь матричные элементы оператора $\vec{a} e^{i\vec{x}r}$ относительно волновых функций (1.6). Интегрируя по координатам x и z , мы получим $\delta_{k'_1, x_1+k_1} \delta_{k'_3, x_3+k_3}$, а интеграл по y дает

$$\bar{\alpha}_x = \alpha' A' \epsilon \beta B I(l', l-1) + s' \alpha' B' \epsilon s \beta A I(l'-1, l) + \epsilon' s' \beta' A' s \alpha B I(l', l-1) + \epsilon' \beta' B' \alpha A I(l'-1, l), \quad (1.11)$$

$$\bar{\alpha}_y = i \{ -\alpha' A' \epsilon \beta B I(l', l-1) + s' \alpha' B' \epsilon s \beta A I(l'-1, l) - \epsilon' s' \beta' A' s \alpha B I(l', l-1) + \epsilon' \beta' B' \alpha A I(l'-1, l) \}, \quad (1.12)$$

$$\bar{\alpha}_z = \alpha' A' \epsilon s \beta A I(l', l) - s' \alpha' B' \epsilon \beta B I(l'-1, l-1) + \epsilon' s' \beta' A' \alpha A I(l', l) - \epsilon' \beta' B' s \alpha B I(l'-1, l-1), \quad (1.13)$$

где коэффициенты определяются равенствами (1.7) и (1.8) и

$$\begin{aligned} I(l', l) &= \frac{V\gamma}{\sqrt{l! l'!} 2^{l+l'} \pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_{l'} \left(y\sqrt{\gamma} + \frac{k_1 + x_1}{\sqrt{\gamma}} \right) H_l \left(y\sqrt{\gamma} + \frac{k_1}{\sqrt{\gamma}} \right) \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(y\sqrt{\gamma} + \frac{k_1 + x_1}{\sqrt{\gamma}} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(y\sqrt{\gamma} + \frac{k_1}{\sqrt{\gamma}} \right)^2 + i x_2 y \right\} dy = \\ &= \frac{1}{(l-l')!} \sqrt{\frac{l!}{l'!}} \exp \left\{ -\frac{q}{2} - i(l-l')\varphi - i x_2 \frac{2k_1 + x_1}{2\gamma} \right\} \times \\ &\times q^{(l-l')/2} {}_1F_1 \left(-l'; l-l'+1; q \right), \end{aligned} \quad (1.14)$$

где $l \geq l'$, $q = (\kappa_1^2 + \kappa_2^2)/2\gamma$, $\varphi = \text{arctg}(\kappa_2/\kappa_1)$. Интеграл (1.14) вычисляется при помощи перехода к переменной $z = y\sqrt{\gamma} + (2k_1 + \kappa_1 - i\kappa_2)/2\sqrt{\gamma}$ [путь интегрирования по прямой $z = -(i\kappa_2/2\sqrt{\gamma}) + x$], переноса пути интегрирования на действительную ось, использования равенства

$$H_l(z+a) = \sum_{k=0}^l \frac{l!}{k!(l-k)!} (2a)^k H_{l-k}(z) \quad (1.15)$$

и использования ортогональности полиномов Эрмита. При помощи соотношения

$${}_1F_1(-l'; l-l'+1; z) = \frac{(l-l')!}{l!} (-z)^{l'} {}_2F_0\left(-l', -l; -\frac{1}{z}\right) \quad (1.16)$$

легко найти (учитывая симметрию функции ${}_2F_0$ относительно ее параметров), что

$$I(l', l) e^{il(2\varphi-\pi)} = I(l, l') e^{il'(2\varphi-\pi)}. \quad (1.17)$$

Суммируя по спиновым переменным s, s' , найдем, что

$$\sum_{s, s'=\pm 1} |\bar{\alpha}_x|^2 = \frac{KK' - \varepsilon\varepsilon' k_0^2 - \varepsilon\varepsilon' k_3 k_3'}{2KK'} [|I(l', l-1)|^2 + |I(l'-1, l)|^2] + \\ + \frac{\varepsilon\varepsilon'\gamma V\overline{l'}}{KK'} [I^+(l', l-1)I(l'-1, l) + I^+(l'-1, l)I(l', l-1)], \quad (1.18)$$

$$\sum_{s, s'=\pm 1} |\bar{\alpha}_y|^2 = \frac{KK' - \varepsilon\varepsilon' k_0^2 - \varepsilon\varepsilon' k_3 k_3'}{2KK'} [|I(l', l-1)|^2 + |I(l'-1, l)|^2] - \\ - \frac{\varepsilon\varepsilon'\gamma V\overline{l'}}{KK'} [I^+(l', l-1)I(l'-1, l) + I^+(l'-1, l)I(l', l-1)], \quad (1.19)$$

$$\sum_{s, s'=\pm 1} |\bar{\alpha}_z|^2 = \frac{KK' - \varepsilon\varepsilon' k_0^2 + \varepsilon\varepsilon' k_3 k_3'}{2KK'} [|I(l', l)|^2 + |I(l'-1, l-1)|^2] - \\ - \frac{\varepsilon\varepsilon'\gamma V\overline{l'}}{KK'} [I^+(l', l)I(l'-1, l-1) + I^+(l'-1, l-1)I(l', l)], \quad (1.20)$$

$$\sum_{s, s'=\pm 1} (\bar{\alpha}_x^+ \bar{\alpha}_z + \bar{\alpha}_z^+ \bar{\alpha}_x) = \\ = \frac{\varepsilon\varepsilon'}{2KK'} \{k_3 \sqrt{2l'\gamma} [I^+(l', l)I(l', l-1) + I^+(l', l-1)I(l', l) + \\ + I^+(l'-1, l-1)I(l'-1, l) + I^+(l'-1, l)I(l'-1, l-1)] + \\ + k_3 \sqrt{2l'\gamma} [I^+(l'-1, l-1)I(l', l-1) + I^+(l', l-1)I(l'-1, l-1) + \\ + I^+(l', l)I(l'-1, l) + I^+(l'-1, l)I(l', l)]\}, \quad (1.21)$$

$$\sum_{s, s'=\pm 1} (\bar{\alpha}_y^+ \bar{\alpha}_z + \bar{\alpha}_z^+ \bar{\alpha}_y) = \\ = \frac{i\varepsilon\varepsilon'}{2KK'} \{k_3 \sqrt{2l'\gamma} [-I^+(l', l)I(l', l-1) + I^+(l', l-1)I(l', l) + \\ + I^+(l'-1, l-1)I(l'-1, l) - I^+(l'-1, l)I(l'-1, l-1)] + \\ + k_3 \sqrt{2l'\gamma} [-I^+(l'-1, l-1)I(l', l-1) + I^+(l', l-1)I(l'-1, l-1) + \\ + I^+(l', l)I(l'-1, l) - I^+(l'-1, l)I(l', l)]\}, \quad (1.22)$$

$$\sum_{s, s'=\pm 1} (\bar{\alpha}_x^+ \bar{\alpha}_y + \bar{\alpha}_y^+ \bar{\alpha}_x) = \\ = 2i \frac{\varepsilon\varepsilon'\gamma V\overline{l'}}{KK'} [I^+(l', l-1)I(l'-1, l) - I^+(l'-1, l)I(l', l-1)]. \quad (1.23)$$

Для дальнейшего нам нужно будет также представить интегралы (1.14) в другом виде. При помощи соотношений

$$z {}_1F_1(\alpha + 1; \gamma + 1; z) = \gamma {}_1F_1(\alpha + 1; \gamma; z) - \gamma {}_1F_1(\alpha; \gamma; z), \quad (1.24)$$

$$\alpha {}_1F_1(\alpha + 1; \gamma + 1; z) = (\alpha - \gamma) {}_1F_1(\alpha; \gamma + 1; z) + \gamma {}_1F_1(\alpha; \gamma; z) \quad (1.25)$$

легко получить, что

$$e^{-i\varphi} \sqrt{q} I(l', l-1) = -\sqrt{l'} I(l'-1, l-1) + \sqrt{l'} I(l', l), \quad (1.26)$$

$$e^{i\varphi} \sqrt{q} I(l'-1, l) = \sqrt{l'} I(l'-1, l-1) - \sqrt{l'} I(l', l). \quad (1.27)$$

Далее при помощи равенства

$$\frac{d}{dz} {}_1F_1(\alpha; \gamma; z) = \frac{\alpha}{\gamma} {}_1F_1(\alpha + 1; \gamma + 1; z) \quad (1.28)$$

найдем

$$\sqrt{l'l'} I(l'-1, l-1) = \frac{1}{2} (l + l' - q) I(l', l) - q \frac{\partial I(l', l)}{\partial q}. \quad (1.29)$$

Комбинируя (1.29) с (1.26) и (1.27), получим

$$e^{-i\varphi} \sqrt{lq} I(l', l-1) = \frac{1}{2} (q + l - l') I(l', l) + q \partial I(l', l) / \partial q, \quad (1.30)$$

$$e^{i\varphi} \sqrt{l'q} I(l'-1, l) = -\frac{1}{2} (q + l' - l) I(l', l) - q \partial I(l', l) / \partial q. \quad (1.31)$$

Таким образом четыре интеграла $I(l', l)$, $I(l', l-1)$, $I(l'-1, l)$, $I(l'-1, l-1)$ выражаются через две функции $I(l', l)$ и $\partial I(l', l) / \partial q$.

2. Асимптотические формулы для матричных элементов с большими значениями параметров

Для того чтобы иметь возможность исследовать превращение частиц при больших энергиях, нам будет необходимо найти асимптотические формулы для интегралов (1.14), входящих в матричные элементы, пригодные в тех случаях, когда числа l' , $l-l'$ и q одновременно велики. Произведя в параметрах вырожденной гипергеометрической функции ${}_1F_1(-l'; l-l'+1; q)$ замену $-l' \rightarrow -l \cos^2 \alpha$, $l-l'+1 \rightarrow l \sin^2 \alpha + 1$ ($0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$) и $q \rightarrow \zeta$, воспользуемся обычным интегральным представлением

$$\begin{aligned} & {}_1F_1(-l \cos^2 \alpha; l \sin^2 \alpha + 1; \zeta) = \\ & = \frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma(l \cos^2 \alpha + 1) \Gamma(l \sin^2 \alpha + 1)}{\Gamma(l + 1)} \oint_C \exp \{l [\zeta t + \ln(1-t) - \cos^2 \alpha (\ln t + \pi i)]\} \frac{dt}{t}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где контур C обходит точку $t=0$ в положительном направлении. Выражение под знаком экспоненты в интеграле (2.1) имеет стационарные точки при

$$t_0 = [\zeta - \sin^2 \alpha \pm \sqrt{(\zeta - \sin^2 \alpha)^2 - 4\zeta \cos^2 \alpha}] / 2\zeta. \quad (2.2)$$

Точки t_0 лежат на действительной оси, если

$$\zeta \leq (1 - \cos \alpha)^2, \quad \zeta \geq (1 + \cos \alpha)^2, \quad (2.3)$$

вследствие чего исследуемая функция будет монотонной при $l \rightarrow \infty$. В противном случае точки t_0 — комплексные, и асимптотическое пове-

дение функции имеет колебательный характер (см. [5], стр. 264). Мы не будем рассматривать последней возможности, так как в силу закона сохранения энергии для светящегося электрона всегда выполнено первое условие (2.3), а второе условие (2.3) выполнено в случае рождения и аннигиляции пар. Положим $\xi = (1 - \cos \alpha)^2 \operatorname{sech} \beta$. Если выполнено второе условие (2.3), то все расчеты аналогичны рассматриваемому случаю, и нужно лишь заменить $\cos \alpha$ на $-\cos \alpha$ и $\operatorname{sech} \beta$ на $\sec \beta$ ($0 \leq \beta < \pi/2$).

Условие $\beta = 0$ дает границу монотонности функции ${}_1F_1$. В координатах $l' \geq 0$, $n = l - l' \geq 0$, $q \geq 0$ уравнение границы (рис. 1) имеет вид:

$$n = q \pm 2\sqrt{l'q} \quad (2.4)$$

(уравнение эллиптического конуса). Область монотонности находится вне полости этого конуса.

Выберем в (2.2) положительный знак корня [при втором условии (2.3) — отрицательный], так как лишь при этом интеграл сходится при интегрировании по контуру скорейшего спуска, проходящему через t_0 . Сделаем далее замену $t \rightarrow t_0 e^t$ и получим

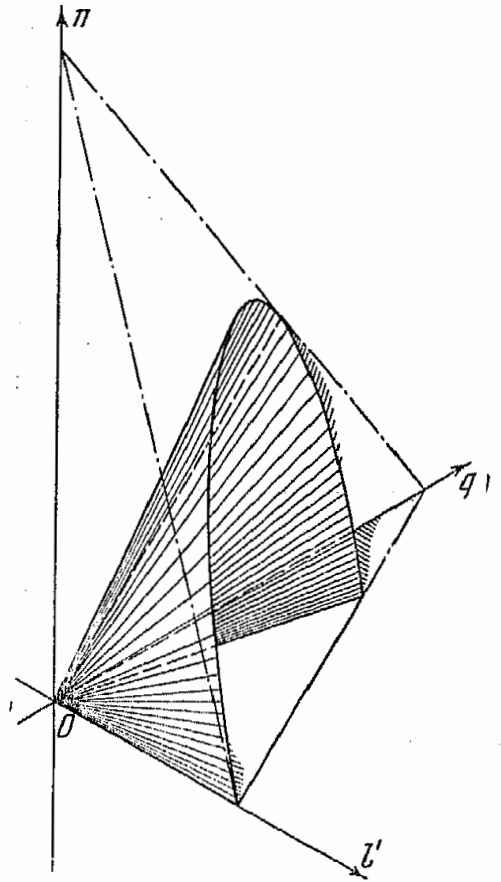


Рис. 1. Граница монотонности функции ${}_1F_1(-l', n+1, q)$

$${}_1F_1(-l \cos^2 \alpha; l \sin^2 \alpha + 1; l(1 - \cos \alpha)^2 \operatorname{sech} \beta) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\Gamma(l \cos^2 \alpha + 1) \Gamma(l \sin^2 \alpha + 1)}{\Gamma(l + 1)} \times \\ \times \exp \{l[(1 - \cos \alpha)^2 \operatorname{sech} \beta t_0 + \ln(1 - t_0) - \cos^2 \alpha (\ln t_0 + \pi i)]\} \int_C e^{-l\tau} d\tau, \quad (2.5)$$

где

$$-\tau = (1 - \cos \alpha)^2 \operatorname{sech} \beta t_0 (e^t - 1) + \ln \frac{1 - t_0 e^t}{1 - t_0} - t \cos^2 \alpha. \quad (2.6)$$

Разложим $-\tau$ по степеням t :

$$-\tau = \mu t^2 + \nu t^3 + \sigma t^4 + \dots, \quad (2.7)$$

где

$$\mu = \frac{1}{2}(\cos^2 \alpha - B^2), \quad \nu = \frac{1}{6}(\cos^2 \alpha - 3B^2 - 2B^3), \\ \sigma = \frac{1}{24}(\cos^2 \alpha - 7B^2 - 12B^3 - 6B^4), \quad B \equiv (1 - \cos \alpha)^2 \operatorname{sech} \beta t_0 - \cos^2 \alpha. \quad (2.8)$$

В частности, при $\operatorname{sech} \beta = 1 - \xi$, $\xi \ll 1$,

$$\mu \approx \sqrt{\xi} \cos^{3/2} \alpha (1 - \cos \alpha), \quad \nu \approx -\frac{1}{3} \cos^2 \alpha (1 - \cos \alpha), \\ \sigma \approx -\frac{1}{4} \cos^2 \alpha (1 - \cos \alpha)^2. \quad (2.9)$$

Обращение μ в нуль на границе монотонности делает невозможным получить для ${}_1F_1$ асимптотическую формулу, равномерно пригодную при $\xi \rightarrow 0$, при помощи метода перезала. Поэтому при $l \gg 1$ учтем

в (2.7) не один член, а оба первых члена одновременно [6]. Тогда вместо интеграла с $-\tau$ по (2.7) по контуру $\text{Im } \tau = 0$ мы будем иметь интеграл с

$$-\tau = \mu T^2 + \nu T^3 \quad (2.10)$$

в комплексной плоскости $T = U + iV$ по контуру

$$V = \pm \sqrt{(2\mu/\nu)U + 3U^2}. \quad (2.11)$$

Легко видеть, что разность этих интегралов равна

$$2i \int_0^\infty e^{-l\tau} \frac{d}{d\tau} \text{Im}(t - T) d\tau. \quad (2.12)$$

В (2.12) имеются в виду значения t и T на верхней половине контура. Вычисляя интеграл по T -контуре при помощи перенесения пути интегрирования его асимпты, мы получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_T} e^{-l\tau} dT = \frac{\mu}{3\pi\sqrt{3}|\nu|} \exp\left\{\frac{2l\mu^3}{27\nu^2}\right\} K_{1/2}\left(\frac{2l\mu^3}{27\nu^2}\right), \quad (2.13)$$

где $K_{1/2}$ есть функция Бесселя от мнимого аргумента. Как показано в [3], при помощи (2.12) можно оценить верхнюю границу ошибки в этом вычислении и получить окончательно

$$\begin{aligned} {}_1F_1(-l \cos^2 \alpha; l \sin^2 \alpha + 1; l(1 - \cos \alpha)^2 \text{sech } \beta) = \\ = \frac{\Gamma(l \cos^2 \alpha + 1) \Gamma(l \sin^2 \alpha + 1)}{\Gamma(l + 1)} \times \\ \times \exp\{l[(1 - \cos \alpha)^2 \text{sech } \beta t_0 + \ln(1 - t_0) - \cos^2 \alpha (\ln t_0 + \pi i)]\} \times \\ \times \left\{ \frac{\mu}{3\pi\sqrt{3}|\nu|} \exp\left\{\frac{2l\mu^3}{27\nu^2}\right\} K_{1/2}\left(\frac{2l\mu^3}{27\nu^2}\right) + \Theta \frac{3^{1/2} \Gamma(2/3)}{2^{1/2}\pi (l \cos^2 \alpha)^{2/3}} \right\}, \quad |\Theta| \leq 1. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Легко видеть отсюда, что (2.14) применимо при $l' \gg 1$ и при любом $\text{sech } \beta$. При $\beta \rightarrow 0$ из (2.14) получаются первые два члена разложения ${}_1F_1$ по методу перевала. При $\beta \rightarrow \infty$ правая часть (2.14) стремится к единице. Если заменить в (2.14) $\cos \alpha$ на $-\cos \alpha$ и β на $i\beta$, то полученное выражение стремится при $\beta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ к правой части (1.16), если в последней формуле заменить функцию ${}_2F_0$ единицей (при $z \gg l$ и $z \gg l'$).

Найдем теперь приближенное выражение для интеграла $I(l', l)$, входящего в матричные элементы, предполагая, что $\text{sech } \beta = 1 - \xi$, $\xi \ll 1$. Собирая все множители и разлагая как аргумент функции $K_{1/2}$, так и произведение, стоящее перед этой функцией, по степеням $\sqrt{\xi}$, найдем

$$|I(l \cos^2 \alpha, l)| \approx \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \sqrt{\xi} K_{1/2} \left\{ \frac{2l}{3} (1 - \cos \alpha) \sqrt{\xi^3 \cos \alpha} \right\}, \quad (2.15)$$

если пренебречь величинами порядка $l\xi^2$ по сравнению с $l\xi^{1/2}$. В первоначальных переменных

$$|I(l', l)| = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \frac{\sqrt{(V\bar{l} - V\bar{l}')^2 - q}}{V\bar{l} - V\bar{l}'} K_{1/2} \left\{ \frac{2}{3} \frac{\sqrt[4]{V\bar{l}'} [(V\bar{l} - V\bar{l}')^2 - q]^{3/4}}{(V\bar{l} - V\bar{l}')^2} \right\}. \quad (2.16)$$

Дифференцируя по q , найдем

$$\left| \frac{\partial I(l, l)}{\partial q} \right| = \frac{1}{\pi V^3} \frac{V^4 \overline{W} [(V\overline{l} - V\overline{l}')^2 - q]}{(V\overline{l} - V\overline{l}')^3} K_{1/2} \left\{ \frac{2}{3} \frac{V^4 \overline{W} [(V\overline{l} - V\overline{l}')^2 - q]^{3/2}}{(V\overline{l} - V\overline{l}')^2} \right\}. \quad (2.17)$$

Для второй области монотонности

$$|I(l', l)| = \frac{1}{\pi V^3} \frac{V \sqrt{q - (V\overline{l} + V\overline{l}')^2}}{V\overline{l} + V\overline{l}'} K_{1/2} \left\{ \frac{2}{3} \frac{V^4 \overline{W} [q - (V\overline{l} + V\overline{l}')^2]^{3/2}}{(V\overline{l} + V\overline{l}')^2} \right\}, \quad (2.18)$$

$$\left| \frac{\partial I(l', l)}{\partial q} \right| = \frac{1}{\pi V^3} \frac{V^4 \overline{W} [q - (V\overline{l} + V\overline{l}')^2]}{(V\overline{l} + V\overline{l}')^3} K_{1/2} \left\{ \frac{2}{3} \frac{V^4 \overline{W} [q - (V\overline{l} + V\overline{l}')^2]^{3/2}}{(V\overline{l} + V\overline{l}')^2} \right\}. \quad (2.19)$$

3. Спектр излучения светящегося электрона

Рассмотрим вероятность перехода электрона, находящегося в постоянном и однородном магнитном поле, на более низкий уровень положительной энергии с излучением фотона, рассматривая электромагнитное поле излучения в качестве возмущения. Энергию возмущения возьмем в обычном виде:

$$U^+ = \frac{e}{\sqrt{L_x L_y L_z}} \sqrt{\frac{2\pi c \hbar}{\kappa}} \vec{\alpha} \cdot \vec{a}^+(\vec{x}) e^{i\kappa \vec{x} t - i\vec{\kappa} \cdot \vec{x}}, \quad (3.1)$$

где $\hbar \vec{\kappa}$ и $c \hbar \kappa$ — импульс и энергия фотона, причем

$$a_\lambda(\vec{x}) a_{\lambda'}^+(\vec{x}) = \delta_{\lambda\lambda'} - (\kappa_\lambda \kappa_{\lambda'}) / \kappa^2. \quad (3.2)$$

Применяя обычный расчет по методам нестационарной теории возмущений и предположив, что $k_1 = k_3 = 0$, найдем вероятность перехода

$$w = \frac{4\pi^2 e^2}{L_x L_y L_z \hbar \kappa} |\vec{\alpha} \vec{a}^+|^2 \delta(K - K' - \kappa) \delta_{k'_1, -\kappa_1} \delta_{k'_3, -\kappa_3}, \quad (3.3)$$

где составляющие вектора $\vec{\alpha}$ определены в (1.11) — (1.13). Законы сохранения учитывают отдачу электрона и сохранение энергии ($\epsilon \epsilon' = 1$):

$$k'_3 = -\kappa \cos \theta, \quad (3.4)$$

$$k'_1 = -\kappa \sin \theta \cos \varphi, \quad (3.5)$$

$$\sqrt{k_0^2 + 2l\gamma} - \sqrt{k_0^2 + 2l'\gamma + \kappa^2 \cos^2 \theta} = \kappa. \quad (3.6)$$

Отсюда легко найти

$$\begin{aligned} & \delta(K - K' - \kappa) = \\ & = \frac{V\overline{l} + p + r'}{V\overline{l} + p - \sin^2 \theta V\overline{q}} \delta \left\{ \kappa - \frac{V^2(l+p)\gamma}{\sin^2 \theta} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{n}{l+p} \sin^2 \theta} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где

$$p = \frac{H_0}{2H}, \quad r' = \frac{H_0}{2H} \left(\frac{p'_z}{mc} \right)^2 = \frac{\kappa^2 \cos^2 \theta}{2\gamma}, \quad q = \frac{\kappa^2 \sin^2 \theta}{2\gamma}.$$

Умножая вероятность излучения на энергию фотона $c \hbar \kappa$, усредняя по начальным спиновым состояниям и суммируя по конечным состояниям, найдем интенсивность излучения

$$I = \frac{ce^2}{4\pi^2} \sum_{n=0}^l \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{2\gamma q \sqrt{l'+p+r'}}{\sqrt{l+p-\sin^2 \theta} \sqrt{q}} \sum_{s,s'=\pm 1} \{ |\bar{a}_x|^2 + |\bar{a}_y|^2 \cos^2 \theta +$$

$$+ |\bar{a}_z|^2 \sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta [\cos \varphi (\bar{a}_x^+ \bar{a}_z + \bar{a}_z^+ \bar{a}_x) + \sin \varphi (\bar{a}_y^+ \bar{a}_z + \bar{a}_z^+ \bar{a}_y)] -$$

$$- \sin^2 \theta \sin \varphi \cos \varphi (\bar{a}_x^+ \bar{a}_y + \bar{a}_y^+ \bar{a}_x) \}. \quad (3.8)$$

Выражение в фигурных скобках в (3.8) получается при применении (3.2) к вероятности (3.3), если учесть условие $k_3 = 0$. Это выражение, как легко проверить, не зависит от угла φ . Поэтому, сохраняя обозначения, в (3.8) можно положить $\varphi = 0$.

Применим теперь равенства (1.18) — (1.23) и (1.29) — (1.31), предполагая, что $l \gg 1$ и $l' \gg 1$, и учтем, что при больших энергиях частиц $1 - [q/(\sqrt{l} - \sqrt{l-n})^2] \ll 1$. Тогда, полагая $\theta = (\pi/2) + \psi$, $\psi \ll \pi/2$, применяя (2.16) и (2.17), пренебрегая величинами p и r' по сравнению с l и l' всюду, где не сокращаются главные члены, и переходя от суммирования по n к интегрированию, получим¹

$$I = \frac{ce^2}{R} \frac{E}{\hbar c} \frac{1}{3\pi^2} \int_0^l dn \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\psi \frac{(\sqrt{l} - \sqrt{l-n})^2 (p + l\psi^2)}{l^{3/2} (l-n)^{3/2}} \times$$

$$\times \left\{ (2l-n) (p + l\psi^2) K_{3/2}^2 \left[\frac{2}{3} \frac{\sqrt{l} - \sqrt{l-n}}{\sqrt{l(l-n)}} (p + l\psi^2)^{3/2} \right] + \right.$$

$$+ [2l\sqrt{l(l-n)} \psi^2 + (\sqrt{l} - \sqrt{l-n})^2 (p + l\psi^2)] \times$$

$$\times K_{1/2}^2 \left[\frac{2}{3} \frac{\sqrt{l} - \sqrt{l-n}}{\sqrt{l(l-n)}} (p + l\psi^2)^{3/2} \right] \}. \quad (3.9)$$

Для предельного угла излучения мы получим, как и в классической теории, $\psi^2 = p/l$ или

$$\psi_0 = mc^2/E. \quad (3.10)$$

При $n \ll l$ угол может быть и больше.

Перейдем к частоте излучения и выразим ее через $y = \omega/\omega_{кр}$, где критическая частота равна

$$\omega_{кр} = \frac{c}{R} \left(\frac{E}{mc^2} \right)^3 \frac{3}{2 + 3(E/mc^2)^2 (\hbar/mcR)} \quad (3.11)$$

и R — радиус орбиты. Тогда найдем

$$I = \frac{9}{\pi^2} \frac{ce^2}{R^2} \left(\frac{E}{mc^2} \right)^4 \frac{1}{(2+z)^3} \int_0^{1+2/z} y^2 dy \left\{ \left[1 + \frac{(2+z)^2}{[2+(1-y)z]^2} \right] \times \right.$$

$$\int_0^\infty K_{3/2}^2 \left(\frac{ych^3 x}{2+(1-y)z} \right) \text{ch}^5 x dx + 2 \frac{2+z}{2+(1-y)z} \int_0^\infty K_{1/2}^2 \left(\frac{ych^3 x}{2+(1-y)z} \right) \text{ch}^3 x \text{sh}^2 x dx +$$

$$\left. + \frac{z^2 y^2}{[2+(1-y)z]^2} \int_0^\infty K_{1/2}^2 \left(\frac{ych^3 x}{2+(1-y)z} \right) \text{ch}^5 x dx \right\}, \quad (3.12)$$

где

$$z = 3(E/mc^2)^2 (\hbar/mcR). \quad (3.13)$$

¹ Найденные в [7] квантовые поправки к спектру частично совпадают с теми, которые могут быть получены из формулы (3.9), но наиболее значительный поправочный член порядка $n^{3/2}/l$ в интенсивности при $\theta = \pi/2$ и $n \ll (1 - \beta^2)^{-3/2}$ (в наших обозначениях) там пропущен. В [7] не найдено также поправок к спектру, проинтегрированному по углам, и полной интенсивности.

Спектральное распределение (3.12) излучения светящегося электрона (рис. 2) зависит в квантовой теории от одного параметра z , в то время как в классической теории форма спектра (как функции $\omega/\omega_{кр}$) не зависит от энергии электрона. Правильность предельного перехода к классическому распределению при $z \rightarrow 0$ легко проверить при помощи равенства

$$\begin{aligned} & \sqrt{3} y \int_y^\infty K_{5/2}(x) dx = \\ &= \frac{3}{\pi} y^2 \int_0^\infty dx \left\{ K_{1/2}^2 \left(\frac{y}{2} \operatorname{ch}^3 x \right) \operatorname{ch}^3 x \operatorname{sh}^2 x + K_{3/2}^2 \left(\frac{y}{2} \operatorname{ch}^3 x \right) \operatorname{ch}^5 x \right\}, \quad (3.14) \end{aligned}$$

которое легко доказать [3] при помощи теоремы Лерха.

При $z \rightarrow 0$ формула (3.11) для $\omega_{кр}$ переходит в классическое выражение, а при $E \rightarrow \infty$ энергия фотона в максимуме спектра стремится к энергии электрона.

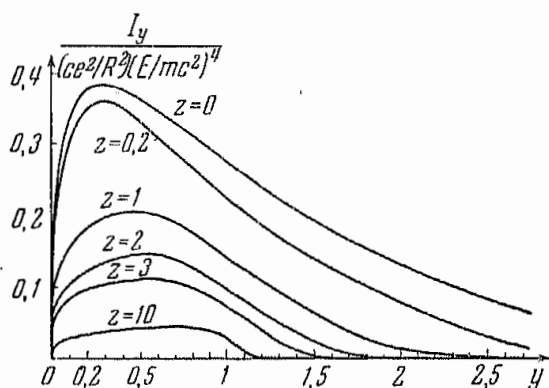


Рис. 2. Форма спектра излучения светящегося электрона

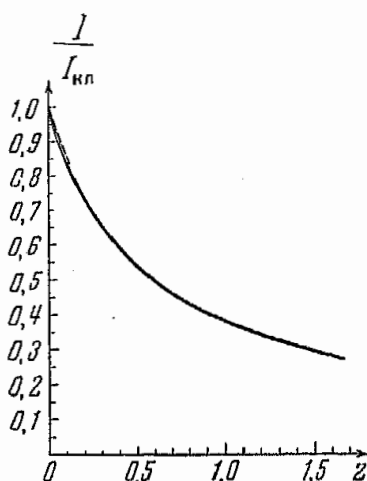


Рис. 3. Полная интенсивность излучения светящегося электрона

4. Полная интенсивность излучения

Полагая $y \operatorname{ch}^3 x / [2 + (1 - y)z] = t$, $\operatorname{sh} x = \operatorname{tg} \theta$, приведем (3.12) к виду

$$\begin{aligned} I = & \frac{9}{\pi^2} \frac{ce^2}{R^2} \left(\frac{E}{mc^2} \right)^4 \int_0^\infty t^2 dt \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 \theta d\theta}{(1 + tz \cos^3 \theta)^4} \times \\ & \times \{ [1 + (1 + tz \cos^3 \theta)^2] K_{1/2}^2(t) + [2 \sin^2 \theta (1 + tz \cos^3 \theta) + t^2 z^2 \cos^6 \theta] K_{3/2}^2(t) \}. \quad (4.1) \end{aligned}$$

Зависимость этого интеграла как функции z показана на рис. 3. Применяя формулы

$$\frac{1}{(1+x)^h} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} ds \Gamma(-s) x^s \frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(k)}, \quad (4.2)$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^s \theta \cos^p \theta d\theta = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+p}{2} + 1\right)}, \quad (4.3)$$

$$\int_0^{\infty} K_{\nu}(x) K_{\rho}(x) x^{\mu-1} dx = \\ = \frac{2^{\mu-3}}{\Gamma(\mu)} \Gamma\left(\frac{\mu+\nu+\rho}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu-\nu+\rho}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu+\nu-\rho}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu-\nu-\rho}{2}\right) \frac{\pi}{2} (\operatorname{Re} \mu > |\operatorname{Re}(\nu \pm \rho)|), \quad (4.4)$$

найдем (4.1) в виде интеграла

$$I = \frac{\sqrt{3} ce^2}{\pi^2 R^2} \left(\frac{E}{mc^2}\right)^4 \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} ds z^{2s} \Gamma(-s) \Gamma\left(-s + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(s + \frac{7}{3}\right) \times \\ \times \left\{ \frac{3}{2} \Gamma(s+1) \Gamma\left(s + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(s + \frac{2}{3}\right) + z^2 \Gamma(s+2) \Gamma\left(s + \frac{5}{2}\right) \Gamma\left(s + \frac{5}{3}\right) \right\}. \quad (4.5)$$

Учитывая вычеты в полюсах, лежащих слева от контура, легко найти выражение для интенсивности излучения в виде

$$I = \frac{2}{3} \frac{ce^2}{R^2} \left(\frac{E}{mc^2}\right)^4 \left\{ z^{-1/2} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \left[{}_1F_2\left(\frac{7}{6}; -\frac{2}{3}, \frac{1}{6}; \frac{1}{z^2}\right) + \right. \right. \\ \left. + \frac{7}{9} {}_2F_3\left(\frac{5}{3}, \frac{13}{6}; \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}; \frac{1}{z^2}\right) \right] - z^{-2} \frac{9}{4} \left[{}_2F_3\left(1, \frac{3}{2}; \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{4}{3}; \frac{1}{z^2}\right) + \right. \\ \left. + 3 {}_2F_3\left(3, \frac{5}{2}; \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{1}{z^2}\right) \right] + z^{-1/2} \frac{55}{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) {}_2F_3\left(\frac{7}{3}, \frac{17}{6}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{6}; \frac{1}{z^2}\right) + \\ \left. + z^{-3} \frac{27\sqrt{3}}{5} \left[{}_1F_2\left(2; \frac{1}{6}, \frac{11}{6}; \frac{1}{z^2}\right) - 12 {}_2F_3\left(3, \frac{5}{2}; \frac{3}{2}, \frac{7}{6}, \frac{11}{6}; \frac{1}{z^2}\right) \right] - \right. \\ \left. - z^{-11/2} \frac{297}{20} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) {}_1F_2\left(\frac{17}{6}; \frac{8}{3}, \frac{11}{6}; \frac{1}{z^2}\right) \right\}. \quad (4.6)$$

При $z \gg 1$ мы получим разложение

$$I = \frac{2}{3} \frac{ce^2}{R^2} \left(\frac{E}{mc^2}\right)^4 \left\{ \frac{16}{9} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) z^{-1/2} - 9z^{-2} + \frac{55}{3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) z^{-3/2} - \frac{297}{5} \sqrt{3} z^{-3} + \dots \right\}. \quad (4.7)$$

Сдвигая контур в (4.5) вправо, найдем

$$I = \frac{2}{3} \frac{ce^2}{R^2} \left(\frac{E}{mc^2}\right)^4 \left\{ {}_4F_1\left(1, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{7}{3}; \frac{1}{2}; z^2\right) - \frac{55\sqrt{3}}{48} z^{-3} {}_3F_0\left(2, \frac{7}{6}, \frac{17}{6}; z^2\right) + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} z^2 {}_4F_1\left(2, \frac{5}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}; \frac{1}{2}; z^2\right) - \frac{385\sqrt{3}}{144} z^3 {}_4F_1\left(3, \frac{5}{2}, \frac{13}{6}, \frac{17}{6}; \frac{3}{2}; z^2\right) \right\}. \quad (4.8)$$

Первые члены асимптотического разложения этой суммы при $z \ll 1$ имеют вид:

$$I = \frac{2}{3} \frac{ce^2}{R^2} \left(\frac{E}{mc^2}\right)^4 \left\{ 1 - \frac{55\sqrt{3}}{48} z + \frac{16}{3} z^2 - \frac{8855}{864} \sqrt{3} z^3 + \dots \right\}. \quad (4.9)$$

В частности, ограничиваясь в (4.9) первыми двумя членами, мы получим результат

$$I = \frac{2}{3} \frac{ce^2}{R^2} \left(\frac{E}{mc^2}\right)^4 \left\{ 1 - \frac{55\sqrt{3}}{48} \frac{\hbar}{mcR} \left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 \right\}, \quad (4.10)$$

найденный также в [4]. В практических единицах мы имеем

$$I/I_{\text{кл}} = 1 - 8,8 \cdot 10^{-6} E_{10^6 \text{ эВ}}^2 / R_{\text{м}}, \quad (4.11)$$

Если энергии электронов изменятся во времени по закону $E = E_0 \sin(\pi t / 2T)$ ($0 \leq t \leq T$), то вместо (4.10) мы получим

$$\bar{I} = \frac{1}{4} \frac{ce^2}{R^2} \left(\frac{E_0}{mc^2} \right)^4 \left\{ 1 - \frac{275\sqrt{3}}{96} \frac{\hbar}{mcR} \left(\frac{E_0}{mc^2} \right)^2 \right\}. \quad (4.12)$$

Зависимость $\bar{I}$ от z показана на рис. 3 пунктиром.

Первый коэффициент в (4.9) совпадает с ранее полученными в [4] иным методом [2], имевшим значительно более узкую область применимости ($z \ll 1$).

Из полученных формул видно, что классическая теория применима для вычисления интенсивности излучения при условии

$$E / mc^2 \ll (mcR / 3\hbar)^{1/2}, \quad (4.13)$$

полученном также в цитированных выше работах по квантовой теории светящегося электрона (см. также [8-12]). К отсутствию более сильных, чем условие (4.13), ограничений применимости классической теории при вычислении интенсивности излучения привели также и экспериментальные исследования [13-15].

Наша теория, построенная в предположении, что $E / mc^2 \gg 1$, перестает быть справедливой, если максимум спектра излучения падает на последние высшие гармоники (нарушается справедливость предположения $l' \gg 1$). Полагая максимум (3.11) приходящимся на гармонике $n = l - 1$, найдем условие применимости изложенной теории:

$$E / mc^2 \ll mcR / 3\hbar. \quad (4.14)$$

Эта энергия значительно больше, чем (4.13), при макроскопических значениях для радиуса орбиты.

5. Однофотонная аннигиляция электронов и позитронов в магнитном поле

Рассмотрим [3] переход электрона из состояния положительной энергии в магнитном поле в состояние отрицательной энергии в том же поле с излучением фотона, используя (3.1), (3.2) и полагая $\epsilon^1 = -1$. Систему координат выберем так, чтобы получить $k_1 = k'_1$ и $k_3 = k'_3$. Тогда, усредняя вероятность перехода по спинам электрона и позитрона и суммируя по значениям импульса фотона, найдем вероятность аннигиляции в единицу времени

$$W = \frac{1}{L_x L_z} \frac{\pi}{2} \frac{e^2}{\hbar \kappa} \sum_{s, s' = \pm 1} (|\bar{\alpha}_x|^2 + |\bar{\alpha}_z|^2), \quad (5.1)$$

причем в силу законов сохранения $\kappa_1 = \kappa_3 = 0$ и $\kappa = K + K'$. Эта вероятность не равна нулю, так как часть импульса пары берет на себя магнитное поле. В силу $\kappa_1 = 0$ фотон излучается в направлении, перпендикулярном к линии, соединяющей центры вращения частиц.

Произведение вероятности (5.1) на число электронов N , с которыми может аннигилировать позитрон, равно обратной величине времени жизни позитрона в данном пучке электронов, причем $n = N / L_x L_z$ есть плотность потока электронов в пучке. Напомним, что в случае двухфотонной аннигиляции, происходящей и в отсутствии внешнего поля, обратная величина времени жизни позитрона пропорциональна объемной плотности электронов.

Эффективное сечение превращения здесь определить нельзя, так как падающие волны ни на каком расстоянии нельзя рассматривать как плоские. Этим же обстоятельством объясняется невозможность рассматривать в данном превращении магнитное поле в качестве возмущения свободного движения, как это может быть сделано для электрического поля атомного ядра. Поэтому наш расчет аналогичен

не расчетам однофотонной аннигиляции позитронов в атомах в борновском приближении, а расчетам, учитывающим электрическое поле точно (подробный список литературы по вопросам аннигиляции электронов и позитронов, а также по рождению пар этих частиц и применению этих явлений к ряду проблем физики см. в [3]). В обратном превращении (рождение пары фотонов в магнитном поле) определение эффективного сечения также невозможно, так как однородное магнитное поле не является пространственно ограниченным объектом.

Предположим, что $E \gg mc^2$ и $E' \gg mc^2$. Тогда, применяя (1.18), (1.20), (1.29), (1.30) и (1.31), а также (2.18) и (2.19), получим для времени жизни позитрона в магнитном поле

$$\frac{1}{\tau_H} = n \frac{cr_0}{6\pi} \frac{(mc^2)^5}{E^3 E'^3 (E + E')} \left[1 + \left(\frac{p_z}{mc} \right)^2 \right] \times \\ \times \left\{ \left[(E + E')^2 + \left(\frac{p_z}{mc} \right)^2 (E^2 + E'^2) \right] K_{1/3}^2 \left[\frac{H_0}{3H} \frac{mc^2 (E + E')}{EE'} \left(1 + \left(\frac{p_z}{mc} \right)^2 \right)^{3/2} \right] + \right. \\ \left. + (E^2 + E'^2) \left[1 + \left(\frac{p_z}{mc} \right)^2 \right] K_{2/3}^2 \left[\frac{H_0}{3H} \frac{mc^2 (E + E')}{EE'} \left(1 + \left(\frac{p_z}{mc} \right)^2 \right)^{3/2} \right] \right\}. \quad (5.2)$$

В частности, при $E = E'$ и $p_z = 0$

$$\frac{1}{\tau_H} = ncr_0 \left(\frac{H}{H_0} \right)^5 f \left(\frac{2}{3} \frac{H_0}{H} \frac{mc^2}{E} \right), \quad (5.3)$$

$$f(x) = \frac{81}{64\pi} x^5 \{ 2K_{1/3}^2(x) + K_{2/3}^2(x) \}. \quad (5.4)$$

Функция $f(x)$ показана графически на рис. 4.

При $x \gg 1$, $f(x) \approx \frac{243}{128} x^4 e^{-2x}$, при $x \ll 1$, $f(x) \approx \frac{81\Gamma^2(2/3) 2^{1/2}}{128\pi} x^{11/2}$.

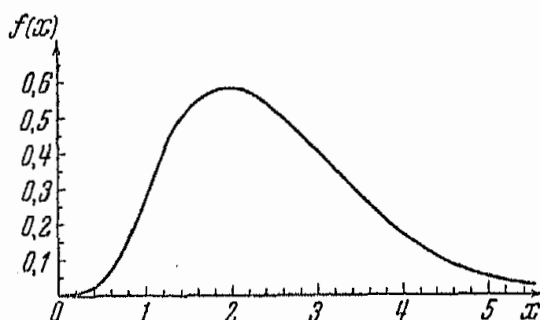


Рис. 4. К определению вероятности однофотонной аннигиляции электрона и позитрона в магнитном поле

Вероятность аннигиляции достигает максимума при

$$E_{\text{макс}} = 0,33mc^2 \frac{H_0}{H}. \quad (5.5)$$

В практических единицах

$$\frac{1}{\tau_{H \text{ сек.}}} = 3,52 \cdot 10^{-26} n_{\text{см}^{-3}} H_{10^9 \text{ Ое}}^5 f \left(\frac{15,9}{H_{10^9 \text{ Ое}} E_{10^6 \text{ эВ}}} \right) \quad (5.6)$$

и

$$E_{\text{макс, } 10^6 \text{ эВ}} = \frac{7,8}{H_{10^9 \text{ Ое}}}. \quad (5.7)$$

Здесь энергия частиц измерена в миллиардах электрон-вольт, магнитное поле — в миллиардах эрстедов, плотность в см^{-2} и время — в секундах. Резкое уменьшение вероятности при уменьшении энергии и магнитного поля оправдывает применение наших приближений, справедливых при больших энергиях частиц.

Упомянем теперь, что в предельном случае $H \gg H_0$ имеем $q = \kappa^2 / 2\gamma \ll 1$ и при $l = l' \gg 1$ и $p_z \ll mc$, $|I(l', l)| = |I(l' - 1, l - 1)| = 1$, $|I(l', l - 1)| = |I(l' - 1, l)| \ll 1$, откуда

$$\frac{1}{\tau_H} = n \frac{\pi c r_0}{2} \sqrt{\frac{H_0}{2lH}}. \quad (5.8)$$

Для сравнения вероятности однофотонной аннигиляции электронов и позитронов в магнитном поле с вероятностью их двухфотонной аннигиляции нужно прежде всего найти соотношение между плотностями n и ρ . В достаточно узком пучке частиц $\rho = n / 2\pi R$, где $R = (v/c)(E/eH)$ и

$$r_0 \frac{\rho}{n} = \frac{1}{2\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \sqrt{\frac{H}{2lH_0}}. \quad (5.9)$$

Если $H \ll H_0$, имея в виду, что для двухфотонной аннигиляции

$$\frac{1}{\tau_0} = \rho \pi c r_0^2 \frac{mc^2}{E} \ln \frac{E}{mc^2} \quad \text{при} \quad \frac{v}{c} \sim 1,$$

получим для $E = E_{\text{макс}}(H)$

$$\frac{\tau_{H \text{ мин}}}{\tau_0} \sim \left(\frac{H_0}{H} \right)^2 \ln \frac{0,33H_0}{H}. \quad (5.10)$$

Мы видим, что при этом относительная вероятность однофотонной аннигиляции мала, но растет с ростом H . При $H \gg H_0$ и $v \ll c$, $1/\tau_0 = \rho \pi c r_0^2$ и из (5.8) и (5.9)

$$\frac{\tau_H}{\tau_0} \sim \frac{e^2}{\hbar c} \frac{H}{H_0}. \quad (5.11)$$

В этом случае относительная вероятность τ_0/τ_H падает с полем. При $H \gg H_0$ возможно лишь качественное сравнение, так как независимость τ_0 от H и применимость (5.9) в последнем случае вовсе не очевидны. Однако эти результаты указывают на то, что при $H \sim H_0$ отношение τ_H/τ_0 может иметь порядок $1/137$, т. е. однофотонная аннигиляция будет преобладать (или, по крайней мере, иметь тот же порядок вероятности, что и двухфотонная). Возможность процесса однофотонной аннигиляции электронов и позитронов в магнитном поле в литературе еще не отмечалась.

6. Рождение электронно-позитронных пар фотонами в магнитном поле

Найдем [3] вероятность явления, обратного предыдущему, т. е. превращения фотона в пару электрон-позитрон в магнитном поле — своеобразного нелинейного эффекта взаимодействия электромагнитных полей. Беря матричные элементы комплексно сопряженными от матричных элементов предыдущего расчета и выбирая систему координат так, чтобы было $\kappa_1 = \kappa_3 = 0$, найдем $k_1 = k'_1$ и $k_3 = k'_3$, а для вероятности перехода в единицу времени, усредненной по поляризациям фотона, получим

$$W = \frac{e^2}{2\kappa\hbar L_y} \int_{k_{1\text{ мин}}}^{k_{1\text{ макс}}} dk_1 \int_{-\infty}^{\infty} dk_3 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{s, s'=\pm 1} (|\bar{\alpha}_x|^2 + |\bar{\alpha}_z|^2) \delta(K+K'-x). \quad (6.1)$$

Имея в виду, что $|y_0| = |k_1|/\gamma \leq L_y/2$ и что модули матричных элементов и энергия не зависят от k_1 , найдем

$$W = \frac{1}{2} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{mc^2}{\hbar} \frac{mc^2}{E} \frac{H}{H_0} \int_{-\infty}^{\infty} dk_3 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l'=0}^{\infty} \sum_{s, s'=\pm 1} (|\bar{\alpha}_x|^2 + |\bar{\alpha}_z|^2) \delta(K+K'-x). \quad (6.2)$$

Величина $1/W$ есть время жизни фотона в магнитном поле, а c/W — его пробег. Если рассматривать пучок фотонов с энергетической плотностью $n(E)$ и с поперечным сечением S , то на протяжении d за время t будет

$$N = St \int n(E) dE \left(1 - \exp\left\{-\frac{d}{c} W(E, H)\right\}\right) \quad (6.3)$$

превращений фотонов в пары. Если $(d/c)W \ll 1$, то эффект пропорционален объему поля.

Легко видеть, что

$$\delta(K+K'-x) = \frac{KK'}{\kappa k_3} \delta\left(k_3 \pm \sqrt{\frac{x^2}{4} - (l+l')\gamma - k_0^2 + \frac{(l-l')^2}{x^2}\gamma^2}\right). \quad (6.4)$$

Из (6.4) видно, что W обращается в бесконечность каждый раз, когда $k_3 = 0$, т. е., когда $x^\infty = \sqrt{k_0^2 + 2l\gamma} + \sqrt{k_0^2 + 2l'\gamma}$, где l и l' — целые числа.

Если $l = l'$, то при $E \gg mc^2$ (E — энергия фотона) имеем

$$\Delta x^\infty = x_{l+1}^\infty - x_l^\infty \approx \sqrt{2\gamma/l} \quad (6.5)$$

или

$$\frac{\Delta E^\infty}{mc^2} = 4 \frac{H}{H_0} \frac{mc^2}{E}. \quad (6.6)$$

В практических единицах

$$\Delta E_{\text{ев}}^\infty = 2,22 \cdot 10^{-8} \frac{H_{0\text{e}}}{E_{\text{МеВ}}}. \quad (6.7)$$

Мы видим, что особенности вероятности при $H \ll H_0$ и $E \gg mc^2$ расположены чрезвычайно часто на шкале энергии фотона. При достижимой ширине линии с распределением $n(E)$ эти особенности будут неизбежно сглаживаться. Оказывается, что если при помощи закона сохранения энергии исключить не k_3 , а l' , считая эту величину изменяющейся непрерывно, то мы сразу получим вероятность со сглаженными особенностями. Применяя (1.18), (1.20), (1.29), (1.30) и (1.31), а также (2.18) и (2.19), выражение (6.2) можно привести к виду

$$W = \frac{e^2}{\hbar c} \frac{mc^2}{\hbar} \frac{H}{H_0} \varphi\left(\frac{4}{3} \frac{H_0}{H} \frac{mc^2}{E}\right), \quad (6.8)$$

где

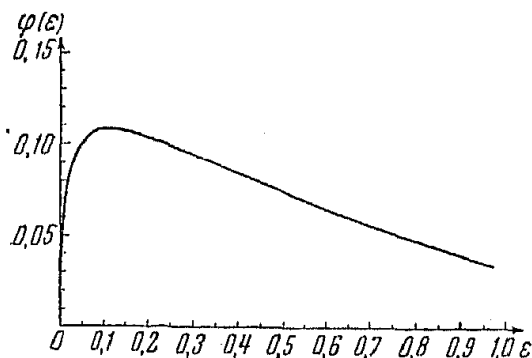
$$\begin{aligned} \varphi(\varepsilon) = & \frac{3}{2\pi^2} \varepsilon^2 \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \{ 2 \operatorname{ch}^2 y \operatorname{ch}^5 x K_{1/2}^2(\varepsilon \operatorname{ch}^2 y \operatorname{ch}^3 x) - \\ & - \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^3 x K_{1/2}^2(\varepsilon \operatorname{ch}^2 y \operatorname{ch}^3 x) + (2 \operatorname{ch}^2 y - 1) \operatorname{ch}^5 x K_{3/2}^2(\varepsilon \operatorname{ch}^2 y \operatorname{ch}^3 x) \}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Приближение больших энергий частиц и фотона применимо и в этом случае, так как при невыполнении условий $l \gg 1$ и $l' \gg 1$ вероятность очень мала. Функция $\varphi(\varepsilon)$ показана графически на рис. 5, причем

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{5\Gamma(5/6)}{7\Gamma(7/6)} \varepsilon^{1/2} \quad \text{при } \varepsilon \ll 1,$$

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{3\sqrt{3}}{16\sqrt{2}} e^{-2\varepsilon} \quad \text{при } \varepsilon \gg 1.$$

Рис. 5. К определению вероятности рождения пары фотоном в магнитном поле



Максимум вероятности превращения наступает при

$$E_{\text{макс}} = 11mc^2 \frac{H_0}{H}. \quad (6.10)$$

В практических единицах

$$W = 1,22 \cdot 10^{14} H_{10^9 \text{ Ое}} \varphi \left(\frac{31,8}{E_{10^9 \text{ эВ}} H_{10^9 \text{ Ое}}} \right). \quad (6.11)$$

и

$$E_{\text{макс } 10^9 \text{ эВ}} = 274 / H_{10^9 \text{ Ое}}. \quad (6.12)$$

Несмотря на то что значительная вероятность превращения фотона в пару наступает лишь в очень сильных полях, рассмотренная теория может указать на причину значительного поглощения фотонов и в слабых полях, если только протяженность поля достаточно велика. В космических магнитных полях протяженностью порядка 10^{19} см и напряженностью порядка 10^{-5} — 10^{-6} Ое полностью должны поглощаться фотоны с энергией выше $4 \cdot 10^{24}$ Ое, причем пробег фотона с энергией порядка 10^{25} эВ много меньше размеров магнитного облака. На фотоны наблюдаемой энергии и на видимый свет звезд этот эффект влиять не будет.

В полях с напряженностью порядка 10^5 Ое минимальный пробег фотона ($E \sim 10^{14}$ эВ) равен всего нескольким сантиметрам.

На возможность явления превращения фотона в пару в магнитном поле в литературе были до сих пор лишь качественные указания [8,9]².

² После окончания настоящей работы нам стала известна статья [16], в которой рассчитано рождение пар фотонами в магнитном поле. Результат работы [16] предполагается применимым лишь тогда, когда эффект очень мал и содержит правильный экспоненциальный множитель. Остальные же множители в работе [16] найдены неправильно, так как взято неверное выражение для плотности конечных состояний и слишком грубое приближение для матричных элементов (неправильно аппроксимировано убывание вероятности с ростом величины $|l - l'|$ в наших обозначениях).

7. Рождение электронно-позитронных пар электронами в магнитном поле

Для получения качественной оценки энергии электронов, при которой следует ожидать интенсивного излучения ими пар в магнитном поле, найдем энергию электронов, при которой максимум спектра излучения светящегося электрона совмещается с максимумом вероятности рождения пары фотоном в магнитном поле. Согласно (6.10) энергия фотона при этом равна

$$\varepsilon = 11mc^2 \frac{H_0}{H} \quad (7.1)$$

или, если выразить магнитное поле через энергию электрона,

$$\varepsilon = 11mc^2 \frac{mcR}{\hbar} \frac{mc^2}{E}. \quad (7.2)$$

Из (3.11) находим

$$\varepsilon = mc^2 \frac{\hbar}{mcR} \left(\frac{E}{mc^2} \right)^3 3 \left[2 + 3 \left(\frac{E}{mc^2} \right)^2 \frac{\hbar}{mcR} \right]^{-1}. \quad (7.3)$$

Приравнявая (7.2) и (7.3), получим

$$\frac{E}{mc^2} \sim 6 \left(\frac{mcR}{3\hbar} \right)^{1/2}. \quad (7.4)$$

Из (7.4) видно, что влияние рассматриваемого эффекта на потери энергии частиц в магнитном поле скажется вскоре после того, как излучение фотонов начнет отклоняться от классической теории.

Автор выражает глубокую благодарность проф. А. А. Соколову, руководившему его работой над данной темой.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
16 апреля 1953 г.

Литература

- [1] Д. Иваненко и А. Соколов. Классическая теория поля, ГТТИ, 1951.— [2] А. А. Соколов, Н. П. Клепиков и И. М. Тернов. ЖЭТФ, 23, 632, 1952.— [3] Н. П. Клепиков. Диссертация, НИИ физики МГУ, 1952.— [4] А. А. Соколов, Н. П. Клепиков и И. М. Тернов. ЖЭТФ, 24, 249, 1953; ДАН, 89, 665, 1953.— [5] Г. Н. Ватсон. Теория бесселевых функций, ИИЛ, 1949.— [6] G. N. Watson. Proc. Cambr. Phil. Soc. 19, 96, 1918.— [7] M. Neuman. Phys. Rev., 90, 682, 1953.— [8] И. Я. Померанчук. ЖЭТФ, 9, 915, 1939; Journ. of Phys., 2, 65, 1940.— [9] H. Y. Tzu. Proc. Roy. Soc., 192, 231, 1948.— [10] J. Schwinger. Phys. Rev., 75, 1912, 1949.— [11] D. L. Judd, J. V. Lepore, M. Ruderman and P. Wolff. Phys. Rev., 86, 123, 1952.— [12] H. Olsena. H. Wergeland. Phys. Rev., 86, 123, 1952.— [13] J. W. Mather. Phys. Rev., 86, 795, 1952.— [14] D. R. Corson. Bull. Am. Phys. Soc., 27, 3, 57, 1952.— [15] D. R. Corson. Phys. Rev., 86, 1052, 1952.— [16] H. Robl. Acta Phys. Austriaca, 6, 105, 1952.

МНОГОЭЛЕКТРОННОЕ РАССМОТРЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОНА (ДЫРКИ) В ВОЗМУЩЕННОМ КРИСТАЛЛЕ

Т. И. Либерберг и К. Б. Толыго

Рассмотрено движение дополнительно введенного в диэлектрик электрона (или дырки) в поле какого-либо дефекта при помощи многоэлектронного уравнения в приближении сильно связанных электронов. При этом учтена деформация атомов (ионов) полем дополнительного заряда. Используя приближение Хартри, удается свести задачу к решению уравнения в частных производных для одной частицы. Это уравнение оказывается пригодным и в случае «дырки». Рассмотрены предельные случаи очень узкой и очень широкой потенциальных ям, создаваемых дефектом. В последнем случае, если поле дефекта меняется достаточно плавно, упомянутое выше уравнение сводится к уравнению Шредингера, в котором фигурирует эффективная масса частицы и некоторый эффективный потенциал. Установлена связь последнего с потенциалом дефекта.

1. Введение

В настоящее время широко распространено мнение, что применимость обычной зонной теории ограничена следующими двумя требованиями: 1) в кристалл введен один лишний электрон, 2) присутствие этого электрона не искажает состояний всех прочих электронов диэлектрика [1-4]. Именно при этих условиях строго получаются зонные состояния для лишнего электрона.

Второе условие практически оказывается невыполнимым. (Ясно, например, что лишний электрон своим полем деформирует электронные оболочки как того иона, вблизи которого он находится в данный момент, так и окружающих ионов.) Однако, как показал Пекар [5], рассмотрение движения лишнего электрона возможно и при нарушении условия 2); движение этого электрона должно только происходить настолько медленно, чтобы состояния электронов основного вещества изменялись адиабатически вслед за его перемещением.

Ясно, что такой подход, равно как и развитый на его основе метод эффективной массы [5,6], невозможен для дырки. На практике все авторы решают задачу о поведении дырки, решая уравнение Шредингера, в котором фигурирует эффективная масса дырки (см., например, теорию экситона, развитую в [7]).

Однако уже в работе [1] отмечено, что полной аналогии между электроном проводимости и дыркой нет, а в работе [2] подчеркнуто, что даже «однодырочная» задача по существу является многоэлектронной.

В тех работах [8,1], где понятие дырки обосновывалось при помощи приближения сильно связанных электронов, рассмотрение ограничивалось случаем свободного движения. Кроме того, не учитывалось искажение состояния электронов соседних атомов полем дырки. Такой учет совершенно необходим при рассмотрении самосогласованных состояний типа полярона, F - и F' -центров и экситона. Это связано с тем, что при расчете энергии таких состояний нужно из общей поляризации кристалла выделить ее безинерционную часть, обуславливаемую полем самого электрона (дырки). В работах Пекара

с сотрудниками [7-9] это выделение осуществлялось при помощи формулы

$$P_{б.п.} = \frac{1}{4\pi} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) D,$$

где n — оптический показатель преломления, D — вектор индукции, $P_{б.п.}$ — безинерционная поляризация. Однако эта формула может стать неприменимой для локальных состояний малых радиусов.

В настоящей работе предлагается метод рассмотрения движения электрона (дырки) в заданном возмущающем поле с учетом деформации окружения, пригодный в том случае, когда радиус состояния этого электрона (дырки) мал. При этом оказывается, что даже в случае широкой и плавной потенциальной ямы дефекта, когда задача сводится к решению уравнения Шредингера с эффективной массой, в этом уравнении фигурирует некоторый эффективный потенциал, отличающийся от потенциала дефекта.

2. Математическая постановка задачи

Для простоты в дальнейшем рассматривается бинарный кубический центрально-симметричный ионный¹ кристалл, находящийся во внешнем потенциальном поле $v(r)$. Все ионы считаем закрепленными в узлах решетки. В согласии с предположением о сильной связи считаем, что избыточный электрон локализуется вблизи положительных ионов; под дыркой мы будем понимать отрицательный ион с зарядом, на единицу меньшим обычного. Ионы, на которых локализованы лишний электрон или дырка, мы будем называть в дальнейшем аномальными, в отличие от обычных ионов кристалла.

Гамильтониан системы H складывается из гамильтонианов отдельных ионов

$$\sum_{n=1}^M H_n^0(r_n, R_n),$$

энергии взаимодействия различных ионов

$$\frac{1}{2} \sum_{n, n'} \sum \Omega_{n, n'} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{n, n' \\ n \neq n'}} \left\{ \frac{Z_n Z_{n'} e^2}{|R_n - R_{n'}|} + \frac{e^2}{|r_n - r_{n'}|} - \frac{Z_n e^2}{|r_{n'} - R_n|} - \frac{Z_{n'} e^2}{|r_n - R_{n'}|} \right\}$$

и энергии всех ионов во внешнем поле

$$e \sum_n [Z_n v(R_n) - v(r_n)].$$

Здесь R_n и $Z_n e$ — радиус-вектор и заряд ядра n -го иона, M — число ионов в основной области кристалла L^3 , r_n обозначает совокупность всех $3s_n$ координат электронов n -го иона, так что $e^2/|r_n - r_{n'}|$ есть сокращенное обозначение суммы взаимных энергий всех пар электронов n -го и n' -го ионов.

Задача состоит в решении следующего многоэлектронного уравнения

$$H\Psi(\dots r_n \dots) = E\Psi(\dots r_n \dots). \quad (1)$$

¹ Результаты теории легко распространяются на более простой случай гомополярного кристалла.

Ввиду непригодности обычной теории возмущений, ищем решение в нулевом приближении при помощи вариационного метода в форме:

$$\Psi = \Psi_m = \prod_{n \neq m} \psi_n(\mathbf{r}_n) \varphi_m(\mathbf{r}_m), \quad (2)$$

где ψ_n, φ_m — волновые функции обычного и аномального ионов. Из условия минимума средней энергии $\bar{H}$ получаем систему уравнений для определения функций ψ_n и φ_n :

$$\left\{ H_0 + \sum_{n' \neq n} \int |\psi_{n'}(\mathbf{r}_{n'})|^2 \Omega_{n,n'} d\tau_{n'} + \right. \\ \left. + e[Z_n v(\mathbf{R}_n) - v(\mathbf{r}_n)] \right\} \psi_n(\mathbf{r}_n) = \epsilon_n \psi_n(\mathbf{r}_n). \quad (3)$$

В первом приближении находим Ψ в виде ряда

$$\Psi = \sum_m b_m \Psi_m; \quad \sum_m |b_m|^2 = 1. \quad (4)$$

При этом функции Ψ_m определяются из системы (3) при помощи (2). Таким образом деформация окружающих атомов определяется мгновенным, а не средним распределением заряда избыточного электрона (дырки). Основой приближения является тот факт, что частота перехода избыточного заряда от одного иона к другому сравнительно мала. Это полностью соответствует приближению сильно связанных электронов.

В некоторых случаях удобнее вместо функций Ψ_m пользоваться линейными комбинациями этих функций

$$\Psi_k = C_k \sum_m \exp\{i(\mathbf{kR}_m)\} \Psi_m \quad (5)$$

и искать решение (1) в виде:

$$\Psi = \sum_k a_k \Psi_k = \sum_m \Psi_m \sum_k a_k \exp\{i(\mathbf{kR}_m)\}. \quad (6)$$

Очевидно, ряд (6), если положить $b_m = \sum_k a_k \exp\{i(\mathbf{kR}_m)\}$, совершенно эквивалентен ряду (4). Однако следует помнить, что ввиду наличия поля $v(\mathbf{r})$ и отсутствия трансляционного вырождения функции Ψ_k не являются обычными зонными решениями. Из формул (3) и (5) видно, что эти функции не представляют собою решений уравнений (1) в отсутствии поля $v(\mathbf{r})$. В то же время они даже приближенно не удовлетворяют уравнению (1) при $v \neq 0$.

3. Нулевое приближение

Для того чтобы уже в нулевом приближении учесть деформацию кристалла внешним полем и полем аномального узла, ищем решение уравнения (3) в виде разложения по собственным функциям изолированных ионов

$$\psi_n(\mathbf{r}_n) = \sum_i c_n^i \psi_n^i(\mathbf{r}_n), \quad \varphi_m(\mathbf{r}_m) = \sum_i c_m^i \varphi_m^i(\mathbf{r}_m), \quad (7)$$

где

$$H_n^0 \psi_n^i = \epsilon_n^i \psi_n^i, \quad H_m^0 \varphi_m^i = \epsilon_m^i \varphi_m^i,$$

i — номер возбужденного уровня. Коэффициенты c_n^i , c_m^i , как и в [11], считаем параметрами аппроксимации, причем $|c_n^i| \ll 1$ при $i > 0$ и $\sum_i |c_n^i|^2 = 1$.

Во всех выражениях для энергий мы сохраним только члены порядка c_n^i и $|c_n^i|^2$ ($i > 0$). Величины $\Omega_{n,n'}$ разложим в ряд по степеням отношения $\rho_n |R_{n,n'}|$ вплоть до членов второго порядка включительно; $\rho_n = |\mathbf{r}_n - \mathbf{R}_n|$ есть расстояние электрона до «своего» ядра, а $|R_{n,n'}| = |\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_{n'}|$ — расстояние между различными ядрами. Потенциал внешнего поля в пределах каждого иона аппроксимируется линейной функцией. В результате получится

$$e [Z_n v(\mathbf{R}_n) - v(\mathbf{r}_n)] \approx e \zeta_n v(\mathbf{R}_n) + e E_0(\mathbf{R}_n) \vec{\rho}_n, \quad (8)$$

где ζ_n — заряд n -го иона².

В указанном приближении, подставляя наши разложения в уравнения (3), умножая их последовательно на ψ_n^{0*} , ψ_n^{i*} или φ_m^{0*} , φ_m^{i*} и интегрируя по всему пространству, получим систему уравнений для величин c_n^i и μ_n , решение которой есть

$$\mu_n = \epsilon_n^0 + e \zeta_n v(\mathbf{R}_n) + e^2 \sum_{n' \neq n} \frac{\zeta_n \zeta_{n'}}{|R_{nn'}|^5} + e \zeta_n \sum \frac{P_{n'} R_{nn'}}{|R_{nn'}|^3} - \\ - \frac{P_n}{2} \left[E_0(\mathbf{R}_n) + \sum_{n' \neq n} E_{n'}(\mathbf{R}_n) + e \xi_m \frac{R_{nm}}{|R_{nm}|^3} \right]; \quad (9)$$

$$c_n^i = - \frac{e}{\epsilon_n^i - \epsilon_n^0} (i | \vec{\rho}_n | 0) \left\{ E_0(\mathbf{R}_n) + \sum_{n' \neq n} E_{n'}(\mathbf{R}_n) + e \xi_m \frac{R_{nm}}{|R_{nm}|^3} \right\}. \quad (10)$$

В случае, если $n = m$, последние члены в скобках должны быть отброшены. Здесь

$$\mathbf{P}_n = -e \int \psi_n^{0*} \vec{\rho}_n \psi_n d\tau_n \approx -e \sum_{i \geq 1} [c_n^i (0 | \vec{\rho}_n | i) + c_n^{i*} (i | \vec{\rho}_n | 0)]$$

— дипольный момент n -го иона, причем

$$(0 | \vec{\rho}_n | i) = \int \psi_n^{0*} \vec{\rho}_n \psi_n^i d\tau_n.$$

Далее

$$E_{n'}(\mathbf{R}_n) = 3 \frac{P_{n'} R_{nn'}}{|R_{nn'}|^5} R_{nn'} - \frac{P_{n'}}{|R_{nn'}|^3}$$

— электрическое поле, создаваемое в точке $\mathbf{R}_n$ диполем $\mathbf{P}_{n'}$, находящимся в точке $\mathbf{R}_{n'}$; $\xi_m = \zeta_m - \zeta_m^0 = -1$ в случае лишнего электрона и $\xi_m = +1$ в случае дырки; ζ_m^0 — заряд m -го иона при отсутствии в нем особенности.

Пользуясь определением величин $\mathbf{P}_n$, можно переписать равенства (10) в виде уравнений для дипольных моментов

$$\mathbf{P}_n = \alpha_n \left\{ E_n^0(\mathbf{R}_n) + \sum_{n' \neq n} E_{n'}(\mathbf{R}_n) + e \xi_m \frac{R_{nm}}{|R_{nm}|^3} \right\}, \quad (11)$$

² Последний член формулы (8) надо понимать как сумму по всем электронам n -го иона.

где ³

$$\alpha_n = 2e^2 \sum_{i \geq 1} \frac{|(0 | \rho_{xn} | i)|^2}{\epsilon_n^i - \epsilon_n^0}$$

— поляризуемость n -го иона. При заданном внешнем поле E_0 уравнения (11) могут быть решены, и таким образом найдены и величины c_n^i , c_m^i , т. е. нулевое приближение для функций Ψ_m .

4. Первое приближение (узкая потенциальная яма)

В случае узкой потенциальной ямы, поскольку радиус состояния не на много превышает постоянную решетки, непосредственная подстановка (4) в (1) дает систему уравнений для коэффициентов b_n :

$$\sum_m \{H_{m'm} - EA_{m'm}\} b_m = 0. \quad (12)$$

Здесь

$$\begin{aligned} H_{m'm} &= \int \Psi_{m'}^* H \Psi_m d\tau = A_{m'm} \left\{ \sum_n \left[\epsilon_n^0 + e\zeta_n^0 v(\mathbf{R}_n) + e^2 \frac{\zeta_n}{2} \sum_{n'} \frac{\zeta_{n'}}{|\mathbf{R}_{nn'}|} \right] + \right. \\ &+ e\zeta_m^0 v(\mathbf{R}_m) - \frac{e}{2} \zeta_m \sum_{n' \neq m} \frac{\mathbf{p}_{n'} \mathbf{R}_{n'm}}{|\mathbf{R}_{n'm}|^3} - \frac{1}{2} \sum_n \mathbf{p}_n \mathbf{E}_0(\mathbf{R}_n) \left. \right\} + \frac{1}{2} \gamma_{m'm}, \quad (13) \\ A_{m'm} &= \int \Psi_{m'}^* \Psi_m d\tau = 1, \quad A, \quad 0, \end{aligned}$$

соответственно, при $m = m'$, для ближайших соседей и для более удаленных ионов. Далее

$$\begin{aligned} \gamma_{m'm} &= \sum_{\substack{n \neq m \\ n \neq m'}}'' \int [\varphi_{m'}^* \psi_m^* (\Omega_{nm} + \Omega_{nm'}) \varphi_m \psi_{m'} d\tau_m d\tau_{m'} - \\ &- A_{m'm} \int |\varphi_m|^2 \Omega_{nm} d\tau_m - A_{m'm} \int |\psi_{m'}|^2 \Omega_{nm'} d\tau_{m'}] \psi_m^2 d\tau_n + \\ &+ \int \varphi_{m'}^* \psi_m^* [\Omega_{mm'} + \Omega_{m'm} - \int \Omega_{mm'} |\varphi_m|^2 d\tau_m - \int \Omega_{mm'} |\psi_{m'}|^2 d\tau_{m'}] \varphi_m \psi_{m'} d\tau_m d\tau_{m'} + \\ &+ e \int \varphi_{m'}^* \psi_m^* [\mathbf{E}_0(\mathbf{R}_m) (\vec{\rho}_m - \int \vec{\rho}_m |\varphi_m|^2 d\tau_m) + \\ &+ \mathbf{E}_0(\mathbf{R}_{m'}) (\vec{\rho}_{m'} - \int \vec{\rho}_{m'} |\psi_{m'}|^2 d\tau_{m'})] \varphi_m \psi_{m'} d\tau_m d\tau_{m'} + \\ &+ \int \varphi_{m'}^* \psi_m^* [H_m^0 + H_{m'}^0 - \epsilon_m^0 - \epsilon_{m'}^0] \psi_m \psi_{m'} d\tau_m d\tau_{m'}. \quad (14) \end{aligned}$$

Если величины $A_{m'm}$ и $H_{m'm}$ найдены, решение системы (12) не представляет никаких трудностей. Из условия ее разрешимости определяем энергию всего кристалла E . Для вычисления коэффициентов $\gamma_{m'm}$ и $A_{m'm}$ требуется знать волновые функции возбужденных ионов. Такое вычисление поэтому вряд ли может быть выполнено. Более целесообразно пренебречь зависимостью вышеупомянутых величин от внешнего поля и считать, что $\gamma_{m'm}$ и $A_{m'm}$ отличны от нуля только, если узлы m и m' являются ближайшими соседями; эти величины будут являться параметрами теории. В таком случае остается единственная серьезная трудность — это нахождение дипольных момен-

³ В предположении изотропных ионов тензор поляризуемости α сводится к скаляру.

тов P_n из уравнений (11) и расчет $H_{m'm}$ по формуле (13). Если же внешнее поле $E_0(R_m)$ значительно, зависимость $\gamma_{m'm}$ от него можно получить приближенно, полагая в интегралах (14) $\varphi_m \approx \varphi_m^0$, $\psi_m \approx \psi_m^0$ и т. д.

5. Первое приближение в случае широкой потенциальной ямы. Метод эффективной массы

В том случае, если потенциал $v(r)$ изменяется плавно и внешнее поле $E_0(r)$ относительно мало, считаем γ константой и, применяя разложение (6), сводим уравнение (1) к виду:

$$\sum_k H_{k'k} a_k = E a_{k'}; \quad H_{k'k} = C_{k'}^* C_k \sum_m \sum_{m'} \exp \{i(kR_m - k'R_{m'})\} H_{m'm}, \quad (15)$$

или, с учетом (13), к виду:

$$\sum_k U_{k'k} a_k = (E - E^{k'}) a_{k'}, \quad (16)$$

где ⁴

$$E^{k'} = \sum_n \left[\varepsilon_n^0 + e \zeta_n^0 v(R_n) + e \frac{\zeta_n}{2} \sum_{n' \neq n} \frac{\zeta_{n'}}{|R_{nn'}|} \right] + \frac{\gamma}{2} \sum_{\vec{\mu}} e^{-ik'\vec{\mu}}, \quad (17)$$

$$U_{k'k} = \frac{1}{M} \sum_m \exp \{iR_m(k - k')\} U(R_m) = \frac{1}{M} \sum_m \exp \{iR_m(k - k')\} \times \\ \times \left\{ e \xi_m \left[v(R_m) - \frac{1}{2} \sum_{n \neq m} \frac{P_n R_{nm}}{|R_{nm}|^3} \right] - \frac{1}{2} \sum_n P_n E_0(R_n) \right\} \quad (18)$$

(при этом был отброшен член порядка $A\gamma$ по сравнению с γ).

Как и в работе одного из авторов [12], можно показать, что решение (16) эквивалентно интегрированию вспомогательного уравнения вида:

$$E(-i\vec{\nabla}) \varphi(r) + U_{\text{эфф}}(r) \varphi(r) = \varepsilon \varphi(r), \quad (19)$$

где $E(-i\vec{\nabla})$ получается заменой вектора k в формуле (17) для E^k оператором $-i\vec{\nabla}$, причем $E = \varepsilon + \text{const}$, а a_k есть коэффициент Фурье функции $\varphi(r)$. $U_{\text{эфф}}$ есть функция непрерывно изменяющегося вектора r , равная $U(R_m)$ при $r = R_m$. Очевидно, $U_{\text{эфф}}(r)$ может быть однозначно определена равенством

$$U_{\text{эфф}}(r) = \sum_k U_{k,0} e^{ikr} = \frac{1}{M} \sum_k e^{ikr} \sum_m e^{ikR_m} U(R_m), \quad (20)$$

если мы потребуем, чтобы ряд по k включал в себя только члены с векторами k , лежащими в пределах одной ячейки обратной решетки. Если кинетическая энергия состояния $\varphi(r)$ достаточно мала, то $E(-i\vec{\nabla})$, очевидно, сводится к $-(\hbar^2/2m^*)\Delta$, и уравнение (19) переходит в уравнение Шредингера, содержащее эффективную массу m^* и некоторый эффективный потенциал $U_{\text{эфф}}(r)$.

⁴ Суммирование здесь ведется по вектору $\vec{\mu}$, соединяющему особенный узел m с ближайшими узлами того же сорта. Его следует отличать от собственного значения энергии μ_n в уравнениях (3).

Легко видеть, что $U_{эфф}(\mathbf{r})$ не совпадает с $(1/n^2)v(\mathbf{r})$ ни при какой форме внешнего потенциала $v(\mathbf{r})$. Действительно, обозначим решение системы (11) через $\mathbf{P}_n = \tilde{\mathbf{P}}_n + \check{\mathbf{P}}_n$, где $\tilde{\mathbf{P}}_n$ соответствует решению (11) при $\xi_n = 0$, а $\check{\mathbf{P}}$ есть решение (11) при $E_0 = 0$. Если пренебречь наличием аномального узла с другой поляризуемостью, то при достаточно плавной функции $v(\mathbf{r})$, $\tilde{\mathbf{P}}_n$ дается макроскопической формулой

$$\tilde{\mathbf{P}}_n = \frac{\alpha_n}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{1}{4\pi} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \mathbf{E}_0(\mathbf{R}_n). \quad (21)$$

Если бы аналогичная формула имела место и для $\check{\mathbf{P}}_n$, и, кроме того, можно было бы заменить в (18) суммирование по n интегрированием, формула (20) свелась бы, как легко показать, к следующей:

$$U_{эфф}(\mathbf{r}) = \frac{1}{n^2} v(\mathbf{r}) + \text{const.} \quad (22)$$

Поляризация вокруг точечного заряда рассчитывалась для конкретных кристаллов рядом авторов [13, 14]. Из последней работы видно, что для ближайшего окружения аномального узла диполи $\check{\mathbf{P}}_n$ существенно отличаются от того, что дает макроскопическая формула типа (21). Таким образом формула (22), строго говоря, не имеет места. Величина ошибки может быть найдена только в каждом отдельном случае при помощи наших формул. Это обстоятельство следует иметь в виду при количественном сопоставлении теории локальных состояний электронов в кристалле с опытом, особенно в случае малых радиусов состояний.

Авторы считают приятным долгом выразить благодарность проф. С. И. Пекару за ряд критических замечаний.

Киевский государственный университет
Житомирский педагогический институт

Поступила в редакцию
18 марта 1953 г.

Литература

- [1] С. И. Пекар. ЖЭТФ, 18, 525, 1948.— [2] Ф. Ф. Волькенштейн. Усп. физ. наук, 43, 11, 1951.— [3] А. И. Ансельм. Журн. техн. физики, 21, 489, 1951.— [4] Дискуссия по зонной теории твердого тела, Труды Ин-та физики АН УССР, 4, 122, 1952.— [5] С. И. Пекар. Исследования по электронной теории кристаллов, ГТТИ, М.—Л., 1951.— [6] С. И. Пекар. ЖЭТФ, 16, 933, 1946.— [7] И. М. Дыкман и С. И. Пекар. ДАН СССР, 83, 825, 1952. Труды Ин-та физики АН УССР, 3, 92, 1952.— [8] W. Heisenberg. Ann. d. Phys., 10, 888, 1931.— [9] С. И. Пекар. ЖЭТФ, 16, 335, 341, 1946; 17, 868, 1947.— [10] С. И. Пекар и О. Ф. Томасевич. ЖЭТФ, 21, 1218, 1951.— [11] К. Б. Толпыго. ЖЭТФ, 20, 497, 1950.— [12] К. Б. Толпыго. ЖЭТФ, 21, 443, 1951.— [13] N. F. Mott a. Littleton. Trans. Farad. Soc., 34, 485, 1938.— [14] E. L. Rittner, R. A. Hunter a. F. K. du Pré. Journ. Chem. Phys., 17, 198, 1949.

О ВЛИЯНИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ НА ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ РАДИОВОЛН В ИОНОСФЕРЕ

И. М. Виленский

Рассмотрено взаимодействие радиоволн в ионосфере с учетом влияния магнитного поля Земли.

В предыдущей работе автора [1] было показано, что помимо явления кросс-модуляции (люксембург-горьковский эффект), при взаимодействии в ионосфере двух радиоволн, «сильной» с частотой ω_1 и «слабой» с частотой ω_2 , возникают «боковые» волны — волны с комбинационными частотами $\omega_2 \pm 2\omega_1$. При этом имеет место своеобразный резонансный эффект — резкое возрастание амплитуды волны с частотой $\omega_2 + 2\omega_1$ в случае, когда $\omega_2 \approx 2\omega_1$.

В работе [1] не принималось во внимание магнитное поле Земли. В настоящей работе указанные выше вопросы рассматриваются с учетом влияния магнитного поля Земли. Рассматривается также явление кросс-модуляции вблизи гиромагнитной частоты.

1. Пусть мощная станция излучает модулированные радиоволны, которым в ионосфере соответствует напряженность поля

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_0 (1 + M \cos \Omega t) \cos \omega_1 t = \mathbf{E}_{10} \cos \omega_1 t, \quad (1.1)$$

где ω_1 — несущая частота, Ω — частота модуляции. Как показано Давыдовым [2], функция распределения электронов по скоростям при наличии поля $\mathbf{E}_1$ и магнитного поля Земли $\mathbf{H}^{(0)}$ в среде, содержащей нейтральные молекулы и ионы, с точностью до членов $\sqrt{\delta_{yn}} = \sqrt{2m/\mu}$ (m — масса электрона, μ — масса молекулы или иона) может быть представлена в виде:

$$f(v) = f_0(v) + \frac{v}{v} f_1(v); \quad |f_1(v)| \ll f_0(v), \quad (1.2)$$

где $f_0(v)$ и $f_1(v)$ удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \nu(v) \frac{v^2 k T}{\mu} \frac{\partial f_0}{\partial v} + \frac{m \nu(v) v^3}{\mu} f_0 \right\} + \frac{e}{3m v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 \mathbf{E}_1 f_1) &= 0; \\ \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{e}{m} \mathbf{E}_1 \frac{\partial f_0}{\partial v} + \nu(v) f_1 + \frac{e}{mc} [\mathbf{H}^{(0)} f_1] &= 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь k — постоянная Больцмана, T — температура тяжелых частиц, e — заряд электрона, $\nu(v)$ — число соударений. При написании (1.3) мы считали, что в рассматриваемой среде отсутствуют резкие градиенты концентраций.

Систему уравнений (1.3) будем решать методом последовательных приближений. Положим

$$f_0 = f_{00} + f_{01}, \quad |f_{01}| \ll f_{00}, \quad (1.4)$$

где $f_{00} = (m / 2\pi kT)^{1/2} \exp(-mv^2 / 2kT)$ — максвелловская функция распределения при отсутствии поля $\mathbf{E}_1$. Из второго уравнения (1.3) для $f_1(f_{1x}, f_{1y}, f_{1z})$ в первом приближении получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{1x}}{\partial t} + \frac{eE_{10x}}{m} \frac{\partial f_{00}}{\partial v} \cos \omega_1 t + \nu(v) f_{1x} + \omega_H f_{1y} &= 0; \\ \frac{\partial f_{1y}}{\partial t} + \frac{eE_{10y}}{m} \frac{\partial f_{00}}{\partial v} \cos \omega_1 t + \nu(v) f_{1y} - \omega_H f_{1x} &= 0; \\ \frac{\partial f_{1z}}{\partial t} + \frac{eE_{10z}}{m} \frac{\partial f_{00}}{\partial v} \cos \omega_1 t + \nu(v) f_{1z} &= 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $\omega_H = |e|H^{(0)} / mc$ — так называемая гиромагнитная частота. При написании (1.5) мы выбрали систему координат x, y, z таким образом, что направление оси z совпадает с направлением магнитного поля Земли $\mathbf{H}^{(0)}$.

Будем считать выполненным условие $\Omega \ll \omega_1$. Тогда решение (1.5) запишется в виде:

$$\begin{aligned} f_{1x} &= - \frac{(e/m) (\partial f_{00} / \partial v)'}{[(\omega_1 + \omega_H)^2 + \nu^2][(\omega_1 - \omega_H)^2 + \nu^2]} \{ \nu \Omega_I^2 E_{10x} \cos \omega_1 t + \\ &+ \omega_1 \Omega_{II}^2 E_{10x} \sin \omega_1 t + \omega_H \Omega_{III}^2 E_{10y} \cos \omega_1 t - 2\nu \omega_1 \omega_H E_{10y} \sin \omega_1 t \}; \\ f_{1y} &= - \frac{(e/m) (\partial f_{00} / \partial v)'}{[(\omega_1 + \omega_H)^2 + \nu^2][(\omega_1 - \omega_H)^2 + \nu^2]} \{ - \omega_H \Omega_{III}^2 E_{10x} \cos \omega_1 t + \\ &+ 2\nu \omega_1 \omega_H E_{10x} \sin \omega_1 t + \nu \Omega_I^2 E_{10y} \cos \omega_1 t + \omega_1 \Omega_{II}^2 E_{10y} \sin \omega_1 t \}; \\ f_{1z} &= - \frac{(e/m) (\partial f_{00} / \partial v) E_{10z} (\nu \cos \omega_1 t + \omega_1 \sin \omega_1 t)}{\omega_1^2 + \nu^2}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где

$$\Omega_I^2 = \omega_1^2 + \omega_H^2 + \nu^2; \quad \Omega_{II}^2 = \omega_1^2 - \omega_H^2 + \nu^2; \quad \Omega_{III}^2 = \omega_1^2 - \omega_H - \nu^2. \quad (1.7)$$

Подставляя (1.6) в первое уравнение (1.3) и полагая $f_{01} = (f_{01})_{\text{непер}} + f_{01}^{(\Omega)} + f_{01}^{(\omega_1)}$, где $(f_{01})_{\text{непер}}$ — непериодическая функция (ее мы в дальнейшем рассматривать не будем), $f_{01}^{(\Omega)}$ — периодическая функция низкой частоты, $f_{01}^{(\omega_1)}$ — периодическая функция высокой частоты, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{01}^{(\Omega)}}{\partial t} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{\nu v^2 kT}{\mu} \frac{\partial f_{01}^{(\Omega)}}{\partial v} + \frac{m\nu v^3}{\mu} f_{01}^{(\Omega)} \right\} &= \\ = \frac{e^2 E_0^2}{3m^2 v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{\nu v^2 \Omega_I^2 (\partial f_{00} / \partial v) \sin^2 \beta}{[(\omega_1 + \omega_H)^2 + \nu^2][(\omega_1 - \omega_H)^2 + \nu^2]} + \right. \\ \left. + \frac{\nu(v) v^2 (\partial f_{00} / \partial v) \cos^2 \beta}{\omega_1^2 + \nu^2} \right\} \left(M \cos \Omega t + \frac{M^2}{4} \cos 2\Omega t \right). \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{01}^{(\omega_1)}}{\partial t} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{\nu v^2 kT}{\mu} \frac{\partial f_{01}^{(\omega_1)}}{\partial v} + \frac{m\nu v^3}{\mu} f_{01}^{(\omega_1)} \right\} &= \\ = \frac{e^2 E_{10}^2}{12m^2 v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{v^2 (\partial f_{00} / \partial v) \sin^2 \beta}{[(\omega_1 + \omega_H)^2 + \nu^2][(\omega_1 - \omega_H)^2 + \nu^2]} \times \right. \\ \times [\nu \Omega_I^2 (e^{i2\omega_1 t} + e^{-i2\omega_1 t}) + i\omega_1 \Omega_{II}^2 (e^{-i2\omega_1 t} - e^{i2\omega_1 t})] + \\ \left. + \frac{v^2 (\partial f_{00} / \partial v) \cos^2 \beta}{\omega_1^2 + \nu^2} [\nu (e^{i2\omega_1 t} + e^{-i2\omega_1 t}) + i\omega_1 (e^{-i2\omega_1 t} - e^{i2\omega_1 t})] \right\}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

При написании (1.8), (1.9) мы ввели угол β между векторами $\mathbf{E}_{10}$ и $\mathbf{H}^{(0)}$, так что $E_{10x}^2 + E_{10y}^2 = E_{10}^2 \sin^2 \beta$, $E_{10z}^2 = E_{10}^2 \cos^2 \beta$.

Рассмотрим сначала случай $M=0$ (монохроматические волны). В этом случае из (1.8) следует $f_{01}^{(\omega)} = 0$, а в (1.9) вместо E_{10}^2 можем написать E_0^2 . Если считать выполненным условие $\omega_1 \gg (m/\mu) v(v)$, то вторым членом левой части (1.9) можно пренебречь. Тогда решение (1.9) можно представить в виде:

$$f_{10}^{(\omega_1)} = \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} - i \frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \right) e^{i2\omega_1 t} + \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} + i \frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \right) e^{-i2\omega_1 t}; \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -\frac{e^2 E_0^2}{24m^2} v^2 \frac{\partial f_{00}}{\partial v} \left\{ \frac{\Omega_{II}^2 \sin^2 \beta}{[(\omega_1 + \omega_H)^2 + v^2][(\omega_1 - \omega_H)^2 + v^2]} + \frac{\cos^2 \beta}{\omega_1^2 + v^2} \right\}; \\ \varphi_2 &= \frac{e^2 E_0^2}{24m^2} v^2 \frac{\partial f_{00}}{\partial v} \frac{v}{\omega_1} \left\{ \frac{\Omega_I^2 \sin^2 \beta}{[(\omega_1 + \omega_H)^2 + v^2][(\omega_1 - \omega_H)^2 + v^2]} + \frac{\cos^2 \beta}{\omega_1^2 + v^2} \right\}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Пусть через возмущенную область ионосферы проходят относительно слабые волны $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{20} e^{i\omega_2 t}$. Влиянием их на симметричную часть функции распределения пренебрегаем. Тогда в присутствии обоих полей функция распределения может быть записана в виде:

$$f(v) = f_{00} + f_{01}^{(\omega_1)} + \frac{v f_1}{v} + \frac{v f_2}{v}; \quad |f_2| \ll f_{00}, \quad (1.12)$$

Согласно второму уравнению (1.3) для f_2 получим

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + \frac{e E_{20}}{m} e^{i\omega_2 t} \frac{\partial}{\partial v} (f_{00} + f_{01}^{(\omega_1)}) + \frac{e}{mc} [\mathbf{H}^{(0)} f_2] + v(v) f_2 = 0. \quad (1.13)$$

Решение (1.13) можно представить в виде:

$$f_2 = f_{20} + f_{2b}^{(\omega_1)} + f_{2c}^{(\omega_1)}, \quad (1.14)$$

где

$$f_{20x} \pm i f_{20y} = -\frac{(e/m) (\partial f_{00} / \partial v) (E_{2x} \pm i E_{2y}) e^{i\omega_2 t} [v - i(\omega_2 \mp \omega_H)]}{[(\omega_2 \mp \omega_H)^2 + v^2]}; \quad (1.15)$$

$$f_{20z} = -\frac{(e/m) (\partial f_{00} / \partial v) E_{2z} e^{i\omega_2 t} (v - i\omega_2)}{\omega_2^2 + v^2};$$

$$f_{2bx}^{(\omega_1)} \pm i f_{2by}^{(\omega_1)} = -\frac{(e/m) (E_{2x} \pm i E_{2y}) e^{i\omega_2 t}}{[(\omega_2 + 2\omega_1 \mp \omega_H)^2 + v^2]} \times$$

$$\begin{aligned} &\times \left\{ \left[v \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \right) - (\omega_2 + 2\omega_1 \mp \omega_H) \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \right) \right] \cos 2\omega_1 t + \right. \\ &+ \left. [(\omega_2 + 2\omega_1 \mp \omega_H) \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \right) + v \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \right)] \sin 2\omega_1 t + \text{Im} \right\}; \end{aligned}$$

$$f_{2bz}^{(\omega_1)} = -\frac{(e/m) E_{2z} e^{i\omega_2 t}}{[(\omega_2 + 2\omega_1)^2 + v^2]} \times \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} &\times \left\{ \left[v \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \right) - (\omega_2 + 2\omega_1) \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \right) \right] \cos 2\omega_1 t + \right. \\ &+ \left. [(\omega_2 + 2\omega_1) \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \right) + v \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \right)] \sin 2\omega_1 t + \text{Im} \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{2cx}^{(\omega_1)} \pm if_{2cy}^{(\omega_1)} &= - \frac{(e/m) (E_{2x} \pm iE_{2y}) e^{i\omega_2 t}}{[(\omega_2 - 2\omega_1 \mp \omega_H)^2 + \nu^2]} \times \\
&\times \left\{ \left[\nu \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \right) + (\omega_2 - 2\omega_1 \mp \omega_H) \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \right) \right] \cos 2\omega_1 t - \right. \\
&- \left. \left[(\omega_2 - 2\omega_1 \mp \omega_H) \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \right) - \nu \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \right) \right] \sin 2\omega_1 t + \text{Im} \right\}; \\
f_{2cz}^{(\omega_1)} &= - \frac{(e/m) E_{2z} e^{i\omega_2 t}}{[(\omega_2 - 2\omega_1)^2 + \nu^2]} \times \\
&\times \left\{ \left[\nu \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \right) + (\omega_2 - 2\omega_1) \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \right) \right] \cos 2\omega_1 t - \right. \\
&- \left. \left[(\omega_2 - 2\omega_1) \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \right) - \nu \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \right) \right] \sin 2\omega_1 t + \text{Im} \right\}.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

В формулах (1.15)–(1.17) через E_{2x} , E_{2y} , E_{2z} обозначены проекции вектора $\mathbf{E}_{20}$ на соответствующие оси выбранной нами выше системы координат. Аналогично обозначены проекции величин f_{20} , $f_{2b}^{(\omega_1)}$, $f_{2c}^{(\omega_1)}$. Наконец, через Im обозначены мнимые части фигурных скобок, явные выражения которых нам в дальнейшем не понадобятся.

Плотность полного тока $\mathbf{j}_t$, вызванного волной $\mathbf{E}_2$, можно записать через компоненты в виде [3]:

$$\begin{aligned}
j_{tx} \pm ij_{ty} &= \frac{4\pi Ne}{3} \int_0^\infty (f_{2x} \pm if_{2y}) v^3 dv; \\
j_{tz} &= \frac{4\pi Ne}{3} \int_0^\infty f_{2z} v^3 dv.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

С другой стороны, можем написать

$$\begin{aligned}
j_{tx} \pm ij_{ty} &= \frac{e^2 N (E_{2x} \pm iE_{2y}) e^{i\omega_2 t}}{m [(\omega_2 \mp \omega_H)^2 + \nu_{\text{эфф}}^2]} [\nu_{\text{эфф}} - i(\omega_2 \mp \omega_H)]; \\
j_{tz} &= \frac{e^2 N E_{2z} e^{i\omega_2 t}}{m (\omega_2^2 + \nu_{\text{эфф}}^2)} (\nu_{\text{эфф}} - i\omega_2),
\end{aligned} \tag{1.19}$$

причем в (1.19) под $\nu_{\text{эфф}}$ нужно понимать измененное под действием поля эффективное число соударений, т. е.

$$\nu_{\text{эфф}} = \nu_{\text{эфф},0} + \Delta\nu^{(\omega_1)}(t), \tag{1.20}$$

где $\nu_{\text{эфф},0}$ — «невозмущенное» значение эффективного числа соударений. Сопоставляя (1.18) и (1.19) и имея в виду равенства (1.14)–(1.17) и (1.20), можем найти выражения для $\nu_{\text{эфф},0}$ и $\Delta\nu^{(\omega_1)}(t)$. Результаты вычисления $\nu_{\text{эфф},0}$ приведены в [3], § 8. На них мы останавливаться не будем.

При вычислении $\Delta\nu^{(\omega_1)}(t)$ будем для простоты предполагать, что электроны соударяются только с нейтральными молекулами. Роль соударений электронов с ионами рассмотрена в [1], где было показано, что роль этих соударений может быть преобладающей лишь при наличии столь высоких концентраций ионов, какие, по крайней мере, для E -слоя вряд ли имеют место в действительности. Что же касается F -слоя, где также может наблюдаться взаимодействие, особенно в некоторых резонансных случаях (см. ниже), и где $\nu_{\text{эфф},i}$

может быть сравнимо с $\nu_{эфф, m}$ и даже превышать его ($\nu_{эфф, i}$ — эффективное число соударений электронов с ионами, $\nu_{эфф, m}$ — с нейтральными молекулами), то, как показали расчеты, вблизи резонанса даже при $\nu_{эфф, i} \sim \nu_{эфф, m}$ роль соударений с ионами меньше роли соударений с нейтральными молекулами, и лишь в случае $\nu_{эфф, i} \gg \nu_{эфф, m}$, который в F -слое, вообще говоря, может иметь место, соударения с ионами могут стать преобладающими. Учет соударений с ионами в последнем случае не связан с принципиальными трудностями, и соответствующий метод расчета изложен в [1].

Ниже будем считать выполненными условия:

$$\omega_1^2 \gg [\nu(\nu)]^2; \quad \omega_2^2 \gg [\nu(\nu)]^2; \quad \omega_H^2 \gg [\nu(\nu)]^2. \quad (1.21)$$

Как показано в [1], для случая соударений электронов с нейтральными молекулами условия (1.21) и аналогичные им (см. ниже) эквивалентны условиям

$$\omega_1^2 \gg \nu_{эфф}^2; \quad \omega_2^2 \gg \nu_{эфф}^2; \quad \omega_H^2 \gg \nu_{эфф}^2, \quad (1.21')$$

которые в E - и F -слоях для не очень длинных волн ($\omega \gtrsim 10^6$) обычно выполняются.

Вычисления $\Delta \nu^{(\omega_1)}(t)$ произведем для различных частных случаев.

I. Пусть, кроме (1.21), выполняются условия:

$$(\omega_1 - \omega_H)^2 \gg [\nu(\nu)]^2; \quad (\omega_2 - \omega_H)^2 \gg [\nu(\nu)]^2; \\ (\omega_2 \pm 2\omega_1 \pm \omega_H)^2 \gg [\nu(\nu)]^2 \quad (1.22)$$

или

$$(\omega_1 - \omega_H)^2 \gg \nu_{эфф}^2; \quad (\omega_2 - \omega_H)^2 \gg \nu_{эфф}^2; \quad (\omega_2 \pm 2\omega_1 \pm \omega_H)^2 \gg \nu_{эфф}^2; \quad (1.22')$$

Тогда указанным выше методом получим

$$\begin{aligned} [\Delta \nu_b^{(\omega_1)}]_{(x \pm i y)} &= - \frac{4\pi (\omega_2 \mp \omega_H)^2}{3 (\omega_2 + 2\omega_1 \mp \omega_H)^2} \times \\ &\times \{ [k_1 - (\omega_2 + 2\omega_1 \mp \omega_H) k_2] \cos 2\omega_1 t + [(\omega_2 + 2\omega_1 \mp \omega_H) k_3 + k_4] \sin 2\omega_1 t \}; \\ [\Delta \nu_c^{(\omega_1)}]_{(x \pm i y)} &= - \frac{4\pi (\omega_2 \mp \omega_H)^2}{3 (\omega_2 - 2\omega_1 \mp \omega_H)^2} \times \\ &\times \{ [k_1 + (\omega_2 - 2\omega_1 \mp \omega_H) k_2] \cos 2\omega_1 t - [(\omega_2 - 2\omega_1 \mp \omega_H) k_3 - k_4] \sin 2\omega_1 t \}; \quad (1.23) \\ [\Delta \nu_b^{(\omega_1)}]_{(z)} &= - \frac{4\pi \omega_2^2}{3 (\omega_2 + 2\omega_1)^2} \times \\ &\times \{ [k_1 - (\omega_2 + 2\omega_1) k_2] \cos 2\omega_1 t + [(\omega_2 + 2\omega_1) k_3 + k_4] \sin 2\omega_1 t \}; \\ [\Delta \nu_c^{(\omega_1)}]_{(z)} &= - \frac{4\pi \omega_2^2}{3 (\omega_2 - 2\omega_1)^2} \times \\ &\times \{ [k_1 + (\omega_2 - 2\omega_1) k_2] \cos 2\omega_1 t - [(\omega_2 - 2\omega_1) k_3 - k_4] \sin 2\omega_1 t \}; \end{aligned}$$

$$\Delta \nu^{(\omega_1)} = \Delta \nu_b^{(\omega_1)} + \Delta \nu_c^{(\omega_1)},$$

где

$$\begin{aligned} k_1 &= \int_0^\infty \nu(\nu) \nu^3 \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{\nu^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu} \right) d\nu; & k_2 &= \int_0^\infty \nu^3 \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{\nu^2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \nu} \right) d\nu; \\ k_3 &= \int_0^\infty \nu^3 \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{\nu^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu} \right) d\nu; & k_4 &= \int_0^\infty \nu(\nu) \nu^3 \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\frac{1}{\nu^2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \nu} \right) d\nu; \end{aligned} \quad (1.24)$$

φ_1 и φ_2 выражаются формулами (1.11).

Пусть кроме (1.22) выполняется условие $\omega_H^2 \gg \omega_1^2$. Тогда, используя (1.11) и (1.7) и интегрируя, получим

$$\begin{aligned} [\Delta v_1^{(\omega_1)}]_{(x \pm iy)} &= [\Delta v_+^I]_{(x \pm iy)} e^{i(2\omega_1 t + \varphi)} + [\Delta v_-^I]_{(x \pm iy)} e^{-i(2\omega_1 t + \varphi)}; \\ [\Delta v_1^{(\omega_1)}]_{(z)} &= [\Delta v_+^I]_{(z)} e^{i(2\omega_1 t + \varphi)} + [\Delta v_-^I]_{(z)} e^{-i(2\omega_1 t + \varphi)}; \quad [\Delta v_+^I]_{(x \pm iy)} = \\ &= [\Delta v_-^I]_{(x \pm iy)} = \frac{e^2 E_0^2 \cos^2 \beta v_{\text{эфф}} (\omega_2 \mp \omega_H)^2}{48 m k T \omega_1^2} \left[\frac{1}{(\omega_2 + 2\omega_1 \mp \omega_H)^2} + \frac{1}{(\omega_2 - 2\omega_1 \mp \omega_H)^2} \right]; \\ [\Delta v_+^I]_{(z)} &= [\Delta v_-^I]_{(z)} = \frac{e^2 E_0^2 \cos^2 \beta v_{\text{эфф}} \omega_2^2}{48 m k T \omega_1^2} \left[\frac{1}{(\omega_2 + 2\omega_1)^2} + \frac{1}{(\omega_2 - 2\omega_1)^2} \right]; \\ \text{tg } \varphi &= \frac{9\pi}{32} \frac{v_{\text{эфф}}}{\omega_1}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

При получении (1.25) учтено, что для случая соударений с молекулами радиуса a имеем [3]

$$v(v) = \pi a^2 N_m v; \quad v_{\text{эфф}} = \frac{4\pi a^2}{3} N_m \bar{v}, \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}. \quad (1.26)$$

Согласно (1.25), выражение для $[\Delta v_1^{(\omega_1)}]_{(z)}$ совпадает с точностью до множителя $\cos^2 \beta$ с выражением для $\Delta v^{(\omega_1)}$, полученным в [1] без учета магнитного поля Земли. Далее, из (1.25) видно, что компоненты $\Delta v^{(\omega_1)}$, соответствующие различным компонентам внешнего поля E_2 , будут, вообще говоря, различны по величине. Однако это различие в рассматриваемом случае будет мало. Оно совершенно исчезает при условии $\omega_2 \gg \omega_H$.

II. Пусть вместо первого условия (1.22) имеет место неравенство

$$(\omega_1 - \omega_H)^2 \ll [v(v)]^2, \quad (1.27)$$

а остальные неравенства в (1.22) считаем выполненными. Для простоты рассмотрим лишь случай $\omega_1 = \omega_H$. Тогда после несложных преобразований, аналогичных случаю I, получим

$$\begin{aligned} [\Delta v_{II}^{(\omega_1)}]_{(x \pm iy)} &= [\Delta v_+^{II}]_{(x \pm iy)} e^{i(2\omega_1 t + \varphi)} + [\Delta v_-^{II}]_{(x \pm iy)} e^{-i(2\omega_1 t + \varphi)}; \\ [\Delta v_{II}^{(\omega_1)}]_{(z)} &= [\Delta v_+^{II}]_{(z)} e^{i(2\omega_1 t + \varphi)} + [\Delta v_-^{II}]_{(z)} e^{-i(2\omega_1 t + \varphi)}; \\ [\Delta v_+^{II}]_{(x \pm iy)} &= [\Delta v_-^{II}]_{(x \pm iy)} = \frac{e^2 E_0^2 (\omega_2 \mp \omega_H)^2}{72 m k T \omega_H} \times \\ &\times \left[\frac{1}{(\omega_2 + 2\omega_1 \mp \omega_H)^2} + \frac{1}{(\omega_2 - 2\omega_1 \mp \omega_H)^2} \right] \sqrt{\sin^4 \beta + \frac{9v_{\text{эфф}}^2}{4\omega_H^2} \left(\frac{1}{4} \sin^2 \beta + \cos^2 \beta \right)^2}, \\ [\Delta v_+^{II}]_{(z)} &= [\Delta v_-^{II}]_{(z)} = \frac{e^2 E_0^2 \omega_2^2}{72 m k T \omega_H} \times \\ &\times \left[\frac{1}{(\omega_2 + 2\omega_1)^2} + \frac{1}{(\omega_2 - 2\omega_1)^2} \right] \sqrt{\sin^4 \beta + \frac{9v_{\text{эфф}}^2}{4\omega_H^2} \left(\frac{1}{4} \sin^2 \beta + \cos^2 \beta \right)^2}, \\ \text{tg } \varphi &= \frac{2\omega_H}{3v_{\text{эфф}}} \frac{\sin^2 \beta}{(1/4 \sin^2 \beta + \cos^2 \beta)}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

¹ Это условие, вообще говоря, противоречит условию $\omega_1^2 \gg v_{\text{эфф}}^2$, так как, например, в E -слое, ω_H лишь в 10 ÷ 100 раз больше $v_{\text{эфф}}$. Однако практически нам важно выполнение более мягкого требования $\omega_H > \omega_1 > v_{\text{эфф}}$, которое выполняется для достаточно широкого интервала частот.

Из (1.28) видно, что величины различных компонент $\Delta v^{(\omega_1)}$ опять-таки неодинаковы, однако и в этом случае это различие незначительно.

Если $\beta \neq 0$ (векторы $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{H}^{(0)}$ не параллельны), то вторым слагаемым под корнем в (1.28) можно пренебречь. Тогда получим

$$[\Delta v_{\pm}^{II}]_{(x \pm iy)} = \frac{e^2 E_0^2 \sin^2 \beta (\omega_2 \mp \omega_H)^2}{72mkT\omega_H} \left[\frac{1}{(\omega_2 + 2\omega_1 \mp \omega_H)^2} + \frac{1}{(\omega_2 - 2\omega_1 \mp \omega_H)^2} \right]; \quad (1.28')$$

$$[\Delta v_{\pm}^{II}]_{(z)} = \frac{e^2 E_0^2 \sin^2 \beta \omega_2^2}{72mkT\omega_H} \left[\frac{1}{(\omega_2 + 2\omega_1)^2} + \frac{1}{(\omega_2 - 2\omega_1)^2} \right].$$

Сравнение (1.28') с (1.25) дает

$$\frac{|\Delta v^{II}|}{|\Delta v^I|} = \frac{2\omega_1^2}{3v_{\text{эфф}} \omega_H} \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta}.$$

При $\sin^2 \beta / \cos^2 \beta \sim 1$, $\omega_H = 8,8 \cdot 10^6$ ($H^{(0)} = 0,5$ гаусса), $v_{\text{эфф}} \sim 5 \cdot 10^5$, $\omega_1 = 10^6$ получим $|\Delta v^{II}/\Delta v^I| \sim 0,15$, а при $\omega_1 = 5 \cdot 10^6$ получим $|\Delta v^{II}/\Delta v^I| \sim 4$. Эти цифры показывают, что при $\omega_1 \sim \omega_H$ резкого возрастания величины $\Delta v^{(\omega_1)}$ (по сравнению со случаем I) не будет.

III. Пусть имеет место неравенство:

$$(\omega_2 + 2\omega_1 - \omega_H)^2 \ll [v(v)]^2, \quad (1.29)$$

а остальные неравенства (1.22) остаются в силе. Тогда, произведя соответствующий расчет, для $[\Delta v^{(\omega_1)}]_{(x+iy)}$ получим

$$[\Delta v_{\pm}^{(\omega_1)}]_{(x+iy)} = [\Delta v_{+}^{III}]_{(x+iy)} e^{i(2\omega_1 t + \varphi)} + [\Delta v_{-}^{III}]_{(x-iy)} e^{-(2\omega_1 t + \varphi)};$$

$$[\Delta v_{\pm}^{III}]_{(x+iy)} = [\Delta v_{\pm}^{III}]_{(x+iy)} = \frac{2e^2 E_0^2 \cos^2 \beta (\omega_2 - \omega_H)^2}{27\pi mkT v_{\text{эфф}} \omega_1^2}; \quad (1.30)$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{3\pi}{16} \frac{v_{\text{эфф}}}{\omega_1}.$$

Остальные компоненты $\Delta v^{(\omega_1)}$ определяются, как и в случае I, формулами (1.25). Согласно (1.25) и (1.30), величина $[\Delta v_{\pm}^{III}]_{(x+iy)}$ будет в $\omega_1^2/v_{\text{эфф}}^2$ раз (по порядку величины) больше $[\Delta v_{\pm}^I]_{(x \pm iy)}$.

Таким образом в рассматриваемом случае мы будем наблюдать резкое увеличение (по сравнению со случаем I) компоненты $\Delta v^{(\omega_1)}$, соответствующей компоненте $E_{2x} + iE_{2y}$ поля $\mathbf{E}_2$, тогда как увеличения остальных компонент не будет.

IV. Пусть имеет место неравенство:

$$(\omega_2 - 2\omega_1 - \omega_H)^2 \ll [v(v)]^2. \quad (1.31)$$

Тогда, аналогично предыдущему случаю, получим резкое возрастание компоненты $[\Delta v^{(\omega_1)}]_{(x+iy)}$, выражение для которой запишется в виде:

$$[\Delta v_{\pm}^{(\omega_1)}]_{(x+iy)} = [\Delta v_{+}^{IV}]_{(x+iy)} e^{i(2\omega_1 t - \varphi)} + [\Delta v_{-}^{IV}]_{(x+iy)} e^{-i(2\omega_1 t - \varphi)}, \quad (1.32)$$

где $[\Delta v_{\pm}^{IV}]_{(x+iy)}$ и φ имеют тот же вид, что и в случае III [см. формулу (1.30)]; отличие от (1.30) лишь в знаке фазы φ . Формулы для остальных компонент $\Delta v^{(\omega_1)}$ останутся теми же, что и в случае I.

V. Пусть имеет место неравенство:

$$(\omega_2 - 2\omega_1 + \omega_H)^2 \ll [v(v)]^2. \quad (1.33)$$

В этом случае мы будем наблюдать резкое увеличение составляющей $[\Delta v^{(\omega_1)}]_{(x-iy)}$. В частности, для $[\Delta v_c^{(\omega_1)}]_{(x-iy)}$ получим

$$\begin{aligned}
[\Delta v_c^{(\omega_1)}]_{(x-iy)} = & -\frac{4\pi}{3} (\omega_2 + \omega_H)^2 \left\{ \left[\int_0^\infty \frac{v^3}{v(v)} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \right) dv + \right. \right. \\
& + (\omega_2 - 2\omega_1 + \omega_H) \int_0^\infty \frac{v^3}{[v(v)]^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \right) dv \Big] \cos 2\omega_1 t - \\
& - \left[(\omega_2 - 2\omega_1 + \omega_H) \int_0^\infty \frac{v^3}{[v(v)]^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \right) dv - \right. \\
& \left. \left. - \int_0^\infty \frac{v^3}{v(v)} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \right) dv \right] \sin 2\omega_1 t \right\}. \quad (1.34)
\end{aligned}$$

Дальнейший, хотя и несложный, расчет с использованием формул (1.7), (1.11), (1.26) приведет к довольно сложному выражению для $[\Delta v_c^{(\omega_1)}]_{(x-iy)}$. Его мы выписывать не будем, но заметим, что по порядку величины $[\Delta v_c^{(\omega_1)}]_{(x-iy)}$ будет и в этом случае в $\omega^2/v_{эфф}^2$ раз больше остальных компонент, для которых имеют место формулы (1.25) (см. случай I).

VI. Рассмотрим случай:

$$(\omega_2 - 2\omega_1)^2 \ll [v(v)]^2. \quad (1.35)$$

Этот случай был рассмотрен в [1] без учета магнитного поля Земли. Легко видеть, что это рассмотрение полностью остается в силе для составляющей $[\Delta v^{(\omega_1)}]_{(z)}$. Аналогично [1], для нее получим

$$\begin{aligned}
[\Delta v_{VI}^{(\omega_1)}]_{(z)} &= [\Delta v_+^{VI}]_{(z)} e^{i(2\omega_1 t + \varphi)} + [\Delta v_-^{VI}]_{(z)} e^{-i(2\omega_1 t + \varphi)}, \\
[\Delta v_+^{VI}]_{(z)} &= [\Delta v_-^{VI}]_{(z)} = \frac{2e^2 E_0^2 \omega_2^2 \cos^2 \beta}{27\pi m k T \omega_1^2 v_{эфф}}; \quad \text{tg } \varphi = \frac{3\pi}{16} \frac{v_{эфф}}{\omega_1}. \quad (1.36)
\end{aligned}$$

Нами не рассмотрен еще случай, когда частота ω_2 близка к ω_H , так что выполняется условие $(\omega_2 - \omega_H)^2 \ll v_{эфф}^2$. Легко показать, что в этом случае будет наблюдаться лишь уменьшение компоненты $[\Delta v^{(\omega_1)}]_{(x+iy)}$, тогда как с остальными компонентами $\Delta v^{(\omega_1)}$ резких изменений не произойдет. Таким образом различные компоненты $\Delta v^{(\omega_1)}(t)$, соответствующие различным компонентам внешнего поля E_2 , будут, вообще говоря, неодинаковы. Резкое возрастание $\Delta v^{(\omega_1)}(t)$ (резонанс) будет иметь место не только в случае $(\omega_2 - 2\omega_1)^2 \ll [v(v)]^2$, как это имело место без учета магнитного поля Земли, но и в некоторых других случаях. В этих случаях какая-либо одна из компонент $\Delta v^{(\omega_1)}$ становится значительно больше ($\sim$ в $\omega_1^2/v_{эфф}^2$ раз) остальных двух компонент, резкого изменения величины которых при этом не произойдет.

Нужно заметить, что формулы для $\Delta v^{(\omega_1)}$, полученные в [1] без учета магнитного поля Земли, полностью остаются в силе для составляющей поля E_1 , параллельной магнитному полю Земли. Они остаются качественно верными и для остальных компонент поля E_1 , если частоты ω_1, ω_2 таковы, что ни один из перечисленных выше случаев резонанса не имеет места.

2. Рассмотрим теперь вопрос о том, как изменение эффективного числа соударений скажется на проходящих «возмущенную» область ионосферы волнах $E_2 = E_{20} e^{i\omega_2 t}$.

В [1] показано, что, когда частота изменения $v_{эфф}$ мала по сравнению с частотой проходящих волн, т. е. когда

$$2\omega_1 \ll \omega_2, \quad (2.1)$$

то для вычисления поля E_2 в месте приема можно пользоваться квазистационарным методом, используя решение уравнений Максвелла $E'_2 = E_2 \exp \left\{ - \int \frac{\kappa(\omega_2)}{2} ds \right\}$, полученное без учета зависимости свойств среды от времени, и учесть эту зависимость, подставив в выражение для амплитудного коэффициента поглощения

$$\frac{\kappa(\omega_2)}{2} = \frac{\omega_2}{c} k(\omega_2),$$

зависящего от $v_{эфф}$, эффективное число соударений, измененное под действием мощной станции, т. е. $v_{эфф} = v_{эфф,0} + \Delta v^{(\omega_1)}(t)$. Так же можно поступать и при исследовании кросс-модуляции, когда $\Omega \ll \omega_2$. Однако если условие (2.1) не выполнено, а оно заведомо не выполнено в различных резонансных случаях, то необходим более строгий расчет, проведенный в [1] для случая однородной изотропной среды. Ниже мы выполним его также для однородной, но анизотропной среды.

Для простоты вначале рассмотрим случай, когда магнитное поле Земли $H^{(0)}$ направлено вертикально вверх и волна E_2 распространяется так, что $E_2 \perp H^{(0)}$. Тогда, используя метод, изложенный в [1], получим

$$E_2 = E_{20} e^{i\omega_2 t} + E_+ e^{i(\omega_2 + 2\omega_1)t} + E_- e^{i(\omega_2 - 2\omega_1)t}; \quad (2.2)$$

$$\frac{d^2 (E_{20})_{1,2}}{dz^2} + \frac{\omega_2^2}{c^2} \varepsilon'_{1,2}(\omega_2) (E_{20})_{1,2} = 0; \quad (2.3)$$

$$\frac{d^2 (E_{\pm})_{1,2}}{dz^2} + \frac{(\omega_2 \pm 2\omega_1)^2}{c^2} \varepsilon'_{1,2}(\omega_2 \pm 2\omega_1) (E_{\pm})_{1,2} = \frac{4\pi i}{c^2} (\omega_2 \pm 2\omega_1) (\Delta\sigma_{\pm})_{1,2} (E_{20})_{1,2},$$

где индексы 1,2 относятся соответственно к «необыкновенной» компоненте $E_{2x} + iE_{2y}$ (индекс 1) и «обыкновенной» компоненте $E_{2x} - iE_{2y}$ (индекс 2).

Для $\varepsilon'_{1,2}(\omega)$ имеем [3]

$$\varepsilon'_{1,2}(\omega) = \varepsilon_{1,2}(\omega) - i \frac{4\pi\sigma_{1,2}(\omega)}{\omega} = (n_{1,2} - ik_{1,2})^2, \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_{1,2}(\omega) = 1 - \frac{(4\pi e^2 N / m\omega)(\omega \mp \omega_H)}{(\omega \mp \omega_H)^2 + v_{эфф}^2}; \quad \frac{4\pi\sigma_{1,2}(\omega)}{\omega} = \frac{(4\pi e^2 N / m\omega) v_{эфф}}{(\omega \mp \omega_H)^2 + v_{эфф}^2}.$$

Здесь и ниже верхний знак перед ω_H относится к индексу 1, нижний — к индексу 2.

Решение уравнений (2.3), удовлетворяющее условию $(E_{\pm})_{1,2} = 0$ при $z = 0$, может быть записано в виде:

$$(E_{20})_{1,2} = (E_2^{(0)})_{1,2} \exp \left(-i \frac{\omega_2}{c} z \sqrt{\varepsilon'_{1,2}(\omega_2)} \right); \quad (E_{\pm})_{1,2} = (E_{20})_{1,2} (\eta_{\pm})_{1,2}; \quad (2.5)$$

$$(\eta_{\pm})_{1,2} = \frac{4\pi i (\omega_2 \pm 2\omega_1) (\Delta\sigma_{\pm})_{1,2} \{1 - \exp[-i(z/c)((\omega_2 \pm 2\omega_1) \sqrt{\varepsilon'_{1,2}(\omega_2 \pm 2\omega_1)} - \omega_2 \sqrt{\varepsilon'_{1,2}(\omega_2)})]\}}{(\omega_2 \pm 2\omega_1)^2 \varepsilon'_{1,2}(\omega_2 \pm 2\omega_1) - \omega_2^2 \varepsilon'_{1,2}(\omega_2)}.$$

В уравнениях (2.3) и (2.5) $(\Delta\sigma_{\pm})_{1,2}$ — изменения соответствующих компонент проводимости σ , вызванные действием поля E_1 мощной станции. Очевидно, что при условии $\omega_2^2 \gg v_{эфф}^2$; $(\omega_2 \pm \omega_H)^2 \gg v_{эфф}^2$, согласно (2.4), можем написать

$$(\Delta\sigma_{\pm})_{1,2} = \sigma_{1,2}(\omega_2) \frac{[\Delta v_{\pm}]_{1,2}}{v_{эфф,0}}. \quad (2.6)$$

При этом же условии влиянием поля E_1 на диэлектрическую постоянную ε можно пренебречь, что и предполагалось при получении (2.5).

При помощи формул (2.5), (2.6), имея в виду полученные выше выражения для $\Delta v_{\pm}$, можно вычислить относительную величину η амплитуды «боковых» волн, соответствующих «обыкновенной» и «необыкновенной» компонентам волны E_2 . Мы сделаем это для различных частных случаев, рассмотренных выше.

I. Вне резонанса [выполнены условия (1.21), (1.22)].

Будем, кроме (1.21) и (1.22), считать выполненным условие:

$$\frac{z}{c} |(\omega_2 \pm 2\omega_1) \sqrt{\varepsilon'_{1,2}(\omega_2 \pm 2\omega_1)} - \omega_2 \sqrt{\varepsilon'_{1,2}(\omega_2)}| \ll 1. \quad (2.7)$$

Последнее условие для очень больших значений z в рассматриваемом случае имеет место [например, при $\omega_1 \sim 10^6$, $|\omega_2 \pm 2\omega_1| \sim 10^7$, $Nv_{эфф} \sim 10^9$ (E-слой ночью), $z \sim 1 \div 10$ км в левой части (2.7) получим $\sim 0,02 \div 0,2$]. Тогда из (2.5) с учетом (1.25) получим

$$|(\eta_{\pm})_{1,2}| = \frac{x_{1,2}(\omega_2)}{2} z \frac{[\Delta v_{\pm}^I]_{1,2}}{v_{эфф,0}} = \frac{e^2 E_0^2 \cos^2 \beta}{24mkT \omega_1^2} \frac{x_{1,2}(\omega_2)}{2} z. \quad (2.8)$$

При получении (2.8) для простоты мы считали выполненным условие $2\omega_1 \ll \omega_2$. Здесь и ниже величина $|(\eta)|$, как это ясно из (2.5), есть относительная величина амплитуды той или иной компоненты «боковой» волны по отношению к амплитуде волны ω_2 в месте приема. Выражения для фазы «боковых» волн мы не выписываем. Естественно, что аналогичное выражение мы получили бы и в квазистационарном приближении. Заметим, кроме того, что выражение (2.8) отличается от соответствующего выражения, полученного в [1] без учета магнитного поля Земли, лишь множителем $\cos^2 \beta$.

II. Случай $(\omega_1 - \omega_H)^2 \ll v_{эфф}^2$.

Если, как и в I случае, выполнено условие $2\omega_1 \ll \omega_2$ и условие (2.7), то из (2.5) и (1.28) получим

$$|(\eta_{\pm})_{1,2}| = \frac{x_{1,2}(\omega_2)}{2} z \frac{[\Delta v_{\pm}^{II}]_{1,2}}{v_{эфф,0}} = \frac{e^2 E_0^2 \sin^2 \beta}{36mkT \omega_H v_{эфф,0}} \frac{x_{1,2}(\omega_2)}{2} z. \quad (2.9)$$

Как указано выше, резкого возрастания Δv и, следовательно, $|\eta|$ в рассматриваемом случае не будет.

III. Случай $(\omega_2 + 2\omega_1 - \omega_H)^2 \ll v_{эфф}^2$.

Согласно (2.4) в этом случае обычно выполняются неравенства:

$$1 \ll \frac{4\pi\sigma_1(\omega_2 + 2\omega_1)}{\omega_2 + 2\omega_1} \gg \varepsilon_1(\omega_2 + 2\omega_1) \text{ и } |\varepsilon'_1(\omega_2 + 2\omega_1)| \gg |\varepsilon'_1(\omega_2)|.$$

Имея это в виду, для компоненты $(\eta_{+})_1$ из (2.5) и (1.30) получим

$$|(\eta_{+})_1| = \frac{2e^2 E_0^2 \cos^2 \beta}{27\pi mkT \omega_1^2}. \quad (2.10)$$

Сравнивая это выражение с (2.8), убеждаемся, что величина $|(\eta_{+})_1|$ не возросла по сравнению со случаем I. Легко видеть, что возрастания величин $|(\eta_{\pm})_2|$ тоже не будет.

Для $|(\eta_-)_1|$ получим

$$|(\eta_-)_1| = \frac{2e^2 E_0^2 \cos^2 \beta \omega_2 (\omega_2 - 2\omega_1)}{27\pi m k T v_{эфф}^2 \omega_1 (\omega_2 - \omega_1)} \frac{4\pi\sigma_1(\omega_2)}{\omega_2} (1 + e^{2\alpha})^{1/2}; \quad (2.11)$$

$$\alpha = \frac{3}{32} \frac{4\pi e^2 N v_{эфф}}{m \omega_1^2} \frac{z}{c}.$$

При получении (2.11) мы для простоты считали, что $\omega_2 + 2\omega_1 = \omega_H$; $\varepsilon_1(\omega_2) \approx \varepsilon_1(\omega_2 - 2\omega_1) \approx 1$, $\varepsilon_1(\omega_2) \gg 4\pi\sigma_1(\omega_2)/\omega_2$ и $\varepsilon_1(\omega_2 - 2\omega_1) \gg 4\pi\sigma_1(\omega_2 - 2\omega_1)/(\omega_2 - 2\omega_1)$. Кроме того, учтено, что среднее значение $\cos \varphi = 0$; где $\varphi = (z/c)[(\omega_2 - 2\omega_1)\sqrt{\varepsilon_1(\omega_2 - 2\omega_1)} - \omega_2\sqrt{\varepsilon_1(\omega_2)}]$. Сделанные здесь предположения обычно имеют место, за исключением некоторых особых случаев (например, когда область взаимодействия находится вблизи точки отражения волны частоты ω_2 или $\omega_2 - 2\omega_1$), для которых нетрудно выполнить соответствующий расчет. Ясно, что (2.11) даст и в этих случаях правильный порядок величины.

Если учесть, что величина $4\pi\sigma_1(\omega_2)(1 + e^{2\alpha})^{1/2}/\omega_2$ обычно хотя и меньше единицы, но незначительно, то из формул (2.11) и (2.8) следует, что величина $|(\eta_-)_1|$ в рассматриваемом случае возросла по сравнению со случаем I примерно в $\omega_1^2/v_{эфф}^2$ раз. Возрастания величин $|(\eta_+)_1|$ и $|(\eta_{\pm})_2|$ в рассматриваемом случае не будет.

IV. Случай $(\omega_2 - 2\omega_1 - \omega_H)^2 \ll v_{эфф}^2$.

Произведя расчет, совершенно аналогичный случаю III, убедимся, что величины $|(\eta_-)_1|$ и $|(\eta_{\pm})_2|$ в рассматриваемом случае будут малы по сравнению с $|(\eta_+)_1|$. Для $|(\eta_+)_1|$ получим выражение, отличающееся от (2.11) лишь заменой величин $(\omega_2 - 2\omega_1)$, $(\omega_2 - \omega_1)$ на $(\omega_2 + 2\omega_1)$ и $(\omega_2 + \omega_1)$ соответственно. Сравнивая это выражение с (2.8), убедимся, что компонента $|(\eta_+)_1|$ возрастает примерно в $\omega_1^2/v_{эфф}^2$ раз.

V. Случай $(\omega_2 - 2\omega_1 + \omega_H)^2 \ll v_{эфф}^2$.

Используя (2.5) при тех же упрощающих предположениях, какие были сделаны выше, для $|(\eta_+)_2|$ получим

$$|(\eta_+)_2| = \frac{\omega_2 (\omega_2 + 2\omega_1) [\Delta v_+]_2}{4\omega_1 (\omega_2 + \omega_1) v_{эфф,0}} \frac{4\pi\sigma_2(\omega_2)}{\omega_2} (1 + e^{2\alpha})^{1/2}, \quad (2.12)$$

где α определяется второй формулой (2.11). Величина $[\Delta v_+]_2$ может быть вычислена по формулам (1.34). Из (2.12) и (1.34) легко убедиться в том, что в рассматриваемом случае сильно возрастает (по сравнению со случаем I) величина $|(\eta_+)_2|$, тогда как величина остальных компонент «боковых» волн существенно не меняется.

VI. Случай $(\omega_2 - 2\omega_1)^2 \ll v_{эфф}^2$.

Этот случай при отсутствии магнитного поля Земли был рассмотрен в [1]. Для компоненты η_+ было получено

$$|\eta_+| = \frac{2e^2 E_0^2 \omega_2^3 (\omega_2 + 2\omega_1)}{27\pi m k T \omega_1^2 [(\omega_2 + 2\omega_1)^2 - \omega_2^2] v_{эфф}^2} \frac{4\pi\sigma(\omega_2)}{\omega_2} (1 + e^{2\alpha'})^{1/2};$$

$$\alpha' = (z/c) [\omega_2 k(\omega_2) - (\omega_2 + 2\omega_1) k(\omega_2 + 2\omega_1)]. \quad (2.13)$$

Для строгого рассмотрения этого случая с учетом магнитного поля Земли нужно было бы рассмотреть наклонное падение волны на слой, что весьма усложнило бы расчеты. Однако можно думать, что результаты, полученные в [1], останутся в силе и при наличии магнит-

ного поля Земли для компоненты поля E_2 , параллельной $H^{(0)}$. При этом, в соответствии с формулой (1.36) в формуле (2.13) нужно заменить E_0^2 на $E_0^2 \cos^2 \beta$, где β — угол между E_1 и $H^{(0)}$.

Таким образом резкое возрастание амплитуды «боковых» волн имеет место не только в случае $\omega_2 \sim 2\omega_1$ (случай VI), как это было без учета магнитного поля Земли, но также и в случаях $\omega_2 + 2\omega_1 \sim \omega_H$ (случай III), $\omega_2 \sim 2\omega_1 + \omega_H$ (случай IV), $\omega_2 + \omega_H \sim 2\omega_1$ (случай V). Во всех указанных случаях резко возрастает та или иная компонента одной из «боковых» волн.

В работе [1] приведены некоторые численные оценки, показывающие, что амплитуды «боковых» волн, особенно вблизи резонанса, имеют вполне доступную для экспериментального изучения величину. Кроме того, там показано, что их экспериментальное изучение в совокупности с изучением кросс-модуляции может дать ценные сведения об ионосфере. Эти оценки и выводы полностью остаются в силе и при учете магнитного поля Земли.

3. Рассмотрим случай $M \neq 0$ (модулированные волны). В этом случае имеем

$$\Delta v(t) = \Delta v^{(\omega_1)}(t) + \Delta v^{(\Omega)}(t). \quad (3.1)$$

Пусть выполнено условие $\Omega \ll \omega_1$. Тогда полученные выше формулы для $\Delta v^{(\omega_1)}$ и для амплитуды «боковых» волн остаются в силе с заменой в них E_0^2 на $E_0^2(1 + M \cos \Omega t)^2$. Поэтому «боковые» волны будут модулированы по амплитуде с частотами модуляции Ω , 2Ω и с глубинами модуляции $M_\Omega = 2M/(1 + M^2/2)$ и $M_{2\Omega} = M_\Omega M/4$.

Используя формулы (1.8), (1.13), (1.18), (1.19), можно получить выражения для $\Delta v^{(\Omega)}(t)$ в предельных случаях $\Omega \gg (2m/\mu) \nu(\nu)$. Мы приведем результаты расчета для наиболее интересного случая, когда частота волн, излучаемых «мощной» станцией, близка к гиромангнитной частоте², т. е. когда

$$\omega_1^2 \gg \nu_{эфф}^2; (\omega_1 - \omega_H)^2 \ll \nu_{эфф}^2; \quad (3.2)$$

$$\Delta v^{(\Omega)}(t) = -\nu_{эфф} (M_\Omega \sin \Omega t + M_{2\Omega} \sin 2\Omega t);$$

$$M_\Omega = \frac{2e^2 E_0^2 \sin^2 \beta M}{9mkT\Omega \nu_{эфф,0}}; \quad M_{2\Omega} = \frac{M_\Omega M}{8}; \quad \Omega \gg \frac{2m}{\mu} \nu(\nu) \quad (3.3)$$

$$\Delta v^{(\omega)}(t) = \nu_{эфф} (M_\Omega \cos \Omega t + M_{2\Omega} \cos 2\Omega t);$$

$$M_\Omega = \frac{\mu e^2 E_0^2 \sin^2 \beta M}{2\pi m^2 kT \nu_{эфф}^2}; \quad M_{2\Omega} = M_\Omega M/4; \quad \Omega \ll \frac{2m}{\mu} \nu(\nu). \quad (3.4)^3$$

Заметим, что при учете неупругих соударений величину $\delta_{уп} = 2m/\mu$ нужно заменить на δ — некоторое среднее значение энергии, теряемой электроном при соударении. В воздухе $\delta \gg \delta_{уп}$ то же самое нужно

² Как и выше, учитываем лишь соударения с нейтральными молекулами.

³ Коэффициент $1/2$ в формуле (3.4) получен в результате вычисления величины $16I/27$, где $I = \int_0^\infty u^4 \frac{d}{du} [\exp(-u^2) \ln(u^2 + b)] du$ и $b = 64(\omega_1 - \omega_H)^2 / 9\pi \nu_{эфф,m}^2 \ll 1$.

Действительно, при малых b имеем [4]

$$I \approx -2 \left\{ \ln b + 1 + \int_0^\infty \frac{\exp(-x)}{x+b} dx \right\} \approx -2(1-C),$$

где $C = 0,577$ — постоянная Эйлера. Отсюда $16I/27 \approx -1/2$.

сделать в условии $\Omega \gg (2m/\mu)v(v)$. Кроме того, в нем мы можем заменить $v(v)$ на $v_{эфф}$ [1].

В рамках элементарной теории выражение для $\Delta v^{(\Omega)}$ можно написать в виде [3]:

$$\Delta v^{(\Omega)}(t) = v_{эфф,0}(M_{\Omega} \cos(\Omega t - \varphi_1) + M_{2\Omega} \cos(2\Omega t - \varphi_2));$$

$$M_{\Omega} = \frac{e^2 E_0^2 v_{эфф,0} M}{2m^2 v^2 \sqrt{\Omega^2 + (\delta v_{эфф,0})^2}} \times$$

$$\times \left\{ \frac{2 \cos^2 \beta}{\omega_1^2 + v_{эфф}^2} + \frac{\sin^2 \beta}{(\omega_1 + \omega_H)^2 + v_{эфф}^2} + \frac{\sin^2 \beta}{(\omega_1 - \omega_H)^2 + v_{эфф}^2} \right\}; \quad \text{tg } \varphi_1 = \frac{\Omega}{\delta v_{эфф,0}}. \quad (3.5)$$

Выражения для $M_{2\Omega}$ и φ_2 отличаются от M_{Ω} и φ_1 заменой величин M на $M^2/4$ и Ω на 2Ω .

Легко видеть, что в предельных случаях $\Omega \gg \delta v_{эфф,0}$ при условии (3.2) формулы (3.5) с точностью до множителей ~ 1 совпадают с формулами (3.3) или (3.4) кинетической теории. При этом здесь и ниже мы будем считать v средней арифметической скоростью:

$$v^2 = \overline{v^2} = 8kT/\pi m.$$

Глубина кросс-модуляции M'_{Ω} может быть вычислена в квазистационарном приближении. Тогда получим [1]

$$M'_{\Omega} = M_{\Omega} \int_s \frac{x_0(\omega_2)}{2} ds, \quad (3.6)$$

где s — путь волны частоты ω_2 в области взаимодействия.

Полагая $\Omega = 0$, $M = 0,8$, $\delta = 1,3 \cdot 10^{-3}$; $T = 250^\circ \text{K}$ (в соответствии с экспериментальными данными [5,6]) и используя для E_0 формулу [7]

$$E_0 = \gamma \frac{300 \sqrt{W_{\text{[kW]}}} \text{ mV}}{r_{\text{[км]}}} = \gamma \frac{\sqrt{W_{\text{[kW]}}}}{r_{\text{[км]}}} \cdot 10^{-5} \text{ CGSE} \quad (3.7)$$

($W_{\text{[kW]}}$ — мощность излучающей станции в киловаттах, $r_{\text{[км]}}$ — расстояние от антенны в километрах, γ — некоторый множитель, характеризующий поглощение, направляющие свойства антенны и т. п.), из (3.5) и (3.6) получим

$$M'_{\Omega=0} = \gamma^2 8,85 \cdot 10^{13} \frac{W_{\text{[kW]}}}{r_{\text{[км]}}^2} \int \frac{x_0(\omega_2)}{2} ds \times$$

$$\times \left\{ \frac{2 \cos^2 \beta}{\omega_1^2 + v_{эфф}^2} + \frac{\sin^2 \beta}{(\omega_1 + \omega_H)^2 + v_{эфф}^2} + \frac{\sin^2 \beta}{(\omega_1 - \omega_H)^2 + v_{эфф}^2} \right\}. \quad (3.8)$$

Пусть антенна — горизонтальный диполь, расположенный у поверхности идеально проводящей земли и E_0 — величина поля вертикально над диполем. Тогда множитель γ характеризует поглощение волны E_1 при распространении ее в ионосфере⁴. В приближении геометрической оптики он имеет вид:

$$\gamma^2 = \exp \left\{ -\frac{2\omega_1}{c} \int k(\omega_1) dz \right\}, \quad (3.9)$$

⁴ Мы пренебрегаем здесь эффектом «разбухания» [2].

причем под величиной $k(\omega_1)$ в формуле (3.9) нужно иметь в виду коэффициент поглощения «необыкновенной» компоненты, так как только в этом случае в формулах (3.5) и (3.8) будет присутствовать последний резонансный член. Для $k(\omega_1)$ в случае продольного распространения можем написать [3]

$$k(\omega_1) = \sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{\omega_0^2(1-\omega_H/\omega_1) + \sqrt{[(\omega_1-\omega_H)^2 + v_{эфф}^2 - \omega_0^2(1-\omega_H/\omega_1)]^2 + v_{эфф}^2 \omega_0^4/\omega_1^2}}{2[(\omega_1-\omega_H)^2 + v_{эфф}^2]}}, \quad (3.10)$$

где $\omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m} = 3,18 \cdot 10^9 N$. При $\omega_1 \sim \omega_H$ выражение в фигурных скобках (3.8) возрастает⁵ (если, конечно, величина $v_{эфф}$ не очень велика). Однако в силу того, что величина $k(\omega_1)$ при этом тоже резко возрастает, интересующая нас «необыкновенная» компонента будет испытывать весьма сильное поглощение при вхождении ее в слой. Например, при $\omega_1 = \omega_H$, $v_{эфф} = 10^6$, $N = 300$, $z = 3$ км величина γ^2 будет $7,5 \cdot 10^{-5}$. При $\omega_1 = 1,1 \omega_H$ и тех же остальных данных получим $\gamma^2 = 4,1 \cdot 10^{-3}$. Наконец, при $\omega_1 = 0,9 \omega_H$, $\gamma^2 = 5,5 \cdot 10^{-3}$. Отсюда видно, что «необыкновенная» компонента гироспередатчика проникает в слой практически лишь на глубину в несколько километров, в силу чего взаимодействие в этом случае будет осуществляться в самом начале слоя. Если, например, в начале слоя $v_{эфф}$ значительно меньше 10^6 , то при $\omega_1 \sim \omega_H$ величина кросс-модуляции может быть существенно больше, чем величина ее при $\omega_1 \sim 10^6$ (для тех же волн ω_2). Напротив, если в начале слоя $v_{эфф} \gtrsim 10^6$, то особого выигрыша при резонансе ($\omega_1 \sim \omega_H$) не будет.

Кросс-модуляция вблизи гиросчастоты экспериментально изучалась в ряде работ (см., например, [8–10]), причем данные этих работ весьма противоречивы. Так, например, в работе [8] наблюдали кросс-модуляцию до 12% при использовании гироспередатчика мощностью 3,3 kW. Подвергались модуляции волны $\omega_2 = 2,98 \cdot 10^6$ гц. В работах же [9,10] при использовании мощного передатчика (~ 120 kW) наблюдали значительно меньшие величины кросс-модуляции (3–4%) как вне гиросчастоты, так и вблизи нее. Столь существенное расхождение можно объяснить, предположив, что нижняя часть E-слоя в опытах [8] была на 5–10 км выше, чем в опытах [9,10]. Действительно, при этом $v_{эфф}$ в первом случае было бы в несколько раз меньше, чем во втором, что привело бы к возрастанию как величины γ^2 , так и выражения в фигурных скобках в формуле (3.8). Возможно также, что в опытах [9,10] траектория подвергаемого модуляции луча проходила вне области, возмущенной «необыкновенной» компонентой гироспередатчика. Во всяком случае высказывания автора работы [9] о том, что вблизи гиросчастоты вообще не должно наблюдаться возрастание кросс-модуляции, неправильны.

Величина γ^2 , как это видно из приведенных выше значений, при $\omega_1 = \omega_H$ будет существенно меньше, чем при ω_1 меньших или больших ω_H , тогда как величина фигурных скобок в (3.8) имеет максимум при $\omega_1 \sim \omega_H$, причем при не очень малых $v_{эфф}$ этот максимум не будет резким. Поэтому, согласно (3.8), должны наблюдаться два максимума кросс-модуляции, при ω_1 несколько меньшем и несколько большем ω_H . Такая именно картина экспериментально наблюдалась в работе [8].

⁵ Если учесть, что при $\omega_1 \sim \omega_H$ условие $\Omega \ll |\omega_1 - \omega_H|$, вообще говоря, не выполняется, и произвести более строгий расчет, то вместо одного максимума мы получили бы три, сдвинутых друг относительно друга по частоте на величину Ω . Это обстоятельство для простоты мы учитывать не будем.

Численный расчет кросс-модуляции вблизи гирочастоты, произведенный при помощи формул (3.8)–(3.10) в предположении, что в начале E -слоя $\nu_{\text{эфф}} \sim 5 \cdot 10^5$ и N изменяется по линейному закону ($N = \alpha z$; $\alpha \approx 200$ эл./км), дал значение кросс-модуляции, порядок величины которого находится в согласии с [8]⁶. Для более подробных расчетов необходимы достаточно надежные экспериментальные данные о нижней части E -слоя ночью, которых в литературе в настоящий момент нет.

Заметим, что экспериментальное изучение кросс-модуляции радиоволн как вблизи гирочастоты, так и вне ее, в сочетании с изучением «боковых» волн может дать весьма ценные сведения о строении ионосферы.

Как в данной работе, так и в [1] мы ограничились рассмотрением взаимодействия радиоволн ночью. Днем взаимодействие в E - и F -слоях будет мало из-за поглощения в D -слое, а взаимодействие в самом D -слое будет мало из-за большого значения эффективного числа соударений.

В заключение автор выражает благодарность проф. В. Л. Гинзбургу за постоянный интерес к работе и ценные советы.

Физико-технический институт
Горьковского университета

Поступила в редакцию
30 мая 1952 г.

Литература

- [1] И. М. Виленский. ЖЭТФ, 22, 544, 1952.— [2] Б. И. Давыдов. ЖЭТФ, 7, 1069, 1937.— [3] В. Л. Гинзбург, Теория распространения радиоволн в ионосфере, Гостехиздат, 1949.— [4] И. М. Рыжик и И. С. Градштейн. Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений, Гостехиздат, 1951.— [5] Г. В. Розенберг. Усп. физ. наук, 34, 445, 1948.— [6] L. C. H. Nuxley a. A. A. Zaazow. Proc. Roy. Soc. A, 196, 402, 1949.— [7] А. Н. Шукин. Распространение радиоволн, Связьиздат, 1940.— [8] M. Cutolo. Nature, 166, 98, 1950.— [9] J. Shaw. Proc. Phys. Soc. B, 64, 1, 1951.— [10] D. A. Bell. Proc. Phys. Soc. B, 64, 1053, 1951.

⁶ При проведении расчетов существенен учет в формуле (3.8) множителя $\int \frac{\chi_0(\omega_2)}{2} ds$, который обычно без достаточных оснований отбрасывался.

САМОВОЗБУЖДЕНИЕ АВТОКОЛЕБАНИЙ В ГАЗОВОМ РАЗРЯДЕ ПРИ БОЛЬШИХ ДАВЛЕНИЯХ

М. Е. Герцештейн

Рассмотрено взаимодействие звуковых и электронных волн в газоразрядной плазме. Показана возможность самовозбуждения определенного интервала частот.

В предыдущей работе [1] была показана возможность самовозбуждения автоколебаний в положительном столбе газового разряда, вследствие наличия направленного движения электронов. Газ из заряженных частиц представляет собой среду, в которой возможно распространение продольных электрических волн; наличие заряженных частиц, имеющих скорость, близкую к фазовой скорости волны, приводит к возможности самовозбуждения. Поскольку продольная волна имеет чисто электродинамическую природу, то закон дисперсии ее очень сложен, и фазовая скорость сильно меняется с частотой. Опыт показывает [2], что при малых давлениях $p \sim 1$ мм рт. ст. последнее действительно имеет место, и, в частности, фазовая и групповая скорости могут иметь разные знаки [3]. При $p \sim 10$ мм рт. ст. волны и пульсации тока исчезают, что, повидимому, объясняется возрастанием активных потерь энергии, а при $p \sim 100$ мм рт. ст. появляются вновь [4], причем скорость волны — порядка скорости звука в газе. Это обстоятельство наводит на мысль о том, что при давлениях $p \geq 100$ мм рт. ст. сказываются упругие свойства нейтрального газа, причем звуковые волны, распространяющиеся в нейтральном газе, взаимодействуют с продольными электрическими. Изучению этого взаимодействия и посвящена настоящая работа.

В газовом разряде имеются как тяжелые частицы — молекулы, положительные и отрицательные ионы, так и легкие — электроны. Взаимодействие между электроном и тяжелой частицей велико, если электрон находится во внешней оболочке, а взаимодействие между двумя тяжелыми частицами — если соприкасаются электронные оболочки, т. е. на вдвое большем расстоянии. Поэтому для отношения эффективных сечений имеем в системе координат центра тяжести

$$(\sigma_- / \sigma_+)_{п. т.} \sim 1/4. \quad (1)$$

Усреднение по тепловому движению частиц тяжелого газа дает

$$\sigma_- / \sigma_+ = \frac{1}{4V^2} = 0,177, \quad (2)$$

так как скорость электронов значительно больше скорости молекул. В работе [5] было показано, что для случая волн малых частот существенно эффективное сечение передачи энергии, а не передачи импульса, поэтому в формуле (2) для электронов появляется еще множитель $m/M \sim 10^{-5} \div 10^{-6}$. Изложенное позволяет рассматривать газоразрядную плазму как смесь электронного газа концентрации n_0 и тяжелого заряженного газа концентрации N . Средний заряд молекулы

тяжелого газа обозначим через Q . Если отрицательных ионов нет, то

$$Q = en_0 / N = \alpha e. \quad (3)$$

Коэффициент ионизации α , как правило, не превышает 10^{-3} [6]. При наличии отрицательных ионов Q уменьшается. К тяжелому газу применимы уравнения гидродинамики, которые с учетом объемных сил, вызванных электрическим полем E , запишутся в виде:

$$(\partial N / \partial t) + \operatorname{div} N \mathbf{v} = 0, \quad (4)$$

$$(\partial \mathbf{v} / \partial t) + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -(1 / MN) \operatorname{grad} p + (Q / M) \mathbf{E}, \quad (5)$$

где M — средняя масса молекулы тяжелого газа. Полное давление складывается из парциальных давлений смеси

$$p = p_{\text{эл}} + p_{\text{т}}. \quad (6)$$

Для идеального газа

$$p_{\text{т}} = NkT_{\text{т}}; \quad p_{\text{эл}} = nkT_{\text{эл}}, \quad (7)$$

где k — постоянная Больцмана, поэтому

$$\frac{p_{\text{эл}}}{p_{\text{т}}} = \frac{n}{N} \frac{T_{\text{эл}}}{T_{\text{т}}} = \alpha \frac{T_{\text{эл}}}{T_{\text{т}}} \ll 1, \quad (8)$$

и в формулах (5) и (6) можно пренебречь электронным давлением. Обозначая через N среднюю концентрацию тяжелых частиц, пренебрегая вихревым движением ($\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$) и направленными потоками тяжелого газа, для волн малой амплитуды имеем уравнения акустики:

$$\Delta N - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} = \frac{Q}{Mc^2} N_0 \operatorname{div} \mathbf{E}; \quad (9)$$

$$\Delta \mathbf{v} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = -\frac{Q}{Mc^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}; \quad (10)$$

$$c = \sqrt{\frac{1}{M} \frac{dp}{dN}}; \quad (11)$$

c — скорость звука в тяжелом газе: $c \sim 10^2 \div 10^3$ м/сек.

Для исследования колебаний и волн электронного газа гидродинамическое приближение недостаточно, так как оно не учитывает взаимодействия заряженных частиц с волной. Поэтому исходим из линеаризованного кинетического уравнения:

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad}_{\mathbf{r}} \varphi + \frac{e}{m} \mathbf{E}_{\text{ст}} \operatorname{grad}_{\mathbf{v}} \varphi - \hat{K} \varphi = -\frac{e}{m} \mathbf{E}_{\text{ст}} \operatorname{grad}_{\mathbf{v}} f_0, \quad (12)$$

где $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ — изменение функции распределения, обусловленное переменным электрическим полем волны $\mathbf{E}_{\sim}$, $f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ — стационарная функция распределения, $\mathbf{E}_{\text{ст}}(\mathbf{r})$ — стационарное электрическое поле, $\hat{K} \varphi$ — интеграл соударений (линейный оператор в пространстве скоростей).

Если $f_0(\mathbf{v})$ и $\mathbf{E}_{\text{ст}}(\mathbf{r})$ не зависят от координат, то решением системы уравнений (9) — (12) будут плоские продольные волны

$$\mathbf{E}_{\sim}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \mathbf{r})}; \quad [\mathbf{k} \mathbf{E}] = 0. \quad (13)$$

Волну, бегущую вдоль оси разрядной трубки, можно с достаточной точностью считать плоской [7]. Для тока проводимости тяжелого газа

из (9) — (10), (13) получаем

$$j_{\sim} = -\frac{Q^2}{M} N_0 \frac{i\omega}{\omega^2 - c^2 k^2} E_{\sim}. \quad (14)$$

Обозначив через $\varepsilon_{\parallel}(\omega, k)$ вычисленную при помощи уравнения (12) продольную диэлектрическую проницаемость электронного газа [8], из условия отсутствия полного тока приходим к дисперсионному уравнению:

$$\varepsilon_{\parallel}(\omega, k) - \frac{\omega_T^2}{\omega^2 - c^2 k^2} = 0. \quad (15)$$

Здесь $\omega_T = \sqrt{4\pi(Q^2/M)N_0}$ — лэнгмюрова частота тяжелого газа, не превышающая нескольких килогерц.

Рассмотрим более подробно дисперсионное уравнение (15). Если предположить, что в газоразрядной плазме кроме электронов, описываемых функцией $f(\mathbf{v})$, имеются еще электроны, не испытывающие соударений, описываемые функцией распределения $\tilde{f}(\mathbf{v})$:

$$\tilde{f}(\mathbf{v}) = \begin{cases} \frac{1}{2c} g(\mathbf{v}_{\perp}), & \text{если } \left| \frac{\mathbf{v} \mathbf{k}}{k} \right| \leq c, \\ 0, & \text{если } \left| \frac{\mathbf{v} \mathbf{k}}{k} \right| > c, \end{cases} \quad (16)$$

и что плотность этих электронов такова, что их лэнгмюрова частота есть ω_T , то приходим к уравнению (15). В уравнении (16) $g(\mathbf{v}_{\perp})$ произвольна, лишь бы удовлетворялись условия $\mathbf{v}_{\perp} \mathbf{k} = 0$; $\int g(\mathbf{v}_{\perp}) d\mathbf{v}_{\perp} = 1$. Для самовозбуждения, согласно [1], необходимо, но, разумеется не достаточно, чтобы функция

$$F\left(\frac{\mathbf{v} \mathbf{k}}{k}\right) = \omega_0^2 f_0\left(\frac{\mathbf{v} \mathbf{k}}{k}\right) + \omega_T^2 \tilde{f}\left(\frac{\mathbf{v} \mathbf{k}}{k}\right) \quad (17)$$

имела более одного максимума. Это приводит к условию:

$$\xi > c, \quad (18)$$

где ξ — скорость дрейфа электронов, которое всегда в газовом разряде выполнено.

Дисперсионное уравнение (15) определяет две ветви решений. Ветвь, для которой при $\omega_T \rightarrow 0$ имеем $\omega = \pm ck$, мы будем называть звуковой, а ветвь, закон дисперсии которой при $\omega_T \rightarrow 0$ дается уравнением $\varepsilon_{\parallel}(\omega, k) = 0$, — электронной. Так как при больших давлениях функция распределения электронов $f_0(\mathbf{v} \mathbf{k}/k)$ имеет не более одного максимума, скорость дрейфа меньше тепловой, фазовые скорости волн электронной ветви велики, и, следовательно, резонанс между волнами разных ветвей невозможен. Поэтому можно говорить о влиянии звуковых волн на электронные, и наоборот.

Выясним влияние звуковых колебаний на электронные. Из (15) имеем

$$\varepsilon(\omega, k) = \frac{\omega_T^2}{\omega_0^2} \left\{ 1 - \frac{c^2}{(\omega/k)^2} \right\}^{-2} \approx \left(\frac{\omega_T}{\omega_0} \right)^2 > 0. \quad (19)$$

Так как для энергии слабо затухающих электронных волн хорошим приближением является выражение Рытова [9]:

$$W = \frac{1}{16\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \omega} \varepsilon \omega \right\} \mathbf{E} \mathbf{E}^*, \quad (20)$$

то в силу положительности энергии $(\partial \varepsilon / \partial \omega) > 0$ частота электронных волн повышается. Повышение частоты лежит далеко за пределами экспериментальной точности. Так как правая часть (19) вещественна, то в первом приближении какие-либо энергетические эффекты отсутствуют.

Перейдем к изучению влияния электронов на звуковые волны. Из (15) имеем

$$\omega = \sqrt{(ck)^2 + \omega_T^2 \varepsilon^{-1}(\omega, k)}. \quad (21)$$

Системой, в которой возможно распространение волн, является тяжелый газ; с звуковыми волнами взаимодействуют движущиеся электроны. Поскольку потери звуковых волн ничтожны, то сравнительно небольшой приток энергии может привести к самовозбуждению. Легко видеть, что при вещественных k

$$\operatorname{Im} \omega \operatorname{Im} \varepsilon < 0 \quad (22)$$

и, следовательно, если $\operatorname{Im} \varepsilon > 0$, то произойдет самовозбуждение колебаний. Этот результат физически вполне ясен, так как диэлектрик с $\operatorname{Im} \varepsilon > 0$ эквивалентен проводнику с отрицательной проводимостью. Для звуковых колебаний $\omega \ll \omega_0$, поэтому вместо $\varepsilon_{\parallel}(\omega)$ можно взять ее предельное значение для $\omega \rightarrow +0$. Диэлектрическая проницаемость ε зависит от очень многих факторов: частоты колебаний, конфигурации поля, электронной функции распределения, внешнего магнитного поля.

Разберем отдельно два случая:

1) При $\omega \rightarrow +0$

$$\operatorname{Re} \varepsilon(k) < 0. \quad (23)$$

Этот случай имеет место при больших направленных скоростях электронов [1, 10], возникающих около перегородок и областей с отрицательным потенциалом, когда ток ограничен пространственным зарядом. Если выполнено условие (23), уравнение (21) допускает осциллирующее по пространству стационарное решение:

$$\omega = 0; \quad k^* = \frac{\omega_T}{c} \sqrt{-\varepsilon_{\parallel}^{-1}(0, k)}. \quad (24)$$

Наблюдается неподвижная картина, которую мы будем называть, по аналогии с волнами на воде [11], спутной волной: подобно тому как движущийся по воде корабль возбуждает на поверхности волну, стационарную в связанной с кораблем системе координат, движущаяся относительно электронной плазмы область отрицательного потенциала возбуждает спутные волны, стационарные в лабораторной системе координат. Согласно (21), природа стационарного и бегущего решения общая, что находится в согласии с опытными данными [4]. Поскольку $\omega = 0$, то спутные волны электрическими колебаниями не сопровождаются.

2) При $\omega \rightarrow +0$

$$\operatorname{Re} \varepsilon(k) > 0, \quad (25)$$

что имеет место при малых скоростях дрейфа ξ в однородном положительном столбе. В качестве невозмущенной функции распределения обычно принимают

$$f_0^0(\mathbf{v}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{u_0^3} \exp \left\{ -\frac{(\mathbf{v} - \bar{\xi})^2}{2u_0^2} \right\}, \quad (26)$$

где u_0 — среднеквадратичная одномерная скорость.

В однородном столбе

$$c \ll \xi \ll u_0, \quad (27)$$

и где это возможно, мы будем полагать $\xi = 0$. Точное решение уравнения (12) с учетом соударений неизвестно, однако при выполнении условия (27) $\varepsilon_{\parallel}(\omega, k)$ может быть найдено из физических соображений. Уравнение

$$\varepsilon(k) = 0, \quad \omega = 0 \quad (28)$$

при $\xi = 0$ должно описывать статическую поляризацию; k — чисто-мнимо, поэтому, обозначая через a дебаевское расстояние, имеем с точностью до членов порядка ξ/u_0 включительно

$$\operatorname{Re} \varepsilon_{\parallel}(0, k) = 1 + \frac{1}{(ka)^2} = \frac{1 + (ka)^2}{(ka)^2}. \quad (29)$$

Отметим, что пренебрежение постоянным полем и интегралом соударений также приводит к выражению (29). Это связано с тем обстоятельством, что при малых частотах, когда время установления стационарного распределения по скоростям меньше периода колебаний, структура $\varphi(\mathbf{v})$ в пространстве скоростей совпадает со структурой $f_0(\mathbf{v})$, поэтому в уравнении (12) сокращаются члены, содержащие постоянное поле, т. е. $(e/m)\mathbf{E} = \operatorname{grad}_{\mathbf{v}} \varphi$, и интеграл соударений $\hat{K}\varphi$ [5].

Формулы (21) и (29) при условии $|ka| \ll 1$ дают

$$\operatorname{Re} \omega = k \sqrt{c^2 + \omega_r^2 a^2}, \quad (30)$$

Поэтому фазовая скорость волны больше скорости звука:

$$c' = \frac{\omega}{k} \approx c \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_r}{\omega_0} \right)^2 \left(\frac{u_0}{c} \right)^2 \right\}. \quad (31)$$

Поправка не превышает нескольких процентов. При вычислении мы воспользовались соотношением $u_0 = a\omega_0$.

Переходим к вычислению мнимой части $\varepsilon_{\parallel}$. По соображениям, изложенным выше, опускаем в (12) постоянное поле и интеграл соударений и получаем, предполагая затухание слабым [1],

$$\operatorname{Im} \varepsilon_{\parallel} = \pi \frac{\omega_r^2}{k^2} f' \left(\frac{\omega}{k} \right), \quad (32)$$

что с учетом (26) дает для бегущей к аноду волны

$$\operatorname{Im} \varepsilon = + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(ka)^2} \frac{\xi - \omega/k}{u_0} \exp \left\{ -\frac{(\xi - \omega/k)^2}{2u_0^2} \right\}. \quad (33)$$

Так как обычно $c \ll \xi \ll u_0$, то приближенно имеем с точностью до членов порядка ξ/u_0

$$\operatorname{Im} \varepsilon \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(ka)^2} \frac{\xi}{u_0}, \quad (34)$$

и, следовательно, для диэлектрической проницаемости ε при $|ka| \ll 1$ получим формулу

$$\varepsilon_{\parallel}(\omega, k)|_{\omega=0} \approx \frac{1}{(ka)^2} \left\{ 1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\xi}{u_0} \right\}. \quad (35)$$

Таким образом для нарастания волны во времени из (21) получаем

$$\operatorname{Im} \omega = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\omega_r}{\omega_0} \right)^2 \left(\frac{u_0}{c} \right) k \xi. \quad (36)$$

Оценим теперь время релаксации волны. Помимо процессов, связанных с диссипацией энергии звуковой волны, имеется еще вызванное диффузией электронов рассасывание объемного заряда. Для диффузии легкого газа в тяжелом имеем [12]

$$\frac{\partial n}{\partial t} \approx \frac{u_0}{N\sigma} \nabla^2 n, \quad (37)$$

откуда для времени релаксации волны τ сразу же получаем

$$\tau_{\text{дифф}}^{-1} = \frac{u_0}{N\sigma} k^2. \quad (38)$$

Условие нарастания — $\text{Im } \omega > \tau_{\text{дифф}}^{-1}$ дает

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\omega_T}{\omega_0} \right)^2 \frac{u_0}{c} k \xi > \frac{u_0}{N\sigma} k^2. \quad (39)$$

Обозначая через λ длину волны, $\lambda = 2\pi/k$ и через S_0 длину свободного пробега передачи импульса $S_0 = 1/N\sigma$, имеем

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\omega_T}{\omega_0} \right)^2 \frac{\xi}{c} > 2\pi \frac{S_0}{\lambda}. \quad (40)$$

Условие (40) ограничивает диапазон генерируемых частот сверху, со стороны коротких волн:

$$\lambda > \lambda_{\text{мин}}, \quad (41)$$

причем, повидимому, $\lambda_{\text{мин}}$ падает с увеличением давления. Диссипация энергии, вызванная вязкостью воздуха, тоже пропорциональна ω^2 [12] и, следовательно, приведет только к некоторому увеличению $\lambda_{\text{мин}}$ в формуле (41).

Рассеяние колебательной энергии пульсаций тока во внешней цепи также приводит к затуханию колебаний, причем можно считать, что соответствующее время релаксации τ_0 не зависит от частоты

$$\lim_{\omega \rightarrow +0} \tau_{\text{вн}} = \tau_0, \quad 0 \neq \tau_0 \neq \infty. \quad (42)$$

Поэтому условие — $\text{Im } \omega > \tau_0^{-1}$ приводит, согласно (36), к неравенству

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\omega_T}{\omega_0} \right)^2 \left(\frac{u_0}{c} \right) \frac{\xi}{\lambda} > \tau_0^{-1}. \quad (43)$$

Это условие, следовательно, ограничивает диапазон частот снизу, со стороны длинных волн

$$\lambda < \lambda_{\text{макс}}, \quad (44)$$

причем $\lambda_{\text{макс}}$ зависит от параметров внешней цепи. Таким образом длина бегущих и соответствующих им квазистационарных страт [2, 3] заключена в пределах

$$\lambda_{\text{мин}} < \lambda < \lambda_{\text{макс}}. \quad (45)$$

Наиболее вероятно возбуждение волн, для которых — $\text{Im } (\omega)$ с учетом потерь максимально [13] и выполнены необходимые фазовые соотношения (см. [3, 14]).

Таким образом мы можем считать доказанным, что учет упругих свойств нейтрального газа необходим для объяснения явлений, происходящих в газовом разряде при больших давлениях.

Автор выражает свою глубокую признательность В. В. Потемкину за обсуждение физических результатов работы.

Московский государственный
университет

Поступила в редакцию
1 ноября 1952 г.

Литература

- [1] М. Е. Герценштейн. ЖЭТФ, 23, 669, 1952. — [2] А. А. Зайцев. ДАН СССР, 79, 779, 1954; Вестн. МГУ, 9, 55, 1950; 10, 41, 1951. — [3] М. Е. Герценштейн и В. В. Потемкин. ЖЭТФ, 24, 643, 1953. — [4] Б. Н. Клярфельд. ЖЭТФ, 22, 66, 1952. — [5] М. Е. Герценштейн. ЖЭТФ, 24, 652, 1953. — [6] В. Л. Грановский. Электрический ток в газах, ГИТТЛ, 1952. — [7] Р. Л. Стратонович. Вестн. МГУ, 3, 31, 1952. — [8] М. Е. Герценштейн. ЖЭТФ, 22, 303, 1952. — [9] С. М. Рытов. ЖЭТФ, 17, 930, 1947. — [10] А. А. Власов. Теория многих частиц, ГИТТЛ, 1950. — [11] Дж. Флемминг. Волны в воде, воздухе и эфире, Изд-во АН СССР, 1937. — [12] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. Механика сплошных сред, Гостехиздат, 1944. — [13] Г. В. Гордеев. ЖЭТФ, 22, 230, 1952. В. В. Потемкин и М. Е. Герценштейн. ЖЭТФ, 24, 610, 1953. — [14] К. Ф. Теодорчик. Автоколебательные системы, ГИТТЛ, 1952.
-

КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ СПЕКТРЫ И ПОСТОЯННЫЕ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ ЭТИЛЕНА И ЕГО ДЕЙТЕРОЗАМЕЩЕННЫХ

Л. М. Свердлов и Н. Л. Пахомова

На основе новой интерпретации колебательных спектров C_2H_4 и C_2D_4 вычислены постоянные потенциальной энергии молекулы этилена и произведен расчет частот и форм нормальных колебаний всех дейтероэтиленов.

Введение

Исследование колебательных спектров соединений, содержащих этиленовую группу $C=C$, и прежде всего олефинов, входящих в состав бензинов, представляет значительный интерес как в теоретическом, так и в практическом отношении. Естественно, что начинать теоретические исследования нужно с простейших соединений, а именно с этилена, тем более что расчет колебательных спектров этой молекулы представляет и самостоятельный интерес. Это — простая высокосимметричная молекула, спектры которой легче других поддаются теоретическому анализу (такое же положение в случае парафинов занимают молекулы метана и этана, в случае ароматики — молекула бензола). За последние два десятилетия колебательные спектры молекулы этилена и его дейтерозамещенных исследовались многими авторами [1–10], причем особенно подробно изучались спектры C_2H_4 и C_2D_4 . Однако до настоящего времени не существует общепринятого отнесения частот этилена. В литературе обсуждаются в основном два отнесения частот C_2H_4 и C_2D_4 : одно из них предложено в работе [3], его поддерживают Степанов [1] и другие авторы [2, 4], другое было предложено в работе [5] — в последнее время к нему присоединился ряд авторов [6, 7]. Окончательно вопрос об интерпретации спектра этилена может быть решен лишь на основании теоретического расчета. Для этого необходимо, исходя из определенной интерпретации спектров C_2H_4 и C_2D_4 , найти постоянные потенциальной энергии и при их помощи рассчитать спектры всех дейтерозамещенных этилена. Хорошее согласие вычисленных значений частот с наблюдаемыми частотами явилось бы подтверждением правильности исходной интерпретации. Степанов [1], используя отнесение частот, принятое в работе [3], вычислил силовые коэффициенты этилена (для плоских колебаний) и рассчитал частоты цис- и транс-изомеров $C_2H_2D_2$. Анализируя результаты своего расчета, Степанов пришел к выводу о справедливости исходной интерпретации. Однако для такого заключения необходимо было бы произвести расчет и интерпретацию спектров всех дейтероэтиленов¹.

В данной работе для решения задачи о нормальных колебаниях этилена проведены два варианта расчета частот всех дейтероэтиленов, соответствующие двум вышеуказанным вариантам отнесения частот C_2H_4 и C_2D_4 .

¹ Кроме того, при вычислении частот цис- и транс-изомеров $C_2H_2D_2$ Степанов допустил ошибки, о чем свидетельствует тот факт, что вычисленные частоты цис- и транс- $C_2H_2D_2$, C_2H_4 и C_2D_4 не удовлетворяют правилу сумм [11] даже приближенно.

1. Обзор экспериментального материала и отнесение частот

Молекула этилена — плоская молекула, принадлежащая к точечной группе V_h . Имеются колебания следующих типов симметрии:

$$\Gamma = 3A_g + A_u + 2B_{1g} + B_{1u} + 2B_{2u} + B_{2g} + 2B_{3u}.$$

Отнесение ряда частот колебаний [типов симметрии A_g (ν_1, ν_2, ν_3), B_{3u} (ν_{11}, ν_{12}), B_{2g} (ν_8), B_{1u} (ν_7), B_{2u} (ν_9)] не вызывает трудностей (см. табл. 1, 2) и единообразно у различных авторов [2]. Что касается частот колебаний ν_{10} (B_{2u}) и ν_6 (B_{1g}), то предлагаемая разными авторами интерпретация их различна. Авторы работы [3] относят к этим колебаниям следующие частоты: $\nu_{10} = 995 \text{ см}^{-1}$, $\nu_6 = 1055 \text{ см}^{-1}$ молекулы C_2H_4 ; $\nu_{10} = 712 \text{ см}^{-1}$ и $\nu_6 = 883 \text{ см}^{-1}$ молекулы C_2D_4 . Положение полосы 995 см^{-1} измерено не точно², ибо на нее налагается гораздо более интенсивная полоса 949 см^{-1} . Частота 712 см^{-1} была вычислена при помощи изотопических соотношений. Значения частот 1055 и 883 см^{-1} были получены из интерпретации инфракрасных полос $2046,5$ и 1595 см^{-1} , соответственно. В спектре этилена была найдена [5] также перпендикулярная полоса типа B с центром [6] у $810,3 \text{ см}^{-1}$, которая не может быть составной частотой. Ряд авторов [5, 6] относят ее к колебанию ν_{10} . Используя правило произведений для ν_{10} молекулы C_2D_4 , получим тогда 585 см^{-1} . Интерпретируя частоты $2046,5$ и 1595 см^{-1} как составные частоты $\nu_6 + \nu_{10}$, получим для ν_6 следующие значения³: для молекулы C_2H_4 $\nu_6 = 1236 \text{ см}^{-1}$, для молекулы C_2D_4 $\nu_6 = 1010 \text{ см}^{-1}$. При таком отнесении можно более убедительным образом интерпретировать инфракрасную полосу в спектре этилена $4207,9 \text{ см}^{-1}$, как $\nu_{11} + \nu_6$ (B_{2u}), вместо комбинации из четырех гармоник, как это принято в работе [2]: $4207,9 \text{ см}^{-1} = 2\nu_7 + \nu_{10} + \nu_3$. Инфракрасную полосу 4323 см^{-1} в спектре C_2H_4 можно рассматривать как составную полосу $\nu_3 + \nu_{11}$ (B_{3u}), вместо $\nu_3 + 3\nu_{10}$ по [2]. Крутильное колебание ν_4 (A_u) согласно правилам отбора запрещено и в инфракрасном, и в комбинационном спектрах. Значения частот ν_4 для C_2H_4 и C_2D_4 можно определить при помощи правила сумм [11], используя для этой цели частоты неплоских колебаний C_2H_3D и C_2HD_3 :

$$2/3 (\nu_4^2 + \nu_7^2 + \nu_8^2) C_2H_4 = (\nu_4^2 + \nu_7^2 + \nu_8^2) C_2H_3D - 1/3 (\nu_4^2 + \nu_7^2 + \nu_8^2) C_2HD_3;$$

$$2/3 (\nu_4^2 + \nu_7^2 + \nu_8^2) C_2D_4 = (\nu_4^2 + \nu_7^2 + \nu_8^2) C_2HD_3 - 1/3 (\nu_4^2 + \nu_7^2 + \nu_8^2) C_2H_3D.$$

Отсюда $\nu_4(C_2H_4) = 1024 \text{ см}^{-1}$, $\nu_4(C_2D_4) = 729 \text{ см}^{-1}$. Наблюдающаяся в спектре этилена слабая полоса $\sim 995 \text{ см}^{-1}$ соответствует, повидимому, частоте ν_4 , которая становится активной благодаря кориолисову взаимодействию [2] с частотами колебаний ν_{10} и ν_{12} .

Второе колебание ν_6 этилена типа B_{1g} соответствует валентному колебанию связи $C-H$. Для него в комбинационном спектре имеются две возможности: 3075 и $3272,3 \text{ см}^{-1}$ — это слабые деполяризованные линии.

Ряд авторов [2, 6, 7] относит к ν_6 частоту $3272,3 \text{ см}^{-1}$. Основанием для этого является лишь то, что, в отличие от частоты 3075 см^{-1} , эта линия присутствует и в спектре газа. Линию 3075 см^{-1} эти авторы интерпретируют как частоту ν_9 (B_{2u}) $= 3105,5 \text{ см}^{-1}$, появляющуюся с

² По позднейшим наблюдениям [6] более вероятно, что максимум этой полосы расположен у 1028 см^{-1} .

³ Автор работы [7] обнаружил очень слабую линию $\sim 1236^{-1}$ в спектре комбинационного рассеяния этилена.

Таблица 1

Частоты и формы нормальных колебаний этилена

Интерпретация	Симметрия	Наблюд. частоты (см ⁻¹)		Вычисл. частоты (см ⁻¹)	q_1	q_2	q_3	q_4	Q	β_1	α_{12}	β_3	α_{34}
		Комб. рассеяние	Инфр. (газ) *										
$\nu_1 (q)$	A_g	3019 (о. с.) п. газ		3018	1	1	1	1	-0,22	0,08	-0,16	0,08	-0,16
$\nu_2 (Q)$	A_g	1623 (о. с.) п. газ		1623	0,06	0,06	0,06	0,06	1	-1,13	2,26	-1,13	2,26
$\nu_3 (\alpha)$	A_g	1342 (о. с.) п. газ		1346	-0,03	-0,03	-0,03	-0,03	0,28	-0,5	1	-0,5	1
$\nu_5 (q)$	B_{1g}	3075 (сл.) д. жидк.		3076	1	-1	-1	1	0	-0,21	0	0,21	0
$\nu_6 (\beta)$	B_{1g}	1236 (о. сл.) д. жидк.		1234	-0,06	0,06	0,06	-0,06	0	1	0	-1	0
$\nu_9 (q)$	B_{2u}		3105 (с.) B	3118	1	-1	1	-1	0	0	0	0	0
$\nu_{10} (\beta)$	B_{2u}		810 (сл.) B	807	-0,08	0,08	-0,08	0,08	0	1	0	1	0
$\nu_{11} (q)$	B_{3u}		2990 (с.) A	3004	1	1	-1	-1	0	0,07	-0,14	-0,07	0,14
$\nu_{12} (\alpha)$	B_{3u}		1444 (с.) A	1451	0	0	0	0	0	-0,5	1	0,5	-1
$\nu_4 (\chi)$	A_u	1024 **		1021	$\chi = 1$	$\rho_1 = 1$	$\rho_1 = 0$	$\rho_2 = 0$					
$\nu_7 (\rho)$	B_{1u}		949 (о. с.) C	944	$\chi = 0$	$\rho_1 = 0$	$\rho_1 = 1$	$\rho_2 = 1$					
$\nu_8 (\rho)$	B_{2g}	943 (сл.) д. жидк.		941	$\chi = 0$	$\rho_1 = 0$	$\rho_1 = 1$	$\rho_2 = -1$					

* A, B, C — тип полос (см. [2]). ** Вычислено из правила сумм.

Таблица 2

Частоты и формы нормальных колебаний C₂D₄

Интерпретация	Симметрия	Наблюд. частоты (см ⁻¹)		Вычисл. частоты (см ⁻¹)	q ₁	q ₂	q ₈	q ₄	Q	β ₁	α ₁₂	β ₃	α ₃₁
		Комб. расс. (жидк.)	Инфр. (газ)										
ν ₁ (q)	A _g	2251 (о. с.)		2255	1	1	1	1	-0,56	0,25	-0,5	0,25	-0,5
ν ₂ (Q)	A _g	1515 (о. с.)		1510	0,21	0,21	0,21	0,21	1	-0,63	1,26	-0,63	1,26
ν ₃ (α)	A _g	981 (сп.)		990	-0,02	-0,02	-0,02	-0,02	-0,11	-0,5	1	-0,5	1
ν ₅ (q)	B _{1g}	2304 (сл.)		2301	1	-1	-1	1	0	-0,46	0	0,46	0
ν ₆ (β)	B _{1g}	1010 *		1019	-0,03	0,03	0,03	-0,03	0	1	0	-1	0
ν ₈ (q)	B _{2u}		2345 (о. с.) B	2345	1	-1	1	-1	0	-0,06	0	-0,06	0
ν ₁₀ (β)	B _{2u}		585 **	588	-0,07	0,07	-0,07	0,07	0	1	0	1	0
ν ₁₁ (q)	B _{3u}		2200 (сп.) A	2193	1	1	-1	-1	0	0,15	-0,3	-0,15	0,3
ν ₁₂ (α)	B _{3u}		1078 (с.) A	1090	0	0	0	0	0	-0,5	1	0,5	-1
ν ₄ (χ)	A _u		729 ***	730	χ = 1				ρ ₁ = 0		ρ ₂ = 0		
ν ₇ (ρ)	B _{1u}		720 (о. с.) C	723	χ = 0				ρ ₁ = 1		ρ ₂ = 1		
ν ₈ (ρ)	B _{2g}	780 (сл.)		783	χ = 0				ρ ₁ = 1		ρ ₂ = -1		

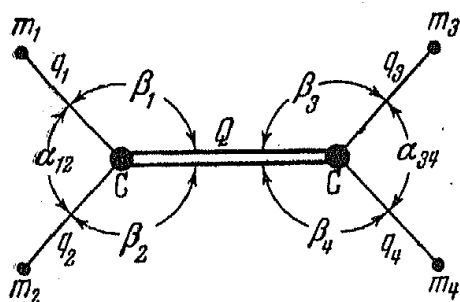
* Вычислено из ν₆ + ν₁₀ = 1595 см⁻¹. ** Вычислено из правила произведений. *** Вычислено из правила сумм.

небольшой интенсивностью в жидком этилене вследствие нарушения правил отбора⁴. В спектре C_2D_4 колебанию ν_5 приписывается частота 2304 см^{-1} . Однако нам кажется, что более вероятным является интерпретация частоты 3075 см^{-1} , как $\nu_5(C_2H_4)$. Во-первых, только в этом случае частоту 2304 см^{-1} в спектре C_2D_4 можно объяснить как ν_5 , с тем чтобы это находилось в соответствии с ожидаемым изотопическим смещением (частоты $2989,5, 3019,3, 3105,5\text{ см}^{-1}$ в спектре C_2H_4 переходят, соответственно, в $2200,2, 2251, 2345\text{ см}^{-1}$ в спектре C_2D_4). Во-вторых, при иной интерпретации ν_5 невозможно объяснить составные инфракрасные полосы $4514\text{ см}^{-1} = \nu_5 + \nu_{12}$ и $6150\text{ см}^{-1} = \nu_5 + \nu_9$. В-третьих, эта интерпретация подтверждается сопоставлением частот $\nu(C-H)$ и $\nu(C-D)$ всех дейтерозетиленов. В этом случае очень слабую деполаризованную линию $3272,3\text{ см}^{-1}$ можно объяснить как тройную комбинацию $(2\nu_4 + \nu_6) B_{1g} = 3284\text{ см}^{-1}$. Новый вариант отнесения частот C_2H_4 и C_2D_4 приведен в табл. 1, 2.

Наблюдаемые частоты частично дейтерированных этиленов приведены в табл. 3—7. Интерпретация спектров этих молекул рассматривалась в [6, 8].

2. Расчет частот нормальных колебаний и силовых коэффициентов

В случае молекулы этилена имеется 12 нормальных колебаний, из которых 9 — плоских, 3 — неплоских. В качестве естественных колебательных координат выберем изменения длин связей и величин углов:



$q_i, \beta_i (i = 1 - 4), Q, \alpha_{12}, \alpha_{34}$ (рисунок) ρ_1, ρ_2, χ . Здесь ρ_1, ρ_2 — углы, определяющие выход связи $C=C$ из плоскостей двух групп CH_2 ; χ — угол, определяющий поворот двух групп CH_2 относительно друг друга. Между естественными координатами имеются два дополнительных условия:

$$\beta_1 + \beta_2 + \alpha_{12} = 0, \beta_3 + \beta_4 + \alpha_{34} = 0. \quad (1)$$

Естественные колебательные координаты дейтерозетиленов

Для расчета были использованы [3] следующие геометрические параметры: $S_{C-H} = 1,071\text{ Å}$; $S_{C=C} = 1,353\text{ Å}$; принято, что все углы равны 120° . Ангармоничность учитывалась введением «спектроскопических масс» [1] для водорода и дейтерия.

Кинематические коэффициенты дейтерозетиленов вычислялись по формулам Ельяшевича [1]. В табл. 8 приведены выражения кинематических коэффициентов для плоских и неплоских колебаний в общем виде. Плоские колебания характеризуются 22 силовыми коэффициентами, образующими 15 линейно независимых комбинаций. Неплоским колебаниям соответствуют три силовых коэффициента. Обозначения силовых коэффициентов даны в табл. 9. Вводя для каждой из молекул координаты симметрии⁵ и учитывая дополнительные условия (1), легко перейти к симметризованным матрицам кинематических и силовых коэффициентов.

⁴ При переходе от газа к жидкости частоты этилена понижаются на несколько см^{-1} (до $\sim 10\text{ см}^{-1}$); при вышеуказанной интерпретации смещение составляет 30 см^{-1} , что обычно бывает только при достаточно сильном межмолекулярном поле.

⁵ Дейтерозетилены принадлежат к следующим точечным группам: C_2H_3D и C_2HD_3 — к C_s ; цис- $C_2H_2D_2$ и а- $C_2H_2D_2$ — к C_{2v} ; транс- $C_2H_2D_2$ — к C_{2h} .

Таблица 3

Частоты и формы нормальных колебаний C_2H_2D

Интерпретация	Симметрия	Наблюд. частоты (см ⁻¹)		Вычисл. частоты (см ⁻¹)	q_1	q_2	q_3	q_4	Q	β_1	α_{12}	β_3	α_{34}
		Комб. расс. (жидк)	Инфр. (газ)										
$\nu_1 (q)$	A'	2990 (5) п. *	3002 (ср.) A^*	3011	0,02	-0,16	1	1,05	-0,1	-0,01	0	0,09	-0,15
$\nu_2 (Q)$	A'	1600 (10) п.		1598	0,2	0,08	0,05	0,06	1	-0,62	1,47	-1,33	2,66
$\nu_3 (\alpha)$	A'	1285 (5)	1290 (сл.) A	1293	-0,05	0,02	0,01	-0,04	-0,15	0,05	1	-0,58	0,35
$\nu_5 (q)$	A'	3050 п.	3062 (ср.) A	3051	-0,06	1	0,34	-0,21	-0,06	0,14	-0,1	-0,08	-0,02
$\nu_6 (\beta)$	A'	1123 (3) п.	1128 (сл.) $A+B$	1129	-0,02	-0,03	-0,07	0,06	-0,08	-0,94	0,93	1	0,09
$\nu_9 (q)$	A'		3103 (ср.) B	3103	-0,05	0,49	-0,97	1	-0,02	-0,04	-0,05	0,07	0
$\nu_{11} (q)$	A'	2265 (4) п.	2272 (ср.) A	2271	1	0,05	-0,04	0	-0,14	-0,03	-0,17	0,14	-0,05
$\nu_{12} (\alpha)$	A'	1396 (4) п.	1403 (ср.) A	1409	-0,02	-0,02	-0,02	-0,01	-0,12	0,18	-0,58	-0,46	1
$\nu_{10} (\beta)$	A'	730 (0,5)	730 (сл.) B^{**}	720	-0,06	0,07	-0,05	0,05	0,01	1	-0,26	0,67	-0,01
$\nu_4 (\chi)$	A''	1008 (0,4)	1001 (с.) C	996	$\chi=1$		$\rho_1=0,83$		$\rho_2=0,02$				
$\nu_7 (\rho)$	A''	945 (1 ш) д.	943 (с.) C	943	$\chi=-0,01$		$\rho_1=-0,15$		$\rho_2=1$				
$\nu_8 (\rho)$	A''	810 (1 ш) д.	807 (с.) C	807	$\chi=-0,35$		$\rho_1=1$		$\rho_2=-0,01$				

* В комбинационном и инфракрасном спектрах наблюдаются (см. [8]) дублеты: 2964 и 3015; 2977 и 3028 см⁻¹. Эти дублеты можно объяснить резонансом Ферми между ν_1 и $\nu_2 + \nu_{12}$. Частота ν_1 должна иметь среднее значение между компонентами дублета.

** Центр полосы 700—775 см⁻¹ точно не определен [9, 10].

Таблица 4

Частоты и формы нормальных колебаний $C_2H_2D_2$

Интерпретация	Симметрия	Наблюд. частоты (см ⁻¹)		Вычисл. частоты (см ⁻¹)	q_1	q_2	q_3	q_4	Q	β_1	$\alpha_{1,2}$	β_3	α_4
		Комб. расс. (жидк.)	Инфр. (газ)										
ν_1 (q)	A'	2271 (4)	2280 (сп.)	2276	0,03	1	0,53	0,08	-0,22	0,27	-0,21	-0,07	-0,17
ν_2 (Q)	A'	1546 (10)	—	1539	0,08	0,18	0,22	0,2	1	-1,17	1,94	-0,57	1,16
ν_3 (x)	A'	1040 (2)	1047 (сп.) A	1056	0,02	-0,03	-0,02	0,01	-0,04	-0,35	-0,28	-0,08	1
ν_5 (q)	A'	2326 (1 ш)	2332 (сп.) B	2327	0,06	0,38	-0,89	1	-0,07	-0,13	-0,05	0,23	-0,04
ν_6 (p)	A'	995 (4)	—	1008	0,04	0	0	0,03	0,08	-0,24	-0,53	1	-0,91
ν_9 (q)	A'	3037 (2)	3045 (сп.) A	3056	1	-0,07	0,02	-0,01	-0,05	-0,02	-0,09	0,06	-0,01
ν_{10} (p)	A'	—	610 (сл.) B	621	-0,08	0,09	-0,09	0,09	-0,01	1	0,28	1,27	0,03
ν_{11} (q)	A'	2213 (1,5)	2222 (сп.) A	2216	-0,06	-0,66	1	1,05	-0,2	-0,09	0,01	0,27	-0,38
ν_{12} (x)	A'	1285 (5)	1290 (сп.) A	1293	0,01	-0,04	-0,02	-0,02	-0,09	-0,88	1	0,29	-0,3
ν_4 (x)	A''	—	724 (с.) C	726	$\chi = 4$	$p_1 = 1,24$	$p_1 = 1,24$			$p_2 = 1,36$			
ν_7 (p)	A''	765 (1 ш)	765 (с.) C	767	$\chi = -0,38$	$p_1 = -0,45$	$p_1 = -0,45$			$p_2 = 1$			
ν_8 (p)	A''	—	919 (с.) C	918	$\chi = -0,5$	$p_1 = 1$	$p_1 = 1$			$p_2 = -0,16$			

Таблица 5

Частоты и формы нормальных колебаний цис- $C_2H_2D_2$

Интерпретация	Симметрия	Наблюд. частоты (см ⁻¹)		Вычисл. частоты (см ⁻¹)	q_1	q_2	q_3	q_4	Q	β_1	α_{12}	β_3	α_{34}
		Комб. расс. (жидк.)	Инфр. (газ)										
ν_1 (q)	A_1	2290 (4)	2300 (сл.) B	2297	0,05	1	0,05	1	-0,27	0,11	-0,2	0,11	-0,2
ν_2 (Q)	A_1	1567 (10)	—	1565	0,08	0,18	0,08	0,18	1	-0,98	1,66	-0,98	1,66
ν_3 (α)	A_1	1215 (5)	—	1216	0	-0,06	0	-0,06	-0,18	-0,77	1	-0,77	1
ν_4 (q)	B_1	—	3055 A	3041	1	-0,06	-1	0,06	0	-0,08	-0,08	0,08	0,08
ν_5 (β)	B_1	—	—	1052	-0,09	0,05	0,09	-0,05	0	1	1,29	-1	-1,29
ν_6 (q)	A_1	3047 (8)	3058 (сп.) B	3070	1	-0,07	1	-0,07	-0,1	0,04	-0,1	0,04	-0,1
ν_{10} (β)	A_1	—	646 (о. сл.) B	654	-0,09	0,08	-0,09	0,08	-0,02	1	0,32	1	0,32
ν_{11} (q)	B_1	2246 (0,4 ш)	2251 (сп.) A	2245	0,04	1	-0,04	-1	0	0,3	-0,14	-0,3	0,14
ν_{12} (α)	B_1	1342 (0,1 ш)	1342 (сп.) A	1350	0,02	-0,01	-0,02	0,01	0	-0,91	1	0,91	-1
ν_4 (χ)	A_2	978*	—	978	$\chi = 1$	1	$p_1 = 1,07$	$p_2 = -1,07$					
ν_7 (ρ)	B_2	—	842 (с.) C	841	$\chi = 0$	0	$p_1 = 1$	$p_2 = 1$					
ν_8 (ρ)	A_2	763 (1,5 ш)	—	762	$\chi = -0,76$	-0,76	$p_1 = 1$	$p_2 = -1$					

* Вычислено из правила сумм.

Таблица 6

Частоты и формы нормальных колебаний транс- $C_2H_2D_2$

Интерпретация	Симметрия	Наблюд. частоты (см ⁻¹)		Вычисл. частоты (см ⁻¹)	q_1	q_2	q_3	q_4	Q	β_1	$\alpha_{1,2}$	β_3	$\alpha_{3,4}$
		Комб. расс. (жидк.)	Инфр. (газ)										
ν_1 (q)	A_g	2276 (4)	—	2277	1	0,01	0,01	1	-0,27	-0,11	-0,23	0,34	-0,23
ν_2 (Q)	A_g	1567 (10)	—	1564	0,2	0,08	0,80	0,2	1	-0,69	1,71	-1,02	1,71
ν_3 (α)	A_g	1282 (5)	—	1291	-0,07	0,02	0,02	-0,07	-0,21	0,25	1	-1,25	1
ν_5 (q)	A_g	3035 (8)	—	3047	-0,05	1	1	-0,05	-0,1	0,16	-0,09	-0,07	-0,09
ν_6 (β)	A_g	1001 (2)	—	1013	0	0,47	0,47	0	0,08	1	-0,65	-0,35	-0,65
ν_9 (q)	B_u	—	3064 (ср.)	3065	-0,08	1	-1	0,08	0	0,05	-0,08	-0,03	0,08
ν_{10} (β)	B_u	—	678 (ср.)	663	-0,09	0,09	-0,09	0,09	0	1,29	-0,29	1	0,29
ν_{11} (q)	B_u	—	2270 (ср.) A	2265	1	0,08	-0,08	-1	0	0,04	-0,11	-0,07	0,11
ν_{12} (α)	B_u	—	1300 (ср.) A	1306	-0,02	0,01	-0,01	0,02	0	-0,31	1	0,69	-1
ν_4 (χ)	A_u	—	987 (с.) C	984	$\chi = 1$		$\rho_1 = 0,85$		$\rho_2 = 0,85$				
ν_7 (ρ)	A_u	—	725 (с.) C	726	$\chi = -0,81$		$\rho_1 = 1$		$\rho_2 = 1$				
ν_8 (ρ)	B_g	863 (1,5 ш)	—	866	$\chi = 0$		$\rho_1 = 1$		$\rho_2 = -1$				

Таблица 7

Частоты и формы нормальных колебаний α - $C_2H_2D_2$

Интерпретация	Симметрия	Наблюд. частоты (см ⁻¹)		Вычисл. частоты (см ⁻¹)	q_1	q_2	q_3	q_4	Q	β_1	α_{12}	β_3	α_{24}
		Комб. расс. (жидк.)	Инфр. (газ)										
ν_1 (q)	A_1	3002 (4)	3049 (ср.) A	3011	0,01	0,01	1	1	-0,11	0,01	-0,02	0,07	-0,14
ν_2 (Q)	A_1	1579 (5)	—	1579	0,22	0,22	0,05	0,05	1	-0,51	1,02	-1,57	-3,14
ν_3 (α)	A_1	1027 (1)	1032 (ср.)	1038	-0,01	-0,01	-0,01	-0,01	-0,06	-0,5	1	-0,03	0,06
ν_5 (q)	B_1	2326 (1 ш)	2333 (сл.) B	2323	1	-1	-0,04	0,04	0	-0,26	0	0,22	0
ν_6 (β)	B_1	—	1150 (о сл.) B	1149	0,01	-0,01	-0,06	0,06	0	-0,58	0	1	0
ν_9 (q)	B_1	3085 (0,8 ш)	3095 (ср.) B	3098	0,02	-0,02	1	-1	0	0,09	0	-0,1	0
ν_{10} (β)	B_1	—	680 (сл.) B*	676	-0,07	0,07	-0,06	0,06	0	1	0	0,68	0
ν_{11} (q)	A_1	2220 (4)	2228 (ср.) A	2225	1	1	-0,03	-0,03	-0,29	0,21	-0,42	0,05	-0,1
ν_{12} (α)	A_1	1379 (4)	1384 (ср.) A	1387	-0,04	-0,04	-0,02	-0,02	-0,17	0,17	-0,34	-0,5	1
ν_4 (χ)	A_2	892 **	—	888	$\chi = 1$	$\chi = 1$	$\rho_1 = 0$	$\rho_1 = 0$	$\rho_2 = 0$	$\rho_2 = 0$	$\rho_2 = 0$	$\rho_2 = 0$	$\rho_2 = 0$
ν_7 (ρ)	B_2	—	751 (с.) C	754	$\chi = 0$	$\chi = 0$	$\rho_1 = 1$	$\rho_1 = 1$	$\rho_2 = 0,01$	$\rho_2 = 0,01$	$\rho_2 = 0,01$	$\rho_2 = 0,01$	$\rho_2 = 0,01$
ν_8 (ρ)	B_2	—	913 (с.) C	943	$\chi = 0$	$\chi = 0$	$\rho_1 = 0,12$	$\rho_1 = 0,12$	$\rho_2 = 1$	$\rho_2 = 1$	$\rho_2 = 1$	$\rho_2 = 1$	$\rho_2 = 1$

* Центр полосы точно не определен: по данным [8] $\nu \approx 660$ см⁻¹; по данным [9] $\nu \sim 700$ см⁻¹. Мы взяли среднее значение. ** Вычислено из правила сумм.

Кинематические коэффици

Коорд.	Естественные					
	q_1	q_2	q_3	q_4	Q	β_1
q_1	$\varepsilon_1 + \varepsilon_C$	$\varepsilon_C \cos \theta$	0	0	$\varepsilon_C \cos \theta$	$-\varepsilon_C \sigma_C \sin \theta$
Q	$\varepsilon_C \cos \theta$	$\varepsilon_C \cos \theta$	$\varepsilon_C \cos \theta$	$\varepsilon_C \cos \theta$	$2\varepsilon_C$	$-\varepsilon_C \sigma_H \sin \theta$
β_1	$-\varepsilon_C \sigma_C \sin \theta$	$\varepsilon_C (\sigma_C + \sigma_H) \times \sin \theta$	$\varepsilon_C \sigma_C \sin \theta$	$-\varepsilon_C \sigma_C \sin \theta$	$-\varepsilon_C \sigma_H \sin \theta$	$(\varepsilon_C + \varepsilon_1) \sigma_H^2 + 2\varepsilon_C \sigma_C [\sigma_C - \sigma_H \cos \theta]$
α_{12}	$-\varepsilon_C \sigma_H \sin \theta$	$-\varepsilon_C \sigma_H \sin \theta$	0	0	$2\varepsilon_C \sigma_H \sin \theta$	$\sigma_H^2 [\varepsilon_C \cos \theta - \varepsilon_C - \varepsilon_1]$
		ρ_1				
ρ_1		$\sigma_H^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + 2\varepsilon_C (2\sigma_H^2 + 2\sigma_H \sigma_C + \sigma_C^2)$				
ρ_2		$-2\varepsilon_C (\sigma_C^2 + 2\sigma_H \sigma_C)$				
χ		$(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \frac{\sigma_H^2}{2 \sin \theta}$				

Обозначения: $\varepsilon_i = \frac{m}{m_i}$ ($m_i = m_H, m_D$); $\varepsilon_C = \frac{m}{m_C}$; $\sigma_H = \frac{S}{S_{CH}}$, $\sigma_C = \frac{S}{S_{CC}}$; $\theta = \angle HCH = \angle HCC$;

Таблица 8

енты дейтероэтиленов

координаты

β_2	β_3	β_4	α_{12}	α_{34}
$\epsilon_C(\sigma_C + \sigma_H) \sin \theta$	$\epsilon_C \sigma_C \sin \theta$	$-\epsilon_C \sigma_C \sin \theta$	$-\epsilon_C \sigma_H \sin \theta$	0
$-\epsilon_C \sigma_H \sin \theta$	$-\epsilon_C \sigma_H \sin \theta$	$-\epsilon_C \sigma_H \sin \theta$	$2\epsilon_C \sigma_H \sin \theta$	$2\epsilon_C \sigma_H \sin \theta$
$\epsilon_C [2\sigma_C (\sigma_H \cos \theta - \sigma_C) - \sigma_H^2 \cos \theta]$	$2\epsilon_C \sigma_C [\sigma_H \cos \theta - \sigma_C]$	$2\epsilon_C \sigma_C [\sigma_C - \sigma_H \cos \theta]$	$\sigma_H^2 [\epsilon_C \cos \theta - \epsilon_C - \epsilon_1]$	0
$\sigma_H^2 [\epsilon_C \cos \theta - \epsilon_C - \epsilon_2]$	0	0	$\sigma_H^2 [2\epsilon_C (1 - \cos \theta) + (\epsilon_1 + \epsilon_2)]$	0
ρ_2		χ		
$-2\epsilon_C (\sigma_C^2 + 2\sigma_H \sigma_C)$		$(\epsilon_2 - \epsilon_1) \frac{\sigma_H^2}{2 \sin \theta}$		
$\sigma_H^2 (\epsilon_3 + \epsilon_4) + (2\sigma_H^2 + 2\sigma_H \sigma_C + \sigma_C^2) 2\epsilon_C$		$(\epsilon_3 - \epsilon_4) \frac{\sigma_H^2}{2 \sin \theta}$		
$(\epsilon_3 - \epsilon_4) \frac{\sigma_H^2}{2 \sin \theta}$		$(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4) \frac{\sigma_H^2}{4 \sin^2 \theta}$		
$m = 1,088; S = 1,09 \text{ \AA}; \epsilon_H = 1; \epsilon_D = 0,5117; \epsilon_C = 0,091; \sigma_H = 1,0177; \sigma_C = 0,8056.$				

Таблица 9

Силловые коэффициенты молекулы этилена

Коорд.	Естественные координаты										
	q_1	q_2	q_3	q_4	Q	β_1	β_2	β_3	β_4	α_{12}	α_{34}
q_1	K_q	h_{12}	h_{13}	h_{14}	H	a_β	b_β	c	d	a_α	p
Q	H	H	H	H	K_Q	A_β	A_β	A_β	A_β	B_α	B_α
β_1	a_β	b_β	c	d	A_β	K_β	l	n	m	l_1	r
α_{12}	a_α	a_α	p	p	B_α	l_1	l_1	r	r	K_α	g

Коорд.	ρ_1	ρ_2	χ
ρ_1	K_ρ	$U_{\rho_1 \rho_2}$	0
ρ_2	$U_{\rho_1 \rho_2}$	K_ρ	0
χ	0	0	K_χ

Для плоских колебаний рассматривались две системы силовых коэффициентов. В первом варианте брались значения силовых коэффициентов, вычисленные Степановым [1], исходя из интерпретации спектров C_2H_4 и C_2D_4 по [3]:

$$K_q = 8,6; h_{12} = 0,05; a_\alpha - b_\beta = 0,375; a_\beta - b_\beta = 0,55; A_\beta - B_\alpha = 0,45; \\ H = 0,1; K_Q = 14,2; K_\beta - l = 0,8; K_\alpha - 2l_1 + l = 0,5; m = -0,04; \\ n = 0,11 \text{ (в единицах } 10^8 \text{ см}^{-2}\text{)}.$$

Во втором варианте силовые коэффициенты определялись, исходя из новой интерпретации (см. табл. 1—2). Значения силовых коэффициентов были найдены по методу вариации постоянных:

$$K_q = 8,63; h_{12} = 0,03; a_\alpha - b_\beta = 0,43; a_\beta - b_\beta = 0,66; \\ A_\beta - B_\alpha = 0,45; H = 0,1; K_\beta = 14,2; K_\beta - l = 0,77; \quad (2) \\ K_\alpha - 2l_1 + l = 0,55; m + g - 2r = 0,095; n + g - 2r = -0,025; \\ h_{13} = h_{14} = 0; c = d = p \text{ (в единицах } 10^6 \text{ см}^{-2}\text{)}.$$

Перемножая симметризованные матрицы кинематических и силовых коэффициентов в численном виде для колебаний всех типов симметрии этилена и всех его дейтерозамещенных, получим два варианта вековых уравнений, определяющих частоты плоских колебаний. Корни вековых уравнений 2, 3, 4, 5 и 9-й степени в первом варианте вычислялись по методу последовательной диагонализации [1]. Приведем вычисленные частоты (в см^{-1}):

C_2H_3D : 3011, 1598, 1243, 3053, 1025, 3093, 877, 2267, 1416 (A');

C_2HD_3 : 2289, 1533, 1029, 2323, 913, 3053, 795, 2218, 1233 (A');

α - $C_2H_2D_2$: 3012, 1577, 1035, 2225, 1392 (A_1); 2321, 1023, 3092, 801 (B_1);

цис- $C_2H_2D_2$: 2291, 1572, 1236, 3068, 790 (A_1); 3041, 903, 2250, 1320 (B_1);

транс- $C_2H_2D_2$: 2272, 1568, 1244, 3047, 895 (A_g); 3060, 805, 2263, 1328 (B_u).

Решение вековых уравнений во втором варианте производилось по методу итерации Маянца [12], позволяющему одновременно находить частоту и форму колебания. В табл. 1—7 приведены частоты плоских колебаний для всех дейтероэтиленов.

Кроме того, по методу вариации постоянных были вычислены также силовые коэффициенты, соответствующие неплоским колебаниям: $K_p = 0,317$; $U_{p_1p_2} = 0,047$; $K_x = 0,755$ (в единицах 10^6 см^{-2}).

Вековые уравнения для неплоских колебаний, составленные по обычной методике, были решены по методу Маянца. Частоты и формы неплоских колебаний приведены в табл. 1—7. Правильность решения вековых уравнений для плоских и неплоских колебаний подтверждается тем, что правила сумм [11], примененные к вычисленным частотам всех дейтероэтиленов, выполняются точно.

3. Обсуждение результатов

Сопоставление вычисленных значений частот (в первом варианте расчета) с наблюдаемыми показывает, что исходя из отнесения частот для C_2H_4 и C_2D_4 , предложенного в [3], невозможно интерпретировать ряд частот дейтерозамещенных, лежащих в области $600 - 1300 \text{ см}^{-1}$, которые безусловно являются фундаментальными. Частоты в указанном интервале или вообще выпадают из отнесения, или при их интерпретации имеет место значительное различие между наблюдаемыми и вычисленными частотами. Это расхождение указывает, что система силовых коэффициентов Степанова неверно отражает силовое поле этилена, а следовательно, интерпретация спектров C_2H_4 и C_2D_4 также является неправильной.

Что касается второго варианта расчета плоских колебаний, соответствующего новой интерпретации спектров C_2H_4 и C_2D_4 , то здесь мы имеем хорошее совпадение вычисленных и наблюдаемых (инфракрасных) значений частот для всех дейтероэтиленов (табл. 1—7). Средняя абсолютная ошибка равна 5 см^{-1} , максимальная 16 см^{-1} . Фундаментальные частоты, выпадавшие ранее из отнесения, теперь легко могут быть интерпретированы для всех дейтероэтиленов. Это, во-первых, свидетельствует о справедливости нового отнесения частот для C_2H_4 и C_2D_4 и, во-вторых, говорит о том, что найденная система силовых коэффициентов (2) достаточно хорошо отображает реальное силовое поле этилена.

Для более полной характеристики силового поля этилена представляет интерес вычислить также обратные силовые коэффициенты, так называемые коэффициенты влияния K_{ij}^{-1} , инвариантные по отношению к преобразованиям координат [12]. 15 линейно-независимых коэффициентов влияния, соответствующие плоским колебаниям, мы определили по обычной методике перехода к обратным матрицам; кроме того, используя то обстоятельство, что коэффициенты влияния подчинены тем же дополнительным условиям, что и сами естественные колебательные координаты (т. е. условиям типа $\sum_j b_j K_{ji}^{-1} = 0$, если координаты

наты подчинены условиям типа $\sum_j b_j x_j = 0$), мы вычислили и остальные 7 коэффициентов:

$$\begin{aligned} K_q^{-1} &= 0,1203, & h_{12}^{-1} &= -0,0044, & h_{13}^{-1} &= -0,0007, & h_{14}^{-1} &= 0,0007, \\ H^{-1} &= -0,0012, & a_{\beta}^{-1} &= -0,0484, & b_{\beta}^{-1} &= 0,0614, & c^{-1} &= 0,0092 \\ d^{-1} &= -0,0091, & a_{\alpha}^{-1} &= -0,013, & p^{-1} &= -0,0001, & K_Q^{-1} &= 0,0726, \\ A_{\beta}^{-1} &= -0,017, & B_{\alpha}^{-1} &= 0,0339, & K_{\beta}^{-1} &= 0,9874, & l^{-1} &= -0,4426, \\ n^{-1} &= 0,1131, & m^{-1} &= -0,1254, & l_1^{-1} &= -0,5448, & r^{-1} &= 0,0122, \\ K_{\alpha}^{-1} &= 1,0895, & g^{-1} &= -0,0245 \text{ (в единицах } 10^{-6} \text{ см}^2\text{)}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом были определены коэффициенты влияния, соответствующие неплоским колебаниям:

$$K_p^{-1} = 3,2255, U_{p_1 p_2}^{-1} = -0,4782, K_x^{-1} = 1,3245 \text{ (в единицах } 10^{-6} \text{ см}^2\text{)}.$$

Выводы

1. Показана несостоятельность интерпретации колебательных спектров молекул C_2H_4 и C_2D_4 , предложенной в [3], которой придерживались многие авторы [1, 2, 4].

2. Теоретически обоснована новая интерпретация колебательных спектров этилена и его дейтерозамещенных.

3. По методу итерации Маянца рассчитаны частоты и формы нормальных колебаний этилена и его дейтерозамещенных. Получено хорошее совпадение вычисленных и наблюдаемых значений частот.

4. Показана ошибочность системы силовых коэффициентов для плоских колебаний молекулы этилена, предложенной Степановым [1].

5. Произведен расчет постоянных потенциальной энергии (силовых коэффициентов и коэффициентов влияния) этилена для плоских и неплоских колебаний.

Саратовский государственный
университет

Поступила в редакцию
6 июля 1953 г.

Литература

- [1] М. В. Волькенштейн, М. А. Ельяшевич, Б. И. Степанов. Колебания молекул, т. I, ГИТТЛ, Л.—М., 1949.—[2] Г. Герцберг. Колебательные и вращательные спектры многоатомных молекул, ГИИЛ, М., 1949.—[3] W. Gallaway and E. Barker. Journ. Chem. Phys., **10**, 88, 1942.—[4] P. Torkington. Journ. Chem. Phys., **18**, 758, 1950; Proc. Phys. Soc., A **64**, 32, 1951.—[5] R. Rasmussen and R. Brattain, Journ. Chem. Phys., **15**, 120, 1947.—[6] R. Arnett, B. Crawford. Journ. Chem. Phys., **18**, 118, 1950.—[7] D. Rank. Journ. Chem. Phys., **18**, 116, 1950.—[8] J. Charette, M. Hemptinne. Bull. Cl. Sci. Acad. Roy. Belgique, **37**, 436, 1951.—[9] J. Lancaster, B. Crawford. Journ. Chem. Phys., **19**, 661, 1951.—[10] C. Courtoy, M. Hemptinne. Journ. Chem. Phys., **19**, 137, 1951; Ann. Soc. Sci. Bruxelles, **66**, 82, 1952.—[11] Л. М. Свердлов. ДАН СССР, **78**, 1115, 1951.—[12] Л. С. Маянец. Тр. ФИАН, **5**, 63, 1950.

ВТОРИЧНАЯ ЭЛЕКТРОННАЯ ЭМИССИЯ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ГРАНЕЙ МОНОКРИСТАЛЛОВ МЕДИ, ПОКРЫТЫХ МОНОКРИСТАЛЛИЧЕСКИМИ ПЛЕНКАМИ ЗАКИСИ МЕДИ

Н. Б. Горный

Исследована зависимость коэффициента вторичной электронной эмиссии δ от энергии первичных электронов V_p для трех граней монокристалла меди (100), (110) и (111), покрытых монокристаллическими пленками закиси меди, и для поликристаллической меди, покрытой поликристаллической пленкой закиси меди. Установлено, что кривые $\delta = f(V_p)$ для исследованных объектов мало различаются между собой. Это различие, наиболее ошутительное в диапазоне сравнительно небольших энергий первичных электронов (100—300 В), повидимому, обусловлено лишь разными значениями работы выхода с различных граней монокристалла. Показано, что возрастание δ с уменьшением работы выхода не может быть обусловлено лишь облегчением выхода вторичных электронов. Это возрастание не объясняется ни одной из существующих теорий вторичной электронной эмиссии.

1. Введение

Исследования ряда авторов [1—4] показали, что коэффициенты вторичной эмиссии δ для поликристаллического образца и для различных плоскостей монокристалла того же вещества различаются по величине. В работе [3] исследовалась величина δ для поликристаллической меди и для монокристаллических плоскостей меди, из которых одна была известной ориентировки (100). Для этого образца коэффициент вторичной эмиссии оказался наибольшим. Величина коэффициента вторичной эмиссии δ и положение максимума на кривой, изображающей зависимость δ от энергии первичных электронов $\delta = f(V_p)$, должны зависеть от вероятности возбуждения вторичных электронов первичными, от соотношения пробегов первичных и вторичных электронов, а также, хотя и в малой степени, от работы выхода. Эти факторы могут влиять в различной степени по разным кристаллографическим направлениям, и, следовательно, естественно ожидать наличия зависимости величины вторичной эмиссии от кристаллографического направления образца. Поэтому представляет интерес изучение вторичной электронной эмиссии для различных монокристаллических плоскостей данного вещества, кристаллографические направления которых известны.

2. Результаты измерений

В настоящей работе приведены результаты опытов по исследованию вторичной электронной эмиссии с различных кристаллических плоскостей монокристалла меди.

Исследованию были подвергнуты три монокристаллических образца меди с поверхностными плоскостями (100), (110) и (111) и один образец из поликристаллической меди. После определения ориентировки монокристалла меди цилиндрической формы [5] были вырезаны

три диска диаметром 10 мм и толщиной 0,6—0,8 мм с плоскостями, параллельными граням (100), (110) и (111). Образцы были механически и электролитически отполированы и вмонтированы в вакуумный прибор. После тщательной тренировки и обезгаживания в течение четырех суток вакуумный прибор был отпаян, и был распылен геттер. По конструкции вакуумный прибор подобен применявшемуся в [6].

Исследование структуры поверхности наших образцов показало, что они покрыты пленкой закиси меди. На гранях монокристаллов меди (100) и (111) образовалась монокристаллическая пленка Cu_2O с плоскостью (111), параллельной основанию медного монокристалла. На грани медного монокристалла (110) нарастала монокристаллическая пленка также с плоскостью (110), параллельной грани меди (110). На поликристаллической меди образовалась поликристаллическая пленка.

Следует отметить, что исследования ряда авторов (см., например, [7, 8]) приводят к заключению, что свежеприготовленная поверхность меди в атмосферных условиях весьма быстро покрывается слоем закиси меди, который не удаляется обезгаживанием и нагреванием в вакууме. Поэтому вряд ли можно сомневаться в наличии пленок закиси меди также на исследованных образцах меди в работах [2, 3], и полученные результаты в этих работах надо рассматривать как вторичную эмиссию с медных образцов, покрытых пленками закиси меди. Наличие закисной пленки на меди в [3] подтверждается тем, что приведенные характеристики $\delta = f(V_p)$ ближе к характеристике δ для закиси меди, полученной в работе [9], чем к характеристике δ для меди в работе [10].

На рис. 1 дана схема, служившая для получения характеристик $\delta = f(V_p)$.

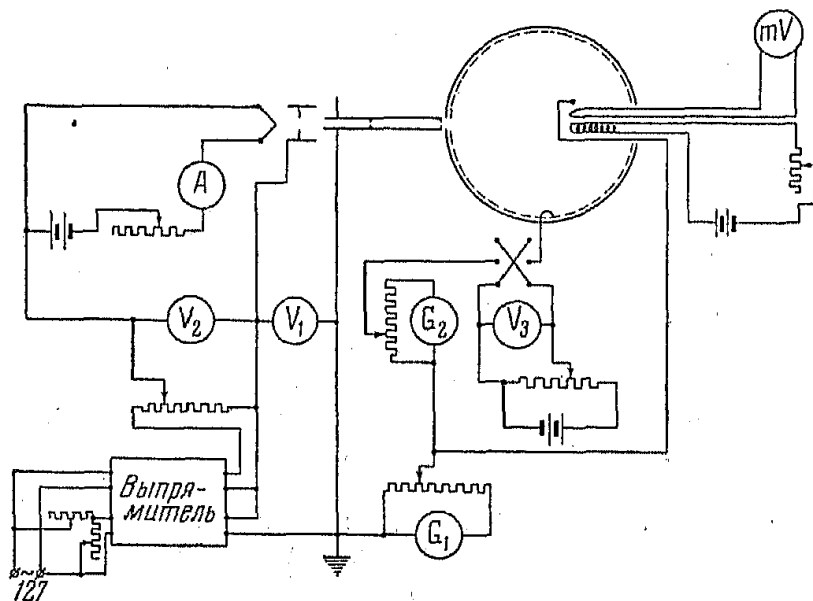


Рис. 1. Схема, применявшаяся для изучения характеристик $\delta = f(V_p)$: G_1 и G_2 — гальванометры, измеряющие первичный и вторичный токи, с чувствительностью соответственно $3 \cdot 10^{-10}$ и $5 \cdot 10^{-10}$ мм/А; V_1 и V_2 — вольтметры, измеряющие потенциалы на электронной пушке; V_3 — вольтметр, измеряющий потенциал на коллекторе; mV — милливольтметр с термопарой, служащий для определения температуры образцов при их подогреве

Для всех четырех образцов были получены воспроизводимые при повторных измерениях кривые $\delta = f(V_p)$. На рис. 2—5 изображены кривые 1, полученные при комнатной температуре, и кривые 2, по-

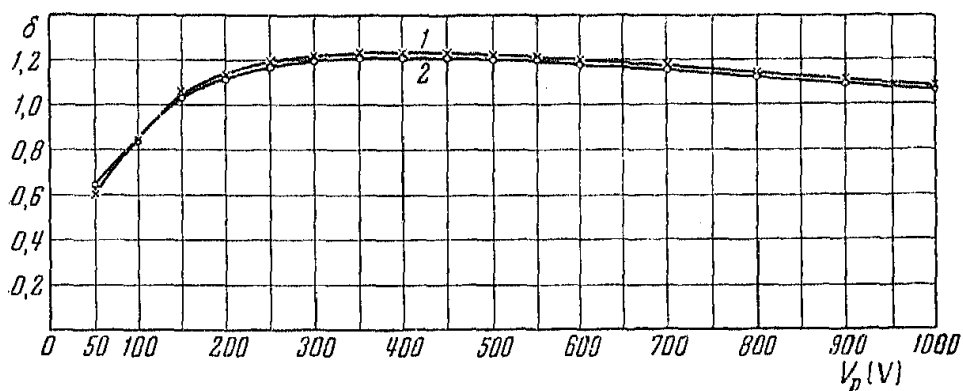


Рис. 2. Кривые $\delta = f(V_p)$, полученные с монокристаллической плоскости закисы меди (111), расположенной на грани меди (100)

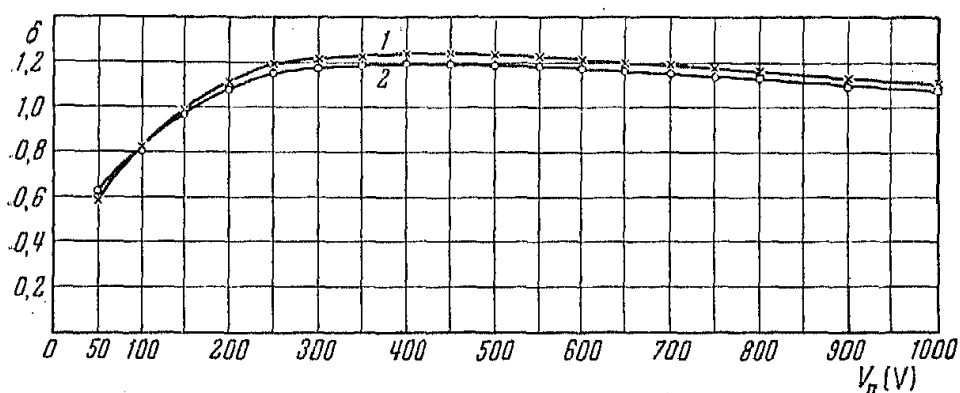


Рис. 3. Кривые $\delta = f(V_p)$, полученные с монокристаллической плоскости закисы меди (111), расположенной на грани меди (111)

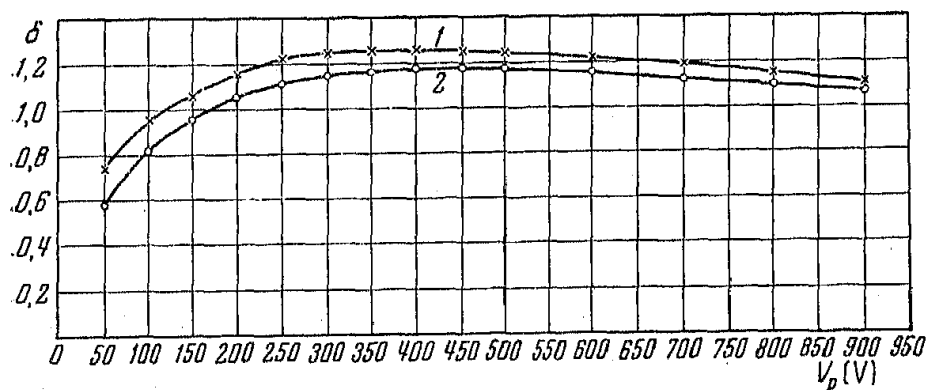


Рис. 4. Кривые $\delta = f(V_p)$, полученные с монокристаллической плоскости закисы меди (110), расположенной на грани меди (110)

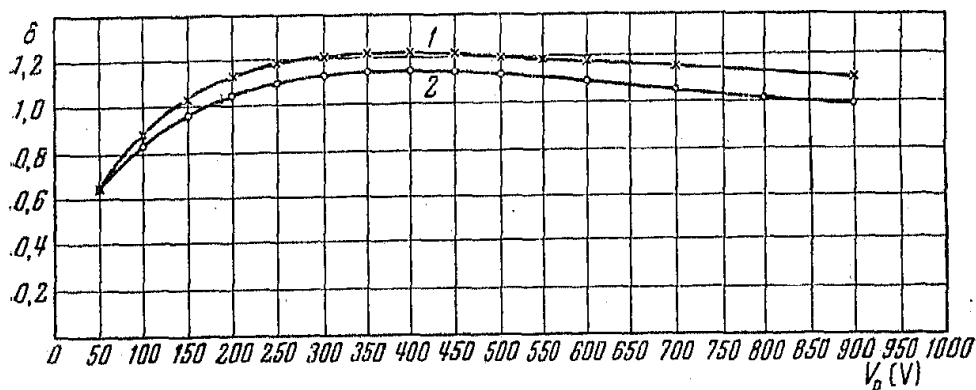


Рис. 5. Кривые $\delta = f(V_p)$, полученные с поликристаллической плоскости закисы меди, расположенной на поликристаллической меди

лученные при температуре 500°C. В отличие от результатов, полученных нами для цинка (см. [6]), а также от результатов, полученных другими авторами для монокристаллических и поликристаллических образцов меди [2, 3], ход кривых $\delta = f(V_p)$, абсолютные значения δ и положение максимумов для различных плоскостей монокристалла меди и поликристаллической поверхности мало различаются между собой. Полученные нами характеристики при комнатной температуре весьма близки к характеристике для обезгаженной закиси меди, полученной в работе [9].

Для всех исследованных образцов максимальное значение δ_m наступает при одинаковых $V_p \sim 400-450$ V. Однако изменение характеристик δ с изменением температуры от комнатной до 500°C для разных образцов различно.

3. Обсуждение результатов

Мы предполагаем, что в нашем случае изменение характеристик δ с повышением температуры обусловлено удалением слоя загрязнения в виде молекул остаточного газа и не связано с изменением свойств самого эмиттера с изменением температуры. При удалении весьма тонкого слоя загрязнения (порядка моноатомного) изменение вторичной эмиссии может произойти вследствие изменения работы выхода; при удалении более толстого слоя загрязнения изменение вторичной эмиссии может произойти также за счет вторичных электронов, возникающих в толще самого слоя загрязнения.

С монокристаллических граней меди (100) и (111), покрытых пленками закиси меди, одинаково ориентированными с поверхностной плоскостью (111), нами были получены соответственно одинаковые дифракционные кривые при комнатной температуре и при повышенной (350 и 450°C), что указывает на отсутствие загрязнения или на наличие минимального загрязнения уже при комнатной температуре. Проведенные нами исследования по контактной разности потенциалов показали, что и работа выхода этих образцов не изменяется с повышением температуры. Именно для этих образцов (рис. 2 и 3) характеристики δ изменяются весьма незначительно, что подтверждает наше предположение о независимости свойств самих эмиттеров (закись меди на меди) от температуры.

Наглядное представление о степени изменения вторичной эмиссии с повышением температуры может быть получено, если представить экспериментальные данные в виде графика, изображающего относительные изменения δ при изменении температуры в зависимости от V_p , $(\delta_{t_0} - \delta_t) / \delta_t = f(V_p)$, где δ_{t_0} и δ_t — коэффициенты вторичной эмиссии при низкой и высокой температурах эмиттера, соответственно. В работе [11] установлено, что после воздействия кислорода на металлические слои, полученные испарением в вакууме, с повышением температуры от 83 до 293°K характеристики δ понижаются, приближаясь к кривым, полученным для чистых металлических слоев. Это указывает на уменьшение слоя загрязнения с повышением температуры. Сравнивая кривые $(\delta_{83} - \delta_{293}) / \delta_{293} = f(V_p)$ для разных металлов (Cu, Ag и Au), авторы [11] приходят к заключению, что степень крутизны спада кривой в ее начале характеризует толщину слоя загрязнения: чем больше крутизна спада кривой и чем меньше диапазон значений V_p , в пределах которого этот спад происходит, тем толщина слоя загрязнения будет меньшей.

На рис. 6 приведены кривые $(\delta_{20} - \delta_{500}) / \delta_{500} = f(V_p)$, полученные из наших экспериментальных характеристик δ для всех четырех образцов. Относительные изменения δ , соответствующие одинаково ориентированным пленкам закиси меди с поверхностной плоскостью

(111) на гранях монокристаллов меди (100) и (111) (кривые 1 и 2), имеют почти одинаковые и притом малые значения для всего интервала значений V_p . Относительные изменения δ для поликристаллической закиси меди (кривая 4) при всех величинах V_p имеют большие значения, чем для двух вышеуказанных монокристаллических образцов, возрастающие с увеличением V_p .

Кривая 3 для монокристаллической закиси меди с поверхностной плоскостью (110) на монокристаллической грани меди (110) отличается по своему виду от остальных. Эта кривая вначале имеет крутой спад, а затем перегиб, причем на всем протяжении относительные изменения δ имеют более высокие значения, чем на кривых 1 и 2. То обстоятельство, что кривая относительного изменения δ для плоскости закиси меди (110) (рис. 6, кривая 3) имеет вначале крутой спад, в противоположность кривым для остальных образцов, указывает на наличие в данном случае какой-то причины, приводящей к значительному изменению δ с изменением температуры при малых значениях V_p , отсутствующей в трех других случаях.

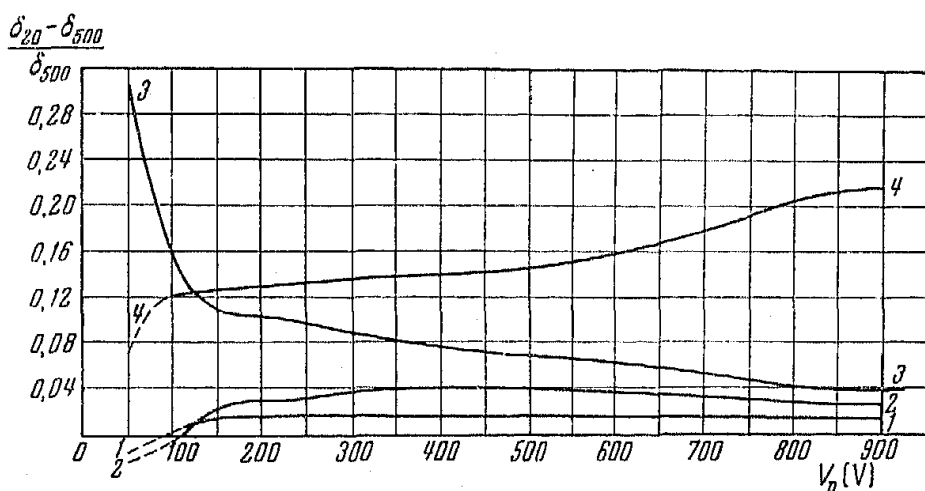


Рис. 6. Кривые $(\delta_{20} - \delta_{500})/\delta_{500} = f(V_p)$, полученные из экспериментальных данных

Естественно предположить, что этой причиной является изменение работы выхода. Согласно нашим исследованиям лишь работа выхода из плоскости (110) закиси меди при повышении температуры от комнатной до 450°C изменяется, увеличиваясь на $0,3\text{V}$; работа выхода всех остальных образцов с изменением температуры в указанном диапазоне остается неизменной. Очевидно, что повышение работы выхода из плоскости (110) закиси меди с повышением температуры должно привести к понижению характеристики δ .

Ряд авторов исследовали изменение характеристик δ некоторых металлов с изменением работы выхода путем нанесения тонких слоев положительных металлов. Афанасьева и Тимофеев исследовали характеристики δ для Au, Ag и Pt при нанесении Cs, Rb и K [12]. В работе [13] исследованы характеристики δ для вольфрама, покрытого торием, и в работе [14] исследованы характеристики δ для вольфрама, покрытого Na. В этих работах было показано, что понижение работы выхода нанесением тонкого слоя (порядка мономолекулярного) электроположительного металла приводит к некоторому возрастанию δ .

Для проверки нашего предположения о том, что крутой спад в начале кривой 3 рис. 6 обусловлен изменением работы выхода, мы рассчитали по данным [12–14] кривые $(\delta_2 - \delta_1)/\delta_1 = f(V_p)$, где δ_1 и δ_2 — коэффициенты вторичной эмиссии с чистого металла и с металла, покрытого слоем положительного металла, соответственно. Эти кривые приведены на рис. 7. На всех кривых имеется крутой спад

вначале при малых значениях V_p такого же вида, как и на кривой 3 рис. 6 для плоскости (110) закиси меди, что подтверждает наше предположение. Отсюда можно заключить, что наличие крутого спада в начале кривой $(\delta_2 - \delta_1)/\delta_1 = f(V_p)$ обусловлено изменением работы выхода для исследуемого образца.

Таким образом критерий [11] о степени загрязнения поверхности объекта, заключающийся в том, что степень крутизны спада кривой $(\delta_2 - \delta_1)/\delta_1 = f(V_p)$ в ее начале характеризует толщину слоя загрязнения, следует считать неправильным. Толщина слоя загрязнения на образце будет определяться значениями кривой $(\delta_2 - \delta_1)/\delta_1 = f(V_p)$ в области больших энергий первичных электронов, близких к $V_{p,м}$ [энергии, при которой наступает максимум кривой $\delta = f(V_p)$], где существенна разность в вероятности возбуждения вторичных электронов первичными при наличии и отсутствии слоя загрязнения.

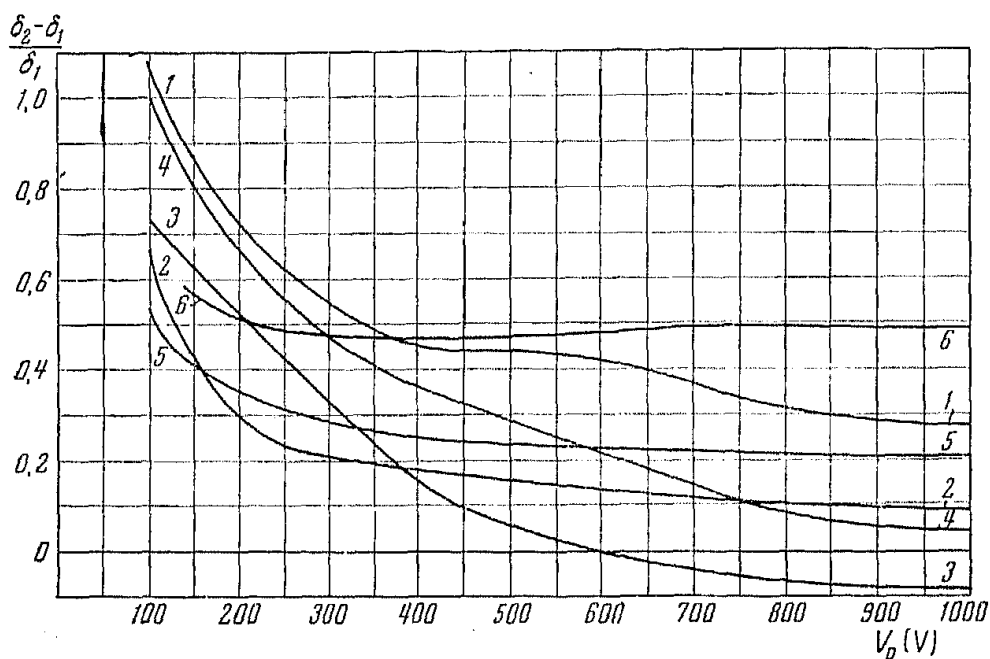


Рис. 7. Кривые $(\delta_2 - \delta_1)/\delta_1 = f(V_p)$, полученные из экспериментальных данных при нанесении: 1 — К на Au; 2 — К на Ag; 3 — Rb на Au; 4 — Cs на Au (по данным [12]); 5 — Th на W (по данным [13]); 6 — Na на W (по данным [14])

В области $V_p > V_{p,м}$ на величину δ и ход кривой $\delta = f(V_p)$ будет еще влиять различие в пробеге первичных электронов, поглощение вторичных в слое загрязнения и в материале самого образца. Последнее существенно при значительном слое загрязнения, толщина которого соизмерима с длиной пробега вторичных электронов.

Полученные нами кривые $(\delta_{20} - \delta_{500})/\delta_{500} = f(V_p)$ показывают, что относительные изменения δ для плоскостей закиси меди (111) на грани меди (100) и на грани меди (111) (рис. 6, кривые 1 и 2) имеют меньшие значения, чем относительное изменение δ для плоскости закиси меди (110) (кривая 3), что указывает на наличие большего загрязнения при комнатной температуре на плоскости закиси меди (110), чем на плоскости (111). Это подтверждается также тем, что при исследовании структуры данных монокристаллических поверхностей методом дифракции медленных электронов дифракционная картина на первых двух образцах получалась даже при комнатной температуре образцов, в то время как на монокристаллической поверхности закиси меди (110) дифракционная картина выявлялась лишь при нагревании образца до 450°C . Относительные изменения δ для поликристаллической поверхности закиси меди (рис. 6, кривая 4) в диапазоне больших значений V_p имеют наибольшие значения по

сравнению со значениями, полученными для монокристаллических поверхностей (кривые 1, 2 и 3), и растут с увеличением V_p . Это указывает на то, что толщина слоя загрязнения при комнатной температуре на поверхности поликристаллической закиси меди наибольшая и, повидимому, соизмерима с пробегом вторичных электронов.

Как мы уже отмечали, характеристики δ для всех исследованных образцов закиси меди почти одинаковы. Функции распределения вторичных электронов по энергиям при соответствующих значениях V_p для всех этих образцов, согласно нашим измерениям, также одинаковы, если отвлечься от тонкой структуры, имеющей незначительную относительную величину. Следует, однако, отметить, что δ для монокристаллического образца с плоскостью (110) при температуре 500°C имеет несколько меньшие значения, чем для двух других монокристаллических образцов закиси меди с плоскостью (111), очевидно, вследствие большой работы выхода с плоскости (110). Действительно, наличие крутого спада в начале кривой $(\delta_{(111)} - \delta_{(110)}) / \delta_{(110)} = f(V_p)$ (рис. 8), как было показано, может быть объяснено большим значе-

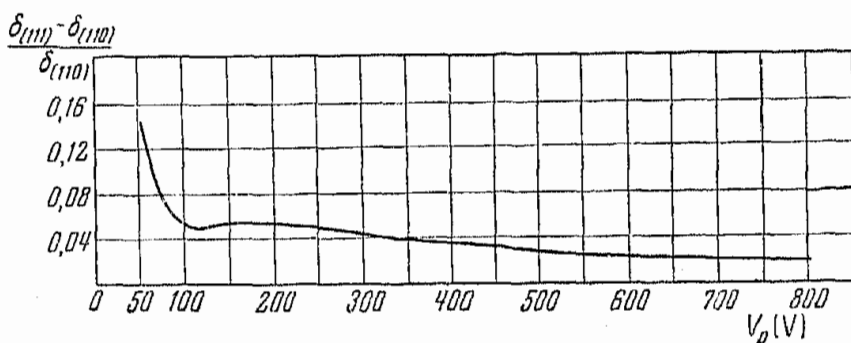


Рис. 8. Кривые $(\delta_{(111)} - \delta_{(110)}) / \delta_{(110)} = f(V_p)$, полученные из наших экспериментальных данных (при температуре 500°C)

нием работы выхода для монокристаллической плоскости (110), чем для монокристаллической плоскости (111) (согласно нашим данным на $\sim 0,3$ В). Если принять среднюю энергию вторичных электронов равной 10 В, то благодаря большей работе выхода выход вторичных электронов с плоскости (110) должен уменьшиться в $e^{0,03} \approx 1,03$ раза, что согласуется с нашими экспериментальными данными в диапазоне значений V_p , больших 100 В.

Однако резкий подъем кривой $(\delta_2 - \delta_1) / \delta_1 = f(V_p)$ вследствие уменьшения работы выхода с уменьшением V_p в диапазоне малых энергий первичных электронов (рис. 8, а также рис. 7 и кривая 3, рис. 6), повидимому, не может быть объяснен лишь облегчением выхода вторичных электронов. Действительно, облегчение выхода вторичных электронов вследствие уменьшения работы выхода должно быть более ощутительным для вторичных электронов малых энергий. Согласно многочисленным экспериментальным исследованиям распределение вторичных электронов по энергиям почти не изменяется с изменением энергий первичных электронов в диапазоне 100—300 В; с увеличением энергии первичных электронов основная масса вторичных электронов и максимум кривой распределения несколько смещаются в сторону меньших значений энергий. Поэтому значения $(\delta_2 - \delta_1) / \delta_1 = f(V_p)$ должны были бы оставаться неизменными или даже возрастать с увеличением энергии первичных электронов в указанном диапазоне V_p . Однако приведенные выше результаты противоречат этому заключению.

Следует также отметить, что ни одна из теорий вторичной электронной эмиссии, предложенных к настоящему времени [45—10], не объясняет рассмотренного выше возрастания вторичной эмиссии с

уменьшением работы выхода в диапазоне малых энергий первичных электронов. Общепринято считать, что эмиссия собственно вторичных электронов происходит не из поверхностных, а из более глубоких слоев эмиттера. Поэтому вторичную электронную эмиссию рассматривают как объемный эффект. Однако приведенные выше данные, повидимому, указывают и на наличие поверхностного эффекта вторичной электронной эмиссии, заметно сказывающегося при изменении работы выхода и проявляющегося в наибольшей мере в диапазоне сравнительно небольших энергий первичных электронов. Для исследования этого явления необходимо наряду с изучением выхода вторичных электронов с изменением работы выхода поверхности производить тщательное исследование распределения вторичных электронов по энергиям.

Таким образом можно считать, что некоторое уменьшение выхода вторичных электронов с монокристаллической плоскости (110), по сравнению с монокристаллическими плоскостями (111), обусловлено лишь большим значением работы выхода для плоскости (110). Основные факторы, определяющие вторичную эмиссию — вероятность возбуждения вторичных электронов, пробег первичных и вторичных электронов и поглощение вторичных электронов — для монокристаллической закиси меди на монокристаллах меди для всех исследованных направлений одинаковы. Выход вторичных электронов для поликристаллической поверхности закиси меди при температуре 500°C также имеет меньшие значения, и спад кривой $\delta = f(V_p)$ в области $V_p > V_{p,м}$ — более крутой, чем для монокристаллических образцов, что, повидимому, указывает на несколько большее поглощение вторичных электронов в поликристаллическом образце.

Заключение

1. Значения относительного изменения δ при повышении температуры эмиттера от комнатной до 500°C $(\delta_{20} - \delta_{500})/\delta_{500} = f(V_p)$ в диапазоне больших значений V_p , близких к напряжению, при котором наступает максимум на кривой $\delta = f(V_p)$, указывают на степень загрязнения поверхности эмиттера молекулами остаточного газа при комнатной температуре. Поликристаллический образец загрязнен в наибольшей степени, а плоскость закиси меди (111), расположенная на гранях меди (111) и (100), загрязнена в наименьшей степени.

2. Наличие крутого подъема кривой $(\delta_{20} - \delta_{500})/\delta_{500} = f(V_p)$ в ее начале для монокристаллической плоскости (110) обусловлено увеличением работы выхода при повышении температуры от комнатной до 500°C вследствие удаления молекул остаточного газа.

3. Ход кривых $\delta = f(V_p)$, абсолютные значения δ и положения максимумов при температуре образца в 500°C для монокристаллических плоскостей меди (100), (110), (111), покрытых монокристаллическими пленками закиси меди с поверхностными плоскостями (111), (110) и (111), соответственно, и поликристаллической меди, покрытой поликристаллической пленкой закиси меди, мало различаются между собой.

4. Основные факторы, определяющие вторичную эмиссию — пробег первичных и вторичных электронов, вероятность возбуждения вторичных электронов и их поглощение — для монокристаллической закиси меди на монокристаллах меди, повидимому, одинаковы для всех исследованных кристаллических направлений. Несколько меньшие значения δ для монокристаллической плоскости (110) обусловлены большей работой выхода поверхности этого образца.

Литература

- [1] S. R. Rao. Proc. Roy Soc., (A) **128**, 41, 1930. — [2] H. E. Farnsworth. Phys. Rev., **31**, 419, 1928. — [3] G. Bekow. Phys. ZS., **42**, 144, 1941. — [4] М. Кнолл и R. Theile. ZS. f. Phys., **113**, 260, 1939. — [5] Н. Горный. Зап. Всесоюзн. минерал. об-ва, **80**, 245, 1951. — [6] Н. Б. Горный. ЖЭТФ, этот выпуск, стр. 88. — [7] N. Cabrera a. N. F. Mott. Rep. Progr. Phys., **12**, 174, 1949. — [8] З. Г. Пинскер. Диффракция электронов, Изд-во АН СССР, М.—Л., 1949. — [9] А. И. Фример. Журн. техн. физ., **10**, 395, 1940. — [10] H. Bruining. Die Secundär-Elektron Emission fester Körper, Springer, Berlin, 1942, стр. 31. — [11] R. Suhrman u. W. Kundt. ZS. f. Phys., **121**, 118, 1943. — [12] А. В. Афанасьев и П. В. Тимофеев. Журн. техн. физ., **7** 2145, 1937. — [13] K. Sixtus. Ann. d. Phys., **3**, 1017, 1929. — [14] K. G. McKay. Phys. Rev., **61**, 708, 1942. — [15] А. Е. Кадышев. ЖЭТФ, **9**, 930, 1939. [16] D. E. Wooldridge. Phys. Rev., **56**, 562, 1939. — [17] А. Я. Вятский. ЖЭТФ, **20**, 547, 1950. — [18] E. M. Baroody. Phys. Rev., **78**, 780, 1950. — [19] J. L. H. Jonker. Philips Res. Rep., **7**, 1, 1952.

ВТОРИЧНАЯ ЭЛЕКТРОННАЯ ЭМИССИЯ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ГРАНЕЙ МОНОКРИСТАЛЛОВ ЦИНКА, ПОКРЫТЫХ МОНОКРИСТАЛЛИЧЕСКИМИ ПЛЕНКАМИ ОКИСИ ЦИНКА

Н. Б. Горный

Проведено экспериментальное исследование коэффициента вторичной электронной эмиссии δ для двух граней монокристалла цинка (0001 и $10\bar{1}0$) и для поликристаллического цинка, а также распределения вторичных электронов по энергиям для двух вышеуказанных монокристаллических образцов при энергиях первичных электронов $V_p = 75$ и 800 В. Установлено, что кривые $\delta = f(V_p)$ для исследованных образцов значительно различаются между собой; также значительно различаются кривые распределения вторичных электронов по энергиям для двух исследованных монокристаллических образцов цинка при $V_p = 75$ В. Исследована доля упруго рассеянных электронов для двух рассматриваемых монокристаллических образцов цинка в диапазоне малых значений V_p (5—19 В). Доля упруго рассеянных электронов для образца ($10\bar{1}0$) оказалась большей, чем для образца (0001).

1. Техника эксперимента

В настоящей работе приведены результаты опытов по исследованию вторичной электронной эмиссии с различных кристаллических плоскостей монокристалла цинка.

В применявшемся нами вакуумном приборе (рис. 1) узкий электронный пучок (сечением в 2—3 мм²), выходящий из электронной пушки, сделанной из тантала, падал перпендикулярно на диск из вольфрама диаметром 20 мм, расположенный в середине сферической полости вакуумной лампы, который можно было поворачивать при помощи электромагнитов извне и устанавливать в нужном положении. На диске были укреплены четыре исследовавшихся образца дискообразной формы, диаметром 8 мм и толщиной 0,3—0,5 мм, полученные из одного и того же образца монокристалла цинка. Первый образец представлял собой монокристалл, поверхность которого, направленная перпендикулярно к падающему электронному пучку, совпадала с гранью (0001).

Вторым объектом являлся поликристаллический образец, изготовленный из куска того же монокристалла. Третий и четвертый образцы представляли собой монокристаллы, поверхности которых, направленные к пучку, совпадали с гранью ($10\bar{1}0$). Четвертый образец отличался от третьего тем, что подвергался предварительной механической полировке, так же как и поликристаллический образец, перед тем как он был химически протравлен. Кристаллографическая ориентация монокристаллов определялась методом оптического отражения и рентгенографически по методу Лауэ на отражение [1].

Все образцы подвергались химической протравке в 4% растворе азотной кислоты в алкоголе, будучи предварительно вымыты в мыльной воде. Перед тем как вмонтировать их в прибор, они промывались в растворе мыльной воды, спирта и эфира.

Металлические части прибора (без образцов цинка) обезгаживались токами высокой частоты. Вакуумный прибор, будучи окончательно собранным, не имел шлифов или соединений на замазке. Прибор под-

вергался обезгаживанию в течение 8—10 час. При этом температура доводилась до 400°C.

Приемником вторичных электронов служил напыленный слой платины, нанесенный на сферическую поверхность лампы. Перед каждым измерением производился подогрев объекта исследования путем накала вольфрамовой нити, предназначенной для этой цели, в течение 40—60 мин. до 250—350°C и в течение нескольких минут до 350—380°C. Во время проведения измерений с образцами при повышенной температуре последняя доводилась до 250°C. Температура измерялась при помощи термопары.

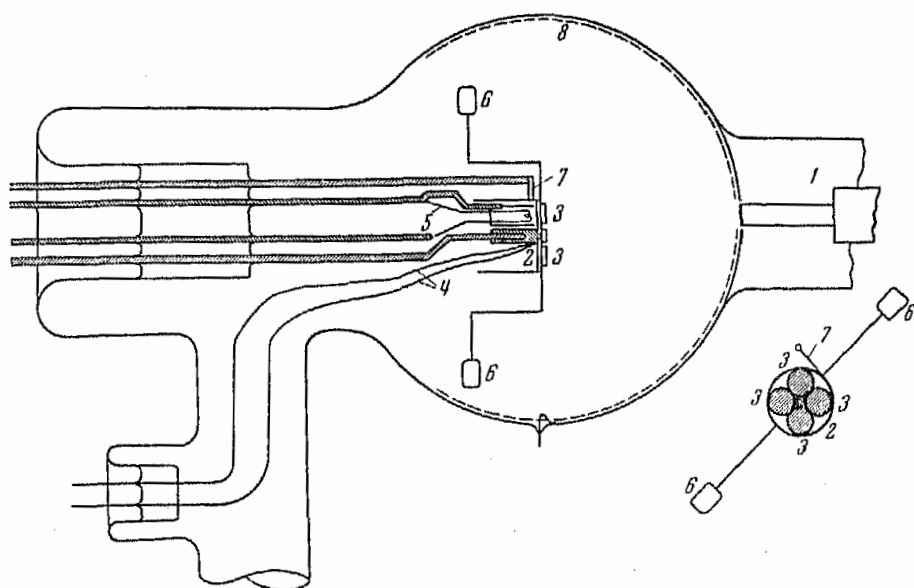


Рис. 1. Вакуумный прибор. 1 — электронная пушка, 2 — диск из вольфрама, 3 — исследуемый образец, 4 — термопара, 5 — нить для подогрева, 6 — железные стерженьки, заключенные в стекло, 7 — фиксирующая пружина, 8 — коллектор

Предварительными опытами при помощи флуоресцирующего экрана было установлено расположение электронного пучка, выходящего из пушки, по отношению к световому пучку. Это было необходимо для правильной установки образца под электронный пучок при замене одного образца другим.

Измерения велись при работающих ртутных насосах и при вымораживании паров ртути жидким воздухом. Схема, служившая для измерений, подобна схеме, изображенной на рис. 1 нашей работы [2]¹. Применявшиеся гальванометры имели чувствительность порядка $10\text{--}15 \cdot 10^{-10}$ мм/А.

2. Результаты измерений

Для всех четырех образцов были получены воспроизводимые при повторных измерениях кривые, изображающие зависимость коэффициентов вторичной эмиссии δ от энергии первичных электронов V_p (рис. 2).

На рис. 2, а и 2, б, кроме характеристик $\delta = f(V_p)$, полученных при температуре 250°C (кривые 2), изображены кривые, полученные при комнатной температуре (кривые 1). Для удобства сопоставления характеристик δ , полученных для различных образцов, мы

¹ В дальнейшем цитируется как 1.

свели их в один рис. 3. Ход кривых δ , полученных при 250°C, положение максимума и абсолютное значение $\delta_{\text{макс}}$ для различных монокристаллических образцов и для поликристаллического образца

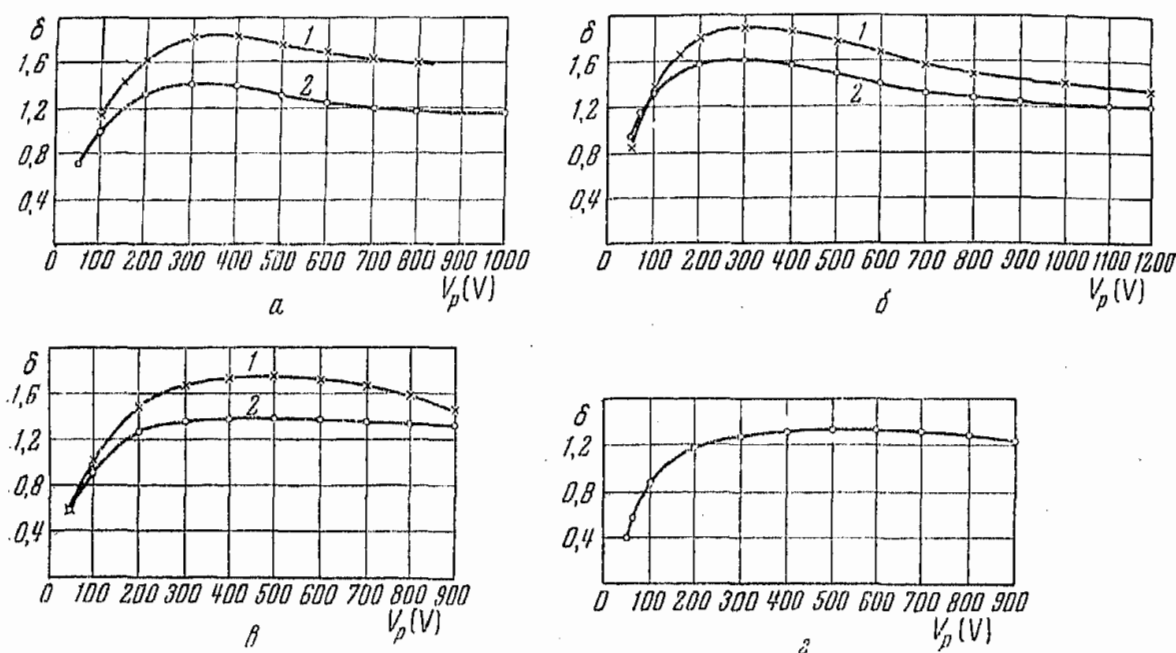


Рис. 2. Кривые $\delta = f(V_p)$, полученные при комнатной температуре (кривые 1) и при температуре 250° С (кривые 2). а — поликристаллический образец, б — монокристаллический образец (0001), в — монокристаллический образец (1010), г — монокристаллический образец (1010) (поверхность монокристалла не подвергалась механической обработке)

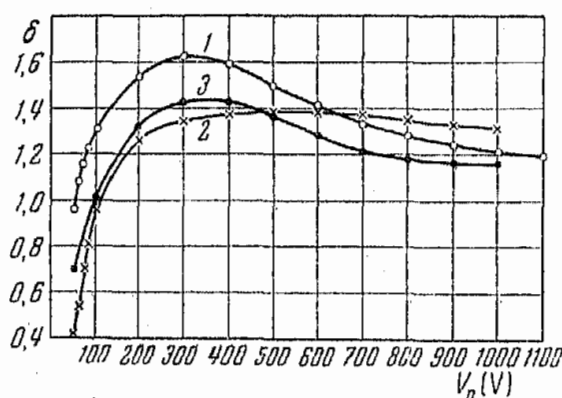


Рис. 3. Кривые $\delta = f(V_p)$, полученные для различных образцов при температуре 250° С. 1 — для образца (0001), 2 — для образца (1010) и 3 — для поликристаллического образца

различны: для монокристаллического образца (0001) $\delta_{\text{макс}} = 1,62$ и максимум наступает при $V_p = 300$ V, для монокристаллического образца (1010) $\delta_{\text{макс}} = 1,36$ при $V_p = 600$ V, а для поликристаллического образца $\delta_{\text{макс}} = 1,42$ при $V_p = 300$ V.

Для того чтобы можно было сравнить распределение вторичных электронов по энергиям для различных монокристаллических образцов, были сняты вольтамперные характеристики $(i_s/i_p) = f(V_k)$ для двух монокристаллических образцов при $V_p = 75$ V (рис. 4, а) и при $V_p = 800$ V (рис. 4, б) (V_k — разность потенциалов между образцом и коллектором). Из этих вольтамперных характеристик получены кривые распределения вторичных электронов по энергиям, приведенные

на рис. 5,а для $V_p = 75$ В и на рис. 5,б для $V_p = 800$ В. Из рис. 5 видно, что при $V_p = 75$ В выход вторичных электронов с минимальным значением энергии для образца (10 $\bar{1}0$) значительно меньший, чем для образца (0001), и соответственно с этим положение максимума кривой распределения для первого образца соответствует $V_k = 6,5$ В, а для второго $V_k = 3,5$ В; в то же время распределение вторичных элект-

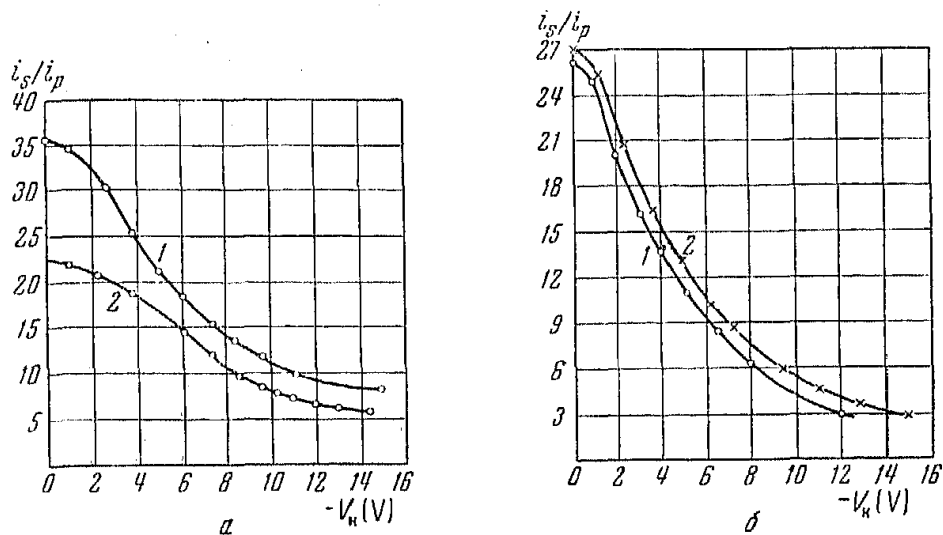


Рис. 4. Вольтамперные кривые: а — снятые при $V_p = 75$ В; 1 — для образца (0001), 2 — для образца (10 $\bar{1}0$); б — снятые при $V_p = 800$ В, 1 — для образца (0001), 2 — для образца (10 $\bar{1}0$)

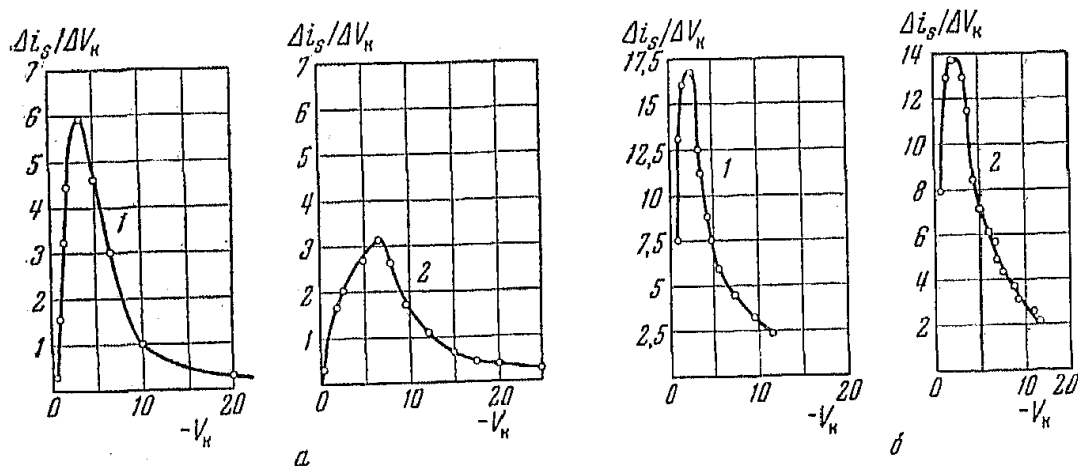


Рис. 5. Кривые распределения вторичных электронов по энергиям: а — при $V_p = 75$ В; 1 — для образца (0001), 2 — для образца (10 $\bar{1}0$); б — при $V_p = 800$ В; 1 — для образца (0001), 2 — для образца (10 $\bar{1}0$)

ронов по энергиям для этих образцов при $V_p = 800$ В почти одинаково, а положение максимума кривых распределения смещено в сторону меньшего значения $V_k = 2,5$ В, одинакового для обоих образцов.

Мы провели также исследование упругого и неупругого рассеяния первичных электронов малых энергий для рассматриваемых монокристаллических образцов. Для этой цели были получены вольтамперные кривые $(i_s/i_p) = f(V_k)$, изображенные (без учета контактных разностей потенциалов) на рис. 6,а для $V_p = 19$ В, на рис. 6,б для $V_p = 10$ В и на рис. 6,в для $V_p = 5$ В. Эти кривые вначале имеют

пологий ход, переходящий при значении V_k , близком к V_p , в крутой спуск. Очевидно, пологий ход характеризует неупругое рассеяние электронов, а крутой спуск — упругое рассеяние.

Из рис. 6 видно, что форма вольтамперных кривых при одной и той же энергии первичных электронов различна для двух исследованных образцов. Степень наклона пологого участка кривых

для образца (1010) значительно меньше, чем для образца (0001). Это значит, что вероятность неупругого рассеяния на образце (1010) меньше, чем на образце (0001). При $V_p = 5$ В вольтамперная кривая для образца (1010) идет параллельно оси абсцисс, а затем круто спадает вниз до пересечения с осью (рис. 6, в, кривая 2). Следовательно, для этого образца при указанной энергии первичных электронов все вторичные электроны обладают той же энергией, что и первичные, т. е. имеет место лишь упругое рассеяние. На образце (0001) при этой же энергии первичных электронов происходит как упругое, так и неупругое рассеяние (рис. 6, в, кривая 1).

Для более наглядного представления о соотношении упругого и неупругого рассеяния электронов в зависимости от энергии первичных электронов V_p для каждого из монокристаллических образцов мы приводим на рис. 7 кривые, представляющие собой отношение числа неупруго рассеянных электронов к числу упруго

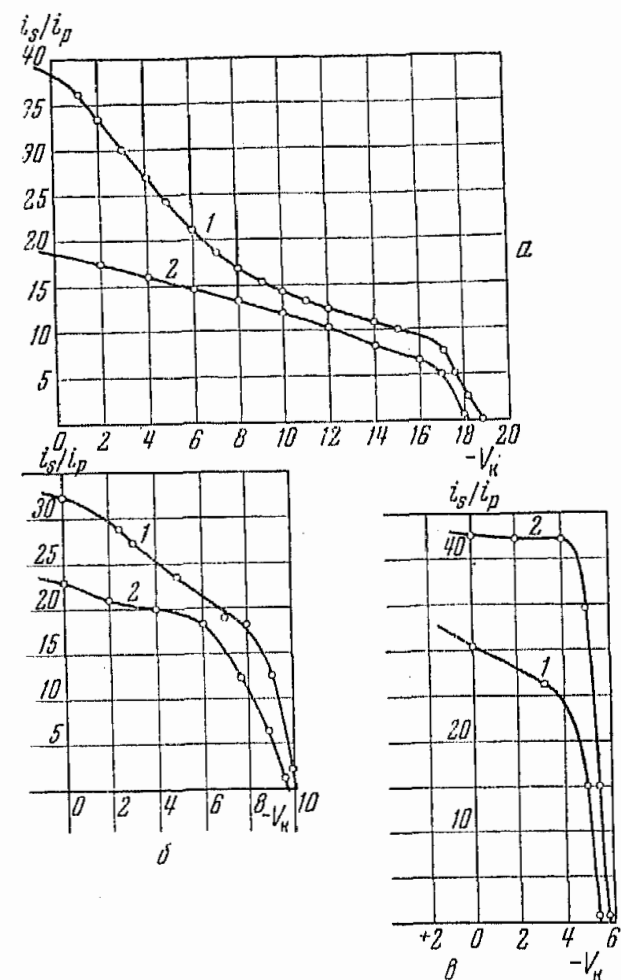


Рис. 6. Вольтамперные кривые, снятые: а — при $V_p = 19$ В, 1 — для образца (0001), 2 — для образца (1010); б — при $V_p = 10$ В; 1 — для образца (0001), 2 — для образца (1010); в — при $V_p = 5$ В, 1 — для образца (0001), 2 — для образца (1010)

рассеянных. Число неупруго рассеянных электронов мы определяли из вольтамперных кривых (рис. 6) как разность ординат точки, соответствующей $V_k = 0$, и точки начала крутого перегиба кривой, а число упруго рассеянных электронов определялось ординатой точки начала крутого перегиба кривой.

Из кривых рис. 6 и 7 видно, что отношение числа неупруго рассеянных электронов к числу упруго рассеянных уменьшается с уменьшением V_p , причем во всем диапазоне малых энергий первичных электронов это отношение для образца (1010) меньше, чем для образца (0001), и при $V_p = 5$ В число собственно вторичных электронов и неупруго рассеянных электронов для образца (1010) становится равным нулю. Это значит, что при энергии первичных электронов в 5 эВ прекращается выход собственно вторичных электронов из образца (1010).

Для монокристаллических образцов были получены кривые ($i_s/i_p = f(V_p)$ при малых значениях V_p (рис. 8). На этих кривых можно

видеть крутой подъем при уменьшении энергии первичных электронов, начиная с $V_p \sim 7$ В для образца (0001) (кривая 1) и начиная с $V_p \sim 15$ В для образца (10 $\bar{1}0$) (кривая 2); при этом подъем более крутой для образца (10 $\bar{1}0$).

Воспользовавшись данными рис. 6, мы можем учесть число упруго рассеянных электронов. На рис. 8 кривые 3 и 4 представляют собой значения i_s/i_p за вычетом упруго рассеянных электронов для образцов (0001) и (10 $\bar{1}0$) соответственно. Таким образом резкое возрастание i_s/i_p с уменьшением V_p (кривые 1 и 2) обусловлено возрастанием числа упруго рассеянных электронов. Значение i_s/i_p без упругого рассеяния в области малых значений V_p для образца (0001) больше, чем для образца (10 $\bar{1}0$) примерно в два раза.

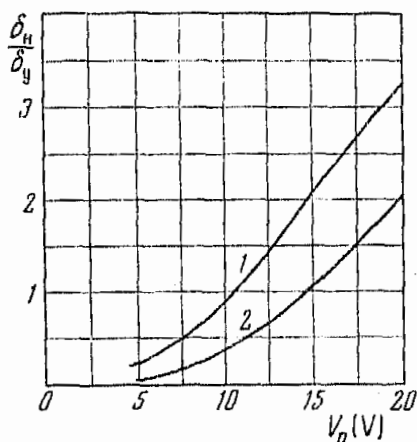


Рис. 7. Отношение числа неупруго рассеянных электронов к числу упруго рассеянных электронов; 1 — для образца (0001), 2 — для образца (10 $\bar{1}0$)

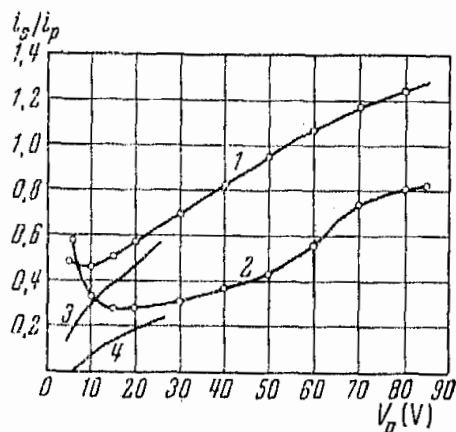


Рис. 8. Кривые $(i_s/i_p) = f(V_p)$ при малых значениях V_p ; 1 — для образца (0001), 2 — для образца (10 $\bar{1}0$), 3 и 4 — для образцов (0001) и (10 $\bar{1}0$), соответственно, за вычетом упруго отраженных электронов

Следует указать, что исследования ряда авторов [3-5] методом дифракции электронов показали, что на поверхности свежесколотых монокристаллов цинка в атмосфере воздуха всегда образуется пленка ZnO монокристаллической структуры. Исследования [4-5] показали, что пленка ZnO на цинке обладает нормальной (не псевдоморфной) гексагональной решеткой, причем гексагональная решетка монокристаллической пленки ориентирована согласованно с гексагональной решеткой монокристалла цинка — оси c и оси a параллельны. Толщина пленки, образовавшейся в атмосфере воздуха при нормальной температуре, порядка 20—40 Å.

Эти исследования заставляют нас считать, что наши объекты исследования покрыты пленками ZnO, причем монокристаллы цинка покрыты монокристаллическими пленками ZnO, соответственно ориентированными.

3. Обсуждение результатов

Наглядное представление о степени изменения вторичной эмиссии с повышением температуры эмиттера вследствие удаления с его поверхности молекул остаточного газа может быть получено, если изобразить экспериментальные данные в виде кривой, показывающей относительное изменение δ с изменением температуры в зависимости от V_p , т. е. $(\delta_{t_0} - \delta_t)/\delta_t = f(V_p)$, где δ_{t_0} и δ_t — коэффициенты вторичной эмиссии при низкой и высокой температуре эмиттера, соответственно.

На рис. 9 приведены кривые $(\delta_{20} - \delta_{250})/\delta_{250} = f(V_p)$, полученные из наших экспериментальных характеристик $\delta = f(V_p)$ для трех образцов (рис. 2).

Согласно нашим данным (см. I) степень загрязнения поверхности эмиттера при комнатной температуре определяется значениями кривой $(\delta_{20} - \delta_{250})/\delta_{250} = f(V_p)$ в диапазоне больших энергий первичных электронов, близких к энергии, при которой наступает максимум кривой $\delta = f(V_p)$. Из рис. 9 видно, что степень загрязнения поверхности поликристаллического образца — наибольшая, а поверхности монокристаллического образца (0001) — наименьшая.

По виду кривой $(\delta_{t_0} - \delta_t)/\delta_t = f(V_p)$ в ее начале при малых значениях V_p можно судить о наличии изменения работы выхода (и знаке этого изменения) вследствие удаления молекул остаточного газа с повышением

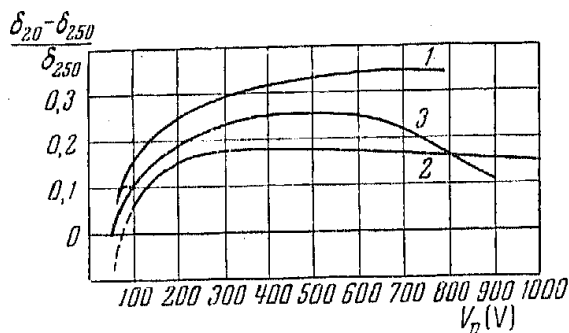


Рис. 9. Кривые $(\delta_{20} - \delta_{250})/\delta_{250} = f(V_p)$; 1 — для поликристаллического образца, 2 — для образца (0001), 3 — для образца (10 $\bar{1}0$)

температуры эмиттера (см. I). Крутой спад кривой для монокристаллического образца (0001) в области малых значений V_p с уменьшением V_p вплоть до отрицательных значений (рис. 9, кривая 2) указывает на уменьшение работы выхода при удалении молекул остаточного газа с поверхности этого образца. Следует отметить, что при температуре 250°C, при которой производилось исследование, для поверхности монокристаллического образца (0001) значение работы выхода было меньше, чем для поверхности монокристаллического образца (10 $\bar{1}0$). На это указывает вид кривой $(\delta_{(0001)} - \delta_{(10\bar{1}0)})/\delta_{(10\bar{1}0)} = f(V_p)$, где $\delta_{(0001)}$ и $\delta_{(10\bar{1}0)}$ — коэффициенты вторичной эмиссии с монокристаллических образцов (0001) и (10 $\bar{1}0$) при температуре 250°C, соответственно (рис. 10). Крутой подъем этой кривой в области малых значений V_p с уменьшением V_p указывает (см. I), что величина работы

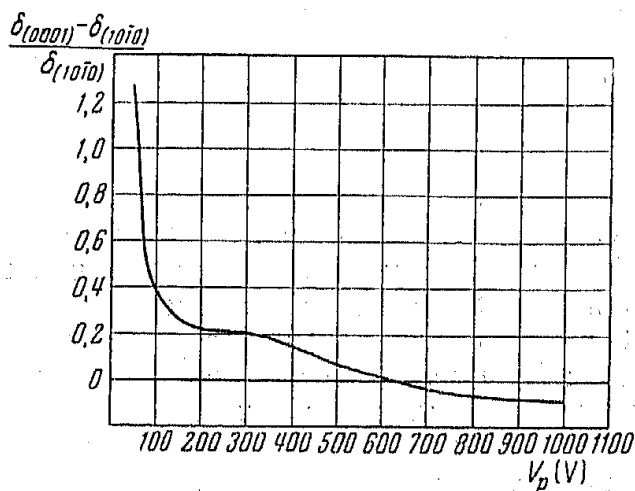


рис. 10. Кривая $(\delta_{(0001)} - \delta_{(10\bar{1}0)})/\delta_{(10\bar{1}0)} = f(V_p)$

выхода вторичных электронов с поверхности монокристаллического образца (0001) имеет меньшее значение, чем работа выхода с поверхности монокристаллического образца (10 $\bar{1}0$). Это заключение также согласуется с данными работы [6], где при исследовании фотоэффекта с монокристаллического цинка был получен наибольший фототок с плоскости (0001).

Таким образом больший выход вторичных электронов из монокристаллического образца (0001), чем из монокристаллического образца (10 $\bar{1}0$), может быть обусловлен различными значениями работы выхода вторичных электронов с поверхностями этих образцов.

Однако непропорционально большое возрастание δ для образца с меньшей работой выхода в диапазоне сравнительно небольших

энергий первичных электронов (рис. 10), наблюдавшееся нами также при исследовании δ для разных монокристаллических образцов меди, поверхности которых имели различные значения работы выхода (см. I), а также другими авторами при исследовании δ с изменением работы выхода с поверхности эмиттера [7-9], не может быть объяснено лишь облегчением выхода вторичных электронов вследствие уменьшения работы выхода и не объясняется ни одной из предложенных теорий вторичной электронной эмиссии [10-14]. Эти результаты, повидимому, согласуются с высказанным предположением о наличии поверхностного эффекта вторичной эмиссии, заметно сказывающегося при уменьшении работы выхода и проявляющегося в наибольшей мере в диапазоне сравнительно небольших энергий первичных электронов (см. I).

Следует отметить, что значительно больший выход вторичных электронов из монокристаллического образца (0001), чем из монокристаллического образца (10 $\bar{1}0$) до значения $V_p \sim 600$ V не может быть объяснен лишь меньшей работой выхода с поверхности образца (0001), так как изменение в работе выхода должно сказываться лишь в равномерном изменении на протяжении всей кривой $\delta = f(V_p)$, причем относительные изменения δ должны иметь несколько большие значения в области малых энергий первичных электронов, но положение максимума и вид кривой должны оставаться одинаковыми. Такого рода изменение выхода вторичных электронов, обусловленное изменением работы выхода из эмиттера, мы нашли для монокристаллических образцов меди (110) и (111) (см. также [7-9]). В данном случае, сравнивая кривые $\delta = f(V_p)$ (рис. 3), мы замечаем между ними резкую разницу. Для образца (0001) кривая круто повышается с увеличением V_p , достигая максимума ($\delta_{\text{макс}} = 1,62$) при $V_p = 300$ V, а затем также довольно круто спадает, а для образца (10 $\bar{1}0$) кривая возрастает более плавно, достигая максимума ($\delta_{\text{макс}} = 1,38$) при $V_p = 600$ V, а затем с дальнейшим увеличением V_p также плавно понижается.

Также нельзя объяснить лишь разницей в работе выхода с монокристаллических образцов значительное различие в распределении вторичных электронов по энергиям для этих двух монокристаллических образцов при $V_p = 75$ V (рис. 5, а). Вторичные электроны из образца (0001) группируются в области значений меньших энергий (максимум при $V_k = 3,5$ V), а из образца (10 $\bar{1}0$) в области больших энергий (максимум при $V_k = 6,5$ V). Это различие обусловлено тем, что выход вторичных электронов с малой энергией (до 6,5 V) с образца (10 $\bar{1}0$) значительно меньший, чем с образца (0001), выход вторичных электронов больших энергий с образца (10 $\bar{1}0$) несколько больший, чем с образца (0001). Наряду с этим следует отметить, что согласно нашим данным кривые распределения вторичных электронов по энергиям монокристаллических образцов меди, полученные при $V_p = 140$ V и при $V_p = 400$ V, существенно не различаются для различных образцов.

Таким образом мы приходим к заключению, что в данном случае, повидимому, существенным является также различие в процессах вторичной эмиссии, происходящих в глубине эмиттера, по разным кристаллографическим направлениям. Можно предположить, что большие значения δ для образца (0001) обусловлены большей вероятностью возбуждения вторичных электронов первичными при их движении в образце (0001), чем в образце (10 $\bar{1}0$), и что при одной и той же энергии первичных электронов последние проникают в образце (0001) на большую глубину, чем в образце (10 $\bar{1}0$). На это указывает большее значение $\delta_{\text{макс}}$ при меньшем V_p для образца (0001), а также более крутой спад характе-

ристики $\delta = f(V_p)$ для образца (0001), чем для образца (10 $\bar{1}0$) (при больших значениях V_p) (рис. 3). Это подтверждается также распределением вторичных электронов по энергиям для этих двух образцов при одинаковой энергии первичных электронов $V_p = 75$ V (рис. 5, а). Вторичные электроны из образца (0001) группируются в области меньших значений энергий (максимум при $V_k = 3,5$ V), чем для образца (10 $\bar{1}0$) (максимум при $V_k = 6,5$ V), что также, повидимому, указывает на то, что основная масса вторичных электронов из образца (0001) зарождается на большей глубине, чем в образце (10 $\bar{1}0$), при одной и той же энергии первичных электронов.

Возможно, что меньший выход вторичных электронов для образца (10 $\bar{1}0$) обусловлен тем, что вторичные электроны при их движении наружу испытывают в большей мере упругое отражение в образце (10 $\bar{1}0$), чем в образце (0001), так же как это имеет место для упругого отражения первичных электронов малых энергий (5 — 19 V) (рис. 7) при их падении на поверхность указанных образцов.

Заключение

1. Значения δ , ход кривых $\delta = f(V_p)$ и положение максимума на этих кривых при одинаковой температуре (250°C) значительно различаются для монокристаллического образца (0001), для монокристаллического образца (10 $\bar{1}0$) и для поликристаллического образца.

2. Распределение вторичных электронов по энергиям при энергии первичных электронов $V_p = 75$ V различно для образцов (0001) и (10 $\bar{1}0$). Выход вторичных электронов с минимальным значением энергии для образца (10 $\bar{1}0$) значительно меньший, чем для образца (0001), и соответственно с этим положение максимума на кривой распределения первого образца соответствует $V_k = 6,5$ V, а для второго $V_k = 3,5$ V. При большей энергии первичных электронов ($V_p = 800$ V) распределение вторичных электронов для этих двух образцов мало различается, а максимум на кривых распределения смещен в сторону меньшего значения $V_k = 2,5$ V, одинакового для обоих образцов.

3. В диапазоне малых энергий первичных электронов V_p (5 — 19 V) отношение числа неупруго рассеянных электронов к числу упруго рассеянных уменьшается с уменьшением V_p , причем во всем указанном диапазоне это отношение для образца (10 $\bar{1}0$) меньше, чем для образца (0001), и при $V_p = 5$ V число собственно вторичных электронов и неупруго рассеянных электронов для образца (10 $\bar{1}0$) становится равным нулю.

4. Различие кривых $\delta = f(V_p)$, полученных для монокристаллических образцов (0001) и (10 $\bar{1}0$), и различие кривых распределения вторичных электронов по энергиям, полученным для этих образцов при $V_p = 75$ V, не могут быть объяснены лишь разными значениями работы выхода с поверхностей исследованных монокристаллических объектов, а повидимому, обусловлены различием в процессах вторичной эмиссии, происходящих в глубине эмиттера по разным кристаллографическим направлениям.

Литература

- [1] Н. Горный. Записки Всесоюз. минерал. об-ва, 80, 245, 1951.— [2] Н. Б. Горный. ЖЭТФ, этот выпуск, стр. 79.— [3] G. J. Finch и A. G. Quarrell. Proc. Roy. Soc., (A) 141, 398, 1933; Proc. Phys. Soc., 46, 148, 1934.— [4] H. Raether. Journ. de Phys. et de Radium, 11, 11, 1950.— [5] L. Lucas. Proc. Phys. Soc., (A) 64, 943, 1951; Proc. Roy. Soc., (A) 215, 162, 1952.— [6] E. Lindner. Phys. Rev., 30, 649, 1927.— [7] А. В. Афанасьева и П. В. Тимофеев. Журн. техн. физ., 7, 2145, 1937.— [8] K. Sixtus. Ann. d. Phys., 3, 1017, 1929.— [9] K. G. McKay. Phys. Rev., 61, 708, 1942.— [10] А. Е. Кадышевнич. ЖЭТФ, 9, 930, 1939.— [11] D. E. Wooldridge. Phys. Rev., 56, 562, 1939.— [12] А. Я. Вятский. ЖЭТФ, 20, 547, 1950.— [13] E. M. Baroody. Phys. Rev., 78, 780, 1950.— [14] J. L. Jonker. Philips Res. Rep., 7, 1, 1952.
-

ПРОБОЙ МАЛЫХ ВОЗДУШНЫХ ПРОМЕЖУТКОВ

И. Е. Балыгин

Приводятся опытные данные по пробоем небольших воздушных промежутков при различных ограничениях тока разрядного канала. При осциллографировании напряжения и тока в момент пробоя и последующего горения искры отмечено появление скачкообразной деионизации искрового канала. Приводятся данные о существовании при указанных обстоятельствах двух особых разрядных режимов. Особенность одного из них заключается в частых появлениях пиков напряжения из-за скачкообразной деионизации искрового промежутка с последующими его пробоями при одновременном действии не скачкообразной деионизации, нарастающей во времени по экспоненциальному закону. Особенностью второго разрядного режима является постоянство напряжения на электродах промежутка в момент горения искры, несмотря на крутой спад амплитуды приложенного аperiodического импульса. Приводится опытный и расчетный материал, касающийся пробивной напряженности сильно ионизованных промежутков в зависимости от тока, протекающего через промежуток непосредственно перед пробоем.

За последние несколько лет выяснено, что при пробое воздушных промежутков импульсным напряжением температура разрядного канала в некоторых случаях достигает $40\,000^\circ$ [1,2]. Давление в нитевидном самосветящемся канале при этих условиях увеличивается, и образуется ударная цилиндрическая волна [3]. Плотность ионизованного газа около оси канала уменьшается до $10^{-2} - 10^{-4}$ нормальной плотности газа [2,4,5]. На основании данных, упомянутых в приведенных работах, было сделано заключение о том, что при образовании главного разряда диаметр искрового канала еще очень мал, и газ в нем почти полностью ионизован [6]. Поэтому возрастание плотности тока, текущего через искру, должно происходить только в последующую стадию, когда начинается расширение канала, главным образом вследствие термоионизации и частично фотоионизации. В этот момент, видимо, и происходит формирование хорошо проводящего мостика, а не при образовании главного разряда, как считалось ранее. Напряжение на электродах в эту стадию развития разряда спадает почти до нуля, и разряд заканчивается. Убыль носителей тока в разрядном канале вследствие рекомбинации, выноса их на электроды, диффузии и др. с избытком покрывается термоионизацией.

Чтобы получить некоторые данные о динамике разряда при ослаблении термоионизационного действия в искровом канале, нами были проведены опыты, результаты которых излагаются ниже. Понижение температуры в искровом канале достигалось ограничением тока разряда последовательно включенными омическими сопротивлениями. Воспроизводство заряженных частиц при этих условиях уже не могло с избытком покрыть их убыль, и динамика завершающей стадии разряда претерпевала существенные изменения. При опытах отмечено появление очень быстрой, почти скачкообразной деионизации искрового канала и существование двух особых форм разряда. Отличительная особенность одной из этих форм заключается в частом появлении небольших пиков напряжения с последующими частичными пробоями еще сильно ионизованного промежутка и одновременной его деионизацией, при которой убыль носителей тока происходит по экспоненциальному закону. Этот режим по характеру осциллографических записей назван частокольным.

Второй режим имеет ту особенность, что напряжение на электродах после первого пробоя промежутка длительное время остается почти неизменным, несмотря на сравнительно круто спадающую амплитуду приложенного апериодического импульса. Такой режим назван сбалансированным.

Уже давно опытным путем было установлено, что при интенсивном облучении ультрафиолетовым светом открытой искры междуэлектродного промежутка происходит снижение пробивного напряжения $E_{пр}$ примерно на 10% [7,8]. На основании более поздних данных сделано заключение о том, что прогрессивное развитие пробоя возможно только при силе тока не меньше 10^{-5} А [9]. В настоящее время, однако, все еще представляется не совсем ясным вопрос о зависимости величины $E_{пр}$ от степени ионизации искрового промежутка непосредственно перед формированием пробоя. Ниже по затронутому вопросу также будут приведены некоторые экспериментальные данные, из которых следует, что при сильной ионизации величина $E_{пр}$ может уменьшаться в несколько раз.

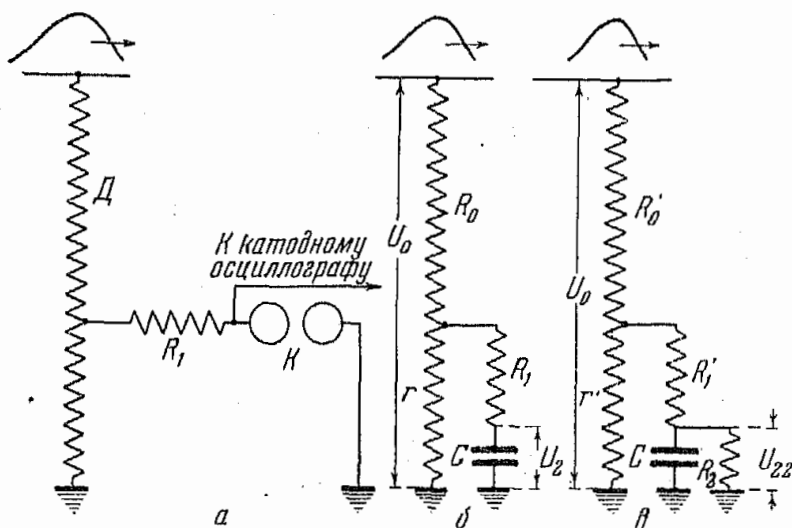


Рис. 1. а) Схема осциллографирования; б и в — эквивалентные схемы пробоев воздушных промежутков

В опытах использовалась схема, представленная на рис. 1. На исследуемый воздушный промежуток K между стальными шарами $d = 11$ мм подавалось импульсное напряжение от омического делителя с общим сопротивлением $R_0 = 8 \cdot 10^4 \Omega$. Сопротивление r изменялось в пределах от 1,2 до $4 \text{ k}\Omega$. Наибольшая амплитуда подаваемого на делитель D импульса равнялась 90 kV. Сопротивление R_0 было выбрано таким, чтобы при $R_1 = 0$ в момент пробоя промежутка напряжение спадало до нуля. Исследовались небольшие воздушные промежутки длиной 0,2 — 1 мм при атмосферном давлении. Эквивалентная схема при отсутствии пробоя промежутка K представлена на рис. 1, б. Здесь C — емкость шаров искрового промежутка, отклоняющих пластин осциллографа, емкостного делителя напряжения и паразитная емкость подводки. После пробоя промежутка K параллельно емкости C как бы включался искровой канал с эквивалентным сопротивлением R_2 (рис. 1, в), зависящим от времени. Емкость C измерялась куметром; величина ее не превышала нескольких десятков сантиметров. По мере деионизации пробитого промежутка и восстановления его диэлектрической прочности, емкость C заряжалась и при напряжении U_{22} (рис. 1, в) следовал новый пробой. Это напряжение записывалось катодным осциллографом. Такие последующие пробойи происходили уже в ионизированной среде и

при значительно меньших пробивных напряжениях. По этим данным можно было определить зависимость пробивного напряжения промежутка от степени его ионизации.

На рис. 2 приведена серия осциллограмм пробоев воздушного промежутка 0,2 мм. Ограничивающее сопротивление R_1 изменялось от 0 до $2 \cdot 10^6 \Omega$. Осциллограмма I записана при $R_1 = 0$. Период градуировочных синусоидальных колебаний на оси абсцисс равен 2,5 мсек. На этой осциллограмме зафиксирован нормальный разряд со временем статистического запаздывания, равным $\sim 16 \mu$ сек. Пробой произошел при напряженности электрического поля 48 кВ/см. Напряжение после пробоя упало до нуля. Осциллограмма II снята при $R_1 = 2 \cdot 10^3 \Omega$, III — при $R_1 = 8 \cdot 10^3 \Omega$, IV — при $R_1 = 5 \cdot 10^4 \Omega$, V — при $R_1 = 1 \cdot 10^5 \Omega$, VI — при $R_1 = 5 \cdot 10^5 \Omega$ и VII — при $R_1 = 2 \cdot 10^6 \Omega$.

Для того чтобы получить представление о токах, текущих через искровой промежуток, были записаны соответствующие осциллограммы. Первая из них (осциллограмма VIII) снята при $R_1 = 10^5 \Omega$, а вторая (осциллограмма IX) при $R_1 = 10^6 \Omega$. При записи этих осциллограмм ограничивающее сопротивление включалось со стороны земли, и емкость C (рис. 1) была включена параллельно R_1 , в отличие от схе-

мы записи осциллограмм напряжения. Можно видеть, что при последовательных разрядах в сильно ионизованном искровом промежутке непосредственно перед пробоями протекал довольно значительный ток, по величине которого можно ориентировочно судить о степени ионизации этого промежутка.

Если предположить, что при первом пробое сопротивление искрового канала по сравнению с R_1 мало, то ток I_1 , текущий через этот канал, можно подсчитать по формуле (рис. 1)

$$I_1 = U_m r / [(R_0' - r)(R_1 + r) + R_1 r],$$

где U_m — амплитуда импульса при пробое. В табл. 1 приведены приближенные данные о силе тока I_1 , протекавшего через канал искры при первом (начальном) пробое.

Кроме I_1 через этот же канал протекал и ток от разряда емкости C . При этом разряжалось количество электричества $Q = CU \approx \approx 7 - 8 \cdot 10^{-8}$ кулон. Если принять, что емкость разряжалась за $5 \cdot 10^{-7}$ сек., то сила тока при разряде равнялась 0,14—0,15 А. Ввиду кратковременности протекания этого тока влияние его должно было быть ощутительным только при очень больших значениях ограничивающих сопротивлений.

На осциллограмме II через некоторый отрезок времени после первого пробоя можно заметить целую серию пиков напряжения, которые могли появиться только вследствие скачкообразной деионизации промежутка. При этом напряжение на электродах очень быстро возрастало до величины, достаточной для последующего частичного разряда. Амплитуда первых пиков напряжения равна приблизительно 230 В, причем напряженность поля $E = 11,5$ кВ/см. Возможно, что в случае большой скорости появления пиков верхушки их на осциллограмме остались не замеченными на глаз, и указанное значение 230 В является несколько заниженным. Если же не делать эту оговорку, то величину пробивного напряжения 275 В, обычно принимаемую за минимальную^{10]},

Таблица 1

№ осциллограмм (рис. 2)	Ограничивающее сопротивление R_1 (Ω)	Наибольшая сила тока I_1 (А)
I	0	1,2
II	$2 \cdot 10^3$	0,45
III	$8 \cdot 10^3$	0,15
IV	$5 \cdot 10^4$	0,028
V	$1 \cdot 10^5$	0,014
VI	$5 \cdot 10^5$	0,0028
VII	$2 \cdot 10^6$	0,0007

К статье Е. И. Балыгина «Пробой малых воздушных промежутков»

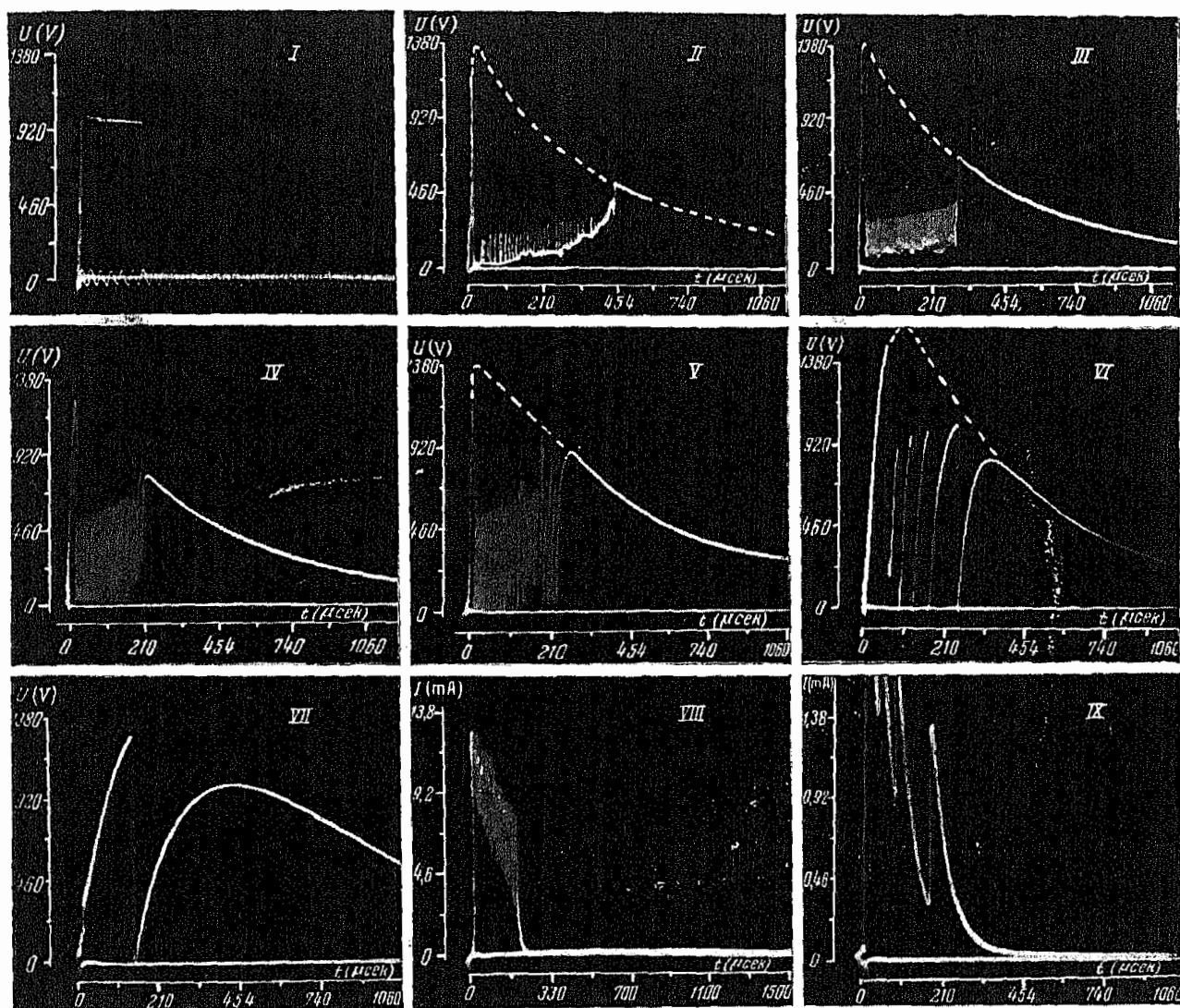


Рис. 2. Осциллограммы пробоев воздушного промежутка $l = 0,2$ мм при различных ограничивающих сопротивлениях

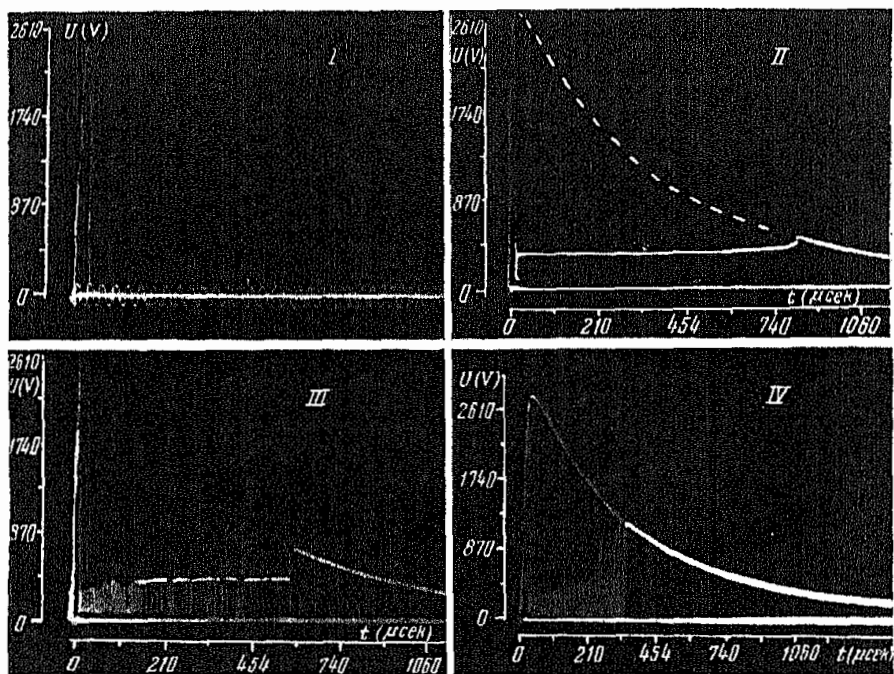


Рис. 3. Осциллограммы пробоев воздушного промежутка $l = 0,5$ мм при различных ограничивающих сопротивлениях

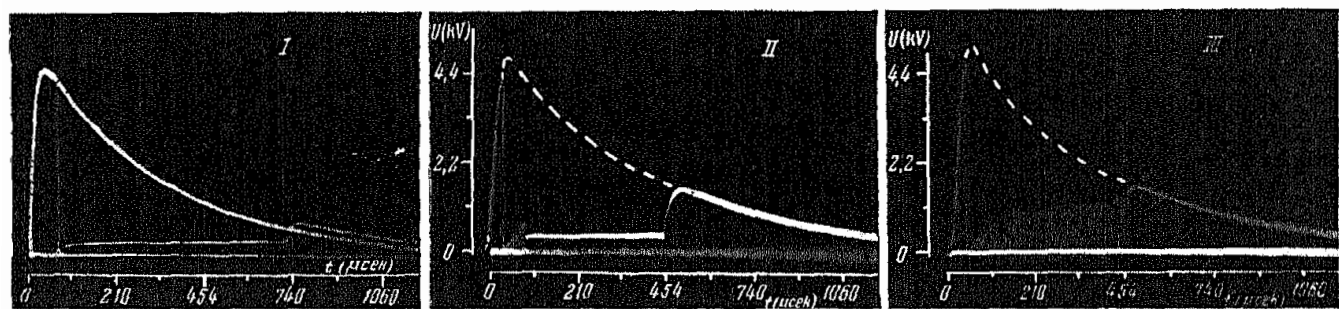


Рис. 4. Осциллограммы пробоев воздушного промежутка $l = 1$ мм при различных ограничивающих сопротивлениях

следует считать правильной только для не сильно ионизованных искровых промежутков.

Появление первых пиков напряжения отмечено знаком $\sim$ через 25 μ сек. после завершения начального пробоя. Можно предполагать, что за это время произошло перемещение положительных ионов, а также вторжение в зону канала более холодных и не заряженных атомов и молекул воздуха из соседних областей, поэтому диэлектрическая прочность промежутка с некоторого момента начала резко возрастать (пик). Напряжения на электродах искрового промежутка при этом увеличилось до значения амплитуды, при которой мог формироваться разряд ($E = 11,5$ кВ/см), однако хорошо проводящего мостика не получалось и напряжение не спадало до нуля. Возможно, что в данном случае происходили пробой только некоторой части искрового промежутка около катода при увеличении местной напряженности электрического поля положительным объемным зарядом. Интенсивность деионизационных процессов в канале искры с течением времени экспоненциально возрастала и через 500 μ сек. произошло прекращение разряда при напряженности $E \approx 25$ кВ/см. Пики напряжения, накладывавшиеся на подстилающее напряжение, располагались в виде частотола, поэтому данная форма разряда названа частотольной.

На формирование повторных пробоев некоторое влияние могла оказать и эмиссия электронов с поверхности металла катода при разрушении ионной бомбардировкой оксидной пленки [11]. При восстановлении последней (присоединение атомов кислорода) может, как известно, выделяться энергия, сравнимая с работой выхода электронов [12, 13].

Быстрая деионизация и небольшая величина $E_{пр}$ сильно ионизованного промежутка вызывают в цепи высокочастотные колебания. При увеличении ограничивающих сопротивлений интенсивность термоионизации уменьшается и $E_{пр}$ увеличивается. Эту зависимость можно хорошо проследить по повторным пробоям (сразу после первого). По мере уменьшения ионизации искрового промежутка после начального пробоя общая продолжительность разряда уменьшается, а напряженность E_k , при которой происходит прекращение разряда, увеличивается. В табл. 2 приведены соответствующие значения для различных ограничивающих сопротивлений R_1 . Значения $E_{пр}$ относятся к повторным пробоям. Некоторое уменьшение E_k зафиксировано только при $R_1 = 5 \cdot 10^5 \Omega$; оно произошло из-за сравнительно большого времени запаздывания предыдущего пробоя. За это время амплитуда приложенного импульса успела значительно снизиться.

На основании данных табл. 2 можно сделать заключение о том, что величина пробивного напряжения воздушного промежутка 0,2 мм очень сильно зависит от степени его ионизации.

Интересно отметить, что при ограничивающем сопротивлении $R_1 = 2 \cdot 10^6 \Omega$ (осциллограмма VII рис. 2), несмотря на сравнительно медленное повышение напряжения от нуля до 1290 В ($E = 64,5$ кВ/см), за время $\sim 150 \mu$ сек. пробоя промежутка при меньших градиентах не последовало. Если сопоставить эту напряженность электрического поля с $E = 48$ кВ/см, которая найдена для случая $R_1 = 0$ (осциллограмма I), то можно прийти к заключению о возможной зависимости времени запаздывания пробоя малых промежутков от величины огра-

Таблица 2

$R_1 (\Omega)$	$E_{пр} (\text{кВ/см})$	$E_k (\text{кВ/см})$
0	0	—
$2 \cdot 10^3$	11,5	25,0
$8 \cdot 10^3$	16,0	33,0
$5 \cdot 10^4$	25,0	40,0
$1 \cdot 10^5$	27,5	43,7
$5 \cdot 10^5$	46,0	42,5
$2 \cdot 10^6$	$> 48,0$	—

ничающего сопротивления. Возможно, что при большом ограничении снижается интенсивность ионизационных предпробивных процессов. После первого пробоя промежутка дальнейших разрядов не было, хотя наибольшая напряженность электрического поля достигала 50 kV/cm при фронте волны (время от нуля до максимума амплитуды) $\sim 300 \text{ мсек}$.

По мере увеличения ограничивающих сопротивлений и уменьшения температуры канала искры, а следовательно, и степени ионизации междуэлектродного промежутка, последующие пробои, как замечалось,

Таблица 3

№ осциллограмм (рис. 3)	Ограничивающее сопротивление R_1 (Ω)	Наибольшая сила тока при первом пробое (A)
<i>I</i>	0	1,2
<i>II</i>	$1,6 \cdot 10^4$	0,14
<i>III</i>	$2,2 \cdot 10^4$	0,11
<i>IV</i>	$5 \cdot 10^4$	0,05

происходили при более высоких напряженностях приложенного поля. Разряд получался более интенсивным и напряжение при пробое снижалось более значительно. Из осциллограммы *IV*, например, видно, что подстилающее напряжение уже очень мало, а при последующих пробоях, зафиксированных на осциллограмме *VI*, оно снизилось до нуля.

На рис. 3 приведены осциллограммы пробоев воздушного промежутка $0,5 \text{ мм}$. Осциллограмма *I* снята при $R_1 = 0$. Пробой произошел при $E = 47 \text{ kV/cm}$. Осциллограмма *II* записана при $R_1 = 1,6 \cdot 10^4 \Omega$, *III*—при $R_1 = 2,2 \cdot 10^4 \Omega$ и *IV*—при $5 \cdot 10^4 \Omega$. В табл. 3 приведены значения наибольшего тока, протекавшего через искровой промежуток при начальном пробое. Токи от разряда емкости C (рис. 1, в) здесь не учтены.

Весьма характерны разряды при ограничивающем сопротивлении $R_1 = 1,6 \cdot 10^4 \Omega$ и $2,2 \cdot 10^4 \Omega$ (осциллограммы *II* и *III*). При $R_1 = 1,6 \cdot 10^4 \Omega$ на искровом промежутке за отрезок времени $\sim 800 \text{ мсек}$ напряжение оставалось почти постоянным, несмотря на значительный спад амплитуды общего приложенного напряжения импульса (см. пунктир). После начального пробоя, ввиду сильного ограничения температуры канала искры и недостаточного воспроизводства заряженных частиц, началась быстрая деионизация промежутка. Напряженность на этом промежутке увеличивалась до значения 7 kV/cm , при котором вступала в действие ударная ионизация. Дальнейшего повышения напряжения на электродах еще сильно ионизованного промежутка не происходило, так как генерирование заряженных частиц при напряженности 7 kV/cm уравнивалось процессами деионизации. Поэтому такой разрядный режим назван сбалансированным.

При несколько большем ограничении разрядного тока сбалансированный режим получался неустойчивым (см. осциллограмму *III*), вследствие появления скачкообразной деионизации и разрядов, которые очень быстро прерывались. В некоторых случаях деионизационные процессы прерывали не только возникавшие разряды, но и сбалансированный режим. Напряжение резко увеличивалось (пик). Причины столь быстрой деионизации могли быть такими же, как и в случае деионизации при частотном режиме.

На осциллограмме *III* видно, что при напряженности 8 kV/cm происходили довольно частые пробои промежутка, но время запаздывания с уменьшением степени его ионизации увеличивалось. По осциллограмме *IV* можно также хорошо проследить зависимость величины пробивного напряжения ионизованного промежутка от степени его ионизации. При уменьшении тока в канале искры напряжение, при котором происходило прекращение разряда, здесь также увеличивалось. Соответственно укорачивалась и общая продолжительность разряда (табл. 4).

Примерно такая же зависимость получена и при пробоях воздушного промежутка 1 мм. Соответствующие осциллограммы приведены на рис. 4; а цифровой материал, относящийся к ним, собран в табл. 5.

Из осциллограмм *I* и *II* видно, что при $R_1 = 2 \div 4,4 \cdot 10^5 \Omega$ также возможно существование сбалансированного режима, как и в случае промежутка 0,5 мм ($R_1 = 1,6 \cdot 10^4 \Omega$). Величина $R_1 = 4,4 \cdot 10^5 \Omega$ для промежутка в 1 мм может считаться граничной, поскольку при таком ограничении может существовать и колебательный режим. Из осциллограммы *III* видно, что амплитуда последующих пробоев также постепенно увеличивалась и по истечении приблизительно 100 мсек. значительно превысила амплитуду сбалансированного режима осциллограммы *II*. Наименьшее пробивное напряжение сильно ионизованного

Таблица 4

№ осциллограмм (рис. 3)	Продолжительность разряда (мсек.)	Напряженность поля при прекращении разряда (кВ/см)
<i>II</i>	800	9
<i>III</i>	580	14
<i>IV</i>	330	24

промежутка $l = 1$ мм сразу же после начального пробоя также равно 230—250 В, что при указанной длине соответствует напряженности поля 2,3—2,5 кВ/см. Таким образом, чем больше длина сильно ионизованного искрового промежутка, тем при меньших напряженностях приложенного поля в нем может формироваться разряд.

Таблица 5

№ осциллограмм (рис. 4)	Ограничивающее сопротивление (Ω)	Наибольшая сила тока при первом пробое (А)	Продолжительность разряда (мсек.)	Напряженность при прекращении разряда (кВ/см)
<i>I</i>	$2 \cdot 10^5$	0,23	720	7,7
<i>II</i>	$4,4 \cdot 10^5$	0,11	450	15,5
<i>III</i>	$4,4 \cdot 10^5$	0,11	430	16,0

При опытах по необходимости приходилось пользоваться только одноручевым осциллографом, на котором невозможно было одновременно записать ток и напряжение. Поэтому непосредственное определение пробивного напряжения сильно ионизованных промежутков в зависимости от тока, протекавшего перед пробоем, произвести по осциллограммам было затруднительно. Однако, зная постоянные параметры схемы, амплитуду U_0 , напряжение U_2 и U_{22} , указанную зависимость можно было определить расчетным путем. При помощи катодного осциллографа было записано напряжение импульса U_2 (рис. 1, б), когда пробой промежутка отсутствовал (осциллограмма *IV* рис. 3).

Выше уже отмечалось, что в момент пробоя и после него параллельно емкости C как бы включалось сопротивление искрового промежутка R_2 (рис. 1, в). По мере деионизации этого промежутка напряжение поднималось до U_{22} , и следовал новый пробой.

Из дифференциальных уравнений для схемы рис. 1, б можно, зная U_{22} , определить U_0 , но так как эта величина во время опытов не изменялась, то, переходя к рис. 1, в, можно найти и зависимость $U_0 = \psi_1[U_{22}] = \psi_2[R_2]$. Из осциллограммы известно значение амплитуды U_{22} в данный момент τ перед одним из последующих пробоев. Чтобы определить $R_2(\tau)$, зная зависимость $U_{22} = \psi(R_2)$, можно построить кривую этой зависимости для трех или четырех произвольных значений R_2 в момент времени τ и из кривой определить истинную

величину R_2 , которая соответствует значению U_{22} из осциллограммы. При известных U_{22} и R_2 легко определить и соответствующее значение тока, или степень ионизации искрового промежутка перед последующим пробоем.

Напряжение импульса U_2 , записанное на осциллограмме IV рис. 3, можно хорошо выразить аналитически формулой [14]:

$$U_2 = U'_2 (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}), \quad (1)$$

где $U'_2 = 3070$ В, $\alpha = 2,7 \cdot 10^3$ и $\beta = 1,6 \cdot 10^5$, если t выражать в микросекундах.

Для схемы рис. 1, б общее устанавливающееся сопротивление всей цепи в операционной форме будет равно

$$Z = \frac{p [C R_0 (R_1 + r) + R_1 + r]}{p C (R_1 + r) + 1}, \quad (2)$$

где оператор $p = d/dt$. Из известного равенства $e^{-\lambda t} = p / (p + \lambda)$ для выражения (1) получаем

$$U_2 = U'_2 p (\beta - \alpha) / (p + \alpha) (p + \beta); \quad (3)$$

поэтому

$$U_0 = \frac{U'_2 p (\beta - \alpha) [p C (R_0 R_1 + R_0 r + R_1 r) + R_0 + r]}{r (p + \alpha) (p + \beta)}. \quad (4)$$

Решая это уравнение по теореме разложения [15], получим

$$U_0 = \frac{U'_2}{r} [(Q - \alpha k) e^{-\alpha t} - (Q - \beta k) e^{-\beta t}], \quad (5)$$

где $Q = R_0 + r$ и $k = C (R_0 R_1 + R_0 r + R_1 r)$, или в операционной форме

$$U_0 = \frac{U'_2}{r} \left[\frac{(Q - \alpha k) p}{p + \alpha} - \frac{(Q - \beta k) p}{p + \beta} \right]. \quad (6)$$

Общее устанавливающееся сопротивление Z_0 для схемы рис. 1, в будет равно

$$Z_0 = (pF + D) / (pA + W), \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} F &= R_2 C (R'_0 R'_1 + R'_0 r' + R'_1 r'); \\ D &= R'_0 (R_2 + r' + R'_1) + r' (R_2 + r'_1); \\ A &= C R_2 (R'_1 + r'); \quad W = R_2 + R'_1 + r'; \\ U_{22} &= U_0 r' R_2 / (pF + D). \end{aligned} \quad (8)$$

Заменяя U_0 из (6), получим в операционной форме

$$U_{22} = \frac{U'_2 R_2 p (pN + M) r'}{(pF + D) (p + \alpha) (p + \beta) r}, \quad (9)$$

где

$$N = k (\beta - \alpha) \text{ и } M = (Q - \alpha k) \beta - (Q - \beta k) \alpha.$$

Решая операционное уравнение (9) по той же теореме разложения, получим

$$U_{22}(t) = U_{2m} (Ge^{-\alpha t} - He^{-\beta t} + Se^{-(F/B)t}), \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} U_{2m} &= U_2' R_2 r' / (D - F\alpha)(D - F\beta) r; \\ G &= (R_0' + r' - \alpha k)(D - F\beta); \quad H = (R_0' + r' - \alpha k)(D - F\alpha); \\ S &= F[\beta(R_0' + r' - \alpha k) - \alpha(R_0' + r' - \beta k)] - D. \end{aligned}$$

Поскольку U_0 имеет также форму униполярного импульса, то для приближенного расчета этот импульс оказалось возможным представить тоже как разность двух экспоненциальных функций [см. формулу (1)], где $\alpha' = 2,65 \cdot 10^3$, $\beta' = 2,65 \cdot 10^5$ и $U_0' = 10^5$. При такой замене выражение для U_{22} упростится:

$$U_{22} = U_0' r' R_2 \left[\frac{e^{-\alpha' t}}{D - F\alpha'} - \frac{e^{-\beta' t}}{D - F\beta'} + \frac{F(\beta - \alpha) e^{-Dt/F}}{(D - F\alpha')(D - F\beta')} \right]. \quad (11)$$

По формуле (11) и осциллографным записям для U_{22} на рис. 5 построены кривые величин пробивной напряженности $E_{пр}$ сильно ионизованных промежутков длиной 0,2, 0,5 и 1 мм в зависимости от силы тока I , протекавшего через промежуток непосредственно перед про-

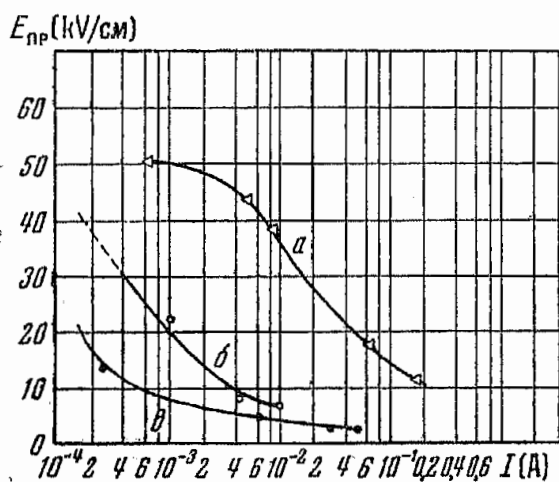


Рис. 5. Зависимость величины пробивной напряженности от силы тока, текущего через искровой промежуток непосредственно перед пробоем. а — $l = 0,2$; б — $l = 0,5$; в — $l = 1$ мм

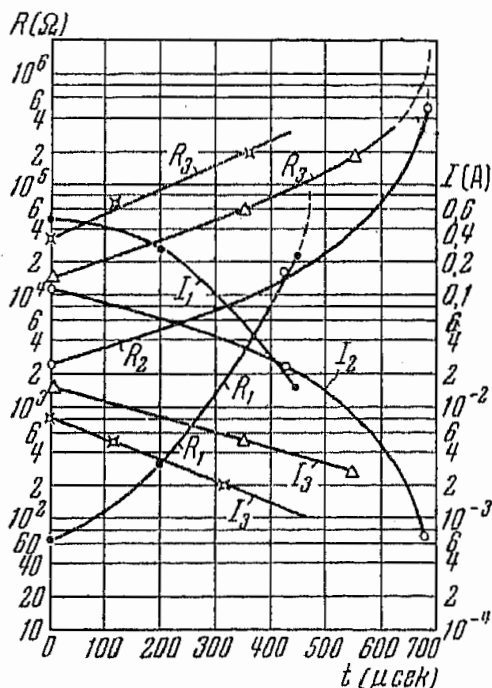


Рис. 6. Изменение сопротивления искрового промежутка R и тока I , текущего через него после первого пробоя в зависимости от времени, $R_1 I_1$ — промежуток 0,2 мм, $R_2 I_2$ — промежуток 0,5 мм, $R_3 I_3$ — промежуток 1 мм

боем. Можно видеть, что $E_{пр}$ очень сильно зависит от I . Например, при токах, несколько меньших 0,2 А, $E_{пр}$ промежутка длиной 0,2 мм снижается до 11 кВ/см; для промежутка 0,5 мм при токах 10^{-2} А $E_{пр}$ уменьшается ~ до 7 кВ/см, а в случае промежутка 1 мм это снижение получается еще большим.

Тем же способом были подсчитаны значения сопротивлений разрядного канала R_2 при сбалансированных режимах, зафиксированных

на осциллограммах *II* рис. 2; *II* рис. 3 и *I—II* рис. 4. Изменение сопротивления промежутка характеризует быстроту его деионизации (рис. 6). На том же рисунке приведены и кривые изменения токов, протекавших через промежутки во время существования сбалансированного режима. Для промежутка 1 мм построены две пары кривых по осциллограммам *I* и *II* рис. 4. По кривым можно сделать заключение, что чем меньше искровой промежуток, тем быстрее происходит его деионизация.

Из осциллограммы *III* рис. 3 видно, что пробой промежутка за отрезок времени, больший 400 мсек., происходили неоднократно при одном и том же напряжении, несмотря на то, что ток, текущий через этот промежуток, непосредственно перед пробоем изменялся в десятки раз. Поэтому можно считать, что $E_{пр}$ не однозначно определяется числом ионов в межэлектродном промежутке. Пробой может произойти и при относительно небольшом их числе, но запаздывание формирования пробоя при этом будет больше. Из приведенных опытных данных следует, что при сильной ионизации искрового промежутка пробивное напряжение снижается не на несколько процентов, а в несколько раз.

Ленинград

Поступила в редакцию
10 июля 1953 г.

Литература

- [1] С. Л. Мандельштам и Н. К. Суходрев. ЖЭТФ, **24**, 701, 1953.—
[2] Г. Г. Долгов и С. Л. Мандельштам. ЖЭТФ, **24**, 691, 1953.— [3] И. С. Абрамсон, Н. М. Гегечкори, С. И. Драбкина и С. Л. Мандельштам. ЖЭТФ, **17**, 862, 1947.— [4] Н. М. Гегечкори. ЖЭТФ, **21**, 493, 1951.—
[5] С. И. Драбкина. ЖЭТФ, **21**, 473, 1951.— [6] И. С. Абрамсон и И. С. Маршак. Журн. техн. физ., **12**, 632, 1942.— [7] Н. J. White. Phys. Rev., **48**, 113, 1935.—
[8] W. Rogowski и A. Wallraff. ZS. f. Phys., **9**, 758, 1935.— [9] R. Schade. ZS. f. Phys., **104**, 487, 1937.— [10] Л. Леб. Основные процессы электрических разрядов в газах, ГИТТЛ, 1950, стр. 369.— [11] J. Kramer. ZS. f. Phys., **129**, 34, 1951.— [12] O. Nahel, F. Hautermans, K. Seeger. ZS. f. Phys., **130**, 109, 1951.—
[13] А. П. Комар. Проблемы современной физики, ИИЛ, **1**, 193, 1953.— [14] Л. И. Сиротинский, А. В. Ефимов, В. К. Кожухов, Г. А. Лебедев и С. С. Городецкий. Техника высоких напряжений, ГОНТИ, 1939, стр. 37.— [15] Л. Е. Машкилейсон. Переходные процессы и перенапряжения в электрических цепях, ОНТИ, 1938, стр. 24.

катушку с внутренним диаметром, равным 16 см, с внешним диаметром, равным 30 см, и шириною 5 см, содержащую около 1350 витков медного провода.

Между полюсами помещена вакуумная камера В. Боковые стенки этой камеры изготовлены из красной меди, дно и крышка — из алюминия. Круглые отверстия на концах камеры D с диаметром 3,2 см определяют поперечные размеры пучка в средней плоскости. К камере

присоединены две латунные трубы T с внутренним диаметром, равным 5,4 см, и длиной 110 см каждая. К свободному концу одной из этих труб присоединен стеклянный шлиф, несущий источник O . На конце другой трубы находится регистрирующее устройство. Оси труб пересекаются под углом 45° , причем одна из них (принадлежащая трубе, несущей источник) составляет с перпендикуляром к краю полюсов угол 2° , другая — 43° .

Источником служил активный осадок тория, нанесенный на алюминиевую фольгу размером 18×3 мм² и толщиной 8 μ . Источник был повернут на угол около 40° от вертикального положения в сторону, обратную вращению изображения в магнитной линзе. Активность источника была порядка десятой милликюри. Регистрация электронов производилась самогасящимся счетчиком C , наполненным смесью аргона с парами спирта. Электроны попадали в счетчик через вертикально расположенную щель I длиной 15 мм и шириною 3 мм, закрытую тонким слюдяным листочком. Вся система откачивалась паромасляным насосом. Достижение вакуума устанавливалось по исчезновению свечения в разрядной трубке, присоединенной к одной из труб спектрометра.

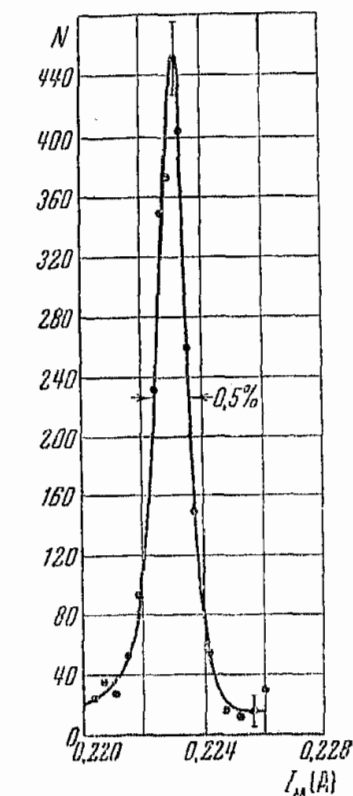


Рис. 2. Форма конверсионной линии ThB снятой на β -спектрометре

На рис. 2 изображена конверсионная линия F , возникающая при превращении ThB в ThC, снятая на нашем приборе. Значение H_p для этой линии равно 1385,8 (по Эллису). По оси абсцисс отложен ток в обмотке магнита I_m , по оси ординат — число отсчетов счетчика, уменьшенное на величину фона счетчика (99 отсч./мин), обусловленного γ -лучами источника и посторонними причинами. Для получения каждой точки на графике измерения производились в течение 1 мин. Ток в линзе I_L при этом был равен 1,30 А. Из рисунка видно, что значение полуширины линии $\Delta I_m / I_m = \Delta H_p / H_p$ равно 0,5%. При токе в линзе $I_L = 1,20$ А полуширина линии становится равной 1%, при $I_L = 1,40$ А — 1,3%.

Тот факт, что измерения производились при постоянном токе в линзе, не должен заметно сказаться на форме линии, так как обследовался только очень узкий участок спектра. При измерении более широких участков спектра ток в линзе должен изменяться пропорционально току в обмотке магнита.

Ленинградский физико-технический
институт
Академии наук СССР

Поступила в редакцию
5 ноября 1951 г.

Литература

[1] В. М. Кельман и Д. Л. Каминский. ЖЭТФ, 21, 555, 1951.

ИОНИЗАЦИЯ ПРИ РАЗРУШЕНИИ КАПЕЛЬ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В. М. Мучник

Исследована ионизация при разрушении капель в электрическом поле. Установлено, что ионизация пропорциональна напряженности электрического поля. Получены новые опытные данные для ионизации при баллоэлектрическом эффекте.

В работе [1] нами было показано, что при разрушении капель воды в электрическом поле происходит их электризация, причем знак и величина зарядов на капельках зависят от направления поля и его напряженности. Тогда же было высказано предположение о механизме электризации этого типа.

При падении капли предельных размеров (диаметром около 0,6 см) происходит ее самопроизвольное разрушение. Фотографирование разрушения капель в вертикальной струе воздуха [2] показало, что капля, имеющая при падении форму эллипсоида вращения с короткой вертикальной осью, прогибается в центре и принимает наперсткообразную форму. Нижние края «наперстка» имеют утолщения, а вверху капли образуется тонкая пленка. По аналогии с пузырями из жидкости можно предположить, что пленка к моменту разрушения имеет толщину в несколько молекулярных слоев; поэтому из нее должны образоваться весьма малые капельки, возможно, порядка тяжелых ионов. При разрушении капель в вертикальном электрическом поле на капельках из утолщенной части «наперстка» образуются заряды одного знака, а на капельках из пленки, имеющих весьма малые размеры, — противоположного знака. Вследствие различия в размерах капелек с зарядами разных знаков и, следовательно, различия в скорости их падения должно произойти разделение разноименных зарядов.

Для того чтобы определить, действительно ли образуются при разрушении капель тяжелые ионы с зарядами, противоположными по знаку заряду капель, была смонтирована установка, схема которой представлена на рис. 1. Из капельницы e , установленной в верхней части стеклянной трубы f , капли падали в герметически закрытый латунный ящик a . Встречая на своем пути струю воздуха, создаваемую вентилятором d , капли разрушались. За разрушением капель можно было следить через стеклянное окошечко c в стенке ящика. Капли разрушались в поле, создаваемом между диском b и крышкой ящика (диаметр диска 40 см,

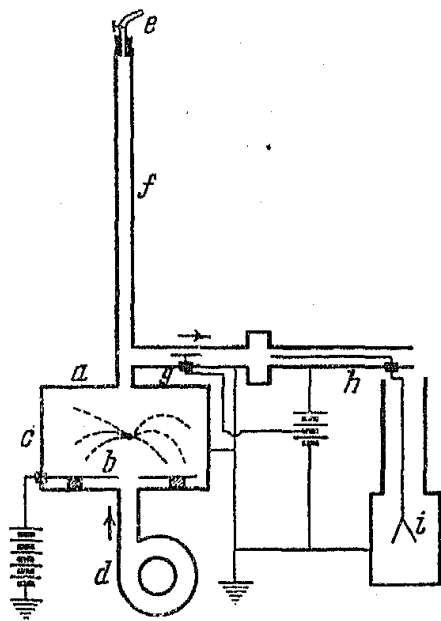


Рис. 1. Установка для исследования ионизации при разрушении капель в электрическом поле

расстояние от него до крышки 26 см). Крупные капельки падали на диск, а водяная пыль уносилась воздушным потоком. При этом воздух проходил через счетчик ионов.

Для определения содержания легких и тяжелых ионов был использован общеизвестный метод Баранова [3] с применением добавочного конденсатора. Добавочный конденсатор g имел внешний цилиндр диаметром 4 см и внутренний стержень длиной 3 см и диаметром 0,3 см. Основной конденсатор h имел внешний цилиндр такого же диаметра, а внутренний стержень длиной 20 см и диаметром 0,6 см. Стержень добавочного конденсатора заряжался до 40 V, внешний цилиндр был заземлен. Внешний же цилиндр основного конденсатора был заряжен до 120 V, и стержень присоединен к электрометру i .

Число легких ионов определялось по формуле

$$n = C \Delta V_n / e, \quad (1)$$

где C — емкость системы: счетчик ионов — соединительные провода — электрометр, ΔV_n — увеличение потенциала системы при протягивании объема воздуха за время t и e — заряд иона. Число тяжелых ионов определялось приближенно, так как счетчик захватывал только часть их, по формуле для концентрации ионов

$$N = C \Delta V_N / 4\pi C' u e V_0 t', \quad (2)$$

где ΔV_N — увеличение потенциала системы за время t' за счет только тяжелых ионов, C' — емкость основного конденсатора и u — подвижность тяжелых ионов.

В табл. 1 приводятся данные наблюдений. Из этой таблицы следует, что в воздухе лаборатории, где велись наблюдения, имелись как легкие, так и тяжелые ионы. При заряджении нижнего диска до потенциала —4,500 V задерживались все легкие ионы и примерно $2/3$ тяжелых ионов. При выпуске 120 капель за 180 сек. появлялись как легкие, так и тяжелые ионы. Следует думать, что некоторая часть ионов, образующихся при разрушении капель, задерживается электрическим полем между диском и крышкой ящика. В особенности, должны задерживаться легкие, более подвижные ионы.

Для того чтобы определить число ионов, которое образуется при разрушении одной капли, воспользуемся формулами (1) и (2). Емкость системы: основной конденсатор — соединительные провода — электрометр, C равна 37,8 см, а емкость самого основного конденсатора $C' = 12,6$ см. Подвижность тяжелых ионов u , как это обычно делается, примем равной 10^{-4} см²/сек. V. Время t' в формуле (2) представляет собой то время, в течение которого тяжелые ионы проходят через основной конденсатор. Если скорость потока в основном конденсаторе w , а длина стержня конденсатора l , то $t' = l/w$. Скорость потока в основном конденсаторе можно приближенно положить равной 300 см/сек., а $l = 20$ см, поэтому $t' = 8 \cdot 10^{-2}$ сек. Так как ΔV_N определяется для всех k капель, разрушающихся за время t , то взамен этого значения следует поставить $\Delta V_N/k$. Для получения числа тяжелых ионов N_1 следует концентрацию N из формулы (2) умножить на объем воздуха, протянутого через конденсатор за время t' ,

$$N_1 = \pi r^2 w t' N = \frac{C \Delta V_N r^2 w}{4 C' V_0 l u k}, \quad (3)$$

где r — радиус конденсатора, равный 2 см.

Таблица 1

Потенциал нижнего диска отрицательный, потенциал основного конденсатора —120 V. Чувствительность электрометра 0,16 V/дел. Время наблюдения 180 сек.

Ионы	Показания электрометра	Число ионов на одну каплю	Заряд ионов на одну каплю в эл. ст. ед.	Примечание
Самозаряж.	—0,8			} Без поля
Тяж.+легк.+самозаряж.	—1,8			
Тяж.+самозаряж.	—1,4			
Тяж.+легк.+самозаряж.	—1,0			} С полем 170 V/см без разрушения капель
Тяж.+самозаряж.	—1,0			
Тяж.+легк.+самозаряж.	—4,2			} С полем при разрушении 120 капель
Тяж.+самозаряж.	—3,9			
Тяж.+легк.	—3,2			
Легкие	—0,3	10^5	$-5 \cdot 10^{-5}$	
Тяжелые	—2,9	$2,1 \cdot 10^9$	—1,0	

Из табл. 1 следует, что число легких ионов, образующихся при разрушении одной капли в электрическом поле 170 V/см, равно 10^5 , а тяжелых равно $2,1 \cdot 10^9$. Следовательно, основную роль играют тяжелые ионы. Заряд тяжелых ионов оказался равным 1,0 эл. ст. ед.

Однако не все легкие и тяжелые ионы образуются благодаря влиянию электрического поля; некоторая часть их образуется при разрушении капель без электрического поля, за счет баллоэлектрического эффекта. Для его определения были поставлены дополнительные опыты, результаты которых приведены в табл. 2. Так как число ионов в воздухе со временем менялось, то на входе в вентилятор была установлена ловушка для тяжелых и легких ионов.

Таблица 2

Время наблюдения 180 сек.

Ионы	Число ионов на одну каплю	Заряд ионов на одну каплю в эл. ст. ед.	Примечание
Легкие	$0,8 \cdot 10^5$	$-4 \cdot 10^{-5}$	Потенциал основного конденсатора —120 V, при разрушении 164 капель
Тяжелые	$2,1 \cdot 10^9$	—0,10	
Легкие	0,0	0,0	Потенциал основного конденсатора +120 V, при разрушении 115 капель
Тяжелые	$1,2 \cdot 10^9$	0,06	

Из табл. 2 следует, что при баллоэлектрическом эффекте как число положительных легких ионов, так и число тяжелых меньше, чем отрицательных, т. е. последних образуется избыток. Это находится в полном согласии с тем, что при баллоэлектрическом эффекте капельки приобретают положительные заряды. Заряд отрицательных ионов, образующийся при разрушении одной капли, равен 0,10 эл. ст. ед., а положительных — равен 0,06 эл. ст. ед. Таким образом суммарный отрицательный заряд ионов равен 0,04 эл. ст. ед.

В работе [4] при разбрызгивании одной капли получился заряд капелек, равный 0,055 эл. ст. ед., а заряд ионов, равный $0,033 - 0,011 = 0,022$ эл. ст. ед. Несовпадение величины зарядов ионов и капелек происходит потому, что в этой работе не были учтены все тяжелые ионы. Величина же зарядов тяжелых ионов при разбрызгивании одной капли,

полученная нами, оказалась в хорошем согласии с величиной, полученной в [4] для зарядов капелек.

Теперь следует из значения заряда ионов, образующегося при разрушении капли в электрическом поле, вычесть значение заряда, образующегося за счет баллоэлектрического эффекта; получаем $1,0 - 0,1 = 0,9$ эл. ст. ед. Полученный заряд должен быть равен заряду капелек при той же напряженности поля. Из нашей работы следует, что при напряженности поля 170 В/см заряд капли равен $0,6$ эл. ст. ед. Таким образом сопоставление заряда тяжелых ионов и заряда капелек, образующихся при разрушении одной капли, показывает хорошее совпадение по порядку величины. Более точного совпадения и нельзя ожидать, так как число ионов определялось приближенным способом.

Для того чтобы определить, не появляются ли положительные легкие и тяжелые ионы при разрушении в электрическом поле, когда нижний диск имеет отрицательный потенциал, опыт, результаты которого приведены в табл. 1, был повторен при положительном потенциале на основном конденсаторе. Было найдено, что при этих условиях не происходит образования положительных ионов, как этого и следовало ожидать.

Приведенные выше опыты были повторены с полем той же напряженности, но имеющим обратное направление. При этом было разрушено 138 капелек. Для легких ионов заряд, образующийся при разрушении одной капли, оказался равным $2,5 \cdot 10^{-5}$ эл. ст. ед., а для тяжелых ионов — равным $0,7$ эл. ст. ед.

Так как напряженность поля в обоих опытах была одинаковой (170 В/см), то можно для получения более точных результатов взять средние значения. Это дает для числа легких ионов значение, равное $0,8 \cdot 10^5$, а для их заряда — $3,8 \cdot 10^{-5}$ эл. ст. ед. Соответственно для тяжелых ионов находим $1,8 \cdot 10^9$ и $0,9$ эл. ст. ед. Вводя поправку на баллоэлектрический эффект, получаем для заряда тяжелых ионов при разбрызгивании одной капли $0,8$ эл. ст. ед.; это значение находится в хорошем согласии с полученным выше зарядом капелек ($0,6$ эл. ст. ед.).

Таблица 3

Потенциал нижнего диска отрицательный, потенциал основного конденсатора — 120 В . Чувствительность электрометра $0,16 \text{ В/дел.}$ Время наблюдения 180 сек.

Напряженность поля в В/см	Число капель	Заряд легких ионов на одну каплю в эл. ст. ед.	Заряд тяжелых ионов на одну каплю в эл. ст. ед.
12	300	$-3,9 \cdot 10^{-5}$	$-0,07$
21	86	$-6,9 \cdot 10^{-5}$	$-0,19$
33	156	$-7,6 \cdot 10^{-5}$	$-0,21$
54	173	$-2,3 \cdot 10^{-5}$	$-0,30$
96	42	$-18,8 \cdot 10^{-5}$	$-0,48$
142	200	$-3,9 \cdot 10^{-5}$	$-0,98$
173	120	$-4,9 \cdot 10^{-5}$	$-0,97$

Из табл. 3 следует, что между напряженностью поля и числом легких ионов, образующихся при разрушении капелек, нельзя обнаружить простой связи. Причина этого заключается в том, что поле между диском и крышкой камеры в значительной степени поглощает легкие ионы. Однако из данных наблюдений при малых напряженностях поля, когда это влияние невелико, можно обнаружить рост заряда ионов с увеличением напряженности поля. Поле между диском и крышкой камеры должно в значительно меньшей степени влиять на результаты измерений заряда тяжелых ионов, образующегося при разрушении капелек. Несмотря на

приближенное определение зарядов тяжелых ионов, обусловленное самим методом наблюдений, результаты оказались вполне удовлетворительными. Из графика, приведенного на рис. 2, следует, что заряд тяжелых ионов, образующийся при разрушении одной капли, пропорционален напряженности поля.

В камере с одним нижним диском можно было производить наблюдения при напряженностях поля до 180 В/см. В этих наблюдениях определялся заряд ионов, образующихся при разрушении одной капли, как средняя величина при разрушении большого числа капель. Так как не все капли разрушались с одинаковой интенсивностью, т. е. на одинаковое число капелек, то для определения зависимости заряда ионов от степени разрушения необходимо увеличить напряженность поля в камере. Для этой цели к крышке камеры был прикреплен на изоляторах еще один диск. Расстояние между дисками было равно 23 см.

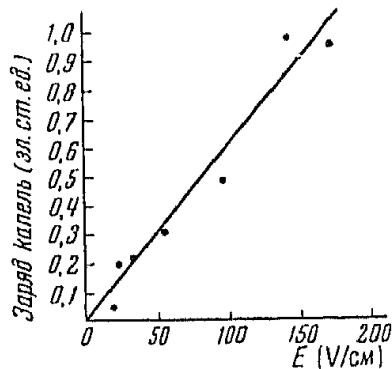


Рис. 2. Зависимость ионизации от электрического поля

Наблюдения показали, что сейчас же вслед за разрушением капли наступает мгновенное отклонение нити электрометра. Это говорит о том, что ионы, которые образуются при разрушении капли, движутся в камере, а затем в счетчике весьма компактной массой. Отсюда следует возможность определять заряд ионов как разность двух отсчетов по электрометру, без учета самозаряжения счетчика и содержания ионов в воздухе. Для вычисления заряда легких и тяжелых ионов, образующихся при разрушении одной капли, мы попрежнему будем пользоваться формулами (1) и (3).

Из табл. 4 видно, что при слабом разрушении капель, т. е. когда капли почти не разрушаются, образуется весьма малый заряд, тогда как при интенсивном разрушении образуется заряд заметной величины.

Для получения зарядов легких и тяжелых ионов в отдельности опыт был повторен таким образом, что измерялся заряд только тяжелых ионов, при прочих равных условиях.

Таблица 4

Нижний диск — „плюс“; верхний диск — „минус“. Напряженность поля 1,350 В/см. Потенциал основного конденсатора +120 В. Чувствительность электрометра 0,045 В/дел.

Степень разрушения капель	Число капель	Заряд одной капли в делениях электрометра
Легкие и тяжелые ионы		
Слабое разрушение	54	0,03
Интенсивное разрушение	49	$0,48 \pm 0,08$
Тяжелые ионы		
Слабое разрушение	18	0,04
Интенсивное разрушение	56	$0,58 \pm 0,06$

Из рассмотрения данных табл. 4 следует, что в пределах точности измерений получены одинаковые значения как для слабых разрушений, так и для интенсивных. Это означает, что в поле между дисками легкие ионы полностью задерживаются. Поэтому для определения величины зарядов, образующихся при слабом и интенсивном разрушениях капель,

возьмем среднее — это дает соответственно 0,03 и 0,53 в делениях электрометра. Отсюда получаем для слабого разрушения заряд, равный 0,35 эл. ст. ед., а для интенсивного, равный 6 эл. ст. ед. Из нашей же работы видно, что заряд капелек при напряженности поля 1,350 V/cm равен 7,4 эл. ст. ед. Если учесть, что такое интенсивное поле должно задерживать не только легкие ионы, но частично и тяжелые, то совпадение результатов наблюдений можно признать вполне удовлетворительным.

Полученные нами результаты представляют определенный интерес при решении вопроса о причинах грозового электричества [5], для теории лечебных аппаратов, основанных на воздействии ионов на организм человека [6], и т. д.

Украинский научно-исследовательский
гидрометеорологический институт

Поступила в редакцию
12 мая 1953 г.

Литература

- [1] В. М. Мучник. Метеорология и гидрология, 4, 19, 1949. [2] P. Lenard. Ann. d. Phys., 65, 629, 1921. — [3] В. И. Баранов. Тр. центр. н.-и. лаборатории ионизации, 1, 147, 1933. — [4] G. Simpson. Phil. Trans., 209, 379, 1909. — [5] В. М. Мучник. Изв. АН СССР, сер. геофиз., 6, 79, 1952. — [6] Е. А. Чернявский. Сб. «Вопросы курортного дела в Узбекистане», XII, Изд-во АН Узб. ССР, Ташкент, 1954, стр. 140.

ОТРИЦАТЕЛЬНАЯ ФОТОПРОВОДИМОСТЬ КУПРИТА

А. Н. Кронгауз и В. К. Ляпидевский

Исследовано влияние электрического поля и интенсивности света на фотопроводимость куприта. Установлено наличие у куприта как отрицательной, так и положительной фотопроводимости. При увеличении интенсивности света при заданном напряжении на кристалле отрицательная фотопроводимость возрастает, достигая максимального значения. Увеличение электрического поля при неизменной интенсивности света приводит к возрастанию величины отрицательной фотопроводимости.

В литературе описан ряд случаев, когда при освещении полупроводников наблюдалась отрицательная фотопроводимость, т. е. при освещении полупроводника его сопротивление возрастало. Такие явления наблюдались в селене, молибдените, куприте и ряде других полупроводников [1-4]. В работах Волькенштейна [5], а также Жузе и Рывкина [6] показана возможность существования этого явления и выяснены условия его возникновения. Однако до сих пор механизм отрицательной фотопроводимости неясен.

В работе Миселюка и Мартенса [7] описан отрицательный фотоэффект в сернистом серебре и приведены некоторые данные о кинетике процесса.

В настоящей работе авторы поставили своей целью исследовать отрицательную фотопроводимость и условия ее возникновения. Исследованию подвергались монокристаллы минерального куприта¹. Кристаллы имели размеры порядка нескольких мм³ и вставлялись в специальный держатель, в котором электроды прижимались к кристаллу. Для изучения влияния приэлектродных областей использовались электроды из различных материалов (медь, платина, алюминий). Некоторые кристаллы приклеивались к зажимам аквадагом. Во всех этих опытах не было обнаружено влияния материалов электродов на наблюдаемый эффект. Освещение кристалла во всех случаях производилось в направлении, перпендикулярном напряженности поля. Для освещения кристалла прямоугольными импульсами света применялся вращаемый мотором секторный диск. Освещение производилось узким пучком света, попадавшим только на центральную часть кристалла. Последовательно с кристаллом включалось сопротивление 4 МΩ, параллельно которому был присоединен катодный осциллограф с усилителем постоянного тока. Напряжение на кристалл подавалось от

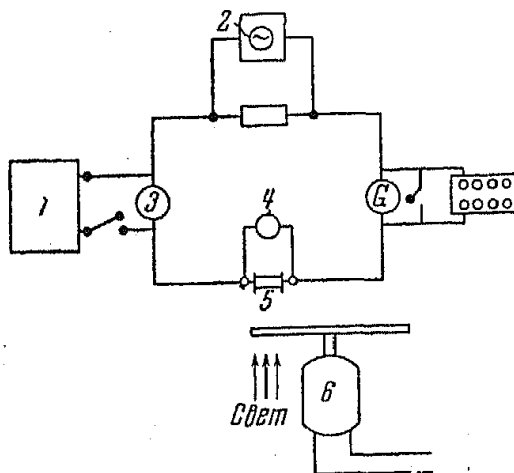


Рис. 1. Схема измерительной установки. 1 — источник напряжения, 2 — осциллограф, 3, 4 — вольтметры, 5 — кристалл, 6 — мотор

¹ Кристаллы для исследования были любезно предоставлены нам Минералогическим музеем Московского геолого-разведочного института.

стабилизированного выпрямителя. При измерениях стационарного значения тока, текущего через кристалл, последовательно с ним включался зеркальный гальванометр с шунтирующим магазином сопротивлений. Схема измерительной части установки показана на рис. 1.

Результаты измерений

При подаче напряжения на кристалл, находящейся в темноте, наблюдается появление тока, текущего через кристалл; величина его через десятые доли секунды после включения принимает определенное значение (которое мы будем называть мгновенным значением темнового тока $J_{\text{темн.мгн.}}$), но постепенно, за время 1—2 мин., уменьшается до значения стационарного темнового тока $J_{\text{темн.стац}}$ (рис. 2).

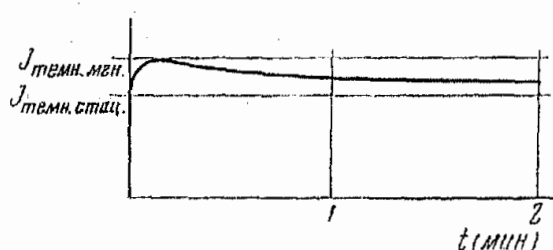


Рис. 2

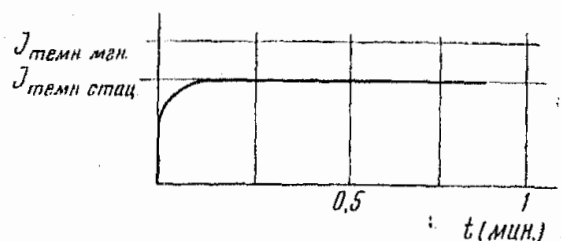


Рис. 3

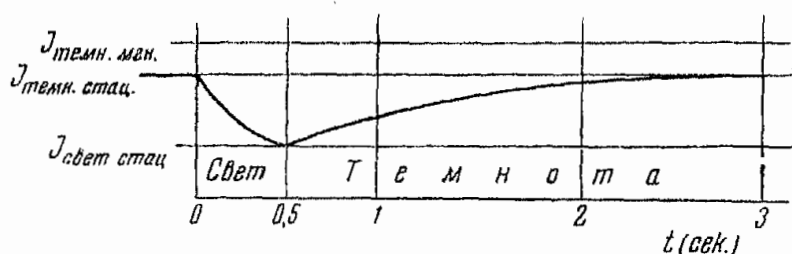


Рис. 4

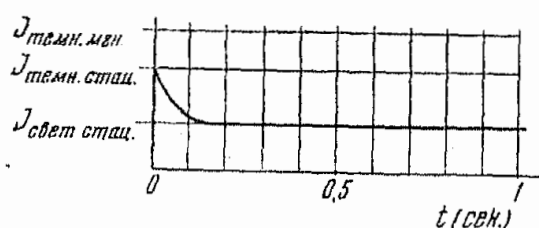


Рис. 5

Это явление может быть объяснено возникновением объемного заряда в кристалле. При выключении поля в темноте и повторном включении ток, возрастая, достигает стационарного значения темнового тока (рис. 3).

При освещении кристалла, находящегося в электрическом поле, ток, текущий через кристалл, уменьшается, что свидетельствует об увеличении сопротивления кристалла. О том, как протекает во времени изменение тока, текущего через кристалл, при включении и выключении света, дает представление рис. 4.

При подаче напряжения на освещенный кристалл ток сначала достигает своего стационарного значения темнового тока, а затем, за время десятых долей секунды, падает до стационарного значения светового тока (рис. 5) (кривые рис. 2—5 получены при помощи осциллографа).

При наблюдении за стационарным значением тока, текущего через кристалл, гальванометр показывает при слабых интенсивностях света уменьшение тока, а при больших интенсивностях света — увеличение тока. Точка перехода из области отрицательной в область положительной проводимости зависит не только от интенсивности света, но и от напряжения, приложенного к кристаллу. Чем выше напряжение на кристалле, тем при большей интенсивности света происходит переход из области отрицательной в область положительной проводимости.

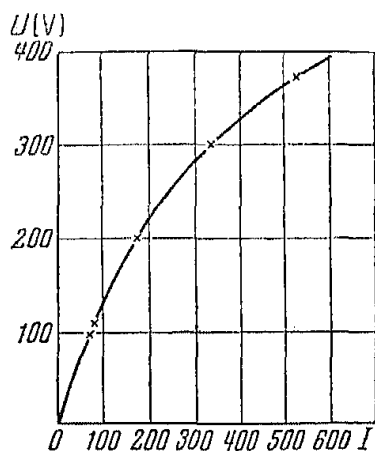


Рис. 6

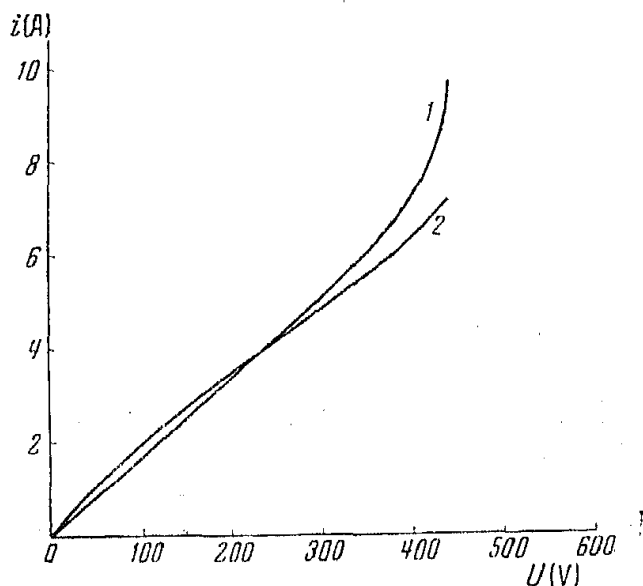
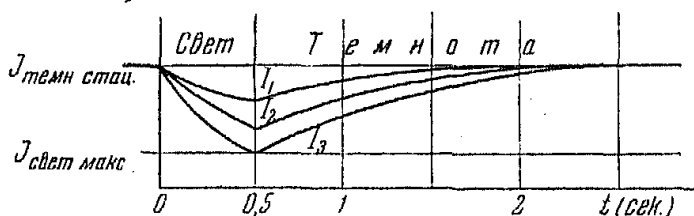


Рис. 7. 1 — неосвещенный кристалл, 2 — освещенный кристалл

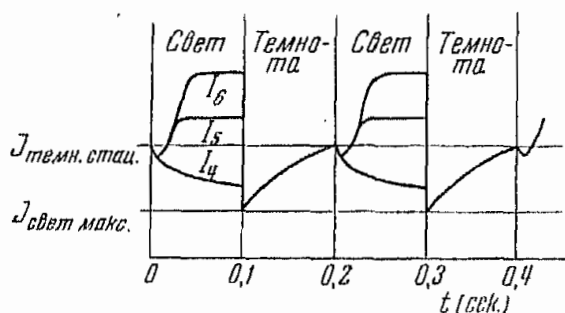
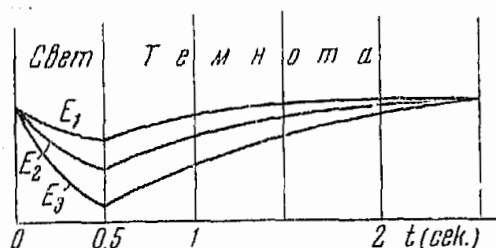
Рис. 8. $I_1 < I_2 < I_3$

Связь между напряжением, приложенным к кристаллу, и освещенностью его, при которой происходит переход от отрицательной фотопроводимости к положительной, показан на рис. 6, где по оси абсцисс отложена интенсивность света I в произвольных единицах, а по оси ординат напряжение на кристалле в вольтах.

Наличие областей отрицательной и положительной фотопроводимости и переход из одной области в другую можно также наблюдать на вольтамперных характеристиках (рис. 7). При данной интенсивности света и при малых напряжениях кристалл обнаруживает положительную фотопроводимость, при больших напряжениях происходит переход в область отрицательной проводимости.

Для объяснения полученных экспериментальных данных можно предположить, что в кристалле всегда имеются как отрицательная, так и положительная фотопроводимости, обусловленные различным механизмом поглощения. Ход всех экспериментальных кривых, соответствующих стационарному состоянию, следует рассматривать как результат наложения двух эффектов. При увеличении интенсивности света при заданном напряжении отрицательная фотопроводимость увеличивается, достигая максимального значения, как показано на

рис. 8. При дальнейшем увеличении интенсивности света отрицательная фотопроводимость не изменяется, но растет положительная (рис. 9). (Осциллограмма рис. 9 получена при помощи секторного диска.) При определенной интенсивности света и определенном напряжении на кристалле суммарный эффект, обусловленный как отрицательной, так и положительной фотопроводимостью, делается равным нулю, что показывает кривая рис. 6.

Рис. 9. $I_4 < I_5 < I_6$ Рис. 10. $E_1 < E_2 < E_3$

При неизменной интенсивности света отрицательная фотопроводимость увеличивается с ростом поля (рис. 10). Так как отрицательная фотопроводимость при увеличении интенсивности света достигает максимального значения и в дальнейшем не изменяется, то нулевому значению суммарного тока при увеличении напряжения соответствует большая интенсивность света.

Знак фотопроводимости зависит также от спектрального состава света, которым освещается кристалл. Сильно поглощаемый свет в кристалле, как, например, синий или ультрафиолетовый, всегда дает положительную фотопроводимость. Слабо поглощаемый свет, как, например, красный, дает в большинстве случаев отрицательную фотопроводимость.

Все описанные опыты воспроизводятся на многочисленных кристаллах куприта одного и того же месторождения при различных формах электродов и различных условиях эксперимента.

Обсуждение результатов

Как было показано Волькенштейном [5], если свет и тепло черпают электроны с разных уровней, то при соблюдении определенных условий может наблюдаться отрицательная фотопроводимость.

Обозначим n_0 — число темновых электронов в зоне проводимости, N_1 — число уровней, поставляющих электроны, N_2 — число уровней, захватывающих электроны, α — коэффициент рекомбинации, Q — число электронов, перебрасываемых светом в зону проводимости за 1 сек. Тогда условие возникновения отрицательной фотопроводимости может быть записано в следующем виде:

$$n_0 > \frac{Q}{\alpha N_1} + \frac{\alpha}{\beta} N_2.$$

При заданном напряжении на кристалле с увеличением освещенности увеличивается число электронов в зоне проводимости, в слабых полях правая часть равенства может оказаться больше левой, и, следовательно, должна наблюдаться положительная фотопроводимость, как это и имеет место на опыте. При увеличении напряжения на кристалле возрастает число темновых электронов в зоне проводимости

вследствие уменьшения работы ионизации U_1 в формуле

$$n_0 = \frac{N_1}{N_2} A e^{-U_1/RT},$$

и, следовательно, переход от отрицательной проводимости к положительной должен наблюдаться при большем напряжении на кристалле при большей интенсивности света, что также согласуется с данными этой работы.

Результаты исследования температурной зависимости наблюдаемых эффектов, а также совместного действия различных излучений, и в том числе рентгеновского излучения, будут опубликованы в отдельных работах.

Государственный научно-исследовательский
институт рентгенологии и радиологии

Поступила в редакцию
17 марта 1953 г.

Литература

- [1] А. Ф. Иоффе. Электронные полупроводники, ГТТИ, 1933. — [2] А. В. Иоффе и А. Ф. Иоффе. ЖЭТФ, 6, 737, 1936; 9, 1428, 1939. — [3] W. W. Coblentz, H. Kahler. Phys. Rev., 14, 534, 1920. — [4] C. Ries. Phys. ZS., 9, 569, 1908. — [5] Ф. Ф. Волькенштейн. Электропроводность полупроводников, ГТТИ, 1947. — [6] В. П. Жузе и С. М. Рывкин, ЖЭТФ, 20, 152, 1950. — [7] Е. Г. Миселюк и Э. Б. Мартенс. Изв. АН СССР, сер. физ., 16, 115, 1952.
-

О СВЯЗИ СПЕКТРОВ ПОГЛОЩЕНИЯ ИЗБЫТОЧНЫХ МЕТАЛЛОВ С ТИПОМ РЕШЕТКИ ОСНОВНОГО ВЕЩЕСТВА

П. Н. Коханенко

Показано, что спектры поглощения частиц избыточных металлов (атомов или ионов) в веществах с низким координационным числом существенно отличаются по своему виду от спектров поглощения этих частиц в веществах с высоким координационным числом.

Нами было проведено исследование спектров поглощения частиц стехиометрически избыточных и примесных металлов в ряде галогидных солей и в окиси цинка. Полученные результаты частично опубликованы в [1, 2]. Там же описан метод работы и приведены некоторые типичные кривые поглощения и фотографии спектров поглощения. В настоящей работе показывается зависимость спектров поглощения частиц избыточных металлов (атомов или ионов) от координационного числа решетки основного вещества.

В табл. 1 приведены полученные нами данные о положении максимумов полос поглощения стехиометрически избыточных металлов в исследованных веществах. В таблицу включены также данные о максимумах поглощения примесных цинка и кадмия, внедренных в иодистую медь и в иодистое серебро. Положение максимумов для всех веществ, кроме хлористого цинка, указано для комнатной температуры. Данные для хлористого цинка относятся к температуре жидкого воздуха.

Таблица 1

Основное вещество	Избыточный металл	Максимумы полос в Å
CuCl (CuCl ₂)	Cu	3790, дублет у 3725
CuI	Cu	4100, 3400
CuI	Zn	Дублет 3600—3580
CuI	Cd	Дублет у 3900
AgI	Ag	4290, 3340
AgI	Zn	Дублет 3520—3490, дублет у 2920
AgI	Cd	Дублет 3845—3815
AgBr	Ag	3400, 2930, 2860, 2750
AgCl	Ag	3550, 3200, 3000, 2800
AuCl ₃ (AuCl)	Au	4360, 3580, 3200
ZnO	Zn	3760, 3670, 3580
ZnJ ₂	Zn	3560, 3410, 2960, 2810
ZnCl ₂	Zn	3500, 3400, 2900, 2780
CdJ ₂	Cd	4050, 3590, 3480, 3300
CdBr ₂	Cd	3800, 3550, 3350, 3140
NiCl ₂	Ni	3300, 2750, 2550, 2425

Приведенные в таблице полосы поглощения наблюдаются почти всегда в спектрах поглощения избыточных металлов в сублимированных пленках исследованных веществ. В некоторых случаях появляются и другие дополнительные полосы, не включенные нами в таблицу. Шалимова [3—5] в окиси цинка и в галогидных солях серебра,

при работе с высокими концентрациями избыточных металлов, наблюдала более сложные спектры, чем мы.

На рис. 1 и 2 схематически показано расположение и ширина полос, данные о которых приведены в табл. 1. Полосы поглощения частиц избыточных металлов для каждого вещества обозначены вертикальными линиями. Узким полосам отвечают узкие линии, широким размытым полосам — линии с косыми штрихами. Против каждой схемы спектра указано основное вещество, координационное число его решетки (для слоистых решеток — координационное число катиона) и избыточный металл, дающий данный спектр.

Спектры поглощения частиц избыточных металлов в исследованных веществах по своему характеру распадаются на две группы. К первой группе относятся спектры поглощения частиц, рассеянных в решетках с координационным числом 4, ко второй группе — спектры частиц, рассеянных в решетках с координационным числом 6. Решетку типа сфалерита или вюрцита с координационным числом 4 из исследованных нами веществ имеют CuCl , CuJ , AgJ и ZnO .

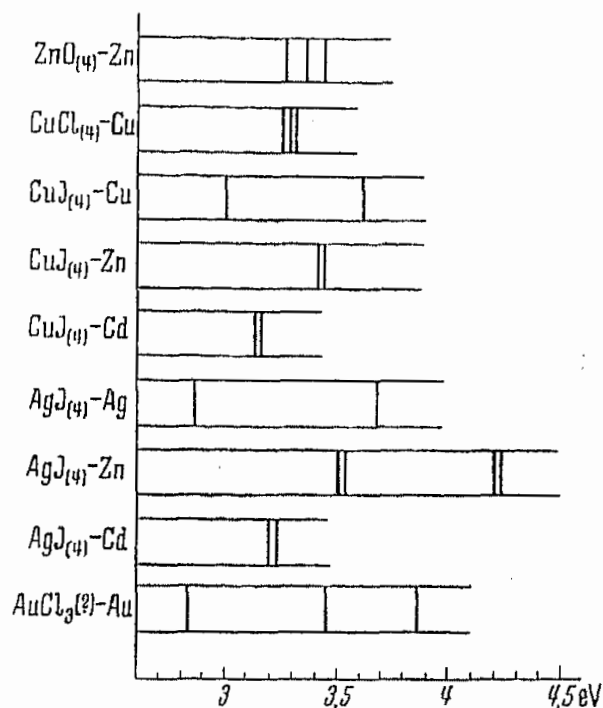


Рис. 1. Спектры поглощения избыточных металлов, распределенных в решетках с координационным числом 4

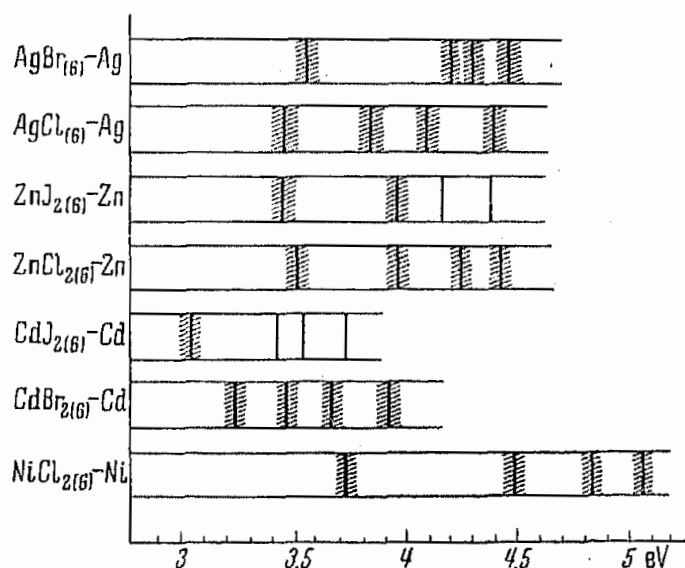


Рис. 2. Спектры поглощения избыточных металлов, распределенных в решетках с координационным числом 6

Все полосы поглощения стехиометрически избыточных металлов в этих веществах очень интенсивны и отличаются необычной резкостью и малой полушириной (20 — 50 Å). Несколько более размыты полосы цинка в окиси цинка. Такие же узкие полосы дают и частицы посторонних металлов примесей — цинка и кадмия при внедрении в иодистую медь и иодистое серебро. Сравнительно узкие полосы поглощения наблюдаются и у частиц стехиометрически избыточного золота в AuCl_3 , о решетке которого мы

не нашли данных. Схемы спектров поглощения избыточных и примесных металлов по этой группе веществ представлены на рис. 1. Необычная узость и резкость полос поглощения частиц избыточных металлов говорят о том, что энергетические уровни частиц, между которыми происходит электронный переход при поглощении света, не испытывают сильных возмущений со стороны окружающей

решетки. По своему виду полосы избыточных металлов сравнимы лишь с полосами поглощения редкоземельных ионов в их кристаллических соединениях.

Нами было найдено, что поглощение света частицами избыточных металлов у этой группы веществ сопровождается его избирательным отражением. Некоторые кривые поглощения и фотографии спектров избирательного отражения приводились ранее [1, 2]. Явление избирательного отражения говорит о весьма малом времени возбужденного состояния поглотивших свет частиц металла.

В спектрах поглощения пленок CuI и CuCl , содержащих избыточную медь, нередко наблюдается появление сильного сплошного поглощения, захватывающего всю коротковолновую часть спектра. Длинноволновая граница такого поглощения очень резкая и всегда совпадает с положением длинноволновой полосы поглощения избыточной меди. На некоторых образцах удалось установить, что появление этого сплошного поглощения связано с весьма сильным расширением полос поглощения избыточной меди на сотни ангстрем и притом лишь в сторону коротких волн.

Нужно оговориться о неопределенности состава исследованных сублимированных пленок хлористой меди и хлорного золота. Как известно, термическое разложение хлористой меди идет с частичным образованием хлорной меди, а разложение хлорного золота — с образованием однохлористого золота. Поэтому сублимированные пленки хлористой меди, полученные даже при непрерывном удалении выделяющегося при возгонке хлора откачкой, должны иметь примесь CuCl_2 . Сублимированные пленки хлорного золота также должны иметь неопределенный состав и состоять из AuCl и AuCl_3 .

Решетку с координационным числом 6 из исследованных нами веществ имеют CdBr_2 , AgBr и AgCl . К этой же группе относятся и CdJ_2 , ZnJ_2 , ZnCl_2 и NiCl_2 , имеющие слоистые решетки с координационным числом катиона 6. Частицы избыточных металлов в этих веществах дают в спектрах поглощения широкие размытые полосы с обычной для спектров поглощения твердых тел полушириной в сотни ангстрем. Избыточный кадмий в CdJ_2 и избыточный цинк в ZnJ_2 дают спектры поглощения промежуточного типа между спектрами избыточных металлов в веществах с координационным числом 4 и в веществах с координационным числом 6. В их спектрах длинноволновые полосы поглощения широкие, а коротковолновые — узкие и резкие, сопровождающиеся полосами избирательного отражения. Схемы спектров поглощения стехиометрически избыточных металлов в веществах с координационным числом 6 представлены на рис. 2. При малых концентрациях избыточных металлов обычно наблюдаются только длинноволновые полосы поглощения, при больших концентрациях в спектрах появляются и коротковолновые полосы избыточных металлов.

Помимо описанного различия спектров поглощения избыточных металлов в веществах с координационным числом 4 и с координационным числом 6 по виду полос поглощения (ширина и резкость полос), нельзя не отметить различия и в общей структуре спектров. Спектры поглощения избыточных металлов в веществах с координационным числом 6 (рис. 2) состоят из одной полосы в длинноволновой части спектра и группы из трех полос в коротковолновой части спектра. Структура спектров поглощения в веществах с координационным числом 4 (рис. 1) иная — спектры состоят из отдельных одиночных или дублетных полос.

Природа самих избыточных металлов проявляется главным образом в относительном положении спектров в целом. Например, спектры поглощения частиц избыточного цинка смещены в сторону коротких волн относительно соответствующих спектров поглощения частиц из-

быточного кадмия примерно на 0,3 eV. Смещение полос поглощения при изменении температуры также связано главным образом с природой самих избыточных металлов. Если полосы поглощения меди и серебра при охлаждении пленок солей до -180°C смещаются в сторону коротких волн на 40—60 Å, то полосы цинка и кадмия смещаются на 100—130 Å. Это различие в величине смещения сохраняется и тогда, когда в спектрах поглощения соли одновременно имеются полосы поглощения различных металлов, например, меди и кадмия в иодистой меди. На величине смещения, конечно, сказывается и природа основного вещества. Так, полосы избыточного золота в хлорном золоте и избыточной меди в хлористой меди при охлаждении смещаются в сторону длинных, а не коротких волн, полосы цинка в окиси цинка при охлаждении пленки до -180°C смещаются всего на 50 Å, а не на 100—130 Å, как в галоидных солях.

Из изложенного материала видно, что спектры поглощения избыточных металлов в веществах, имеющих решетку с координационным числом 4, по ряду признаков сильно отличаются от спектров поглощения избыточных металлов в веществах, имеющих решетку с координационным числом 6 [2]. Это говорит о различном характере взаимодействия частиц избыточных металлов с основным веществом в первом и во втором случае. Шалимова [3], отмечая различную ширину полос поглощения избыточных металлов в веществах с различной решеткой, делает вывод, что избыточные металлы дают узкие полосы поглощения в тех случаях, когда решетка основного вещества обусловлена ковалентными связями, и широкие полосы, когда решетка основного вещества ионная. Нам кажется, что вопрос о природе связей в кристаллических решетках во многих случаях еще не ясен, и поэтому мы ограничиваемся простым указанием на связь спектров поглощения частиц избыточных металлов с координационным числом решетки основного вещества. Мы также считаем, что имеющийся экспериментальный материал пока недостаточен и для каких-либо однозначных выводов об ионном или атомном состоянии рассеянных в твердых веществах частиц избыточных и примесных металлов.

В заключение следует отметить, что при получении стехиометрического избытка металла путем фотохимического разложения солей нам ни разу не удалось обнаружить в спектрах поглощения полосы избыточных металлов. (Поглощение коллоидных частиц нас не интересовало.) Отрицательные результаты были получены с сублимированными пленками Hg_2SO_4 , ZnCl_2 , AgBr и AgCl . При фотохимическом разложении солей достаточно высокая концентрация выделяющихся элементарных частиц металла (атомов или ионов), необходимая для их обнаружения при нашей методике, видимо, не достигается вследствие образования коллоидных частиц.

Сибирский физико-технический институт
Томского государственного университета

Поступила в редакцию
9 апреля 1953 г.

Литература

- [1] П. Н. Коханенко. Изв. АН СССР, сер. физ., 15, 685, 1951. —
[2] П. Н. Коханенко и В. Д. Гольцев. ДАН СССР, 85, 543, 1952. —
[3] К. В. Шалимова. ДАН СССР, 78, 1127, 1951. — [4] К. В. Шалимова
и А. Белкина. ЖЭТФ, 21, 326, 1951. — [5] К. В. Шалимова. Фотолуминесцен-
ция сублимат-фосфоров, Автореферат, ФИАН, Москва, 1952.

ДИСКУССИИ

К ВОПРОСУ ОБ ИНТЕРПРЕТАЦИИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СПЕКТРОВ
СИЛИКАТОВ И СИЛИКАТНЫХ СТЕКОЛ

В. А. Колесова

При изучении спектров таких сложных веществ, как кристаллические силикаты и силикатные стекла, самой трудной задачей является их интерпретация. В настоящее время еще не существует теории, которая делала бы интерпретацию колебательных спектров этих веществ достаточно надежной. Принимаемая рядом авторов [1-5] трактовка колебательных спектров кристаллических силикатов и силикатных стекол, исходящая из колебаний только изолированной тетраэдрической группы SiO_4 , как нам представляется, неудовлетворительна. Так как на основании такой трактовки рядом авторов зачастую делаются дальнейшие, далеко идущие выводы о структуре стекла, нам кажется необходимым подвергнуть здесь вопрос критическому рассмотрению.

Как показал рентгеноструктурный анализ, в кристаллических силикатах, независимо от кристаллографической формы и симметрии кристалла, всегда имеется тетраэдрическое окружение атома кремния четырьмя атомами кислорода. Исходя из этого факта, Матосси в работе [6] высказал предположение, что инфракрасные спектры отражения и поглощения кристаллических силикатов должны определяться колебаниями атомов в тетраэдрической группе SiO_4 , которую он уподобляет тетраэдрической пятиатомной молекуле типа CCl_4 . Такое уподобление основывается на том, что пятиатомная тетраэдрическая молекула имеет спектр собственных колебаний, состоящий из четырех частот, в спектрах же некоторых силикатов среди большого числа частот наблюдаются четыре наиболее интенсивные полосы, положение которых в спектре меняется от вещества к веществу в пределах (по длинам волн) 3—4 μ .

В [6] эти четыре частоты (в области 8—12, 12—13, 17—20 и выше 21 μ) приписываются колебаниям тетраэдра SiO_4 , и при помощи их делается попытка объяснить весь инфракрасный спектр силикатов. Две частоты в области 8—12 и 17—20 μ приписываются трижды вырожденным колебаниям тетраэдрической группы SiO_4 . Частота выше 21 μ приписывается дважды вырожденному колебанию этой группы, частота в области 12—13 μ — полносимметричному колебанию тетраэдра SiO_4 . Дважды вырожденное и простое колебания тетраэдрической пятиатомной молекулы (в случае силикатов, как считает Матосси, выше 21 и 12—13 μ) неактивны в инфракрасном спектре. Наблюдая полосу 12,5 μ в спектрах некоторых силикатов, Матосси делает заключение, что эта полоса проявляется (активизируется) в спектрах силикатов, построенных так, что тетраэдры в этих силикатах объединены в решетке кристалла в кольца (например, в решетке кварца).

Спектры силикатных стекол в [6] интерпретируются также, исходя из колебаний изолированной группы SiO_4 . Обнаружив в спектре

стеклообразного кремнезема полосу $12,5 \mu$, Матосси сделал заключение, что в этом стекле тетраэдры объединены в кольца так же, как и в кристаллическом кварце, и что, следовательно, в стекле имеются области, по структуре близкие к кристаллу. Такие области он назвал кристаллитами и считал, что появление в спектре стеклообразного кремнезема полосы $12,5 \mu$ говорит в пользу кристаллитной гипотезы строения стекла [7].

Как мы уже говорили, предложенный Матосси метод интерпретации инфракрасных спектров силикатов и силикатных стекол неудовлетворителен. Прежде всего, неправильно выделять тетраэдрическую группу SiO_4 из общей решетки кристалла. Изолированное рассмотрение отдельной группы атомов иногда производится в случае решетки молекулярных кристаллов. Здесь такое рассмотрение является оправданным, так как силы, действующие между атомами внутри отдельной молекулы, значительно превосходят межмолекулярные силы. Вследствие этого межмолекулярные силы оказывают лишь сравнительно малое влияние на частоты внутримолекулярных колебаний. Экспериментальные данные показывают, что спектр собственных колебаний молекул в большинстве случаев мало зависит от агрегатного состояния вещества. Частоты внутримолекулярных колебаний молекулярного кристалла лежат в той же области спектра, что и частоты составляющих решетку молекул, если их взять изолированно (в газообразном состоянии). Частоты же межмолекулярных колебаний (колебаний решетки), как показано работами Гросса и Вукса [8], лежат в далекой инфракрасной области ($50\text{--}100 \mu$). Поэтому можно сказать, что спектр кристаллической молекулярной решетки в близкой инфракрасной области (в области внутримолекулярных колебаний) отвечает спектру изолированной молекулы данного химического соединения.

Однако это не имеет места в случае кристаллов с ионными решетками типа каменной соли, алмаза или кварца, где невозможно провести выделение из решетки отдельных радикалов (в отличие от ионных решеток типа NaNO_3 , CuSO_4 и других, где ионы NO_3 или SO_4 играют роль самостоятельных радикалов, в некоторой степени подобных молекулам в молекулярных решетках). Такие кристаллы представляют собою, по существу, одну гигантскую молекулу. Ионы таких кристаллов связаны равными по порядку величины силами, что не позволяет различать внутри- и межмолекулярные взаимодействия, как это было в случае молекулярных решеток. Поэтому для кристаллов типа кварца (и, повидимому, всех кристаллических силикатов, поскольку ни в одном из них не существует дискретных радикалов) спектр собственных колебаний должен определяться колебаниями элементарной кристаллической решетки, в соответствии с теорией Борна [9], а не колебаниями изолированной группы SiO_4 , как это представлял себе Матосси¹.

Интерпретации спектров силикатов при помощи четырех собственных частот тетраэдрической молекулы противоречит также и ряд экспериментальных данных. Прежде всего, инфракрасные спектры кристаллических силикатов очень сложны и содержат большое число частот. Из них только четыре (если даже считать неактивные в инфракрасном спектре частоты) могут быть приписаны колебаниям груп-

¹ Несомненно, однако, что в спектрах различных силикатов, отличающихся друг от друга химическим составом и кристаллографической формой, а также в спектрах различных стекол, могут существовать некоторые общие черты. В частности, такой общей чертой является колебание с частотой около 9μ (1100 см^{-1}), появляющееся в спектрах всех силикатов и силикатных стекол и обнаруживающее, как это показано работами Матосси и Флоринской, ясную зависимость от степени полимеризации тетраэдров SiO_4 в решетке кристалла или сетке стекла.

пы SiO_4 . Все же остальные частоты спектра остаются совсем не интерпретированными (если не считать некоторых частот, произвольно приписываемых Матосси октаэдрической группе AlO_6 или тетраэдрической BeO_4). Далее, Матосси полагает, что полносимметрическому колебанию ионов кислорода относительно центрального иона кремния в тетраэдре SiO_4 соответствует частота $12,5 \mu$ (800 см^{-1}). По его представлениям эта частота, как частота полносимметрического колебания, неактивна в инфракрасном спектре, а появляется в нем (активизируется) только у силикатов, в решетке которых тетраэдры образуют замкнутые кольца. Однако при анализе данных Матосси по спектрам отражения большого числа кристаллических силикатов [6, 10] можно видеть следующее.

Полоса $12\text{--}13 \mu$ действительно обнаруживается в спектрах таких силикатов, как бенитоит ($13,02 \mu$), кордиерит ($13,01 \mu$), берилл ($12,25 \mu$), обладающих структурой, в которой тетраэдры объединены в трех- и шестичленные кольца. Однако полоса в области $12\text{--}13 \mu$ появляется также в спектрах силикатов, в решетке которых нет обособленных колец тетраэдров SiO_4 . Так, эта полоса наблюдается в спектрах кварца ($12,55 \mu$) и альбита ($12,6 \mu$), построенных в виде пространственной сетки из тетраэдров SiO_4 . В спектре апофиллита находим полосу $12,66 \mu$, а в спектре антигорита $12,55 \mu$, хотя в этих силикатах тетраэдры объединены в слои. В спектре серпентина имеется частота $12,92 \mu$, хотя в этом силикате тетраэдры объединены в связанные между собою цепочки (полосы), а в фэйолите и оливине имеются частоты, соответственно, $12,22$ и $12,12 \mu$, хотя оба эти последние кристалла имеют островную структуру (единичные тетраэдры SiO_4)².

Надо заметить, что если в силикатах с пространственной, слоистой или цепочечной структурой можно формально выделить из общей решетки замкнутые кольца тетраэдров, то в случае оливина и фэйолита не может быть речи ни о каких кольцах, поскольку в этих кристаллах углы тетраэдров (атомы кислорода) связаны с металлом (магнием и железом), и каждый тетраэдр представляет собою остров в общей решетке кристалла. Присутствие полосы в области $12\text{--}13 \mu$ в спектрах оливина и фэйолита указывает на то, что эту полосу нельзя считать характеристичной для кольцевого объединения тетраэдров в решетке силикатного кристалла.

Далее, известно, что полносимметричным колебаниям атомов, активным только в комбинационных спектрах, соответствуют поляризованные линии. Нам известны только две работы по исследованию состояния поляризации линий в комбинационных спектрах силикатов. Так, в работе [12], посвященной исследованию колебательного спектра кристаллического кварца, находим, что линия 795 см^{-1} ($12,5 \mu$) является неполяризованной. Далее, в работе [13], в которой изучено состояние поляризации комбинационных спектров силикатных стекол, находим, что частота 790 см^{-1} , наблюдаемая в спектре свинцовосиликатного стекла, также является деполяризованной. Следовательно, частота в области $790\text{--}800 \text{ см}^{-1}$ ($12,5 \mu$) не может быть частотой полносимметричного колебания тетраэдра SiO_4 . Более того, Матосси в своих последних работах [14] из теоретических расчетов, проведенных на основании теории групп, пришел к выводу, что даже при кольцевом или пространственном объединении тетраэдров полносимметричное колебание не может стать активным в инфракрасном спектре.

Все указанные соображения говорят за неправильность предложенного Матосси метода расшифровки колебательных спектров кристаллических силикатов и силикатных стекол. Равным образом

² При изложении употребляется терминология Брега [11].

неправильно представление о характеристичности полосы 12—13 μ для кольцевого строения силикатов и для кристаллитного строения стекол. Однако метод интерпретации Матосси был принят рядом советских авторов [1, 3—5]. Так, Герловин, наблюдая частоту около 12,5 μ в инфракрасных спектрах поглощения двухкомпонентных натриево-силикатных и калиевосиликатных стекол, делает вывод, что в этих стеклах тетраэдры SiO_4 образуют кольцевую структуру, что говорит, по мнению Герловина, в пользу кристаллитной гипотезы строения стекла. К таким же выводам приходят Флоринская и Печенкина, исследовавшие инфракрасные спектры отражения различных стекол (главным образом свинцовосиликатных) [4, 5].

Однако толкование полосы около 12,5 μ в пользу кристаллитной гипотезы строения стекла является ошибочным, поскольку, как показано нами выше, эта частота не может быть частотой полносимметричного колебания, активизированного благодаря кольцевому объединению тетраэдров в сетке стекла, а следовательно, наблюдение ее в спектре стекла не может ничего сказать ни за, ни против наличия в сетке стекла областей упорядоченной структуры — кристаллитов. Необходимо также заметить, что само по себе кольцевое расположенное тетраэдров в сетке силикатного стекла нельзя считать аналогом кристаллита. Как известно, кристаллит понимается как малый пространственный неискаженный участок правильной кристаллической решетки, кольцевое же объединение тетраэдров рассматривается как замкнутая на себя цепочка, и ее нельзя считать равноценной участку пространственной решетки кристалла. Кроме того, кольцевое расположение тетраэдров не исключает возможности искажений расстояний между атомами и углов между связями, что также не позволяет отождествлять кольцевое образование с участком правильной кристаллической решетки.

Отметим в заключение, что проведенная здесь критика толкования полосы 12—13 μ в спектрах силикатных стекол, как признака кристаллитного строения стекла, не означает несогласия автора этой заметки с гипотезой кристаллитной структуры стеклообразных тел. Вполне вероятно, что в единой сетке стекла имеются отдельные высокоупорядоченные области — кристаллиты, однако доказательство их существования спектроскопическими методами нужно основывать на более достоверных экспериментальных данных, чем сомнительное толкование полосы 12—13 μ .

Институт химии силикатов
Академия наук СССР

Поступила в редакцию
20 июня 1953 г.

Литература

- [1] Я. И. Герловин. ДАН СССР, 38, 136, 1943.—[2] W. Brügel. ZS. f. Phys., 128, 255, 1950.—[3] В. А. Флоринская, Р. С. Печенкина. ДАН СССР, 85, 1265, 1952.—[4] В. А. Флоринская, Р. С. Печенкина. ДАН СССР, 89, 37, 1953.—[5] В. А. Флоринская. ДАН СССР, 89, 261, 1953.—[6] C. Schaefer, F. Matossi u. K. Wirtz. ZS. f. Phys., 89, 210, 1934.—[7] F. Matossi u. H. Bluschke. ZS. f. Phys., 108, 295, 1938.—[8] Е. Ф. Гросс и М. Ф. Вукс. Journ. de Phys. et le Rad., 7, 113, 1936.—[9] М. Борн. Динамика кристаллической решетки, ГТТИ, 1938.—[10] F. Matossi u. H. Krüger. ZS. f. Phys., 99, 1, 1936.—[11] В. Л. Брегг. Структура силикатов, ОНТИ, 1934.—[12] B. D. Saksena. Proc. Ind. Acad. Sci., 12 A, 93, 1940.—[13] D. Rank a. A. Douglas. Journ. Opt. Soc. Am., 38, 966, 1948.—[14] F. Matossi u. R. Mayer. Naturwiss., 33, 219, 1946; F. Matossi. Journ. Chem. Phys., 17, 679, 1949.

ПОПРАВКИ

В моей статье «Квантовая электродинамика в конфигурационном представлении. I» (ЖЭТФ, 24, 14, 1953) при разборе возможных состояний системы из двух фотонов допущена неточность. Именно, из верной формулы (67) сделан неправильный вывод о том, что в состояниях, описываемых функцией $\psi_{ij}^{(2)}$, поляризации фотонов неопределенны. На самом деле эти поляризации перпендикулярны, что видно хотя бы из того, что при действии на эту функцию скалярного произведения фотонных операторов согласно (27) получается нуль: $a'_h a'_h \psi_{ij}^{(2)} = 0$. Поэтому в таблице на стр. 23 состояния, приведенные под рубрикой «неопределенная поляризация», следует относить к состояниям с перпендикулярной поляризацией.

Я весьма признателен И. С. Шапиро, в дискуссии с которым была выявлена эта неточность.

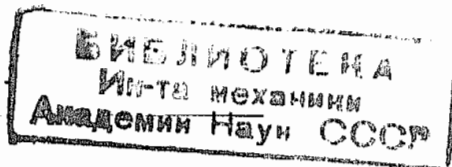
5 октября 1953 г.

Ю. М. Широков

В опубликованной в ЖЭТФ (25, 368, 1953) статье А. И. Алиханова и Г. П. Елисеева «О спектре масс частиц космического излучения на уровне моря», по моему недосмотру допущена описка при оценке количества жестких частиц, прошедших через установку, в описании результатов опытов 1, 2 и 3. Соответственно опытам цифры 460 000, 801 000 и 820 000 должны читаться как 46 000, 80 100 и 82 000.

17 ноября 1953 г.

Г. Елисеев



К СВЕДЕНИЮ АВТОРОВ

Редакция ЖЭТФ просит авторов при направлении статей в печать руководствоваться изложенными ниже правилами. СТАТЬИ, ПРИСЛАННЫЕ БЕЗ СОБЛЮДЕНИЯ ПЕРЕЧИСЛЕННЫХ ПРАВИЛ, К РАССМОТРЕНИЮ РЕДАКЦИЕЙ ПРИНИМАТЬСЯ НЕ БУДУТ.

1. Статьи, являющиеся результатами работ, проведенных в институтах, должны обязательно иметь направление от соответствующего института.

2. Редакция в особенности обращает внимание авторов на то, что статьи должны быть изложены с предельной краткостью, совместимой с ясностью изложения, и окончательно обработаны. Следует избегать повторения данных таблиц или графиков в тексте статьи, а также представления численных результатов в виде таблиц и графиков одновременно.

Статьи объемом свыше 1 печ. листа (т. е. 21—22 стр. текста на пишущей машинке) вообще не допускаются. Как текст, так и графический материал должны представляться обязательно в двух экземплярах.

3. Статья должна иметь краткую аннотацию, указывающую цель и результаты работы. Аннотация и раздел «Выводы» (если таковой имеется в статье) не должны, однако, дублировать друг друга.

4. Статьи должны быть напечатаны на пишущей машинке с одной стороны листа; рукописные вставки не допускаются. Формулы должны быть вписаны четко чернилами. Все страницы рукописи должны быть пронумерованы. Таблицы должны быть напечатаны на отдельных от текста страницах.

СТАТЬИ ДОЛЖНЫ БЫТЬ ОБЯЗАТЕЛЬНО ПОДПИСАНЫ АВТОРОМ, А ПРИ НАЛИЧИИ НЕСКОЛЬКИХ АВТОРОВ ВСЕМИ СООАВТОРАМИ.

5. Во избежание недоразумений и ошибок следует делать ясное различие между заглавными и строчными буквами в формулах. В тех случаях, когда заглавные и строчные буквы одинаковы по начертанию и отличаются только своим размером (*V* и *v*, *U* и *u*, *W* и *w*, *O* и *o*, *K* и *k*, *S* и *s*, *I* и *i*, *C* и *c*, *P* и *p*), — необходимо заглавные буквы подчеркивать снизу двумя черточками (например, S), а строчные помечать двумя черточками сверху (например, s). Необходимо делать различие между буквой *O* (большой), *o* (малой) и 0 (нулем), для чего буквы *O* и *o* подчеркивать двумя черточками: O и o, а нуль оставлять без подчеркивания. Необходимо также различать буквы *I* и *J*, для чего в рукописи букву *I* писать как римскую единицу с точкой вверху. Греческие буквы должны подчеркиваться красным карандашом. Векторы подчеркивать синим или черным карандашом.

6. Подстрочные примечания должны иметь сплошную нумерацию по всей статье. Цитируемая литература должна даваться не в виде подстрочных примечаний, а общим списком в конце статьи, с указанием в тексте статьи ссылки порядковой цифрой над строкой, в прямых скобках (например, [1]). Цитируемая литература должна быть оформлена в следующем порядке: а) для журнальных статей указываются инициалы и фамилии авторов, название журнала, номер тома (подчеркнуть снизу), страница и год; б) для книг надо указывать инициалы и фамилии авторов, полное название книги, год и место издания (для книг иностранного происхождения — указывать данные русского перевода, если таковой имеется).

7. Все рисунки и чертежи должны быть представлены отдельно от рукописи и ни в коем случае не должны приклеиваться к оригиналу. Рисунки желательно снабжать разъясняющими подписями, которые должны быть собраны на отдельном листе. На обороте рисунков должна быть указана фамилия автора, название статьи и номер рисунка. Надписи на рисунках следует по возможности заменять цифрами или буквенными обозначениями в подписи к рисунку или в тексте.

Редакция просит авторов ограничиваться минимальным числом рисунков к статьям.

8. Редакция просит авторов отмечать на полях рукописи места, которые могут быть набраны петитом.

9. Редакция посылает автору одну корректуру. Изменения и дополнения в тексте не допускаются. Корректура с подписью автора должна быть выслана обратно в редакцию в течение суток с момента ее получения.

10. К рукописи должен быть приложен точный адрес, фамилия, имя и отчество автора, а также номер телефона, служебного или домашнего (для авторов, проживающих в Москве).

11. РУКОПИСИ, НЕ ПРИНЯТЫЕ РЕДАКЦИЕЙ, АВТОРУ НЕ ВОЗВРАЩАЮТСЯ.

Адрес редакции, Москва, Подсосенский пер., д. 21, Изд-во АН СССР.

Цена 12 руб.